目　　录

第一章　概率论的基本概念

§1. 公理和定义

事件　概率论的基本概念是试验、事件和事件的概率.

这些概念的形式上的描述通常是以 A. H. Колмогоров 在 1929 年提出的概率论的集合论模型为出发点的.

在概率论中讨论的试验(随机试验)是在遵从一定的条件组 Y 之下进行的. 这条件组并不能唯一地确定试验的结果(也称做结局或现实). 这意味着在精确地保持条件组 Y 之下重复进行试验时,试验结果一般可以不相同.

在描述概率论的概念时,第一个基本假定是在一定的情况下,试验总体的结果可以用某一集合 Ω 来描述, 因而, 对于每一个在某一次试验中可能出现或不出现的事件, 可以对应 Ω 的一个确定的子集, 使得事件的概率论运算相应于对应的 Ω 子集的集合论运算.

这时, 点 $\omega\in\Omega$ 起着原子的作用——任一事件都是点的总和, 而每一点 ω 则不能表为其它事件的总和. 所以我们把 Ω 中的点称为基本事件.

相对于 Ω 来说, 试验完全由那些人们能够断定它在已给的试验中是否出现的事件(Ω 的子集)所描述,我们把这些事件称做(在给定的试验中)可观测的.

今后我们将沿用这样的概率论体系, 而且把事件和它相对应的 Ω 子集等同起来. 这时就得到把集合论概念翻译为概率论概念的对偶术语的词汇, 其中最基本的在下页表中给出.

应当注意,我们把 Ω 的任意子集都称作事件. 但是,无论是从

实用观点或从纯数学观点来看，把Ω的任意子集都看作是使人感兴趣的事件并没有意义. 因此，应该在Ω中选出必须讨论的事件类，这个事件类应是充分广泛的并包含在解决各种不同的实际问题时会出现的所有事件. 另一方面，为了能够有效地利用数学上的技巧，这个事件类也要受到一定的限制.

集合论	概率论
空间Ω	必然事件
ω——Ω的点	基本事件
ϕ——空集	不可能事件
A——Ω的子集，$A\subset\Omega$	事件
集合A包含在B中($A\subset B$)	事件A蕴涵B
C——集合A与B之并(和) ($C=A\cup B$)	C——事件A与B之并(和)
C——集合A与B之交 ($C=A\cap B$)	C——事件A与B同时发生
$\bar{A}$——集合A之余集	$\bar{A}$——A的对立事件(余事件)
C——集合A与B之差 ($C=A\backslash B$)	C——事件A与B之差
A与B没有公共点($A\cap B=\phi$)	事件A与B不相容

诚然，在每一具体情形中都要按照其自身特点来解决选取对应事件类的问题，但是，今后我们恒假定它构成事件的σ代数.

定义 1 事件类$\mathfrak{A}$称作**事件的代数**，如果它包含必然事件Ω和不可能事件ϕ，而且若A和B是该类中任意两个事件，则这两事件之并以及A的对立事件$\bar{A}$也在这事件类中.

Ω和ϕ这两个事件构成**平凡的代数**.

包含事件A的最小代数由以下四个事件组成：Ω,ϕ,A和$\bar{A}$.

定义 2 事件的代数称作σ**代数**，如果任意属于这事件类的事件序列之并也属于这事件类.

当然，在上述定义和性质中可以是对某抽象空间Ω中集合的代数和σ代数来说的.

定义 3 空间Ω和定义在它上面的集合σ代数$\mathfrak{A}$一起称作可

测空间$\{\Omega,\mathfrak{A}\}$，而$\mathfrak{A}$中的Ω子集称作$\mathfrak{A}$可测集($\mathfrak{A}$可测事件). 如果谈及的σ代数是明确的话，就简称作可测集(事件).

我们一般用字母$\mathfrak{S}$表示在给定的情况下被考虑的事件所组成的σ代数. 对于可测空间$\{\Omega,\mathfrak{S}\}$来说，每个给定的随机试验完全由在这试验中被观测的事件类$\mathfrak{F}$所刻划. 诚然，类$\mathfrak{F}$应当包含在Ω中，而且易见类$\mathfrak{F}$关于事件的并、交和取余运算是封闭的，因此，自然认为$\mathfrak{F}$是一个事件的$\mathfrak{S}$代数. 这样一来，随机试验在形式上被某一$\mathfrak{S}$可测事件的σ代数$\mathfrak{F}$所确定，我们把它称作对应于给定试验的$\mathfrak{S}$代数.

概率

定义 4 由基本事件空间Ω、在其上选出的事件σ代数$\mathfrak{S}$和定义在$\mathfrak{S}$上且满足$\mathbf{P}(\Omega)=1$的测度$\mathbf{P}$组成的三元组$\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$称作概率空间，而测度$\mathbf{P}$称作概率.

概率空间是概率论的原始对象，但是，这和在解决许多具体问题时不存在明显的概率空间的情形并不矛盾.

下面引入一些有关概率的简单熟知性质，这些性质易由概率的定义推出(其中S和S_n属于$\mathfrak{S}$, $n=1,2,\cdots$):

(1) $\mathbf{P}(\phi)=0$;

(2) 若 $S_k\cap S_r=\phi, k\neq r$，则 $\mathbf{P}\left(\bigcup_1^{\infty} S_k\right)=\sum_1^{\infty}\mathbf{P}(S_k)$;

(3) 若 $S_1\subset S_2$，则 $\mathbf{P}(S_2\backslash S_1)=\mathbf{P}(S_2)-\mathbf{P}(S_1)$;

(4) $\mathbf{P}(\bar{S})=1-\mathbf{P}(S)$;

(5) 若 $S_n\subset S_{n+1}, n=1,2,\cdots$，则 $\mathbf{P}\left(\bigcup_1^{\infty} S_n\right)=\lim\mathbf{P}(S_n)$;

(6) 若 $S_n\supset S_{n+1}, n=1,2,\cdots$，则 $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\right)=\lim\mathbf{P}(S_n)$.

随机变量 随机变量这个概念对应于测量某一数值的量ξ的随机试验的描述. 假设对于任意两个数$a,b\ (a<b)$，由$\xi\in(a,b)$

构成的事件 $A(a,b)$ 是可观测的．对应于这一随机试验的 σ- 代数是包含所有事件 $A(a,b)$ 的最小 σ 代数 $\mathfrak{F}_\xi$，其中 $-\infty < a < b < \infty$.

以 $A_x(-\infty < x < \infty)$表示事件 $\xi = x$，它是可测的．事实上，$A_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} A\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$. 而且，若 $x_1 \neq x_2$，则事件 A_{x_1} 和 A_{x_2} 是不相容的(这可由测量结果的单值性推出)，又因为测量结果一定是某一实数，故所有 $A_x(-\infty < x < \infty)$ 之并是Ω. 现在，我们定义单值实函数 $f(\omega)(\omega \in \Omega)$ 如下：如果 $\omega \in A_x$，则令 $f(\omega) = x$. 由定义推知，在每一试验中 $\xi = f(\omega)$，而且集合 $\{\omega: a < f(\omega) < b\} = A(a,b)$ 是可测的．我们注意到一个定义在可测空间$\{\Omega, \mathfrak{S}\}$上的实函数 $f(\omega)$ 称作可测的($\mathfrak{S}$ 可测的)，如果对于任意实数 a 和 b 有$\{\omega: a < f(\omega) < b\} \in \mathfrak{S}$. 因此，可以把随机变量 ξ 和概率空间 $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$ 上的某一可测函数等同起来.

定义 5 基本事件 ω 的$\mathfrak{S}$可测函数称作(在给定的概率空间$\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$上的)随机变量.

今后，我们有时要考虑$\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$上可能取$\pm\infty$值的可测函数，或者是只定义在 $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$ 的一个可测子集上的函数，我们把这些函数称作广义随机变量.

关于随机变量的定义，我们要注意如下的情况．人们通常认为，从经验的观点看来，彼此只相差一零概率事件的两个事件是不能区分的．所以，如果两个随机变量以概率 1 相等，我们自然就把它们看作是相同的．因而，随机变量可以理解为一整类的可测函数，其中每一对函数只能在一概率为零的集合上有差异．我们把这些函数称作等价的(或 $\mathbf{P}$ 等价的)．上述观点之所以成立还由于以下事实，即我们所引入的概念和推得的关系中大多数按其实质都是对于等价函数类而言的．但是，始终如一地使这个观点付诸实现会碰到某些技术上的和实质上的困难．因此，把随机变量理解为单个函数并用特别的记号表示它们的等价类似乎更为方便.

定义 6 随机变量 ξ 和 η 称做等价的($\mathbf{P}$ 等价的)并记作$\xi =$

$\eta(\mathrm{mod}\mathbf{P})$，如果$\mathbf{P}\{\xi\neq\eta\}=0$.

等价的随机变量还可以用$\xi=\eta$几乎处处（a.s.）*) 或$\xi=\eta$以概率 1 来表示.

类似的术语和记号也用于更一般的情形. 我们约定，某些函数或别的对象几乎必然（对于差不多所有的ω或对于所有$\omega(\mathrm{mod}\,\mathbf{P})$）具有性质$H$，如果使这性质不成立的$\omega$集之概率为零. 例如，若除某集合$N(\mathbf{P}(N)=0)$之外的每一$\omega$，随机变量序列$\xi_n=f_n(\omega)$收敛于$\xi=f(\omega)$，那末我们就说$\xi_n$几乎处处收敛于$\xi$或

$$\xi=\lim\xi_n(\mathrm{mod}\mathbf{P}).$$

我们引进随机变量的一系列基本性质，这些性质可从任意可测函数的相应性质得到. 我们假定随机变量是给定在固定的概率空间$\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$上的.

1）若$h(t_1,t_2,\cdots,t_n)$是任意的n个实变量$t_1,t_2,\cdots,t_n$的Borel函数，而$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是随机变量，则$h(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$也是随机变量.

2）若$\{\xi_n;n=1,2,\cdots\}$是随机变量序列，则$\sup\xi_n$，$\inf\xi_n$，$\overline{\lim}\,\xi_n$和$\underline{\lim}\,\xi_n$也是随机变量.

因此，通常对于函数所作的很大的一类分析运算把随机变量仍变为随机变量，这时与σ代数$\mathfrak{S}$的具体形式无关. 不难看出，这些运算并没有破坏随机变量之间的等价关系. 更确切地就是说：

3）如果ξ_n和η_n等价$(n=1,2,\cdots)$，而$h(t_1,t_2,\cdots,t_n)$是n个实变量的 Borel 函数，则$h(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$也和$h(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$等价. 进而，下列每一对随机变量是等价的：$\sup\xi_n$和$\sup\eta_n$，$\inf\xi_n$和$\inf\eta_n$，$\overline{\lim}\,\xi_n$和$\overline{\lim}\,\eta_n$，$\underline{\lim}\,\xi_n$和$\underline{\lim}\,\eta_n$.

4）设$\xi_n(n=1,2,\cdots)$是随机变量序列，则事件$S=\{\lim\xi_n$存在$\}$是$\mathfrak{S}$可测的. 不难看出，这事件可表为

$$S=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m_1,m_2>n}\left\{\omega:\left|\xi_{m_1}-\xi_{m_2}\right|<\frac{1}{k}\right\}.$$

---

*) 俄文简写是 п. н.，英文简写是 a.s.——译者注

随机变量的一个重要例子是事件的示性函数．随机变量 $\chi_A=\chi_A(\omega)$ 称作事件A的示性函数，如果 $\omega\in A$ 时它等于1，否则等于0．若 $A\in\mathfrak{S}$，则 $\chi_A(\omega)$ 是 $\mathfrak{S}$ 可测的．

应当指出，对事件作集合论的运算相应于对示性函数作类似的代数运算：

$$\chi_{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k}(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{A_k}(\omega),\text{若 } k\neq r \text{ 时 } A_k\cap A_r=\phi,$$

$$\chi_{A\cap B}(\omega)=\chi_A(\omega)\chi_B(\omega),$$

$$\chi_{A\setminus B}(\omega)=\chi_A(\omega)-\chi_B(\omega),\text{若 } B\subset A,$$

$$\chi_{\overline{\lim}A_n}(\omega)=\overline{\lim}\chi_{A_n}(\omega),\chi_{\underline{\lim}A_n}(\omega)=\underline{\lim}\chi_{A_n}(\omega).$$

随机变量 ξ 称作离散的，如果它仅取有限个或可数多个不同的值．这样的变量可以写成 $\xi=\sum\limits_k C_k\chi_{A_k}(\omega)$，其中 A_k 是两两不相交的 $\mathfrak{S}$ 可测集，而且 $\bigcup\limits_k A_k=\Omega$．对于每一 ω，等式的右边只有一个被加量不等于零，当 $\omega\in A_k$ 时 $\xi=C_k$．对于任意随机变量 ξ，我们恒能构造一串离散随机变量 ξ_n，它们只取有限多个可能值且对每一 ω 都收敛于 ξ．为证此只须令

$$\xi_n=\sum_{j=-n}^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(j+\frac{k-1}{n}\right)\chi_{A_{jk}},$$

其中

$$A_{jk}=\left\{\omega:\quad j+\frac{k-1}{n}\leqslant\xi<j+\frac{k}{n}\right\}.$$

这时，若 $|\xi|<n$，则有 $|\xi-\xi_n|<\frac{1}{n}$.

容易验证，若 ξ 非负，则可以构造一单调递增的（取可数多个值的）离散随机变量序列，使得这序列一致收敛于 ξ．事实上，令

$$\xi_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{2^n}\chi_{A_{kn}},\text{其中}A_{kn}=\left\{\omega:\frac{k}{2^n}\leqslant\xi<\frac{k+1}{2^n}\right\},$$

则对所有 ω 均有 $|\xi-\xi_n|<2^{-n}$.

随机元　取值于任意可测空间 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 的随机元这一概念是

随机变量概念的推广．设 $\{\Omega,\mathfrak{S}\}$ 和 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 是两个可测空间，我们称映象 $g:\omega\to x(x\in\mathscr{X})$ 为从 $\{\Omega,\mathfrak{S}\}$ 到 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 的**可测映象**，如果对于任意 $B\in\mathfrak{B}$ 有 $g^{-1}(B)=\{\omega:g(\omega)\in B\}\in\mathfrak{S}$．

定义 7 从 $\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$ 到 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 的可测映象称作取值于可测空间 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 的**随机元** ξ．

如果 $\mathscr{X}$ 是距离空间，则除特别声明之外，$\mathfrak{B}$ 恒理解为 Borel 集的 σ 代数．如果 $\mathscr{X}$ 是向量空间，则 ξ 称作**随机向量**．

设给定了随机元序列 $\{\xi_k;k=1,2,\cdots,n\}$，它们是给定在一固定的概率空间 $\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$ 上而分别取值于空间 $\{\mathscr{X}_k,\mathfrak{B}_k\}$ 的．这序列可以看作是一个随机元 ζ，并称作随机元 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 的直积，它取值于可测空间 $\{\mathscr{Y},\mathfrak{B}\}$，这里 $\mathscr{Y}=\prod\limits_{k=1}^{n}\mathscr{X}_k$ 是 $\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2,\cdots,\mathscr{X}_n$ 的乘积空间，而 $\mathfrak{B}=\prod\limits_{k=1}^{n}\mathfrak{B}_k$ 是 σ 代数 $\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2,\cdots,\mathfrak{B}_n$ 的乘积．

上述注记可以应用到任意取值于 $\{\mathscr{X}_\alpha,\mathfrak{B}_\alpha\}$ 的随机元的集合 $\xi_\alpha,\alpha\in A$，这里 A 是某一附标集合．这时乘积 $\mathscr{Y}=\prod\limits_{\alpha\in A}\mathscr{X}_\alpha$ 应理解为所有映象 $y=y(\alpha):\alpha\to x_\alpha;x_\alpha\in\mathscr{X}_\alpha,\alpha\in A$ 的空间，亦即定义在 A 上而取值于 $\mathscr{X}_\alpha$（对每一 $\alpha\in A$）的所有函数的空间．

我们把所有满足关系式

$$y(\alpha_k)\in B_{\alpha_k},k=1,\cdots,n,B_{\alpha_k}\in\mathfrak{B}_{\alpha_k}$$

的 $y\in\mathscr{Y}$ 的集合 C 称作 $\mathscr{Y}$ 的**柱集**，这里 n 是任意整数，α_k 是 A 的任意元素．更确切地说，$C=C_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(B_{\alpha_1}\times\cdots\times B_{\alpha_n})$ 是以在坐标 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 上的 $B_{\alpha_1}\times B_{\alpha_2}\times\cdots\times B_{\alpha_n}$ 为底的柱集．我们用 $\mathfrak{B}$ 表示包含所有柱集的最小 σ 代数，并称之为 σ 代数 $\mathfrak{B}_\alpha$ 的乘积，$\mathfrak{B}=\prod\limits_{\alpha\in A}\mathfrak{B}_\alpha$．容易看出，由关系式 $g(\omega)=g(\omega,\alpha)=f_\alpha(\omega),f_\alpha(\omega)=\xi_\alpha$ 定义的映象 $g:\omega\to y(\alpha)$ 是从 $\{\Omega,\mathfrak{S}\}$ 到 $\{\mathscr{Y},\mathfrak{B}\}$ 的可测映象．如果所有 $\mathscr{X}_\alpha$ 都相同，即 $\mathscr{X}_\alpha=\mathscr{X}$，则 $\mathscr{Y}=\mathscr{X}^A$ 是定义在 A 上而取值于 $\mathscr{X}$ 中的所有函数组成的空间，映象 $g(\omega)$ 使每一基本事件 ω 对应 $\mathscr{X}^A$ 中的某一函数．换句话说，$g(\omega)$ 是随

机函数. 于是,可以把随机变量族$\{\xi_\alpha, \alpha \in A\}$看作是随机函数.

设 $\xi = f(\omega)$ 是取值于$\{\mathscr{Y}, \mathfrak{B}\}$的随机元.

定义 8 由所有形如 $\{f^{-1}(B); B \in \mathfrak{B}\}$ 的集合组成的σ代数 σ_ξ 或 $\sigma\{\xi\}$称作由随机元ξ产生的σ代数.

显然,集合类$\{f^{-1}(B); B \in \mathfrak{B}\}$是$\sigma$代数.

上述定义的一种等价的陈述是: σ代数 σ_ξ 是Ω上使得随机元ξ为可测的最小σ代数.

从直观上容易看出,某一随机变量η关于 σ_ξ 的可测性意味着η是ξ的函数.

引理 1 设 $\xi = f(\omega)$ 是$\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$上取值于$\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$的随机元,$\eta$是$\sigma_\xi$可测的随机变量. 则存在$\mathfrak{B}$可测的实函数 $g(x)$,使得 $\eta = g(\xi)$.

证. 假设η是离散随机变量,它取值 $a_n, n = 1, 2, \cdots$. 又设 $A_n = \{\omega;\ \eta = a_n\}$, 这时存在 $B_n \in \mathfrak{B}$, 使得 $f^{-1}(B_n) = A_n$. 令 $B'_n = B_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k$. 集合$B'_n \in \mathfrak{B}$是互不相交的,$f^{-1}(B'_n) = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k = A_n$ 和 $f^{-1}\left(\bigcup_1^\infty B'_n\right) = \bigcup_1^\infty A_n = \Omega$,即 $f(\Omega) \subset \bigcup_1^\infty B'_n$. 令 $g(x) = a_n$,若 $x \in B'_n$, 则有 $\eta = g(\xi)$.

现在考虑一般情形. 存在一串离散的 σ_ξ 可测随机变量序列 η_n,对每一ω它都收敛于 η. 因此有 $\eta_n = g_n(\xi)$,其中 $g_n(x)$是$\mathfrak{B}$可测的. 使得$g_n(x)$在其上收敛于某一极限的点集S是$\mathfrak{B}$-可测的,它包含 $f(\Omega)$, 并且对 $x \in f(\Omega)$ 有 $\lim g_n(x) = \lim \eta_n = \eta$. 令 $g(x) = \lim g_n(x)$当 $x \in S$ 和 $g(x) = 0$ 当 $x \bar{\in} S$,我们就得到$\eta = g(\xi)$.

数学期望 随机变量的数学期望是它的最重要数字特征. 它对应的直观概念是大量相同随机试验的观测结果的算术平均值.

按照定义, 随机变量 $\xi = f(\omega)$ 的数学期望等于 $f(\omega)$ 对测度$\mathbf{P}$的积分,我们约定写为

$$\mathbf{E}\xi = \int_\Omega f(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = \int_\Omega \xi d\mathbf{P}.$$

经常将积分区域Ω略去不写. 数学期望具有抽象积分理论中的一些熟知性质.

依概率收敛 在概率论中，随机变量序列的各种收敛性定义起着重要的作用. 以概率1(几乎处处)收敛的定义在前面已经给出.

定义 9 若存在随机变量ξ,使得对任意$\varepsilon > 0$有

$\mathbf{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \to 0$,当$n \to \infty$,则说序列$\{\xi_n; n = 1, 2, \cdots\}$依概率收敛于随机变量$\xi$并记作

$$\xi = \mathbf{P}\text{-}\lim \xi_n.$$

依概率收敛对应于测度论中的依测度收敛. 从测度论的一般结果可以得到下列推论:

a) 若序列$\{\xi_n; n = 1, 2, \cdots\}$几乎处处收敛，则它依概率收敛. 逆命题一般说来是不成立的. 但是，从依概率收敛的随机变量序列中可以选出几乎处处收敛的子序列.

b) 随机变量序列依概率收敛的充分必要条件是: 对于任意$\varepsilon > 0$和$\delta > 0$,可以找到$n_0 = n_0(\varepsilon, \delta)$,使得当$n$和$n' > n_0$时,

$$\mathbf{P}\{|\xi_{n'} - \xi_n| > \varepsilon\} < \delta.$$

这条件称作序列$\{\xi_n, n = 1, 2, \cdots\}$依概率的基本性条件.

c) 若$\xi = \mathbf{P}\text{-}\lim \xi_m$和$\eta = \mathbf{P}\text{-}\lim \xi_n$, 则$\xi = \eta (\operatorname{mod} \mathbf{P})$.

d) 设$\eta_k = \mathbf{P}\text{-}\lim \xi_{kn} (k = 1, 2, \cdots, m)$, $\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_m)$是$m$维 Euclid 空间$\mathscr{R}^m$上的函数,除去 Borel 集$D (D \subset \mathscr{R}^m)$的点外,这函数是处处连续的,这里

$$\mathbf{P}\{(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m) \in D\} = 0.$$

于是,序列$\xi_n = \varphi(\xi_{1n}, \xi_{2n}, \cdots, \xi_{mn})$依概率收敛于$\eta = \varphi(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)$. 特别地,若序列$\xi_{kn}$依概率收敛,则序列$\xi_{1n} + \xi_{2n}, \xi_{1n}\xi_{2n}$和$\xi_{1n}/\xi_{2n}$(后者要假设$\mathbf{P}\{\mathbf{P}\text{-}\lim \xi_{2n} = 0\} = 0$)也如此,而且

$$\mathbf{P}\text{-}\lim (\xi_{1n} + \xi_{2n}) = \mathbf{P}\text{-}\lim \xi_{1n} + \mathbf{P}\text{-}\lim \xi_{2n},$$

$$\mathbf{P}\text{-}\lim (\xi_{1n} \cdot \xi_{2n}) = \mathbf{P}\text{-}\lim \xi_{1n} \cdot \mathbf{P}\text{-}\lim \xi_{2n},$$

$$\mathbf{P}\text{-}\lim \frac{\xi_{1n}}{\xi_{2n}} = \frac{\mathbf{P}\text{-}\lim \xi_{1n}}{\mathbf{P}\text{-}\lim \xi_{2n}}.$$

下面给出的以概率 1 收敛的充分条件在各种具体问题中是有用的.

引理 2 若存在序列 $\varepsilon_n > 0$,使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|\xi_{n+1}-\xi_n| > \varepsilon_n\} < \infty, \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n < \infty,$$ 则 ξ_n 以概率 1 收敛于某一随机变量 ξ. 如果对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|\xi-\xi_n| > \varepsilon\} < \infty,$$

则 ξ_n 以概率 1 收敛于 ξ.

证. 以 A_n 表示事件 $|\xi_{n+1}-\xi_n| > \varepsilon_n$,这时有

$$\mathbf{P}(\overline{\lim} A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) \leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{m}^{\infty}\mathbf{P}(A_n) = 0.$$

因此,级数 $\xi_1 + \sum_{1}^{\infty}(\xi_{n+1}-\xi_n)$的项从某一号码 $m = m(\omega)$ 开始以概率 1 被收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ 的项控制,由此即得第一个论断. 其次,令 $B_{Nn} = \left\{|\xi-\xi_n| > \frac{1}{N}\right\}$,则

$$\mathbf{P}\{\overline{\lim|\xi-\xi_n| = 0}\} = \mathbf{P}\left\{\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty} B_{Nn}\right\}$$

$$\leqslant \lim_{N\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\mathbf{P}(B_{Nn}) = 0^{*)},$$

由此可得第二个论断.

空间 $\mathscr{L}_p$ $\mathscr{L}_p = \mathscr{L}_p(\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P})$ $(p \geqslant 1)$ 表示 $\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$ 上所有使得 $\mathbf{E}|\xi|^p < \infty$的随机变量 ξ 组成的线性赋范空间,$\mathscr{L}_p$ 中的范数由

$$\|\xi\| = \{\mathbf{E}|\xi|^p\}^{1/p}$$

定义. 在 $\mathscr{L}_p$ 中序列 ξ_n 收敛于极限 ξ($\mathscr{L}_p$ 收敛)表示

$$\mathbf{E}|\xi-\xi_n|^p \to 0, \text{当 } n\to\infty.$$

从 $\mathscr{L}_p$ 收敛可推出依概率收敛,这由 Чебышев 不等式

---

*) 此式左边原书为 $\mathbf{P}\{\lim|\xi-\xi_n|>0\}$.——译者注

$$\mathbf{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathbf{E}|\xi - \xi_n|^p}{\varepsilon^p}$$

直接推得.

空间 $\mathscr{L}_p$ 是完备的. 在空间 $\mathscr{L}_p$ 中最重要的是空间 $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}_2$, 我们将较详细地讨论 $\mathscr{L}_2$. 应当指出, 本节上面的定义和定理可以不加任何变化而搬用于复值随机变量.

如果在复值随机变量的空间 $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_2(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P})$中把一对随机变量 ζ, η 的内积定义为$\mathbf{E}\ \zeta\bar{\eta}$, 则 $\mathscr{L}_2$ 成为一个 Hilbert 空间.

我们说两个随机变量 ζ 和 η 是**正交的**, 如果 $\mathbf{E}\zeta\bar{\eta} = 0$. 当 ζ 和 η 是实值且 $\mathbf{E}\zeta = \mathbf{E}\ \eta = 0$ 时, 正交性等价于不相关性. 在 $\mathscr{L}_2$ 中, 序列 $\{\zeta_n; n = 1, 2, \cdots\}$收敛于随机变量 ζ, 表示

$$\|\zeta - \zeta_n\|^2 = \mathbf{E}|\zeta - \zeta_n|^2 \to 0, \text{当} n \to 0.$$

这种类型收敛性称作均方收敛并记为 $\zeta = \text{l.i.m.}\zeta_n$.

注意, 内积是其变元的连续函数. 在许多情形中, 通过随机变量族的协方差来表示 $\mathscr{L}_2$ 中的收敛条件是方便的.

定义 10 随机变量集合$\{\zeta_t; t \in T\}$的**协方差** $B(t_1, t_2)$ 是函数

$$B(t_1, t_2) = \mathbf{E}\zeta_{t_1}\bar{\zeta}_{t_2},$$

其中 $\zeta_t \in \mathscr{L}_2, t_i \in T$, 而 T 表示任意集合.

设在 T 上给定了一个可取任意小值的非负函数 $\phi(t)$.

随机变量 $\eta(\eta \in \mathscr{L}_2)$ 称作 $\mathscr{L}_2$ 中随机变量族 $\{\zeta_t; t \in T\}$ 在 $\phi(t) \to 0$ 时的极限(均方极限), 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 可以找到 $\delta > 0$, 使得对于满足 $0 < \phi(t) < \delta$ 的所有 t

$$\mathbf{E}|\eta - \zeta_t|^2 \leqslant \varepsilon.$$

引理 3 某随机变量集合$\{\zeta_t; t \in T\}$, 当 $\phi(t) \to 0$ 时, 存在极限的充分必要条件是: 当 $\phi(t) + \phi(t') \to 0$ 时, 协方差 $B(t, t') = \mathbf{E}\zeta_t\bar{\zeta}_{t'}$ 存在极限. 如果满足这个条件和$\eta = \underset{\phi(t)\to 0}{\text{l.i.m}}\,\zeta_t$, 则有

$$\mathbf{E}|\eta|^2 = \lim_{\phi(t)\to 0} B(t, t).$$

证. 必要性. 从内积的连续性得出.

充分性. 假设当 $\phi(t) + \phi(t') \to 0$ 时, 存在极限 $\lim B(t_1,$

$t_2) = B_0$. 注意到 B_0 是非负的($B_0 = \lim B(t,t)$当 $\phi(t) \to 0$),因此当 $\phi(t_1) + \phi(t_2) \to 0$ 时

$$\mathbf{E}|\zeta_{t_1} - \zeta_{t_2}|^2 = B(t_1,t_1) - 2\mathrm{Re}B(t_1,t_2) + B(t_2,t_2) \to 0.$$

由 $\mathscr{L}_2$ 的完备性得知，当 $\phi(t) \to 0$ 时，存在 $\mathrm{l.i.m.}\zeta_t = \eta$. 此外，

$$|\|\eta\|^2 - \|\zeta_t\|^2| \leqslant \|\eta - \zeta_t\|\|\eta\| + \|\eta - \zeta_t\|\|\zeta_t\| \to 0, \text{当 } \phi(t)$$

$\to 0$,即$\|\eta\|^2 = \mathbf{E}|\eta|^2 = \lim B(t,t)$,当 $\phi(t) \to 0$. 引理证毕.

类似地可定义取值于m维复空间 $\mathscr{Z}^m$ 的随机向量的 Hilbert 空间 $\mathscr{L}_2^m = \mathscr{L}_2^m(\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P})$，它由取值于 $\mathscr{Z}^m$ 且使得 $\mathbf{E}|\zeta^2| < \infty$ 的那些随机向量 ζ 组成. 这时两个随机向量 ζ 和 η 的内积定义为 $\mathbf{E}(\zeta, \eta)$，而 (x,y) 表示 $\mathscr{Z}^m$ 中的内积，$|x|^2 = (x,x)$. 如果把 $B(t,t')$ 理解为 $\mathbf{E}(\zeta_t,\zeta_{t'})$ 的话，引理 3 对于空间 $\mathscr{L}_2^m$ 也成立.

随机向量的分布 设 ξ 是取值于可测空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 的随机元,ξ 的分布是由 ξ 诱导的$\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$上的测度 μ,即

$$\mu(B) = \mathbf{P}\{\xi \in B\}, B \in \mathfrak{B}.$$

随机元 ξ 的任意统计特征可以用它的分布来确定. 事实上，对于任意使得下式的一端有意义的 $\mathfrak{B}$ 可测函数 $f(x)$ 有

$$\mathbf{E}f(\xi) = \int_{\mathscr{X}} f(x)\mu(dx). \tag{1}$$

公式 (1) 是抽象积分的变量代换法则.

距离空间中的分布将在第五章研究. 本节只讨论 $\mathscr{R}^m$ 中的分布，这时 $\mathfrak{B}^m$ 应理解为 $\mathscr{R}^m$ 中 Borel 集的σ代数. $\mathscr{R}^m$ 中的分布可由分布函数确定.

我们约定记 $a < b(a \leqslant b), a = (a^1,a^2,\cdots,a^m) \in \mathscr{R}^m, b = (b^1,b^2,\cdots,b^m) \in \mathscr{R}^m$,如果 $a^i < b^i(a^i \leqslant b^i)(i = 1,\cdots,m)$. 用 I_a 表示集合 $\{x: x < a\}$. 我们把函数

$$F(x) = \mu(I_x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}$$

称作随机向量 ξ 的分布函数(或称作测度 μ 的分布函数).

集合 $I[a,b) = \{x: a \leqslant x < b\}$称作 $\mathscr{R}^m$ 中的区间. 现在，我们用分布函数表示向量 ξ 落在区间中的概率. 对于任意函数 $G(x), x \in \mathscr{R}^m$，我们引入记号

$$\Delta^{(k)}_{[a,b)}G(x) = G(x^1,\cdots,x^{k-1},b,x^{k+1},\cdots,x^m) - G(x^1,\cdots,x^{k-1},a,x^{k+1},\cdots,x^m).$$

$\Delta^{(k)}_{[a,b)}F(x)$ 是事件

$\{\xi^1 < x^1,\cdots,\xi^{k-1} < x^{k-1}, a^k \leqslant \xi^k < b^k, \xi^{k+1} < x^{k+1},\cdots, \xi^m < x^m\}$的概率．容易验证

$$\mu(I[a,b)) = \Delta^{(1)}_{[a^1,b^1)}\Delta^{(2)}_{[a^2,b^2)}\cdots\Delta^{(m)}_{[a^m,b^m)}F(x). \tag{2}$$

除了区间 $I[a,b)$ 之外，我们还要讨论闭区间 $I\{a,b] = \{x: a^j \leqslant x^j \leqslant b^j, j = 1,2,\cdots,m\}$ 和开区间 $I(a,b) = \{x: a^j < x^j < b^j, j = 1,2,\cdots, m\}$．我们指出分布函数的一些性质：

1) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$;

2) 若 $x \leqslant y$，则 $F(x) \leqslant F(y)$;

3) $\mu[a,b) \geqslant 0$，这里 $\mu[a,b) = \mu(I[a,b))$ 由(2)式确定；

4) $F(x-0) = F(x)$;

5) 只要点 x 的坐标中有一个趋于$-\infty$，则 $F(x) \to 0$;

6) $F(+\infty,+\infty,\cdots,+\infty) = 1$.

引理 4 对于 $\mathscr{R}^m$ 中任意满足条件 1)—6)的函数 $F(x)$，存在 $\mathfrak{B}^m$ 上唯一的概率测度，它的分布函数就是 $F(x)$.

我们讨论由 $\mathscr{R}^m$ 中所有区间 $I[a,b)$ 组成的集合类 $\mathfrak{M}$，它是一个半环．在$\mathfrak{M}$上定义集函数 $F(I[a,b))$，它的值等于(2)式的右端．函数 $F(I[a,b))$是$\mathfrak{M}$上的可加函数.

为使函数 F 能延拓为 $\mathfrak{B}^m$上的测度，必须且只须它具有半可加性，即对任意使得 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I[a_k,b_k) \supset I[a_0, b_0)$ 的区间族 $I[a_k, b_k)$ $(k = 1,2,\cdots)$有

$$F(I[a_0,b_0)) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} F(I[a_k,b_k)). \tag{3}$$

这时在 $\mathfrak{B}^m$ 上的延拓是唯一的．下面验证在我们所讨论的情形下条件(3)成立.

因为 $F(x)$是左连续的，故对任意 $\eta > 0$，可以找到 $\varepsilon^k > 0$，使得 $0 \leqslant F(I[a_k - \bar{\varepsilon}_k, b_k)) - F(I[a_k,b_k)) < \eta/2^k$，这里 $\bar{\varepsilon}_k =$

$(\varepsilon^k,\cdots,\varepsilon^k)$ $(k=1,2,\cdots)$. 开区间 $(a_k-\bar{\varepsilon}_k,b_k)$ 覆盖闭区间 $[a_0,b_0-\bar{\varepsilon}]$, $\bar{\varepsilon}>0$. 根据 Heine-Borel 定理可从中选出有限子覆盖,譬如说$\{(a_k-\bar{\varepsilon}_k,b_k);k=1,2,\cdots,n\}$. 于是区间序列 $\{(a_k-\bar{\varepsilon}_k,b_k),k=1,2,\cdots,n\}$覆盖区间 $[a_0,b_0-\bar{\varepsilon})$. 互不相交的集合

$$[a_0,b_0-\bar{\varepsilon})\cap\{[a_k-\bar{\varepsilon}_k,b_k)\setminus\bigcup_{i=1}^{k-1}[a_i-\bar{\varepsilon}_i,b_i)\},k=1,\cdots,n$$

是互不相交的半(开闭)区间 $\Delta_j^{(k)}$ $(j=1,2,\cdots,m_k)$之和. 于是

$$[a_0,b_0-\bar{\varepsilon})=\bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m_k}\Delta_j^{(k)},$$

$$F(I[a_0,b_0-\bar{\varepsilon}))=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_k}F(\Delta_j^{(k)})$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}F(I[a_k-\bar{\varepsilon}_k,b_k))\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}F(I[a_k-\bar{\varepsilon}_k,b_k))$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}F(I_k)+\eta.$$

当 $\varepsilon\to0$ 时取极限,就得到

$$F(I[a_0,b_0))\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}F(I_k)+\eta.$$

由 η 的任意性即得不等式(3),引理证毕.

定义 11 我们说 $\mathfrak{B}^m$ 上的有限测度序列 μ_n 弱收敛于 ($\mathfrak{B}^m$ 上的)测度 μ,如果对于任意有界连续函数 $f(x)$有

$$\int_{\mathscr{R}^m}f(x)\mu_n(dx)\to\int_{\mathscr{R}^m}f(x)\mu(dx). \tag{4}$$

测度族称为弱紧的,如果族中任一序列可以选出弱收敛的子序列.

我们有如下的定理.

定理 1 $\{\mathscr{R}^m,\mathfrak{B}^m\}$上的测度序列 μ_n 是弱紧的充分必要条件为: a)$\mu_n(\mathscr{R}^m)\leqslant C$; b) 对于任意 $\varepsilon>0$, 可以找到这样的区间 $I[a,b)$, 使得

$$\varliminf_{n\to\infty}\mu_n(I[a,b))>\mu_n(\mathscr{R}^m)-\varepsilon^{*)}. \tag{5}$$

---

*) 此式原书为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu_n(I[a,b))>\mu_n(R^m)-\varepsilon$.——译者注

我们将在第六章§1中给出这个定理的证明.

特征函数 由

$$J(u)=\mathbf{E}e^{i(u,\xi)}=\int_{\mathscr{R}^m}e^{i(u,x)}\mu(dx)$$

定义的函数 $J(u)$, $u=[u_1,u_2,\cdots,u_m)$,称作 $\mathscr{R}^m$ 中的随机向量 ξ (或者它对应的分布 μ)的**特征函数**.

容易看出,特征函数具有以下性质:

1) $J(0)=1, |J(u)|\leqslant 1$;

2) $J(u)$ 一致连续, $u\in\mathscr{R}^m$;

3) 对于任意 n,任意复数 z_j 和任意 $u_j\in\mathscr{R}^m(j=1,\cdots,n)$

$$\sum_{j,k=1}^{n}J(u_j-u_k)\,z_j\bar{z}_k\geqslant 0.$$

反之,若一函数具有性质 1)—3),则它是某一分布的特征函数.这一论断的证明将在第四章§2中给出.

我们可以利用特征函数给定 $\mathscr{R}^m$ 中的分布,因为前者能唯一地确定分布. 例如,对于具有密度 $f(x)$ 的分布,特征函数

$$J(u)=\int_{\mathscr{R}^m}e^{i(u,x)}f(x)dx$$

是函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换.又若 $f(x)$ 满足某些类似于在 Fourier 积分理论中所讨论的附加条件,则当已知 $J(u)$ 时,可以根据公式

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathscr{R}^m}e^{-i(u,x)}J(u)du$$

反演求出 $f(x)$. 对于一般情形的分布函数 $F(x)$ 也可以写出类似的反演公式. 但是,我们现在不必利用反演公式就能给出一个关于分布函数由其特征函数唯一确定的定理.

定理 2 若

$$\int_{\mathscr{R}^m}e^{i(u,x)}\mu_1(dx)=\int_{\mathscr{R}^m}e^{i(u,x)}\mu_2(dx), u\in\mathscr{R}^m,$$

其中 μ_i 是 $\{\mathscr{R}^m,\mathfrak{B}^m\}$ 上的测度,则 $\mu_1=\mu_2$.

证. 以 K 表示使得

$$\int_{\mathscr{R}^m}f(x)\mu_1(dx)=\int_{\mathscr{R}^m}f(x)\mu_2(dx) \tag{6}$$

成立的复值有界 Borel 函数类.我们证明K包含所有的有界 Borel 函数. 显然,K是一个线性类. 因为它包含函数 $e^{i(u,x)}$,所以它也包含这些函数所有可能的线性组合 $P(x)=\sum_k C_k e^{i(a_k,x)}$. 因为$K$对于处处收敛于某一极限的一致有界函数序列的极限运算是封闭的,又根据 Weierstrass 定理,知任意有界连续函数 $f(x)$ 可以用对任意 $x\in\mathscr{R}^m$ 都收敛于 $f(x)$ 的一致有界序列 $P_n(x)$ 来逼近.所以K包含所有连续函数. 因为K对极限过程是封闭的,由此推得K包含所有有界 Borel 函数. 在(6)式中,令 $f(x)=\chi_B(x)$, $B\in\mathfrak{B}^m$,我们就得到 $\mu_1(B)=\mu_2(B)$. 定理证毕.

现在,我们建立分布 μ_n 的弱收敛性与它们的特征函数的收敛性之间的关系. 我们用 $J(u)$ 和 $J_n(u)$ 分别表示分布μ和 μ_n 的特征函数. 按照定义,可由 μ_n 弱收敛于μ推出 $J_n(u)\to J(u)$.

下面的定理蕴涵更深刻的事实.

定理 3 若对于每一 u, $J_n(u)$ 收敛于某一函数 $\varphi(u)$, 而且 $\varphi(u)$ 在 $u=0$ 处连续, 则分布 μ_n 弱收敛于某一分布 μ, 同时 $\varphi(u)$ 是分布μ的特征函数.

证. 先证 μ_n 是弱紧的测度序列. 令 $A=(a,\cdots,a)$,则有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2a)^m}\int_{[-A,A]}(1-J_n(u))\,du\\
&\qquad=\frac{1}{(2a)^m}\int_{[-A,A]}\int_{\mathscr{R}^m}(1-e^{-i(u,x)})\mu_n(dx)du\\
&\qquad=\int_{\mathscr{R}^m}\left(1-\prod_{k=1}^m\frac{\sin ax_k}{ax_k}\right)\mu_n(dx)\\
&\qquad\geqslant\frac{1}{2}\int_{\overline{[-A_1,A_1]}}\mu_n(dx)=\frac{1}{2}\mu_n(\overline{[-A_1,A_1]}),
\end{aligned}$$

其中 A_1 表示向量 $\left(\frac{2}{a},\frac{2}{a},\cdots,\frac{2}{a}\right)$. 在上面的不等式取 $n\to\infty$ 时的极限并利用 Lebesgue 控制收敛定理,我们就得到

$$\overline{\lim}\,\mu_n(\overline{[-A_1,A_1]})\leqslant\frac{2}{(2a)^m}\int_{[-A,A]}(1-\varphi(u))du.$$

因为 $\varphi(u)$ 在 $u=0$ 处连续，故当 $a\to 0$ 时不等式的右端趋于零. 根据定理 1 即得序列 μ_n 的弱紧性. 现在证明 μ_n 弱收敛于某一极限. 事实上，存在弱收敛于某一分布 μ_0 的子列 μ_{n_j}. 如果 μ_n 不弱收敛于 μ_0，则可找到另一子列 μ_{k_j}，它弱收敛于某一异于 μ_0 的极限 μ_0'. 但是，从前面的附注得知，无论是分布 μ_0 或分布 μ_0'，它们的特征函数都是 $\varphi(u)$. 另一方面，特征函数又唯一地确定分布，故 $\mu_0=\mu_0'$. 所得到的矛盾证明了 μ_n 弱收敛于 μ_0. 定理证毕.

我们还要指出特征函数的某些常用性质.

若 ξ_1 和 ξ_2 是 $\mathscr{R}^m$ 中的独立随机向量，$\xi_3=\xi_1+\xi_2$，而 $J_i(u)$ 是 ξ_i 的特征函数 $(i=1,2,3)$，则

$$J_3(u)=J_1(u)J_2(u). \tag{7}$$

其次，设 ξ_i $(i=1,2)$ 是取值于 $\mathscr{R}^{m_i}$ 的随机向量，而 $\xi_3=(\xi_1,\xi_2)$是取值于 $\mathscr{R}^{m_1}\times\mathscr{R}^{m_2}$ 的合成向量. 为使 ξ_1 和 ξ_2 相互独立，必须且只须

$$J_3(u,v)=J_1(u)J_2(v), \tag{8}$$

其中 $J_3(u,v)=\mathbf{E}\,e^{i[(u,\xi_1)+(v,\xi_2)]}$，$J_1(u)=J_3(u,0)$，$J_2(v)=J_3(0,v)$.

必要性是显然的.

充分性从具有给定特征函数的分布函数是唯一的这一事实得出.

定义 12 s 维向量 $\xi=(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^s)$的*矩* $m_{j_1j_2\cdots j_s}$ 定义为

$$m_{j_1j_2\cdots j_s}=\mathbf{E}\,(\xi^1)^{j_1}(\xi_2)^{j_2}\cdots(\xi^s)^{j_s},$$

如果等式右端的数学期望有限. $q=j_1+j_2+\cdots+j_s$ 称作*矩的阶*.

容易看出，若 $\mathbf{E}|\xi^k|^p<\infty$，$k=1,2,\cdots,s$，则所有的 $q(\leqslant p)$ 阶矩是有限的. 事实上，从算术平均值和几何平均值之间的不等式得知 $(q=j_1+j_2+\cdots+j_s)$

$$\prod_{k=1}^{s}|\xi^k|^{j_k}=\prod_{k=1}^{s}|\xi^k|^{q\cdot j_k/q}\leqslant\sum_{k=1}^{s}\frac{j_k}{q}|\xi^k|^q,$$

由此推得

$$\mathbf{E}\prod_{k=1}^{s}|\xi^k|^{j_k}\leqslant\sum_{k=1}^{s}\frac{j_k}{q}\mathbf{E}|\xi^k|^q\leqslant\sum_{k=1}^{s}\frac{j_k}{q}(\mathbf{E}|\xi^k|^p)^{q/p}.$$

当已知特征函数时，我们可以通过求微商来计算带有整数附标的矩 $m_{j_1\cdots j_s}$. 事实上,若 $\mathbf{E}|\xi^k|^p<\infty$,则对于 $q\leqslant p$ 有

$$m_{j_1\cdots j_s}=(-1)^q\frac{\partial^q J(u)}{\partial u_1^{j_1}\partial u_2^{j_2}\cdots\partial u_s^{j_s}}\bigg|_{u=0},\tag{9}$$

这公式的证明由以下事实得出：我们可以在公式

$$J(u)=\mathbf{E}e^{i(u,\xi)}$$

的数学期望号下求微商. 在某些情况下必须利用逆命题，但它仅对带有偶数附标的矩才成立. 设 Δ_k 是对变量 u_k 计算对称有限差分的算子,而 Δ_k^j 是它的 j 次幂:

$$\Delta_k J(u_1,\cdots,u_s)=J(u_1,\cdots,u_k+h_k,\cdots,u_s)-J(u_1,\cdots,u_k-h_k,\cdots,u_s),$$

$$\Delta_k^j J(u_1,\cdots,u_s)=\sum_{r=0}^{j}(-1)^r C_j^r J(u_1,\cdots,u_k+(j-2r)h_k,u_{k+1},\cdots,u_s).$$

因此

$$\begin{aligned}\Delta_1^{2j_1}\Delta_2^{2j_2}\cdots\Delta_s^{2j_s}J(u_1,\cdots,u_s)\big|_{u=0}&=\mathbf{E}\prod_{k=1}^{s}\sum_{r=0}^{2j_k}(-1)^r C_{2j_k}^r e^{i2(j_k-r)h_k\xi^k}\\&=\mathbf{E}\prod_{k=1}^{s}(e^{ih_k\xi^k}-e^{-ih_k\xi^k})^{2j_k}\\&=\prod_{k=1}^{s}h_k^{2j_k}(2i)^{2q}\,\mathbf{E}\prod_{k=1}^{s}\left(\frac{\sin h_k\xi^k}{h_k\xi^k}\right)^{2j_k}[\xi^k]^{2j_k}\end{aligned}$$

或

$$\prod_{k=1}^{s}\frac{\Delta_k^{2j_k}J}{(2h_k)^{2j_k}}\bigg|_{u=0}=(-1)^q\,\mathbf{E}\prod_{k=1}^{s}\left(\frac{\sin h_k\xi^k}{h_k\xi^k}\right)^{2j_k}[\xi^k]^{2j_k}.$$

利用 Fatou 引理即得

$$\lim_{\substack{h_k \to 0 \\ k=1,2,\cdots,s}} \left. \frac{(-1)^q \prod_{k=1}^{s} \Delta_k^{2j_k} J}{\prod_{k=1}^{s} (2h_k)^{2j_k}} \right|_{u=0} \geqslant \mathbf{E} \prod_{k=1}^{s} [\xi^k]^{2j_k}.$$

不等式左边的表达式和 J 在点 $u=0$ 的导数 $\partial^{2q} J/\partial u_1^{2j_1}\cdots\partial u_s^{2j_s}$ (如果 J 可微 $2q$ 次的话)最多只差一个正负号.

于是,我们有以下定理.

定理 4 若特征函数 $J(u_1,\cdots,u_s)$ 在点 $u=0$ 可微 p 次(p 为偶数),则存在 $q(\leqslant p)$ 阶矩,而且它们可以用公式(9)计算.

随机时间 假定随着时间而连续地做随机试验并考察某一事件 A,这事件的实现可以由观察到某一随机时刻为止的试验结果所确定.我们把这样的时刻称作随机时间,有时也称作与将来无关的随机变量,Марков 时间或停时.

下面是正式的定义.设 T 是对应于进行随机试验时刻的实数集合.

定义 13 在给定的概率空间$\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$上,单调不减 σ 代数族 $\{\mathfrak{F}_t;t\in T\}$(即 $\mathfrak{F}_t\subset\mathfrak{S}$ 且若 $t_1>t_2$ 时有 $\mathfrak{F}_{t_1}\subset\mathfrak{F}_{t_2}$)称作 σ 代数流(试验流).

这时 $\mathfrak{F}_t$ 可解释为在直到时刻 t 为止(包含 t)所进行的试验中所有可被观测的事件类.

定义 14[*)] 定义在空间 Ω 的某一子空间 Ω_τ 上而取值于 T 的函数 $\tau=f(\omega)$ 称作在 σ 代数流$\{\mathfrak{F}_t;t\in T\}$上的随机时间,如果它满足条件:对任意 $t\in T$ 有$\{\tau\leqslant t\}\in\mathfrak{F}_t$.

条件 $\{\tau\leqslant t\}\in\mathfrak{F}_t$ 的含义如下:人们可以通过在时刻 $s(s\in T,s\leqslant t)$观测到的试验结果对在时刻 t 之前随机时刻 τ 的出现作出推断.集合 Ω_τ 对应于在观测周期 T 内出现 τ 这一事件.显然,它是 $\mathfrak{S}$ 可测的.如果 T 有最大值 $t_{\max}$,则 $\Omega_\tau=\{\tau\leqslant t_{\max}\}\in\mathfrak{F}_{t_{\max}}$.如果 T 没有最大值而 $t_k\uparrow \mathrm{Sup}\ \{t;t\in T\}$,则 $\Omega_\tau=\bigcup_k\{\tau\leqslant t_k\}$.

---

*) 考虑到下文,还应定义在 $\Omega\backslash\Omega_\tau$ 上,τ 取值∞.——译者注

注意，当 $\Omega_\tau=\Omega$ 时，条件 $\{\tau\leqslant t\}\in\mathfrak{F}_t$ 等价于要求$\{\tau>t\}\in\mathfrak{F}_t$，或当 T 为可数时等价于对任意 $t\in T$ 有 $\{\tau=t\}\in\mathfrak{F}_t$.

我们可以用下述方法将随机时间 τ 与一个最小的事件 σ 代数相联系，使得人们能够通过直到时刻 τ（包含 τ）为止所观测到的试验结果对这些事件的现实作出推断．以 $\mathfrak{F}_\tau$ 表示使得对任意 $t\in T$ 有 $B\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathfrak{F}_t$ 的那些事件 $B(B\in\mathfrak{S})$ 组成的事件类．容易验证，$\mathfrak{F}_\tau$ 是一个 σ 代数，我们约定称 $\mathfrak{F}_\tau$ 为由随机时间 τ 产生的 σ 代数.

显然，随机变量 τ 是 $\mathfrak{F}_\tau$ 可测的.

作为一个例子，我们考虑 $\tau=t_0, t_0\in T$的情形．这时$\{\tau\leqslant t\}$等于ϕ或Ω，因此 $\tau=t_0$ 是随机时间的一种特殊情形．其次，$B\cap\{\tau\leqslant t\}$等于ϕ或 B，因此 $\mathfrak{F}_\tau=\mathfrak{F}_{t_0}$，即在 $\tau=t_0$ 这一特殊情形中由随机时间产生的 σ 代数的记号和以前的记号是一致的.

我们引入在一固定的 σ 代数流$\{\mathfrak{F}_t;\ t\in T\}$上的随机时间 τ 的一些性质.

a）若K是实数直线上的 Borel 集合，而且 $\mathrm{Sup}\{x:x\in K\}\leqslant t$，则事件$\{\tau\in K\}$是 $\mathfrak{F}_\tau$ 可测的.

b）若 $\theta(t)$ 是实值 Borel 函数，$\theta(\cdot)$ 把T映入T中，而且 $\theta(t)\geqslant t\ (t\in T)$，则 $\theta(\tau)$ 是一个随机时间.

这性质从前面的性质得出.

c）若 τ_i 是随机时间 $(i=1,2)$，则 $\min(\tau_1,\tau_2)$ 和 $\max(\tau_1,\tau)$ 也是随机时间．特别地，若 τ 是随机时间，则 $\min(\tau,t_0)$ 也是随机时间，其中 $t_0\in T$.

这论断的证明由

$$\{\max(\tau_1,\tau_2)\leqslant t\}=\{\tau_1\leqslant t\}\cap\{\tau_2\leqslant t\}$$

和

$$\{\min(\tau_1,\tau_2)\leqslant t\}=\{\tau_1\leqslant t\}\cup\{\tau_2\leqslant t\}$$

得出.

d）若 $\tau_i(i=1,2)$是随机时间且$\tau_1\leqslant\tau_2$，则 $\mathfrak{F}_{\tau_1}\subset\mathfrak{F}_{\tau_2}$．事实上，设 $A\in\mathfrak{F}_{\tau_1}$，因为 $\{\tau_1\leqslant t\}\supset\{\tau_2\leqslant t\}$，故 $A\cap\{\tau_2\leqslant t\}=A\cap$

$\{\tau_1 \leqslant t\} \cap \{\tau_2 \leqslant t\} = B \cap \{\tau_2 \leqslant t\} \in \mathfrak{F}_t$，这是由于 $B = A \cap \{\tau_1 \leqslant t\} \in \mathfrak{F}_t$ 和$\{\tau_2 \leqslant t\} \in \mathfrak{F}_t$.

设 T 是有限或可数集合，$\{\mathfrak{F}_t; t \in T\}$是 σ 代数流，τ 是 $\{\mathfrak{F}_t; t \in T\}$上的随机时间，$\Omega_\tau = \Omega$. 我们考虑随机变量集合 $\{\xi_t; t \in T\}$，其中对每一 $t \in T$，ξ_t 是 $\mathfrak{F}_t$ 可测的. 令 $\xi_\tau = \xi_t$，若 $\tau = t$.则变量 ξ_τ 对所有 $\omega \in \Omega$ 是有定义的.

引理 5 变量 ξ_τ 是 $\mathfrak{F}_\tau$ 可测的.

事实上，设 $c_k(k = 1,2,\cdots)$是 τ 的可能值，则

$$\{\omega: \xi_\tau < x\} \cap \{\omega: \tau \leqslant t\}$$
$$= \bigcup_{c_k \leqslant t} (\{\omega: \xi_\tau < x\} \cap \{\omega: \tau = c_k\})$$
$$= \bigcup_{c_k \leqslant t} (\{\omega: \xi_{c_k} < x\} \cap \{\omega: \tau = c_k\}) \in \mathfrak{F}_t,$$

这是因为后一和式中的每个事件均属于 $\mathfrak{F}_{c_k} \subset \mathfrak{F}_t$.

§2. 独 立 性

定义 设 $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P})$ 是一固定的概率空间，在本节中除特别说明外，事件恒理解为 Ω 的 $\mathfrak{S}$ 可测子集.

两事件 A 和 B 称作*独立的*，如果 $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$. 由定义直接推出

a) 对于任意事件 A，Ω 和 A 是独立的.

b) 若 $P(N) = 0$，A 是任意事件，则 N 和 A 是独立的.

c) 若 A 和 $B_i(i = 1,2)$ 是独立的，$B_1 \supset B_2$ 则 A 和 $B_1 \backslash B_2$ 是独立的. 特别地，A 和 $\bar{B}_1$ 是独立的.

d) 若 A 和 $B_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 是独立的，而且 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 两两互不相容，则 A 和 $\bigcup_1^n B_i$ 也是独立的.

注意，若不说明事件 B_i 是两两互不相容的，则一般说来后一论断是不成立的.

e) A 独立于 A 当且只当 $P(A) = 0$ 或 $P(A) = 1$.

设 I 是一集合，$\{\mathfrak{M}_i, i \in I\}$ 是用取值于 I 的附标编号的事件类构成的集合.

定义 1 一族事件类 $\{\mathfrak{M}_i, i \in I\}$ 称作独立的(或总体独立的)，如果对于任意两两不相同的附标 $i_1, i_2, \cdots, i_n (i_k \in I)$ 和任意 A_{i_k}, $A_{i_k} \in \mathfrak{M}_{i_k}, k = 1, 2, \cdots, n$ ，有

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_n}) = \mathbf{P}(A_{i_1})\mathbf{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbf{P}(A_{i_n}).$$

应当指出，对于事件类的无穷集合来说，独立性的定义等价于要求这族事件类的任意有限子族组成独立的一族事件类.

今后，我们用 $\sigma\{\mathfrak{M}\}$ 表示包含 $\mathfrak{M}$ 的最小 σ 代数.

事件类 $\mathfrak{A}$ 称为 π 类，如果它对于事件的交运算是封闭的（从 $A_k \in \mathfrak{A} (k = 1, 2)$ 推得 $A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{A}$). 事件类称为 λ 类，如果

1) 从 $A_k \in \mathfrak{A} (k = 1, 2, \cdots)$ 和 $A_k \cap A_r = \phi$ 若 $k \neq r$ 推得 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A}$;

2) $\Omega \in \mathfrak{A}$，而且从 $B_2 \supset B_1 (B_k \in \mathfrak{A}, k = 1, 2)$ 推得 $B_2 \setminus B_1 \in \mathfrak{A}$.

显然，若 $\mathfrak{A}$ 既是 π 类又是 λ 类，则它是一个 σ 代数.

引理 1 若 λ 类 $\mathfrak{A}$ 包含 π 类 $\mathfrak{M}$，则 $\mathfrak{A}$ 包含 $\sigma\{\mathfrak{M}\}$.

证. 以 $\mathfrak{A}_1$ 表示包含 $\mathfrak{M}$ 的最小 λ 类 ($\mathfrak{A}_1$ 是所有包含 $\mathfrak{M}$ 的 λ 类之交)，往证 $\mathfrak{A}_1 = \sigma\{\mathfrak{M}\}$. 令 $\mathfrak{A}(B)$ 表示 $\mathfrak{A}_1$ 中所有满足 $A \cap B \in \mathfrak{A}_1$ 的事件 A 的类.

容易验证，$\mathfrak{A}(B)$ 是 λ 类. 如果 $B \in \mathfrak{M}$，则 $\mathfrak{A}(B) \supset \mathfrak{M}$ (因为 $\mathfrak{M}$ 是 π 类)，所以 $\mathfrak{A}(B) = \mathfrak{A}_1 (B \in \mathfrak{M})$. 然而，这表示对任意 $A \in \mathfrak{A}_1$ 有 $\mathfrak{A}(A) \supset \mathfrak{M}$，即 $\mathfrak{A}(A) = \mathfrak{A}_1$，于是 $\mathfrak{A}_1$ 是 π 类. 由引理前的附注即得 $\mathfrak{A}_1 = \sigma\{\mathfrak{M}\}$.

定理 1 设 $\{\mathfrak{M}_i, i \in I\}$ 是独立的 π 类集合，则最小 σ 代数 $\sigma\{\mathfrak{M}_i\} (i \in I)$ 是独立的.

证. 我们可以限于讨论只有有限多个类 $\mathfrak{M}_1, \cdots, \mathfrak{M}_n$ 的情形. 这时只须证明，若其中的一个类，例如 $\mathfrak{M}_1$ 用 $\sigma\{\mathfrak{M}_1\}$ 代替后，新的事件类序列还是独立的.

以 $\mathfrak{A}$ 表示所有独立于 $\mathfrak{M}_2, \cdots, \mathfrak{M}_n$ 的事件类. 按照定义，$\mathfrak{M}_1$

$\subset \mathfrak{A}$ 且 $\mathfrak{A}$ 具有如下性质：它对于不相交事件的求和运算与在条件 $B_2 \supset B_1$ 下的取差运算 $B_1 \setminus B_2$ 是封闭的，因此 $\mathfrak{A}$ 是一 λ 类，根据上面的引理，知 $\mathfrak{A} \supset \sigma\{\mathfrak{M}_1\}$. 定理证毕.

定理 2 设 $\{\mathfrak{M}_i, i \in I\}$ 是独立事件类的集合，其中每一事件类关于交的运算是封闭的，$I = I_1 \cup I_2$ $(I_1 \cap I_2 = \phi)$. 以 $\mathfrak{B}_j (j = 1, 2)$ 表示包含所有 $\mathfrak{M}_i (i \in I_j)$ 的最小 σ 代数，则 $\mathfrak{B}_1$ 和 $\mathfrak{B}_2$ 是独立的.

根据上面的定理，我们只须讨论 $\mathfrak{M}_i$ 是 σ 代数的情形. 考察由所有可能的形如 $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_n}$ $(A_{i_k} \in \mathfrak{M}_{i_k}$, n 是任意的，$i_k \in I_j)$ 的事件组成的类 $\mathfrak{A}_j$ $(j = 1, 2)$. 它们对于交的运算是封闭的，$\mathfrak{A}_j$ 包含所有 $\mathfrak{M}_i, i \in I_j$，而且 $\mathfrak{A}_1$ 和 $\mathfrak{A}_2$ 是独立的. 由上面的定理知 $\sigma\{\mathfrak{A}_1\} = \sigma\{\mathfrak{M}_i, i \in I_1\}$ 和 $\sigma\{\mathfrak{A}_2\} = \sigma\{\mathfrak{M}_i, i \in I_2\}$ 是独立的.

推论 若 I 可表为若干个两两不相交的子集之和 $I = \bigcup_{j \in M} I_j$，则 σ 代数 $\{\mathfrak{B}_j = \sigma(\mathfrak{M}_i, i \in I_j), j \in M\}$ 是总体独立的.

独立随机变量

定义 2 随机变量 $\{\zeta_i, i \in I\}$ 称作**独立的**(**总体独立的**)，如果一族事件类 $\mathfrak{M}_i (i \in I)$ 是独立的，其中 $\mathfrak{M}_i$ 是由所有形如

$$\{\omega: \zeta_i < a\}, \qquad -\infty < a < \infty$$

的事件组成.

随机变量集合的独立性定义等价于：随机变量 $\zeta_i (i \in I)$ 是独立的，如果对于任意 n 和任意 $i_k \in I$, $k = 1, \cdots, n$, 变量 $\zeta_{i_1} \zeta_{i_2}, \cdots, \zeta_{i_k}$ 的联合分布函数等于各个变量的分布函数的乘积，即

$$\mathbf{P}\{\zeta_{i_1} < a_1, \zeta_{i_2} < a_2, \cdots, \zeta_{i_n} < a_n\} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{\zeta_{i_k} < a_k\}.$$

随机变量类的集合之独立性定义可类似地叙述.

考虑随机变量集合 $\{\zeta_i^\mu, i \in I_\mu\}$，其中 μ 是固定的附标，而 i 取遍依赖于附标 μ 的集合 I_μ. 为方便起见，我们把这集合称作类，同时考虑 μ 取遍集 M 而得到的这些类的集合.

定义 3 随机变量类 $\{\zeta_i^\mu, i \in I_\mu\}$ $(\mu \in M)$ 称作(相互)**独立的**，如果事件集合 $\mathfrak{M}_\mu (\mu \in M)$ 相互独立，这里 $\mathfrak{M}_\mu$ 由所有形如

$$\{\omega:\zeta_{i_1}^{\mu}<a_1,\cdots,\zeta_{i_n}^{\mu}<a_n\} \tag{1}$$
$$n=1,2,\cdots,i_k\in I_\mu,-\infty<a_k<\infty$$
的集合组成.

定义 4 由形如
$$\{\omega:\zeta_{i_1}<a_1,\cdots,\zeta_{i_n}<a_n\}$$
$$n=1,2,\cdots,i_k\in I,-\infty<a_k<\infty$$
的事件产生的事件 σ 代数 $\sigma\{\zeta_i,i\in I\}$ 称作由随机变量类 $\{\zeta_i,i\in I\}$ 产生的 σ 代数. 它的完备化用 $\tilde{\sigma}\{\zeta_i,i\in I\}$ 来表示.

换句话说, $\sigma\{\zeta_i,i\in I\}$ 是使得所有 ζ_i 是随机变量的最小 σ 代数(即使得所有函数 $\zeta_i=f_i(\omega)$ 为可测的最小 σ 代数).

我们特别要指出，由一个随机变量 ζ 产生的事件 σ 代数是包含形如 $\{\omega:\zeta<a\}$ $(-\infty<a<\infty)$ 的事件的最小 σ 代数.

定理 3 如果随机变量类 $\{\zeta_i^{\mu},i\in I_\mu\}$ $(\mu\in M)$ 是独立的，则 σ 代数集合 $\sigma\{\zeta_i^{\mu},i\in I_\mu\}(\mu\in M)$ 以及它们的完备化 $\tilde{\sigma}\{\zeta_i^{\mu},i\in I_\mu\}$ 也是独立的.

定理的证明由在定义 3 中引入的类 $\mathfrak{M}_\mu$ 对在类内取交的运算封闭这一事实和定理 1 得出.

推论 设 $g_\mu(t_1,t_2,\cdots,t_s)$ $(\mu\in M)$ 是 s 个实变元的有限 Borel 函数的集合. 如果随机变量序列 $\{(\zeta_1^{\mu},\zeta_2^{\mu},\cdots,\zeta_s^{\mu}),\ \mu\in M\}$ 是总体独立的，则随机变量 $\xi_\mu=g_\mu(\zeta_1^{\mu},\zeta_2^{\mu},\cdots,\zeta_s^{\mu})$ $(\mu\in M)$ 也是独立的.

不难把随机变量的独立性概念和上面已证明的定理推广到任意可测空间 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 中的随机元的情形.

设 $\zeta_i=f_i(\omega)$ $(i\in I)$ 是 $\{\mathscr{X}_i,\mathfrak{B}_i\}$ 中随机元的集合. 随机元集合 $\{\zeta_i,i\in I\}$ 称作独立的(或总体独立的)，如果对于任意 $n(n=1,2,\cdots)$ 和任意 $B_{i_k}\in\mathfrak{B}_{i_k},i_k\in I$,
$$\mathbf{P}\left\{\bigcap_{k=1}^{n}\{\zeta_{i_k}\in B_{i_k}\}\right\}=\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}\{\zeta_{i_k}\in B_{i_k}\}. \tag{2}$$
我们也可以类似地定义一族独立的随机元类.

任一随机元集合产生 Ω 中使得每一随机元为可测的最小 σ 代

数．由一族随机元类的独立性推得对应的随机元类产生的最小 σ 代数(以及它们的完备化)的独立性．这论断的证明类似于随机变量的情形．

设给定了 $\{\mathscr{X}_k,\mathfrak{B}_k\}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 中的随机元序列 $\xi_k=f_k(\omega)$，可以把这序列看作是取值于 $\prod_{k=1}^{n}\mathscr{X}_k$ 中的随机元．事实上，以 $\mathfrak{B}^{(n)}$ 表示 σ 代数 $\mathfrak{B}_1,\cdots,\mathfrak{B}_n$ 的乘积．如果 $C=A_1\times A_2\times\cdots\times A_n(A_i\in B_i,i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\{\omega:(f_1(\omega),\cdots f_n(\omega))\in C\}=\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega:f_i(\omega)\in A_i\},$$

即 C 的逆象是 $\mathfrak{S}$ 可测的．因此，任意属于包含所有 C 的最小 σ 代数的集合，亦即 $\mathfrak{B}^{(n)}$ 中任意集合的逆象是 $\mathfrak{S}$ 可测的．我们用 $m_{1,2,\cdots,n}$ 表示 $\left\{\prod_{k=1}^{n}\mathscr{X}_k,\mathfrak{B}^{(n)}\right\}$ 上由序列 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 诱导的测度，这里

$$m_{1,2\cdots,n}(C)=\mathbf{P}\{(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in C\}.$$

假定随机元 $\xi_k(k=1,\cdots,n)$ 是独立的，这时公式(2)表明

$$m_{1,2,\cdots,n}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=m_1(A_1)m_2(A_2)\cdots m_n(A_n),$$

其中 $m_k(A_k)=\mathbf{P}\{\xi_k\in A_k\}$．由于测度从集合的半环延拓到最小 σ 代数是唯一的，故测度 $m_{1,2,\cdots,n}$ 是 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 这些测度的乘积．下面的逆命题是平凡的：若测度 $m_{1,2,\cdots,n}$ 是测度 m_1，$m_2,\cdots,m_n$ 的乘积，则随机元 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是独立的．于是我们得到

定理 4 随机元 ξ_1，$\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为独立的充分必要条件是：σ 代数 $\mathfrak{B}^{(n)}$ 上由序列 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 诱导的测度 $m_{1,2,\cdots,n}$ 是 $\mathfrak{B}_k$ 上由随机元 ξ_k 诱导的测度 $m_k(k=1,2,\cdots,n)$ 之乘积．

定理 5 设 $g(x_1,x_2)$ 是 $\mathfrak{B}^{(2)}$ 可测的有限函数，ξ_1 和 ξ_2 是独立的随机元，而且

$$\mathbf{E}g(\xi_1,\xi_2)<\infty$$

则 $\varphi(x_1)=\mathbf{E}g(x,\xi_2)$ 是 x_1 的 $\mathfrak{B}_1$ 可测函数且

$$\mathbf{E}g(\xi_1,\xi_2)=\mathbf{E}\varphi(\xi_1)$$

或

$$\mathbf{E}g(\xi_1,\xi_2)=\int_{\mathscr{X}_1}m_1(dx_1)\int_{\mathscr{X}_2}g(x_1,x_2)m_2(dx_2).$$

如果测度 m_1 和 m_2 是完备的，并用符号～表示 σ 代数（或测度)的完备化，则上面的公式对于任意 $\mathfrak{B}^{(2)}$ 可测函数仍然成立．由抽象积分的变量代换定理有

$$\mathbf{E}g(\xi_1,\xi_2)=\int_{\mathscr{X}_1\times\mathscr{X}_2}g(x_1,x_2)m_{1,2}(d(x_1,x_2)),$$

然后由 Fubini 定理就得这定理．

推论 若 ξ_1 和 ξ_2 是具有有限数学期望的独立随机变量，则

$$\mathbf{E}\xi_1\xi_2=\mathbf{E}\xi_1\cdot\mathbf{E}\xi_2.$$

零-壹律 设 $A_n(n=1,2,\cdots)$是事件序列．

定理 6 若$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(A_n)<\infty$，则事件 $\overline{\lim}A_n$的概率为 0．

定理的证明由公式 $\overline{\lim}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$ 得出，因为据此有

$$\mathbf{P}(\overline{\lim}A_n)=\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\mathbf{P}(A_k)=0.$$

对于独立的事件序列，这定理可加强为

定理 7 (Borel-Cantelli 定理)若事件$\{A_n,n=1,2,\cdots\}$是独立的，则事件 $\overline{\lim}A_n$ 的概率视级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(A_n)$ 收敛或发散而等于 0 或 1．

我们只须证明，若 $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(A_n)=\infty$，则 $\mathbf{P}(\overline{\lim}A_n)=1$．令 $A^*=\overline{\lim}A_n$，则

$$\Omega\backslash A^*=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}(\Omega\backslash A_k)$$

和

$$\mathbf{P}(\Omega\backslash A^*)=\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}(\Omega\backslash A_k)\right)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=n}^{\infty}\mathbf{P}(\Omega\backslash A_k)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=n}^{\infty}(1-\mathbf{P}(A_k)) = 0.$$

最后一个等式由级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(A_k)$的发散性得到.

现在讨论任意的独立σ代数序列 $\mathfrak{S}_n$, $n=1,2,\cdots$. 根据 Borel-Cantelli 定理,事件 $A=\overline{\lim}A_n$ 有概率 0 或 1,其中 A_n 是任意使得 $A_n\in\mathfrak{S}_n$ 的集合序列. 这结果可以推广到由所有σ代数 $\mathfrak{S}_n(n=1,2,\cdots)$产生而不依赖于任意有限多个$\sigma$代数 $\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2,\cdots,\mathfrak{S}_n$ 的任意事件. 更确切地说, 设 $\sigma\{\mathfrak{S}_k,\mathfrak{S}_{k+1},\cdots,\mathfrak{S}_n,\cdots\}=\mathfrak{B}_k$ 是由序列 $\mathfrak{S}_n,n=k,k+1,\cdots$产生的$\sigma$代数; $\mathfrak{B}_k$ 构成单调递减的σ代数序列,它们的交还是一个σ代数. 定义

$$\overline{\lim}\,\mathfrak{S}_n=\mathfrak{B}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\sigma\{\mathfrak{S}_k,\mathfrak{S}_{k+1},\cdots\}.$$

显然,当其中任意有限多个σ代数 $\mathfrak{S}_1,\cdots,\mathfrak{S}_n$ 用别的σ代数替换时,$\overline{\lim}\,\mathfrak{S}_n$ 并不改变.

定理 8 (Колмогоров 的一般零-壹律)
若 $\mathfrak{S}_n(n=1,2,\cdots)$是相互独立的$\sigma$代数, 则 $\overline{\lim}\,\mathfrak{S}_n$ 中任一事件有概率 0 或 1 .

事实上,设 $A\in\overline{\lim}\,\mathfrak{S}$, 则对任意 k 有 $A\in\mathfrak{B}_k$, 因此 A 和 $\sigma\{\mathfrak{S}_1,\cdots,\mathfrak{S}_{k-1}\}$是独立的. 所以$A$和 $\sigma\{\mathfrak{S}_1,\cdots,\mathfrak{S}_n,\cdots\}$是独立的. 因为 $A\in\sigma\{\mathfrak{S}_1,\cdots,\mathfrak{S}_n,\cdots\}$,故$A$独立于 A,但这仅当 $\mathbf{P}(A)=0$ 或 $\mathbf{P}(A)=1$ 才有可能.

推论 设$\{\xi_n,n=1,2,\cdots\}$是在一固定的距离空间$\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$中的独立随机元序列, $\mathfrak{S}_n=\sigma\{\xi_n\}$是由 ξ_n 产生的σ代数, $\mathfrak{B}_n=\sigma\{\mathfrak{S}_n,\mathfrak{S}_{n+1},\cdots\}$. 则

a)* 若$\mathscr{X}$是完备的,则序列$\{\xi_n,n=1,2,\cdots\}$存在极限的概率为 0 或 1 ;

b) 若$\mathscr{X}$是可分和完备的,则当序列$\{\xi_n,n=1,2,\cdots\}$的极

---

*) "若$\mathscr{X}$是完备的"是译者加的. ——译者注

限以概率 1 存在时，这极限是一常数 (mod$\mathbf{P}$)；

c) 若 $z=f(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ 是无穷多个变元 $x_n\in\mathscr{X}$ $(n=1,2,\cdots)$的函数，又对任意 n，函数 $f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$是 $\mathfrak{B}_n$ 可测的，则它以概率 1 等于一常数.

证. a) 若 $\rho(x,y)$是$\mathscr{X}$中的距离，则使得 ξ_n 收敛的点集可以写成

$$D=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{n',n''\geqslant n}\left\{\omega:\rho(\xi_{n'},\xi_{n''})<\frac{1}{k}\right\}.$$

因为事件 $A_n=\bigcap\limits_{n',n''\geqslant n}\left\{\rho(\xi_{n'},\xi_{n''})<\frac{1}{k}\right\}$单调递增，而对任意 r 有 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathfrak{B}_r$，所以对任意 r 有 $D\in\mathfrak{B}_r$，于是能够应用一般的零-壹律.

b) 设 F 是闭集，$F\subset\mathscr{X}$.以 F_k 表示开集 $F_k=\left\{x;\ \rho(x,F)<\frac{1}{k}\right\}$，于是事件 $A=D\cap\{\lim\xi_n\in F\}$ 可以表为 $A=D\cap\left[\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n'\geqslant n}\{\xi_{n'}\in F_k\}\right]$通过在证明 a)时那样的考虑，得知 $A\in\mathfrak{B}_r$. 于是，对于任意闭集F 有 $\mathbf{P}\{\lim\xi_n\in F\}=0$ 或 1. 但是，使得类似的结论成立的集合类是一个 σ 代数，故对任意 $B\in\mathfrak{B}$ 有 $\mathbf{P}\{\lim\xi_n\in B\}=0$ 或 1. 当空间 $\mathscr{X}$ 是可分和完备时，我们不难由此推得 $\mathfrak{B}$ 上由随机元 $\lim\xi_n$ 诱导的测度m是集中在单个原子上的. 事实上，因为 $m(\mathscr{X})=1$，故能找到一个半径为 1 的球 S_1 使得 $m(S_1)=1$. 如若不然，则 $\mathscr{X}$ 中所有半径为 1 的球的测度为 0. 这是不可能的，因为 $\mathscr{X}$ 可以用可数多个这样的球覆盖. 类似地，我们能够找到半径为$\frac{1}{2}$的球 S_2，使得 $m(S_1\cap S_2)=1$. 继续这一推理，我们就得到一串球 S_n，它们的半径趋于零，对任意正整数 n，$m(S_1\cap\cdots\cap S_n)=1$[*]. 这些球有唯一的公共点 x，且 $m\{x\}=\lim m(S_n)=1$.

c) 由假设知，事件 $A=\{\omega:f(\xi_1,\cdots,\xi_n,\ \cdots)<a\}\in\mathfrak{B}_n$，

---

[*] 上面两句话译者作了修改. ——译者注

因此 $A\in\overline{\lim}\mathfrak{S}_n$. 从而$A$有概率 0 或 1 .故随机变量 $\zeta=f(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)$的分布函数只取值 0 或 1，即变量 ζ 以概率 1 等于一常数.

§3. 条件概率和条件数学期望

定义 我们首先回忆在初等情形中条件概率和条件数学期望的定义. 若 $P(B)\neq 0$,则当给定B时事件A的条件概率定义为

$$\mathbf{P}(A|B)=\frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

对于固定的 B,条件概率 $\mathbf{P}(A|B)$ 和“无条件”概率 $\mathbf{P}(A)$同样是给定在同一个集合σ代数上的规范化测度. 相应地，当给定B时某一随机变量 $\xi=f(\omega)$的条件数学期望由公式

$$\mathbf{E}\{\xi|B\}=\int_{\Omega}f(\omega)\mathbf{P}(d\omega|B)$$

定义. 注意到条件概率的定义,这式子可以改写为

$$\mathbf{P}(B)\,\mathbf{E}\{\xi|B\}=\int_B\xi d\mathbf{P}. \tag{1}$$

为了定义给定零概率事件时的条件数学期望和条件概率，我们必须重新考虑这些概念. 首先注意,若ξ是事件A的示性函数,则 $\mathbf{E}\{\xi|B\}=\mathbf{P}(A|B)$. 因此，条件概率是条件数学期望的特殊情形,下面我们只研究后者.设$\mathfrak{M}$是某一可数的不相交事件类$\{B_i;i=1,2,\cdots,B_i\in\mathfrak{S}\}$,而且$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B_i=\Omega$. 定义随机变量 $\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{M}\}$如下: 若 $\omega\in B_i$ 时,它等于 $\mathbf{E}\{\xi|B_i\}$. 我们称之为给定集合类$\mathfrak{M}$时,随机变量ξ的条件数学期望，它仅对那些属于使得 $\mathbf{P}(B_i)\neq 0$ 的 B_i 的ω才有定义,亦即随机变量 $\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{M}\}$ 以概率 1 有定义. 这个变量在使得 $\mathbf{P}(B_i)\neq 0$ 的集合 B_i 上是一常数，即等于给定B_i时ξ的条件数学期望. 注意,当已知 $\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{M}\}$时，人们不仅能确定 $\mathbf{E}\{\xi|B_i\}$ ($B_i\in\mathfrak{M}$, $\mathbf{P}(B_i)\neq 0$),而且还能确定给定任意集合 B($B\in\sigma\{\mathfrak{M}\}$, $\mathbf{P}(B)\neq 0$) 时ξ的条件数学期望. 事实上,若 $B=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_{i_k}$,则

$$\mathbf{P}(B)\mathbf{E}\{\xi|B\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(B_{i_k})\mathbf{E}\{\xi|B_{i_k}\}. \tag{2}$$

这公式表明，若已知给定 $B_i(i = 1,2,\cdots)$ 时 ξ 的条件数学期望，人们能够怎样计算给定这些集合的可数和时 ξ 的条件数学期望，从而也就能够计算给定任意属于包含所有 B_i 的最小 σ 代数的集合时 ξ 的条件数学期望. 注意 (2) 式可改写成

$$\int_B \xi d\mathbf{P} = \int_B \mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{M}\}\mathbf{P}(d\omega),$$

而且这式子对于由$\mathfrak{M}$产生的 σ 代数中的任意集合 B 也成立，同时随机变量 $\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{M}\}$是关于这 σ 代数可测的.

容易验证，这些性质唯一地 (mod$\mathbf{P}$) 确定条件数学期望. 事实上，若存在两个 $\mathfrak{F}$ 可测的随机变量 $\eta_i(i = 1,2)$，使得对任意 $B \in \mathfrak{F}$($\mathfrak{F}$ 是一个 σ 代数)有

$$\int_B \eta_1 d\mathbf{P} = \int_B \eta_2 d\mathbf{P},$$

则 η_1 和 η_2 是 $\mathbf{P}$ 几乎处处相等的.

我们可以利用上面的讨论来定义一般情形的条件数学期望. 假定我们进行某一项试验，这试验可以用一事件 σ 代数 $\mathfrak{B}$ 来描述. 需要确定在试验结果为已知的假设下随机变量 ξ 的条件数学期望. 这个条件数学期望被看作是试验结果的函数，即看作是满足刚才得到的关系式的 $\mathfrak{B}$ 可测函数.

定义 1 设 $\mathfrak{B}$ 是任意包含在 $\mathfrak{S}$ 内的事件 σ 代数，ξ 是任一存在数学期望的随机变量. 我们称随机变量 $\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}\}$为**当给定 σ 代数 $\mathfrak{B}$ 时随机变量 ξ 的条件数学期望**，如果它是 $\mathfrak{B}$ 可测的，而且对任意 $B \in \mathfrak{B}$满足等式

$$\int_B \mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}\}d\mathbf{P} = \int_B \xi d\mathbf{P}. \tag{3}$$

随机变量 $\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}\}$ 的存在性与唯一性 (mod$\mathbf{P}$) 可由 Radon-Nikodym 定理直接得出. 事实上，(3)式的右端是 $\mathfrak{B}$ 上的 σ 有限可加集函数，它是对测度 $\mathbf{P}$ 绝对连续的. 因此，存在 $\mathfrak{B}$ 可测函数 $g(\omega)$，使得

$$\int_B \xi d\mathbf{P} = \int_B g(\omega)\mathbf{P}(d\omega).$$

这时函数 $g(\omega)$ 是唯一的 (mod$\mathbf{P}$). 按照定义，它是给定 σ 代数 $\mathfrak{B}$ 时 ξ 的条件数学期望.

注. 设 $\tilde{\mathfrak{B}}$ 是 $\mathfrak{B}$ 关于概率 $\mathbf{P}$ 的完备化,易证

$$\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}\} = \mathbf{E}\{\xi|\tilde{\mathfrak{B}}\} \quad (\text{mod}\mathbf{P}).$$

因为 $\tilde{\mathfrak{B}}$ 可测函数比 $\mathfrak{B}$ 可测函数类广,所以有时考虑给定完备的 σ 代数时的条件数学期望是适宜的.

给定 σ 代数 $\mathfrak{B}$ 时集合 A 的条件概率 $\mathbf{P}\{A|\mathfrak{B}\}$ 是定义为 $\xi = \chi_A(\omega)$ 这一特殊情形的条件数学期望.

定义 2 对于固定的集合 A，条件概率 $\mathbf{P}\{A|\mathfrak{B}\}$ 是 $\mathfrak{B}$ 可测随机变量,而且对于任意 $B \in \mathfrak{B}$ 满足方程

$$\int_B \mathbf{P}\{A|\mathfrak{B}\}d\mathbf{P} = \mathbf{P}(A \cap B). \tag{4}$$

条件数学期望和条件概率的性质 在本节中恒假设所讨论的随机变量具有有限或无穷的数学期望，而且所陈述和证明的论断是以概率 1 成立的.

a) 若 $\xi \geqslant 0$,则 $\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}\} \geqslant 0$.

b) 若 ξ 是 $\mathfrak{B}$ 可测随机变量,则

$$\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}\} = \xi.$$

特别地,若事件 B 是 $\mathfrak{B}$ 可测的,则

$$\mathbf{P}\{B|\mathfrak{B}\} = \chi_B.$$

c) $\mathbf{E}\mathbf{E}\{\xi|B\} = \mathbf{E}\xi$.

d) 若 $\mathbf{E}\xi_i \neq \infty, i = 1,2$,则

$$\mathbf{E}\{a\xi_1 + b\xi_2|\mathfrak{B}\} = a\,\mathbf{E}\{\xi_1|\mathfrak{B}\} + b\,\mathbf{E}\{\xi_2|\mathfrak{B}\}.$$

为了证明这个关系式,只须验证它的右端满足随机变量 $a\xi_1 + b\xi_2$ 的条件数学期望的定义.

特别地,令 $\xi_i = \chi_{B_i}, i = 1,2, B_1 \cap B_2 = \phi$, 我们就得到条件概率的可加性

$$\mathbf{P}\{B_1 \cup B_2|\mathfrak{B}\} = \mathbf{P}\{B_1|\mathfrak{B}\} + \mathbf{P}\{B_2|\mathfrak{B}\}.$$

e) 若$\{\xi_n, n=1,2,\cdots\}$是单调不减的非负随机变量序列,则

$$\lim \mathbf{E}\{\xi_n|\mathfrak{B}\} = \mathbf{E}\{\lim \xi_n|\mathfrak{B}\}.$$

这论断由把 Lebesgue 单调收敛定理应用于等式

$$\int_B \mathbf{E}\{\xi_n|\mathfrak{B}\}d\mathbf{P} = \int_B \xi_n d\mathbf{P}$$

直接得出.

对于条件概率来说，上面证明的性质给出:

若$\{B_n, n=1,2,\cdots\}$是单调递增的事件序列，则

$$\lim \mathbf{P}\{B_n|\mathfrak{B}\} = \mathbf{P}\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n|\mathfrak{B}\right\}.$$

若 $A_n(n=1,2,\cdots)$两两不相交,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{A_n|\mathfrak{B}\} = \mathbf{P}\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n|\mathfrak{B}\right\}. \tag{5}$$

注. 条件概率的最后一个性质并不意味着对于固定的 ω，条件概率可以看作是可数可加集函数. 对于给定的序列 A_n,等式(5)不成立的概率为零,但相应的例外事件与这序列的选取有关. 因此可能会没有一个ω使得(5)式对所有 $\mathfrak{S}$ 中序列 A_n 都成立.

f) 若随机变量ξ和σ代数$\mathfrak{B}$独立,则

$$\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}\} = \mathbf{E}\xi. \tag{6}$$

按照定义,随机变量ξ和σ代数$\mathfrak{B}$的独立性表示σ代数$\sigma\{\xi\}$和$\mathfrak{B}$是独立的. 因此,对任意 $B\in\mathfrak{B}$ 有

$$\int_B \xi d\mathbf{P} = \mathbf{E}\xi\chi_B = \mathbf{E}\xi\,\mathbf{P}(B).$$

故如令 $\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}\} = \mathbf{E}\xi$,则等式(3)成立.

从这一性质推得,若事件A独立于σ代数$\mathfrak{B}$,则

$$\mathbf{P}\{A|\mathfrak{B}\} = \mathbf{P}(A). \tag{7}$$

g) 若η是$\mathfrak{B}$可测随机变量,则

$$\mathbf{E}\{\xi\eta|\mathfrak{B}\} = \eta\,\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}\}. \tag{8}$$

只须就η是非负的情形证明这性质. 若 $\eta=\chi_{B_1}$, $B_1\in\mathfrak{B}$,则

$$\int_B \eta\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}\}d\mathbf{P} = \int_{B\cap B_1}\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}\}d\mathbf{P} = \int_{B\cap B_1}\xi d\mathbf{P} = \int_B \eta\xi d\mathbf{P},$$

于是等式(8)成立. 又因为使得(8)式成立的随机变量 η 所成的类对线性运算和单调非负序列的极限运算是封闭的，所以它包含任意的 $\mathfrak{B}$ 可测非负随机变量 η.

因为条件数学期望 $\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}\}$是一个随机变量，故可讨论给定另一个 σ 代数 $\mathfrak{B}_1$ 时这变量的条件数学期望,这样我们就得到重迭的条件数学期望 $\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}\}|\mathfrak{B}_1\}$. 现在来建立这种运算的重要性质. 注意,若 $\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{B}_1$ 是两个 σ 代数且 $\mathfrak{B}_1\subset\mathfrak{B}$,则由条件数学期望的定义得 $\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}_1\}|\mathfrak{B}\}=\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}_1\}$.

下面的性质更为深刻:

h) 设 $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{B}_1$,则

$$\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}_1\}|\mathfrak{B}\}=\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}\}.$$

事实上,若 $B\in\mathfrak{B}$,则 $B\in\mathfrak{B}_1$,因而

$$\int_B\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}_1\}|\mathfrak{B}\}d\mathbf{P}=\int_B\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}_1\}d\mathbf{P}$$

$$=\int_B\xi d\,\mathbf{P}=\int_B\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}\}d\,\mathbf{P}.$$

比较这串等式的两端即得

$$\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}_1\}|\mathfrak{B}\}=\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}\}.$$

从刚才证明的性质推得,若 $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{B}_1$,而 η 是 $\mathfrak{B}_1$ 可测随机变量,则

$$\mathbf{E}\{\xi\eta|\mathfrak{B}\}=\mathbf{E}\{\eta\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}_1\}|\mathfrak{B}\}. \tag{9}$$

下述论断是 g) 的推广，它常常是有用的. 设 $\zeta=h(\omega)$ 和 $\eta=s(\omega)$ 分别是从$\{\Omega,\mathfrak{S}\}$到$\{\mathscr{X},\mathfrak{U}\}$和$\{\mathfrak{Z},\mathfrak{C}\}$中的可测映象,又设 $g(x,z)$ 是定义在 $\mathscr{X}\times\mathfrak{Z}$ 上的 $\sigma\{\mathfrak{U}\times\mathfrak{C}\}$可测数值函数,而且 $g(\zeta,\eta)$ 的数学期望是有限的.

i) 若 η 是 $\mathfrak{B}$ 可测的 ($\mathfrak{B}\subset\mathfrak{S}$),则

$$\mathbf{E}\{g(\zeta,\eta)|\mathfrak{B}\}=\mathbf{E}\{g(\zeta,z)|\mathfrak{B}\}|_{z=\eta}.$$

为了证明这一论断,我们注意到,由 g) 知,对于形如 $g(x,z)=\sum_{k=1}^{n}g_k(x)v_k(z)$的函数 $g(x,y)$，上式成立. 而对于任意使得 $\mathbf{E}|g(\zeta,\eta)|<\infty$ 的函数 $g(x,z)$，则因存在具有以上形式的函数

序列 $h_n(x,z)$,使得 $h_n(\zeta,\eta)$ 以概率 1 收敛于 $g(\zeta,\eta)$，而且这函数在 $\mathscr{L}$ 中,由此即得欲证的论断.

给定一随机变量时的条件数学期望 设 ζ 是取值 $z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots$的随机变量,$\mathbf{P}(\zeta=z_n)>0$,$B_n$ 表示事件$\{\zeta=z_n\}$. 以

$$\mathbf{P}_n(A)=\frac{\mathbf{P}(A\cap B_n)}{\mathbf{P}(B_n)}$$

表示当给定 $\zeta=z_n$ 时 A 的条件概率. 我们用下式

$$\mathbf{E}\{\xi|\zeta=z_n\}=\int_{\Omega}\xi d\,\mathbf{P}_n=\frac{1}{\mathbf{P}(B_n)}\int_{B_n}\xi d\mathbf{P}$$

定义当给定 $\zeta=z_n$ 时随机变量 ξ 的条件数学期望.

若把这数列看作是确定 ζ 值的试验结果的函数，我们就得到当给定随机变量 ζ 时 ξ 的条件数学期望这一概念，它就是当 $\zeta=z_n$ 时取值 $\mathbf{E}\{\xi|\zeta=z_n\}$ 的随机变量 $\mathbf{E}\{\xi|\zeta\}$. 这个定义和先前给出的当给定空间Ω的一个可数分划时的条件数学期望定义是一致的. 此时事件$\{B_n;n=1,2,\cdots\}$起$\mathfrak{M}$的作用. 这一注解指明给出一般定义的方法.

考虑从可测空间$\{\Omega,\ \mathfrak{S}\}$到可测空间 $\{\mathscr{X},\ \mathfrak{B}\}$中的可测映像 $\zeta=g(\omega)$,于是 ζ 是取值于 $\mathscr{X}$ 的随机元. 设 $\mathfrak{F}_\zeta$ 是由映象 ζ 产生的σ 代数: $\mathfrak{F}_\zeta=\{S:S=g^{-1}(B),B\in\mathfrak{B}\}$.

定义 3 随机变量 $\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{F}_\zeta\}$称作**给定随机元** ζ **时随机变量** ξ **的条件数学期望**.

这定义等价于: 对任意 $B\in\mathfrak{B}$

$$\int_{g^{-1}(B)}\mathbf{E}\{\xi|\zeta\}d\mathbf{P}=\int_{g^{-1}(B)}\xi d\,\mathbf{P}. \tag{10}$$

类似地,给定 ζ 时的条件概率定义为

$$\mathbf{P}\{A|\zeta\}=\mathbf{P}\{A|\mathfrak{F}_\zeta\}.$$

定理 1 给定随机元 ζ 时的条件数学期望是 ζ 的 $\mathfrak{B}$ 可测函数:

$$\mathbf{E}\{\xi|\zeta\}=s(\zeta),$$

其中 $s(x)$是 $\mathfrak{B}$ 可测函数.

证. 设 ξ 是非负的. 我们有

$$\int_{g^{-1}(B)} \mathbf{E}\{\xi|\zeta\}d\mathbf{P} = \int_{g^{-1}(B)} \xi d\mathbf{P} = q(B). \qquad (11)$$

显然,$q(B)$是$\mathfrak{B}$上的σ有限测度. 而且,若$\mathbf{P}\{g^{-1}(B)\} = 0$,则$q(B) = 0$,即$q$是对测度$\mathbf{P}_g$绝对连续的,这里$\mathbf{P}_g(A) = \mathbf{P}\{g^{-1}(A)\}$. 根据 Radon-Nikodym 定理知,存在$\mathfrak{B}$可测的非负函数$s(x)$,使得

$$q(B) = \int_B s(x)\mathbf{P}_g(dx).$$

应用变量代换法则,我们有

$$q(B) = \int_{g^{-1}(B)} s(g(\omega))\mathbf{P}(d\omega).$$

把上式和(11)式比较,即得等式

$$\mathbf{E}\{\xi|\zeta\} = s(g(\omega)) = s(\zeta).$$

上述定理表明,给定随机元ζ时的条件数学期望可以看作是测度空间$\{\mathscr{X},\mathfrak{B},\mathbf{P}_g\}$中变量$x$的函数,然而在条件数学期望原来的定义中,它是基本事件ω的函数. 函数$s(x)$由下式唯一地确定:对任意$B\in\mathfrak{B}$

$$\int_{g^{-1}(B)} \xi d\mathbf{P} = \int_B s(x)\,\mathbf{P}_g(dx). \qquad (12)$$

我们现在引入一些命题,它们可直接从上述关于条件数学期望的性质推出.

1) 设ξ和ζ独立,则$\mathbf{E}\{\xi|\zeta\} = \mathbf{E}\xi$.

2) 若ξ是$\mathfrak{F}_\zeta$可测的随机变量,则

$$\mathbf{E}\{\xi|\zeta\} = \xi.$$

3) 若$\eta_i = g_i(\omega)$是从$\{\Omega,\mathfrak{S}\}$到$\{\mathscr{X}_i, \mathfrak{B}_i\}$ $(i = 1,2)$中的可测映象,则

$$\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\xi|(\eta_1,\eta_2)\}|\eta_1\} = \mathbf{E}\{\xi|\eta_1\},$$

其中(η_1,η_2)表示从空间$\{\Omega,\mathfrak{S}\}$到乘积空间$\{\mathscr{X}_1\times\mathscr{X}_2, \sigma\{\mathfrak{B}_1\times\mathfrak{B}\}\}$的映象$\omega\to(g_1(\omega),g_2(\omega))$.

正则概率 前面已经提到,一般说来,条件概率不能看作是依赖于基本事件的测度. 但是,在许多情形中这种解释是可行的,下

面给出问题的确切提法.

条件概率 $\mathbf{P}\{A|\mathfrak{B}\}=h(\omega,A)$ 是 $\omega\in\Omega$ 和 $A\in\mathfrak{S}$ 的函数. 对于每一固定的 A，它是以零概率事件的精确度被确定的. 现在要问,能否找到函数 $p(\omega,A)(\omega\in\Omega,A\in\mathfrak{S})$,使得

a) 对固定的 ω,函数 $p(\omega,A)$是 σ 代数 $\mathfrak{S}$ 上的概率;

b) 对任意固定的 $A,h(\omega,A)=p(\omega,A)$几乎必然成立.

定义 4 如果存在满足要求 a)和 b)的函数 $p(\omega,A)$,则称条件概率族 $\mathbf{P}\{A|\mathfrak{B}\}$是**正则的**. 在这种情况下,我们把 $\mathbf{P}\{A|\mathfrak{B}\}$. 和 $p(\omega,A)$看作是等同的.

在正则的情形中,正像人们所期待的那样,条件数学期望被表示成以条件概率为测度的积分.

定理 2 若 $\mathbf{P}\{A|\mathfrak{B}\}$ 是正则的条件概率, $\xi=f(\omega)$, 则

$$\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{B}\}=\int f(\omega)\mathbf{P}(d\omega|\mathfrak{B})\ (\mathrm{mod}\mathbf{P}). \tag{13}$$

这论断的证明并不困难. 首先,按照定义,当 ξ 是某事件 $A\in\mathfrak{S}$ 的示性函数时论断真确. 因为等式(13)两边作为 f 的泛函是线性的,故论断对简单函数也成立. 再对单调递增的简单函数序列取极限即能证明,对任意非负随机变量 ξ,(13) 式成立. 最后,再次利用等式两边的线性性质就可完成本定理的证明.

在某些情况下,必须着重强调条件概率是基本事件的函数,这时我们写 $\mathbf{P}\{A|\mathfrak{B}\}=\mathbf{P}_{\mathfrak{B}}(\omega,A)$,或者当 σ 代数 $\mathfrak{B}$ 是固定时简写为 $\mathbf{P}(\omega,A)$. 类似地,$\mathbf{P}_{\xi}(\omega,A)$是 $\mathbf{P}\{A|\xi\}$的另一种表示方法.

因为条件概率不一定是正则的，故对这概念作某种推广是适宜的.

设$\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$是可测空间, ζ 是$\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$中的随机元, $\mathfrak{F}$ 是某一 σ 代数, $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{S}$.

定义 5 定义在 $\Omega\times\mathfrak{B}$ 上的函数 $Q(\omega,B)$称作**给定 σ 代数 $\mathfrak{F}$ 时随机元 ζ 的正则条件分布**,如果

a) 对固定的 $B\in\mathfrak{B},Q(\omega,B)$是 $\mathfrak{F}$ 可测的;

b) 对固定的 $\omega,Q(\omega,B)$以概率 1 是 $\mathfrak{B}$ 上的概率测度;

c) 对每一 $B\in\mathfrak{B}, Q(\omega,B)=\mathbf{P}\{(\zeta\in B)|\mathfrak{F}\}\ (\bmod \mathbf{P})$.

最后这一要求等价于：对任意 $F\in\mathfrak{F}$

$$\int_F Q(\omega,B)\mathbf{P}(d\omega)=\mathbf{P}\{(\zeta\in B)\cap F\}. \tag{14}$$

定理 3 设 $\mathscr{X}$ 是完备可分距离空间，$\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{X}$ 中的 Borel 集合的 σ 代数，ζ 是$\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$中的随机元，$\mathfrak{F}$ 是任一 σ 代数，$\mathfrak{F}\subset\mathfrak{S}$. 则存在给定 σ 代数 $\mathfrak{F}$ 时随机元 ζ 的正则条件分布.

证. 令 $q(B)=\mathbf{P}\{(\zeta\in B)\}$. 根据测度论中的定理知道，对于任何 n，可以找到 $\mathscr{X}$ 中的紧集 K_n，使得 $q(\mathscr{X}\setminus K_n)<1/n$（参看第 5 章 § 2，定理 1 的注）.

以 $\mathscr{C}(\mathscr{X})$ 表示 $\mathscr{X}$ 上的有界连续实函数空间，它是一个距离空间，其距离为 $\rho(f,g)=\|f(x)-g(x)\|=\{\sup|f(x)-g(x)|, x\in\mathscr{X}\}$.

空间 $\mathscr{C}(K_n)$是可分的. 设 $\{f_{nk}(x), k=1,2,\cdots\}$是在$\mathscr{C}(K_n)$中处处稠密的可数网. 我们把 $f_{nk}(x)$ 延拓到整个 $\mathscr{X}$ 上，使得 $\{\sup|f_{nk}(x)|, x\in\mathscr{X}\}=\{\max|f_{nk}(x)|, x\in K_n\}$. 令 $\chi_n=\chi_n(\zeta)$，这里 $\chi_n(x)$是紧集 K_n 的示性函数. 根据条件数学期望的性质得知，存在 $D_0\in\mathfrak{S}$，使得 $\mathbf{P}(D_0)=0$ 且当 $\omega\bar{\in}D_0$ 时对所有 n,k,j 和有理数 r，以下关系式成立：

若 $f_{nk}\geqslant 0$，则 $\mathbf{E}\{f_{nk}(\zeta)|\mathfrak{F}\}\geqslant 0$;

若 $|f_{nk}(x)-f_{nj}(x)|<r$，则 $\mathbf{E}\{|f_{nk}(\zeta)-f_{nj}(\zeta)|\mathfrak{F}\}\leqslant r$;

$$\mathbf{E}\{rf_{nk}(\zeta)|\mathfrak{F}\}=r\mathbf{E}\{f_{nk}(\zeta)|\mathfrak{F}\}$$

$$\mathbf{E}\{f_{nk}(\zeta)\pm f_{nj}(\zeta)|\mathfrak{F}\}=\mathbf{E}\{f_{nk}(\zeta)|\mathfrak{F}\}\pm\mathbf{E}\{f_{nj}(\zeta)|\mathfrak{F}\},$$

$$\lim_{m\to\infty}\mathbf{E}\{(1-\chi_m)f_{nk}(\zeta)|\mathfrak{F}\}=0.$$

另一方面，对任意 $F\in\mathfrak{F}$

$$\left|\int_F(\mathbf{E}\{f(\zeta)|\mathfrak{F}\}-\mathbf{E}\{f_{nk}(\zeta)|\mathfrak{F}\})d\mathbf{P}\right|$$

$$\leqslant\int_F|f(x)-f_{nk}(x)|q(dx). \tag{15}$$

因此，若选取任意序列 $f_{nk_n}(x)$，使得$\|\chi_n(f(x)-f_{nk_n}(x))\|\to 0$

（显然，对于任意 $f\in\mathscr{C}(\mathscr{X})$，这样的序列总是可以选出的），则 $f_{nk_n}(x)$ 一致有界，而且

$$\int_{\mathscr{X}}|f(x)-f_{nk_n}(x)|q(dx)\to 0.$$

又由(15)得

$$\mathbf{E}\{f(\zeta)|\mathfrak{F}\}=\lim\mathbf{E}\{f_{nk_n}(\zeta)|\mathfrak{F}\}\ (\mathrm{mod}\mathbf{P}),$$

上式右边的极限不依赖于逼近序列的选取($\omega\bar{\in}D_0$)。因为条件数学期望仅是按 mod**P** 定义，我们规定对任意 $f\in\mathscr{C}(\mathscr{X})$，$\mathbf{E}\{f(\zeta)|\mathfrak{F}\}$ 由上式定义。

这样定义的条件数学期望具有下列性质(对所有 $\omega\bar{\in}D_0$)：

若 $f\geqslant 0$，则 $\mathbf{E}\{f(\zeta)|\mathfrak{F}\}\geqslant 0$.

$$\mathbf{E}\{\alpha_1f_1(\zeta)+\alpha_2f_2(\zeta)|\mathfrak{F}\}=\alpha_1\mathbf{E}\{f_1(\zeta)|\mathfrak{F}\}+\alpha_2\mathbf{E}\{f_2(\zeta)|\mathfrak{F}\};$$

$$\mathbf{E}\{f(\zeta)(1-\chi_n(\zeta))|\mathfrak{F}\}\to 0,\text{当 } n\to\infty.$$

于是 $L_\omega(f)=\mathbf{E}\{f(\zeta)|\mathfrak{F}\}$ 是 $\mathscr{C}(\mathscr{X})$ 上的一个正线性泛函，由线性泛函的表现定理(参看第 5 章，§ 2 定理 1)知，在 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 上存在测度 $q_\omega(B)$，使得

$$\mathbf{E}\{f(\zeta)|\mathfrak{F}\}=\int_{\mathscr{X}}f(x)q_\omega(dx).$$

容易验证，这公式可以作为任意 $\mathfrak{B}$ 可测非负(或 q 可积)函数的条件数学期望的定义。令 $f(x)=\chi_B(x)$，我们就得到

$$\mathbf{P}\{B|\mathfrak{F}\}=q_\omega(B),\qquad \text{对于 } \omega\notin D_0$$

和

$$\mathbf{P}\{B|\mathfrak{F}\}=q(B),\text{对于 } \omega\in D_0.$$

由此即得欲证的论断.

设 ζ_1 和 ζ_2 分别是 $\{\mathscr{Y}_1,\mathfrak{B}_1\}$ 和 $\{\mathscr{Y}_2,\mathfrak{B}_2\}$ 中的随机元，这里 $\mathscr{Y}_i$ 是完备可分距离空间，$\mathfrak{B}_i$ 是 $\mathscr{Y}_i$ 中的 Borel 集合的 σ 代数 ($i=1,2$)。令

$$\mathscr{Y}^{(1,2)}=\mathscr{Y}_1\times\mathscr{Y}_2,\mathfrak{B}^{(1,2)}=\sigma\{\mathfrak{B}_k,k=1,2\}.\qquad(16)$$

序列 $\zeta^{(1,2)}=(\zeta_1,\zeta_2)$ 可以看作是 $\{\mathscr{Y}^{(1,2)},\mathfrak{B}^{(1,2)}\}$ 中的随机元，而 $\mathscr{Y}^{(1,2)}$ 是一完备可分距离空间.

设 q_i 表示 $\zeta_i(i=1,2)$ 的分布，$q^{(1,2)}$ 是 $\zeta^{(1,2)}$ 的分布，而 $q^{(2|1)}$ 是当给定由随机元 ζ_1 产生的 σ 代数 $\mathfrak{F}_{\zeta_1}$ 时 ζ_2 的正则条件分布。因为 $q^{(2|1)}$ 是 $\mathfrak{F}_{\zeta_1}$ 可测函数，故

$$q^{(2|1)}(B_2,\omega)=q(B_2,\zeta_1),$$

其中 $B_2\in\mathfrak{B}$, $q(B_2, y)$是 $\mathfrak{B}_1$ 可测函数. 根据条件概率的定义得

$$\int_{g_1^{-1}(B_1)}q(B_2,\zeta_1)d\,\mathbf{P}=q^{(1,2)}(B_1\times B_2),$$

其中 B_1 是 $\mathfrak{B}_1$ 中的任意集合，$\zeta_1=g_1(\omega)$.

按照变量代换法则，这等式可写为

$$q^{(1,2)}(B_1\times B_2)=\int_{B_1}q(B_2,y_1)dq_1$$

或

$$q^{(1,2)}(B_1\times B_2)=\int_{\mathscr{Y}_1}\chi_{B_1}^{(1)}(y_1)\left(\int_{\mathscr{Y}_2}\chi_{B_2}^{(2)}(y_2)q\;(d\,y_2,\;y_1)\right)dq_1,$$

这里 $\chi^{(i)}$ 是空间 $\mathscr{Y}_i$ 中集合的示性函数.从上式得知，对任意 $\mathfrak{B}^{(1,2)}$ 可测非负函数 $f(y_1,y_2)$有

$$\int_{\mathscr{Y}^{(1,2)}}f(y_1,y_2)\,dq^{(1,2)}=\int_{\mathscr{Y}_1}\left(\int_{\mathscr{Y}_2}f(y_1,y_2)q(dy_2,y_1)\right)dq_1.\qquad(17)$$

事实上，使得(17)式成立的函数类具有线性性质，而且对于单调序列的极限运算是封闭的. 因为它包含形如 $\chi^{(1)}\chi^{(2)}$ 的函数，从而也包含这些函数的线性组合. 另一方面，任一 $\mathfrak{B}^{(1,2)}$ 可测函数可以用形如 $\chi^{(1)}\chi^{(2)}$ 的函数的线性组合的单调递增序列来逼近.

注意，对于变号函数来说，若(17)式的一端有意义的话，则等式仍成立. 由(17)式可得

$$\mathbf{E}\{f(\zeta_1,\zeta_2)|\mathfrak{F}_{\zeta_1}\}=\int_{\mathscr{Y}_2}f(\zeta_1,y_2)\,q(dy_2,\zeta_1).\qquad(18)$$

我们能够以如下更一般的形式给出上面所得的结果. 设 ζ_k 是$\{\mathscr{Y}_k,\ \mathfrak{B}_k\}$中的随机元，$\mathscr{Y}_k$ 是完备可分距离空间. 令 $\mathscr{Y}^{(1,s)}=\prod_{k=1}^{s}\mathscr{Y}_k$, $\mathfrak{B}^{(1,s)}=\sigma\{\mathfrak{B}_k,\ k=1,\cdots,s\}$, $\eta_s=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_s)$. 又设 q_k 是$\{\mathscr{Y}_k,\mathfrak{B}_k\}$中随机元 ζ_k 的分布，$q^{(s)}=q^{(s)}(B_s,\zeta_1,\cdots,\zeta_{s-1})$是给定 σ 代数 $\mathfrak{F}_{\eta_{s-1}}=\mathfrak{F}_{(\zeta_1,\cdots,\zeta_{s-1})}$ 时随机元 ζ_s 的正则条件分布. 根据

公式

$$\mathbf{E}\{f|\mathfrak{F}_{\zeta_1}\}=\mathbf{E}\{\cdots\{\mathbf{E}\{f|\mathfrak{F}_{\eta_{n-1}}\}|\mathfrak{F}_{\eta_{n-2}}\}\cdots|\mathfrak{F}_{\eta_1}\}$$

并反复应用(18)式，我们就得到

$$\mathbf{E}\{f(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)|\mathfrak{F}_{\zeta_1}\}=\int_{\mathscr{Y}_2}\cdots\int_{\mathscr{Y}_{n-1}}\left(\int_{\mathscr{Y}_n}f(\zeta_1,y_2,\cdots,y_n)\right.$$

$$\left.\times q^{(n)}(dy_n,\zeta_1,y_2,\cdots,y_{n-1})\right)q^{(n-1)}(dy_{n-1},\zeta_1,y_2,\cdots,y_{n-2})$$

$$\times\cdots\times q^{(2)}(dy_2,\zeta_1),\tag{19}$$

$$\mathbf{E}\{f(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\}=\int_{\mathscr{Y}_1}\cdots\int_{\mathscr{Y}_n}f(y_1,\cdots,y_n)$$

$$\times q^{(n)}(dy_n,y_1,\cdots,y_{n-1})\times q^{(n-1)}(dy_{n-1},y_1,\cdots,y_{n-2})$$

$$\times\cdots\times q^{(2)}(dy_2,y_1)q_1(dy_1).\tag{20}$$

条件密度 设$\{\mathscr{X},\mathfrak{A},m\}$是一测度空间，$\zeta=g(\omega)$是从$\{\Omega,\mathfrak{S}\}$到$\{\mathscr{X},\mathfrak{A}\}$中的可测映象.

我们说随机元具有(关于测度m的)分布密度 $\rho(x)$，如果对于任意 $A\in\mathfrak{A}$ 有

$$\mathbf{P}(\zeta\in A)=\int_A\rho(x)m(dx).$$

根据 Radon-Nikodym 定理得知，随机元ζ具有分布密度的充分必要条件是测度$\mathbf{P}_g$对m绝对连续，这里 $\zeta=g(\omega)$.

设$\{\mathscr{Y},\mathfrak{B},q\}$是另一测度空间，而 $\eta=h(\omega)$是$\{\mathscr{Y},\mathfrak{B}\}$中的随机元. 我们可以把$(\zeta,\eta)$看作是从$(\Omega,\mathfrak{S})$到乘积空间$\{\mathscr{X}\times\mathscr{Y},\sigma\{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}\}\}$中的一个可测映象. 事实上，若 $\sigma\{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}\}$中的集合$C$形如 $C=A\times B$，$A\in\mathfrak{A}$，$B\in\mathfrak{B}$，则事件$\{(\zeta,\eta)\in C\}=\{\zeta\in A\}\cap\{\eta\in B\}\in\mathfrak{S}$. 所以，任一属于包含所有形如$\{(\zeta,\eta)\in A\times B\}$的最小$\sigma$代数的事件，亦即任一形如$\{(\zeta,\eta)\in C\}$，$C\in\sigma\{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}\}$的事件是$\mathfrak{S}$可测的. 假定$(\zeta,\eta)$具有关于测度 $m\times q$ 的分布密度$\rho(x,y)$，则对于任意 $A\in\mathfrak{A}$，$B\in\mathfrak{B}$ 有

$$\mathbf{P}\{\zeta\in A,\eta\in B\}=\int_A\int_B\rho(x,y)m(dx)q(dy).$$

函数 $\rho(x,y)$ 称作随机元ζ和η的联合分布密度. 从联合密度函数的存在可以推知，随机元ζ和η各自具有关于相应测度的密度.

事实上，

$$\mathbf{P}(\zeta\in A)=\int_A\int_{\mathscr{Y}}\rho(x,y)m(dx)q(dy)=\int_A\rho_\zeta(x)m(dx),$$

其中

$$\rho_\zeta(x)=\int_{\mathscr{Y}}\rho(x,y)q(dy).$$

类似地，

$$\mathbf{P}(\eta\in B)=\int_B\rho_\eta(y)q(dy),$$

其中

$$\rho_\eta(y)=\int_{\mathscr{X}}\rho(x,y)\,m(dx).$$

现在我们指出，当(ζ,η)具有分布密度 $\rho(x,y)$时如何计算条件数学期望．由条件数学期望的定义有

$$\begin{aligned}\int_{g^{-1}(A)}\mathbf{E}\,\{f(\eta)|\zeta\}d\,\mathbf{P}&=\int_{g^{-1}(A)}f(\eta)d\mathbf{P}\\&=\mathbf{E}\,f(\eta)\chi_A(\zeta)=\int_{\mathscr{X}}\int_{\mathscr{Y}}f(y)\chi_A(x)\rho(x,y)m(dx)\,q(dy)\\&=\int_A\left(\int_{\mathscr{Y}}f(y)\,\frac{\rho(x,y)}{\rho_\zeta(x)}q(dy)\right)\rho_\zeta(x)m(dx)\\&=\int_{g^{-1}(A)}\bar{f}(\zeta)d\,\mathbf{P},\end{aligned}$$

其中

$$\bar{f}(x)=\int_{\mathscr{Y}}f(y)\,\frac{\rho(x,y)}{\rho_\zeta(x)}q(dy).$$

于是

$$\mathbf{E}\,\{f(\eta)|\zeta\}=\int_{\mathscr{Y}}f(y)\,\frac{\rho(\zeta,y)}{\rho_\zeta(\zeta)}q(dy).$$

$\dfrac{\rho(x,y)}{\rho_\zeta(x)}=\rho(y|x)$ 称作给定 $\zeta=x$ 时随机元 η 的条件分布密度，利用这个量我们可以由公式

$$\mathbf{E}\{f(\eta)|\zeta\}=\int_{\mathscr{Y}}f(y)\rho(y|\zeta)q(dy)$$

计算给定ζ时函数$f(\eta)$的条件数学期望.

§4. 随机函数和随机映象

定义 设$\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$是一给定的概率空间. 如果某一试验的现实是利用确定性参数$x(x\in X)$的函数$f(x)$来描述,我们就说在$\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$上定义了一个随机函数. 于是,随机函数就是映象:$\omega\to f(x)=f(x,\omega),\omega\in\Omega$,此外还要求对于固定的$x$,$f(x,\omega)$是一个随机变量(或随机元).

一般的定义如下:设X是某一集合,$\{\mathscr{Y}, \mathfrak{B}\}$是一可测空间.

定义 1 从$X\times\Omega$到$\mathscr{Y}$的映象称作从集合X到可测空间$\{\mathscr{Y},\mathfrak{B}\}$的**随机映象**,如果对任意固定的$x$,它是从$\{\Omega, \mathfrak{S}\}$到$\{\mathscr{Y},\mathfrak{B}\}$的可测映象,即对任意$B\in\mathfrak{B}$,

$$\{\omega:\zeta(x)\in B\}\in\mathfrak{S}.$$

今后,我们还使用《取值于$\mathscr{Y}$的随机函数》这一术语来代替《随机映象》,这时X称为随机函数的参数. 当x是实数直线或者是它的区间时,可以把随机函数的参数解释为时间并将X和x分别改写为T和t,同时把随机函数称作**随机过程**. 如果随机函数的参数取非负整数值$(X=T_+=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\})$或任意整数值$(X=T=\{\cdots,-n,-n+1,\cdots,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\})$,随机函数就称为离散时间的随机过程. 如果$X$是有限维 Euclid 空间$\mathscr{R}^m$或其中的区域,则有时把$\zeta(x)$称为**随机场**.

一般定义的下述特殊情形是令人感兴趣的:假设Ω是函数空间,$\omega=\omega(x),x\in X,\sigma$代数$\mathfrak{S}$包含空间$\Omega$的所有形如

$$\{\omega:\omega(x_0)\in B\}.$$

的集合,其中$x_0\in X$和$B\in\mathfrak{B}$是任意的,$\mathbf{P}$是$\mathfrak{S}$上的任意概率测度. 把随机函数$g(x,\omega)=\omega(x)$和这样的概率空间联系起来是很自然的. 为了方便起见,在某些问题中,我们把随机函数$g(x,\omega)=\omega(x)$和这种类型的概率空间$\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$看作是一样的.

不难看出,随机函数的一般定义可以归结为刚才描述的特殊

情形．事实上，若随机函数是作为二元函数 $\zeta(x)=g(x,\omega)$给出的，则令 $u=g(x,\omega)$，其中 ω 是固定的，$\omega\in\Omega$，又以 U 表示所有函数$\{u:u=u_\omega(x)=g(x,\omega),\omega\in\Omega\}$的集合，我们就得到一个从集合 Ω 到 U 上的映象 S．这时集合 Ω 中的 σ 代数 $\mathfrak{S}$ 被映射为集合 U 中的 σ 代数 $\mathfrak{S}'$，而 $\mathfrak{S}$ 上的概率测度 $\mathbf{P}$ 被映射为 $\mathfrak{S}'$ 上的概率测度 $\mathbf{P}'$．对于任意固定的 $x,B\in\mathfrak{B}$，因为

$$S^{-1}\{u:u(x)\in B\}=\{\omega:g(x,\omega)\in B\}\in\mathfrak{S},$$

故集合$\{u:u(x)\in B\}$属于 $\mathfrak{S}'$．

于是，我们得到一个概率空间$\{U,\mathfrak{S}',\mathbf{P}'\}$，这里 U 是函数 $u=u(x)$的集合，而且对于任意 $n,x_1,x_2,\cdots,x_n(x_k\in X,k=1,\cdots,n)$，$\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$上的随机元序列

$$g(x_1,\omega),g(x_2,\omega),\cdots,g(x_n,\omega)$$

的分布与序列

$$u(x_1),u(x_2),\cdots,u(x_n)$$

的分布是相同的．

因此，在一定的意义上随机函数等价于某一带有概率测度的函数空间，亦即等价于以某一函数空间为基本事件空间的概率空间．

设 $\zeta(x)(x\in X)$是取值于$\{\mathscr{Y},\mathfrak{B}\}$的随机函数，$n$ 是任一整数，$x_k(k=1,2,\cdots,n)$是 X 中的任意点．考虑空间$\{\mathscr{Y}^n,\mathfrak{B}^n\}$中由序列

$$\{\zeta(x_1),\zeta(x_2),\cdots,\zeta(x_n)\} \tag{1}$$

定义的随机元，它对应于 $\mathfrak{B}^n$ 上的测度 $\mathbf{P}_{x_1x_2\cdots x_n}(B)$：

$$\mathbf{P}_{x_1x_2\cdots x_n}(B)=\mathbf{P}\{\omega:(\zeta(x_1),\zeta(x_2),\cdots,\zeta(x_n))\in B\},B\in\mathfrak{B}^n. \tag{2}$$

测度(2)称作随机函数 $\zeta(x)$的**边沿分布**．

随机函数的边沿分布族具有两个明显的性质：

1. $$\mathbf{P}_{x_1x_2\cdots x_{n+m}}(B\times\mathscr{Y}^m)=\mathbf{P}_{x_1x_2\cdots x_n}(B), \tag{3}$$

其中 $B\in\mathfrak{B}^n$．

2. 设 s 是 X^n 中按如下规则作用的点映象，$s(x_1,x_2,\cdots,x_n)=$

$(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n})$，其中$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$是附标$(1, 2, \cdots, n)$的某一排列，而 S 是 $\mathscr{Y}^n$ 中对应的集合映象．则对任意 B 和 n 有

$$\mathbf{P}_{s(x_1, x_2, \cdots, x_n)}(SB) = \mathbf{P}_{x_1, x_2, \cdots, x_n}(B). \tag{4}$$

性质(3)和(4)称作边沿分布族的相容性条件．

我们现在回到随机函数的一般定义．前面讨论过的关于等价随机变量的实际上不加区分这一论点对于随机函数的情形也是很重要的．通常认为，从实际的观点看来，试验只允许人们区分有关随机函数边沿分布的假设．

于是，人们不能借助试验资料来区分两个有相同边沿分布（对任意 n 和 $x_k \in X$）的随机函数．因此我们采用下面的定义．

定义 2 两个取值于 $\mathscr{Y}$ 但可能是给定在不同的概率空间$\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$和$\{\Omega', \mathfrak{S}', \mathbf{P}'\}$上的随机函数 $\zeta(x)$ 和 $\zeta'(x)$ $(x \in X)$ 称作广义随机等价的，如果对于任意整数 $n \geqslant 1$ 和任意 $x_k \in X$, $k = 1, 2, \cdots, n$，它们的边沿分布相等：

$$\mathbf{P}\{\omega: (\zeta(x_1), \zeta(x_2), \cdots, \zeta(x_n)) \in B\}$$
$$= \mathbf{P}'\{\omega': (\zeta'(x_1), \cdots, \zeta'(x_n)) \in B\}.$$

今后经常要用到在较狭窄意义上的随机函数等价性概念．

定义 3 给定在同一概率空间$\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$上的两个随机函数 $g_1(x, \omega)$ 和 $g_2(x, \omega)$ $(x \in X, \omega \in \Omega)$ 称作随机等价的，如果对于任意 $x \in X$ 有

$$\mathbf{P}\{g_1(x, \omega) \neq g_2(x, \omega)\} = 0.$$

显然，若 $g_1(x, \omega)$ 和 $g_2(x, \omega)$ 随机等价，则它们也是广义随机等价的．

在具体问题中如何给出随机函数呢？首先，可以从一般定义出发给出随机函数，这时要明确地指出概率空间$\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$和函数 $\zeta(x) = g(x, \omega)$ 并力求使它们尽可能简单．另一种方法是定义某函数空间 U 上的一个测度并讨论 U 上的函数 $\zeta(u) = u(x)$，这时空间 U 中的元素 $u = u(x)$ 是 X 上的函数．这种定义和研究随机函数的方法将在第五章中讨论，应用这方法的困难在于具体描述函数间空间中的测度的复杂性．当我们把给定的随机函数 $\zeta(u) =$

$u(x)$看作是变换 S 的结果，而 S 是定义在一具有较简单测度 μ 的多少较为简单的函数空间 $\mathscr{V}$ 上的时候，困难有时会有所减轻，这里 $u(x) = S(v), v \in \mathscr{V}$，而$\{\mathscr{V}, \mathfrak{S}, \mu\}$是一测度空间.

这样的方法将在第四章和第八章中论讨，这两章分别讨论随机函数的线性变换和非线性变换.

第三种(大概也是最通用的一种)给出随机函数的方法是基于描述它们的边沿分布族. 这是由于：第一，在许多实际问题中随机函数是用它们的边沿分布来刻划，通常并没有同时给出相应的概率空间. 第二，在许多情形中给出边沿分布较之给出相应的概率空间和函数 $g(x,\omega)$更为简单些. 其次，为解决许多重要的问题只须知道随机函数的边沿分布就足够了. 另一方面，正如我们即将证明的那样，在很广泛的假设之下，当给定了对任意整数 n 和 $x_k \in X$ 定义的$\{\mathscr{Y}^n, \mathfrak{B}^n\}$上的任一分布族 $\mathbf{P}_{x_1x_2\cdots x_n}(B)$时，人们能够构造一个概率空间$\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$及一个随机函数 $\zeta(x) = g(x,\omega)$，使得它的边沿分布族和给定的分布族相同.

定义 4 我们把相容的分布族$\{\mathbf{P}_{x_1x_2\cdots x_n}(B^n), n = 1, 2, \cdots, x_k \in X, B^n \in \mathfrak{B}^n\}$称作取值于 $\mathscr{Y}$ 的广义随机函数，其中 $\mathfrak{B}$ 是空间 $\mathscr{Y}$ 中的集合的 σ 代数，$\mathfrak{B}^n$ 是 $\mathfrak{B}$ 的 n 次幂.

对于广义随机函数，我们将使用标准的记号 $\xi(x), \eta(x), \cdots$，同时把 x 称作它的参数并把序列 $\{\xi(x_1), \cdots, \xi(x_n)\}$ 的分布和 $\mathbf{P}_{x_1x_2\cdots x_n}(B^n)$ 等同起来. 从上面叙述得知，每个广义随机函数(其中 $\mathscr{Y}$ 是完备可分距离空间而 X 是任意的)仍可以作为在基本的定义 1 的意义下的随机函数来讨论 (参看本节的定理 2).

另一方面，我们可以把一个广义随机函数和所有具有给定边沿分布的广义随机等价的随机函数类等同起来.

根据随机函数的边沿分布构造随机函数 按照广义随机等价的随机函数之定义，随机函数最主要的特征并不是概率空间和函数 $g(x, \omega) = \zeta(x)$ 的形式，而是它的边沿分布族. 这意味着，我们可以改变概率空间和函数 $g(x,\omega)$ 的形式而仅保持有限维分布族不变，这个最重要的事实被广泛用来获得一个随机函数的尽可

能简单和方便的表示．由此马上引起如下的问题：设给定一分布族

$$\{\mathbf{P}_{x_1x_2\cdots x_n}(B^{(n)});n=1,2,\cdots,x_k\in X,B^{(n)}\in\mathfrak{B}^n\},\qquad(5)$$

其中X是任意集合，$\{\mathscr{Y},\mathfrak{B}\}$是一可测空间．问是否存在以给定分布族为其边沿分布族的随机函数？

显然，分布族(5)不能是完全任意的，它起码要满足相容性条件(3)和(4)．

定义 5 如果存在概率空间$\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$和定义在 $X\times\Omega$ 上而取值于 $\mathscr{Y}$ 的二元函数 $g(x,\omega)$，使得对于每一固定的 $x\in X$ 函数 g 是 $\mathfrak{S}$ 可测的，并且随机函数 $g(x,\omega)$ 的边沿分布等于给定的分布族(5)，亦即对每一 $B^{(n)}\in\mathfrak{B}^n$

$$\mathbf{P}\{\omega:(g(x_1,\omega),g(x_2,\omega),\cdots,g(x_n,\omega))\in B^{(n)}\}$$
$$=\mathbf{P}_{x_1\cdots x_n}(B^{(n)}),\qquad(6)$$

则称概率空间$\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$和函数$g(x,\omega)$为分布族(5)的表示．

我们将要证明，在足够广泛的假设下，相容分布族(5)容许有某一表示．在这里，空间Ω由所有定义在X上而取值于 $\mathscr{Y}$ 的函数空间代替，基本事件就是x的函数 $\omega=\omega(x)$，并且 $g(x,\omega)=\omega(x)$．

定义 6 设Ω是所有定义在集合X上而取值于某一可测空间$\{\mathscr{Y},\mathfrak{B}\}$的函数 $\omega=\omega(x)$构成的空间，$B^{(n)}\in\mathfrak{B}^n$．我们把使得$\mathscr{Y}^n$中的点$\{\omega(x_1),\cdots,\omega(x_n)\}$属于 $B^{(n)}$ 的那些函数 $\omega(x)\in\Omega$ 组成的集合，即集合

$$C_{x_1\cdots x_n}(B^{(n)})=\{\omega:(\omega(x_1),\omega(x_2),\cdots,\omega(x_n))\in B^{(n)}\}$$

称作Ω中以坐标 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 上的集合 $B^{(n)}$ 为底的柱集，或者简称作柱集．

我们对柱集及其运算作一些说明．如果n及点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 固定，则在坐标 $x_1,x_2,\cdots,x_n$上的柱集与$\mathfrak{B}^n$中的集合之间存在同构关系：每一集合 $B^{(n)}\in\mathfrak{B}^n$ 确定一以它为底的柱集 $C_{x_1\cdots x_n}(B^{(n)})$；不同的底对应不同的柱集；底的和、差或交对应于柱集的和、差或交．这些可从柱集的定义直接得到．

在一般情形中讨论柱集的运算时，应当考虑到同一柱集可以在不同的坐标组合上给出. 因为显然有

$$C_{x_1\cdots x_n}(B^{(n)}) = C_{x_1\cdots x_n x_{n+1}\cdots x_{n+m}}(B^{(n)} \times \mathscr{Y}^m).$$

易见，任意两个柱集 $C = C_{x_1\cdots x_n}(B^{(n)})$和 $C' = C_{x'_1\cdots x'_m}(B^{(m)})$ 总可以看作是在同一坐标序列 $x''_1, \cdots, x''_p$（这序列既包含 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，也包含 $x'_1, x'_2, \cdots, x'_m$）上的柱集. 因此，在讨论有限多个柱集的代数运算时，可以认为它们是定义在一固定的坐标序列上的. 所以我们有

定理 1 所有柱集组成的类 $\mathfrak{C}$ 是集合的一个代数.

而且，若 X 包含无穷多个点，而 $\mathscr{Y}$ 至少包含两个点，则 $\mathfrak{C}$ 不是 σ 代数. 事实上，集合

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} C_{x_k}(\{y_k\})$$

不是柱集，这里$\{y_k\}(k = 1,2,\cdots)$是 $\mathscr{Y}$ 中的点列.

现在，我们证明下面的定理.

定理 2 (Колмогоров 定理)设 $\mathscr{Y}$ 是完备可分距离空间，则满足相容性条件(3)和(4)的分布族(5)容许有某一个表示.

我们首先定义在空间Ω的柱集代数 $\mathfrak{C}$ 上的集函数 $\mathbf{P}'(C)$ $(C \in \mathfrak{C})$如下：

$$\mathbf{P}'(C) = \mathbf{P}_{x_1\cdots x_n}(B^{(n)})$$

其中 C 是以坐标 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 上的 $B^{(n)}$ 为底的柱集. 相容性条件保证了函数 $\mathbf{P}'(C)$定义的唯一性. 设 $C_k(k = 1, 2, \cdots, n)$是一串柱集. 不失一般性，我们可以认为，它们是由在同一坐标序列 $x_1, x_2, \cdots, x_p$ 上的底 $B_k^{(p)}$ 给定的. 集合 C_k 的代数运算恰好对应于它们的底 $B_k^{(p)}$ 的同一运算. 因为测度 $\mathbf{P}_{x_1\cdots x_p}(B^{(p)})$在 $\mathscr{Y}^p$ 上是可数可加的，所以集函数 $\mathbf{P}'(C)$在 $\mathfrak{C}$ 上是有限可加的，于是余下只须把定义在代数 $\mathfrak{C}$ 上的集函数 $\mathbf{P}'(C)$ 延拓为在某一 σ 代数 $\mathfrak{C}$ 上的测度 $\tilde{\mathbf{P}}$. 根据著名的测度扩张定理，要做到这一点又只须验证对于任意 $C \in \mathfrak{C}$ 和集合 C 的任意覆盖$\{C_k\}$ $(k=1,2,\cdots,n,\cdots,$

$C_k \in \mathfrak{C}), C \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$, 不等式

$$\mathbf{P}'(C) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}'(C_k) \tag{7}$$

成立.

我们现在证明,若 $\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k = C(C \in \mathfrak{C}, C_k \in \mathfrak{C}, k = 1, 2, \cdots)$ 且 $C_k \cap C_r = \varnothing (k \neq r)$,则

$$\mathbf{P}'(C) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}'(C_k). \tag{8}$$

由此即可得知对于柱集 C 的 $\mathfrak{C}$ 中的任意覆盖,(7)式成立. 令

$$C \setminus \bigcup_{k=1}^{n} C_k = D_n,$$

集合 D_n 形成一单调递减的柱集序列,它们的交是空集,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = C \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k = \varnothing. \tag{9}$$

由 $\mathbf{P}'$ 的可加性得到等式 $\mathbf{P}'(C) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}'(C_k) + \mathbf{P}'(D_n)$. 为证(8)式只须证明

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}'(D_n) = 0.$$

假若不然,即

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}'(D_n) = L > 0. \tag{10}$$

我们以 B_n 表示柱集 D_n 的底, 而且设 D_n 是配置在坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_{m_n}$ 上的. 这时假定当 n 增大时,对应的点列 $x_1, x_2, \cdots, x_{m_n}$ 是不减的. 正像前面指出那样,这个假设并不失一般性.

对于每一 B_n, 可以找到紧集 K_n, 使得 $K_n \subset B_n$ 且

$$\mathbf{P}_{x_1 \cdots x_{m_n}}(B_n \setminus K_n) < \frac{L}{2^{n+1}}, n = 1, 2, \cdots.$$

设 Q_n 是以在坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_{m_n}$ 上的 K_n 为底的柱集, $G_n =$

$\bigcap_{r=1}^{n} Q_r$，又设 M_n 是集合 G_n 的底．显然集合 M_n 是紧的，因为它是闭集之交，而这些闭集中至少有一个(就是 K_n)是紧的．

因为集合 G_n 是单调递减的，故从 $\omega(x) \in G_{n+p} (p > 0)$ 推得 $\omega(x) \in G_n$，所以若

$$\{y_1, y_2, \cdots, y_{m_n}, \cdots, y_{m_{n+p}}\} \in M_{n+p}, \ (p > 0),$$

则

$$\{y_1, y_2, \cdots, y_{m_n}\} \in M_n.$$

显然集合 G_n 是非空的．又因为

$$D_n \backslash G_n = \bigcup_{r=1}^{n} (D_n \backslash Q_r) \subset \bigcup_{r=1}^{n} (D_r \backslash Q_r),$$

故

$$\mathbf{P}'(D_n \backslash G_n) \leqslant \sum_{r=1}^{n} \mathbf{P}'(D_r \backslash Q_r) = \sum_{r=1}^{n} \mathbf{P}_{x_1 \cdots x_{m_r}}(B_r \backslash K_r) \leqslant \frac{L}{2},$$

由此得

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}'(G_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}'(D_n) - \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}'(D_n \backslash G_n) \geqslant L/2.$$

从每一 M_n 中选出一点

$$\{y_1^{(n)}, \cdots, y_{m_n}^{(n)}\},$$

由上面叙述知，对任意 k，点列 $\{y_k^{(n)}\} (n = 1, 2, \cdots)$ 属于 $\mathscr{Y}$ 中的某一紧集，而且序列

$$\{y_1^{(n+r)}, \cdots, y_{m_n}^{(n+r)}\}, \ r = 0, 1, 2, \cdots$$

在 M_n 中．借助对角线方法可以找到这样的附标序列 n_j，使得对每一 k，序列 $y_k^{(n_j)}$ 收敛于某一极限 $y_k^{(0)}$．因为集合 M_n 是闭的，故对任意 n 有

$$\{y_1^{(0)}, \cdots, y_{m_n}^{(0)}\} \in M_n.$$

现在定义函数 $\omega(x)$ 如下：$\omega(x_k) = y_k^{(0)}, k = 1, 2, \cdots, n, \cdots$；以任意方式定义它在其余点的值．于是对任意 n 有 $\omega(x) \in G_n \subset D_n$．故 $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ 非空，这与(9)式矛盾，因此不等式(10)不可能成立，即只能有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}'(D_n)=0.$$

这就是说，函数 $\mathbf{P}'$ 满足不等式(7)并且可以延拓为一个完备测度$(\mathfrak{C},\ \widetilde{\mathbf{P}})$，$\widetilde{\mathfrak{C}}\supset\mathfrak{C}$. 用等式 $g(x,\omega)=\omega(x)$定义函数 $g(x,\omega)$，$\omega\in\Omega, x\in X$. 于是对 $\mathscr{Y}^n$ 中任意 Borel 集 $B^{(n)}$ 和任意 $n, x_1,\cdots,x_n$ 有

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathbf{P}}\{(g(x_1,\omega),g(x_2,\omega),\cdots,g(x_n,\omega))\in B^{(n)}\}\\&=\widetilde{\mathbf{P}}\{(\omega(x_1),\omega(x_2),\cdots,\omega(x_n))\in B^{(n)}\}\\&=\mathbf{P}_{x_1\cdots x_n}(B^{(n)}).\end{aligned}$$

这样一来，我们就对分布族(5)构造了定理所要求的表示. 定理证毕.

第二章 随机序列

§1. 初步的评论

随机变量序列 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$可以看作是离散时间的随机过程,它们在一般理论中起着重要的作用.

首先，许多概率论问题中的时间实质上是离散的.

其次，离散时间过程的研究在某种意义上使用比较简单的方法，而且在许多情况下可以用这些过程来逼近或研究任意的连续时间过程.

这一章研究的基本问题是当时间无限增大时随机序列的渐近性态,其中有序列极限的存在性，随机级数的收敛性，算术平均值的性态以及发散序列的通项分布的渐近特性问题等等. 这类问题把概率论的经典论题(大数定律,随机变量和的极限定理)与随机过程一般理论紧密地联系起来.

显然,为了得到不同于一般的收敛判别准则的实质性结果,应当对所研究的随机序列加上有关概率论的特殊限制. 与此相应，我们引入并研究某些重要的随机序列类，对于这些序列能够得到与上面提到的那些问题有关的一些重要的结果.

设$\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$是一固定的概率空间，$\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 是某可测空间. 在本章中除特别声明外，T或者表示非负整数序列 $T_1=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$,或者表示所有整数构成的有序集$\tilde{T}\{\cdots,-n,\cdots,-1,0,1,\cdots,n,\cdots\}$.

取值于$\mathscr{X}$的函数$\{\xi(\cdot)=\xi(t)=\xi(t,\omega),t\in T,\omega\in\Omega\}$称作**随机序列或离散时间的随机过程**,如果对于任意 $B\in\mathfrak{B}$ 和 $t\in T$, 集合 $\{\omega:\xi(t,\omega)\in B\}\in\mathfrak{S}$.

有时把 $\xi(t)$的值称作某随机系统Σ的**状态**,空间 $\mathscr{X}$ 称作系统Σ的**相空间**.

当 $\mathscr{X}$ 是距离空间时，$\mathfrak{B}$ 恒表示 $\mathscr{X}$ 的 Borel 集组成的σ代

数.

设$\{\mathscr{X}^s,\mathfrak{B}^s\}$是可测空间$\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$的 s 次幂. 对于任意的整数组 $n_1,n_2,\cdots,n_s$, $0\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_s<\infty$,随机序列$\{\xi(t);t\in T\}$定义$\{\mathscr{X}^s, \mathfrak{B}^s\}$上的概率测度 $\mathbf{P}_{n_1n_2\cdots n_s}(\cdot)$:

$\mathbf{P}_{n_1n_2\cdots n_s}(B^{(s)})=\mathbf{P}\{(\xi(n_1),\xi(n_2),\cdots,\xi(n_s))\in B^{(s)}\}$, 这里 $B^{(s)}$ 是 $\mathfrak{B}^s$ 中的集合. 我们称这些测度为随机序列的边沿分布.

在某种意义上, 边沿分布完全确定对应的随机序列. 这命题的确切含义如下.

考虑所有可能的序列组成的空间 $\mathscr{X}^T$,以 $\mathfrak{C}_0$ 表示这空间的柱集 C 组成的代数:

$$\mathfrak{C}_0=\{C=C_{t_1t_2\cdots t_s}(B^{(s)});t_k\in T,B^{(s)}\in\mathfrak{B}^s\},\ s=1,2,\cdots$$

$$C_{t_1t_2\cdots t_s}(B^{(s)})=\{\bar{x}:(x_{t_1},x_{t_2},\cdots,x_{t_s})\in B^{(s)}\}.$$

由随机序列 $\{\xi(t),\ t\in T\}$ 确定的映象 $\omega\to\bar{x}:\bar{x}=\{x_t;t\in T\}=\{\xi\cdot(t,\omega);t\in T\}$诱导出一个概率测度的变换,它把概率测度 $\mathbf{P}$ 变为定义在空间 $\mathscr{X}^T$ 的某一个包含所有柱集的 σ 代数 $\mathfrak{C}'$ 上的概率测度 $\mathbf{P}'$.

测度 $\mathbf{P}'$ 和随机序列的边沿分布在柱集上是相同的,即

$$\mathbf{P}'(C_{t_1t_2\cdots t_s}(B^{(s)}))=\mathbf{P}_{t_1t_2\cdots t_s}(B^{(s)}).$$

因此, 边沿分布唯一地确定包含柱集的代数的最小 σ 代数 $\mathfrak{C}(\mathfrak{C}\subset\mathfrak{C}')$上的测度 $\mathbf{P}'$.

为了解决随机序列理论中出现的问题, 常常只须知道 $\mathfrak{C}$ 中事件的概率.因此,对于具有同一相空间 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$而定义在不同的概率空间$\{\Omega_i,\mathfrak{S}_i,\mathbf{P}_i\}$上的随机序列 $\{\xi_i(t),t\in T\}$ $(i=1,2)$ 来说,如果它们诱导的概率 $\mathbf{P}_i'$ 在空间 $\mathscr{X}^T$ 的柱集上相同, 我们就没有理由认为这两个序列在本质上有什么不同. 由于这一点, 我们把随机序列$\{\bar{\xi}(t);t\in T\}$称为随机序列$\{\xi(t);t\in T\}$的自然表示, 这里$\{\bar{\xi}(t),t\in T\}$是定义在$\{\mathscr{X}^T,\mathfrak{C},\mathbf{P}'\}$上的随机等价于$\{\xi(t);t\in T\}$的随机序列,而且 $\bar{\xi}(t)=\bar{\xi}(t,x)=x_t$.

选出随机序列的自然表示的理由在于许多问题中的边沿分布可用这样或那样的办法给出. 另一方面, 如果给定了任一边沿分

布族，而 $\mathscr{X}$ 是一完备可分距离空间，则恒能以自然表示的形式构造一随机序列，使得这个序列的边沿分布和给定的分布族相同，这是 Колмогоров 定理(第 1 章 §4，定理 2)的直接推论.

§2. 半 鞅 和 鞅

定义和基本性质 鞅和半鞅是一类有许多应用的重要随机序列.

为了避免今后的重复，我们引进定义时不仅限于序列的情形.

设 T 是任意有序集，$\{\mathfrak{F}_t;\ t\in T\}$ 是 σ 代数流，$\mathfrak{F}_t\subset\mathfrak{S}$.

我们引入如下的表示:

$$a^+=\max(a,0),\ a^-=\max(-a,0).$$

定义 1 对每一 $t\in T$，随机变量 $\xi(t)$ 是 $\mathfrak{F}_t$ 可测的族 $\{\xi(t),\mathfrak{F}_t;t\in T\}$ 称作鞅，如果

$$\mathbf{E}|\xi(t)|<\infty,\tag{1}$$

$$\mathbf{E}\{\xi(t)|\mathfrak{F}_s\}=\xi(s),\ s<t,\ s,\ t\in T;\tag{2}$$

它称作下鞅，如果

$$\mathbf{E}\xi^+(t)<\infty,\ \mathbf{E}\{\xi(t)|\mathfrak{F}_s\}\geqslant\xi(s),\ s<t,\ s,\ t\in T;\tag{3}$$

它称作上鞅，如果

$$\mathbf{E}\xi^-(t)<\infty,\ \mathbf{E}\{\xi(t)|\mathfrak{F}_s\}\leqslant\xi(s),\ s<t,\ s,\ t\in T.\tag{4}$$

上鞅和下鞅也称作半鞅.

在某些情形中，当 σ 代数族 $\{\mathfrak{F}_t;t\in T\}$ 是固定而又不会引起误解时，我们把随机变量族 $\{\xi(t);t\in T\}$ 本身称作鞅、上鞅、下鞅或半鞅.

由上面的定义推知，$\mathfrak{F}_t$ 一定包含由随机变量 $\{\xi(s),s\leqslant t\}$产生的 σ 代数. 有时在鞅（半鞅）的定义中就把这个 σ 代数取作 $\mathfrak{F}_t$.

现在我们给出鞅和下鞅的一些性质. 因为用 $-\xi(t)$ 代替 $\xi(t)$ 时下鞅就变成上鞅，于是不难把下鞅的性质改述为上鞅的性质.

a) (2)和(3)式分别等价于 $(s<t;\ s,t\in T)$:

$$\int_{B_s}\xi(s)\,\mathbf{P}(d\omega)=\int_{B_s}\xi(t)\,\mathbf{P}(d\omega),\tag{5}$$

和

$$\int_{B_s}\xi(s)\,\mathbf{P}(d\omega)\leqslant\int_{B_s}\xi(t)\,\mathbf{P}(d\omega),\tag{6}$$

其中 B_s 是任意的 $\mathfrak{F}_s$ 可测集.

事实上,如果对(2)和(3)式积分,我们就得到(5)和(6)式. 反之也不难看出，从(5)和(6)式可分别推出(2)和(3)式.

b) 若 $\{\xi(t);\ t\in T\}$ 是下鞅,则 $\mathbf{E}\xi(t)$ 是 t 的单调不减函数;若 $\{\xi(t);t\in T\}$ 是鞅，则 $\mathbf{E}\,\xi(t)$ 是一常数.

c) 若 $\{\xi(t),\ \mathfrak{F}_t;\ t\in T\}$ 是下鞅，$f(x)$ 是实数直线上的连续、单调不减凸函数,且若 $t\in T$ 时 $\mathbf{E}f(\xi(t))<\infty$,则 $\{f(\xi(t)),\ \mathfrak{F}_t;\ t\in T\}$ 也是下鞅.

这个论断可从下鞅的定义及 Jensen 不等式推出. 事实上,

$$\mathbf{E}\,\{f(\xi(t))\,|\,\mathfrak{F}_s\}\geqslant f\,(\mathbf{E}\,\{\xi(t)\,|\,\mathfrak{F}_s\})\geqslant f\,(\xi(s)).\tag{7}$$

特别地,

d) 若 $\{\xi(t),\ \mathfrak{F}_t;\ t\in T\}$ 是下鞅，则 $\{(\xi(t)-a)^+,\ \mathfrak{F}_t;\ t\in T\}$ 也是下鞅.

e) 若 $\{\xi(t),\ \ \mathfrak{F}_t;\ \ t\in T\}$ 是鞅，而 $f(x)$ 是连续凸函数，$\mathbf{E}|f(\xi(t))|<\infty$,则 $\{f(\xi(t)),\ \mathfrak{F}_t,\ t\in T\}$是下鞅.

为证此性质只须指出,这时不等式链(7)除第二个≥号应改为等号外其余保持不变，因此不必利用函数 $f(x)$的单调性.

从 b) 和 e) 得

f) 若 $\xi(t)$ 是鞅,则 $\mathbf{E}|\xi(t)|$ 是在 T 上单调不减的.

引理 1 若 T 有最大元素 $t_{\max}$,$\{\xi(t),\ \mathfrak{F}_t;\ t\in T\}$ 是下鞅,则随机变量族 $\{\xi^+(t),\ t\in T\}$ 一致可积.

证.从不等式

$$N\,\mathbf{P}\{\xi(t)>N\}\leqslant\int_{B_t}\xi(t)\,\mathbf{P}\,(d\omega)\leqslant$$

$$\leqslant\int_{B_t}\xi\,(t_{\max})\,\mathbf{P}\,(d\omega)\leqslant\int_{\Omega}\xi^+(t_{\max})\,\mathbf{P}(d\omega)$$

推得当$N\to\infty$时对 t 一致地有 $\mathbf{P}(B_t)\to 0$,这里 $B_t=\{\omega:\ \xi(t)>N\}$. 因此对任意 $\varepsilon>0$,可以找到与 t 无关的 N_0,使当 $N>N_0$ 时

$$0 \leqslant \int_{B_t} \xi^+(t_{\max}) \mathbf{P}(d\omega) < \varepsilon.$$

由上式得知，对所有 $N > N_0$，

$$\mathbf{E}\, \chi_{(\xi(t)>N)}\, \xi(t) < \varepsilon,$$

这就证明了族 $\{\xi^+(t);\ t \in T\}$ 的一致可积性。

某些不等式 在这一小节中假设 $T = \{0,1,2,\cdots,n\}$，$\{\mathfrak{F}_k;\ k \in T\}$是单调不减的 σ 代数序列，$\mathfrak{F}_k \subset \mathfrak{S}$，$\xi_k(k \in T)$ 是 $\mathfrak{F}_k$ 可测的随机变量，$\mathbf{E}\,\xi_k^+ < \infty$。又设 $\tau_i(i = 1, 2)$ 是 $\{\mathfrak{F}_k;\ k \in T\}$ 上的随机时间(τ_i 取值于T)且以概率 1 有 $\tau_1 \leqslant \tau_2$。令

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{\tau_i} \xi_k,$$

若 $\tau_i = 0$，则令 $\eta_i = 0$。

以 $\mathfrak{F}_i^*$ 表示由随机时间 τ_i 产生的事件 σ 代数。我们回忆（第 1 章 §1），$\mathfrak{F}_i^*$ 是由所有使得

$$E \cap \{\tau_i \leqslant k\} \in \mathfrak{F}_k,\ k = 0,\ 1, \cdots, n \tag{8}$$

的那些集合 $E \in \mathfrak{S}$ 组成。

引理 2 设

$$\mathbf{E}\{\xi_k | \mathfrak{F}_{k-1}\} \geqslant 0,\ k = 1, 2, \cdots, n, \tag{9}$$

和 $A \in \mathfrak{F}_1^*$。则

$$\int_A \eta_1 \mathbf{P}(d\omega) \leqslant \int_A \eta_2 \mathbf{P}(d\omega). \tag{10}$$

如果

$$\mathbf{E}\{\xi_k | \mathfrak{F}_{k-1}\} = 0, \tag{11}$$

则

$$\int_A \eta_1 \mathbf{P}(d\omega) = \int_A \eta_2 \mathbf{P}(d\omega). \tag{12}$$

证。首先注意到，$\mathfrak{F}_1^* \subset \mathfrak{F}_2^*$（第 1 章§1）。为证不等式(10)，我们只须考虑 τ_1 在 A 等于常数的情形，因为在一般情形中，$A = \bigcup_{j=0}^{n} A_j$，其中 $A_j = A \cap \{\tau_1 = j\} \in \mathfrak{F}_1^*$。假设在$A$上 $\tau_1 = j$，则 $A \in \mathfrak{F}_j$ 且在A上 $\tau_2 \geqslant j$。于是有

$$\int_A \eta_2 \mathbf{P}(d\omega) = \int_A \eta_1 \mathbf{P}(d\omega) + \int_{A\cap\{\tau_2 > j\}} \sum_{k=j+1}^{\tau_2} \xi_k \mathbf{P}(d\omega)$$

$$= \int_A \eta_1 \mathbf{P}(d\omega) + \int_{A\setminus\{\tau_2 \leqslant j\}} \xi_{j+1} \mathbf{P}(d\omega)$$

$$+ \int_{A\setminus\{\tau_2 \leqslant j+1\}} \xi_{j+2} \mathbf{P}(d\omega) + \cdots + \int_{A\setminus\{\tau_2 \leqslant n-1\}} \xi_n \mathbf{P}(d\omega).$$

因为 $A\setminus\{\tau_2 \leqslant k\} \in \mathfrak{F}_k (k \geqslant j)$，故

$$\int_{A\setminus\{\tau_2 \leqslant k\}} \xi_{k+1} \mathbf{P}(d\omega) = \int_{A\setminus\{\tau_2 \leqslant k\}} \mathbf{E}\{\xi_{k+1} | \mathfrak{F}_k\} \mathbf{P}(d\omega),$$

由此即得(10)式.

上面所作的推理也表明，若不等式(9)代以等式(11)，则(12)式成立.

引理 2 还可以陈述如下：若 $\{\zeta_k, \mathfrak{F}_k, k \in T\}$ 是下鞅，τ_i 是 $\{\mathfrak{F}_k; k \in T\}$ 上的随机时间且 $\tau_1 \leqslant \tau_2$，则对任意 $A \in \mathfrak{F}_1^*$

$$\int_A \zeta_{\tau_1} \mathbf{P}(d\omega) \leqslant \int_A \zeta_{\tau_2} \mathbf{P}(d\omega), A \in \mathfrak{F}_1^*.$$

推论 1 若 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_s$ 是 $\{\mathfrak{F}_k; k = 0, 1, \cdots, n\}$ 上的随机时间序列且 $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \cdots \leqslant \tau_s$，则 $\{\eta_k, \mathfrak{F}_k^*; k = 1, \cdots, s\}$是下鞅；若 $\{\zeta_k, \mathfrak{F}_k; k \in T\}$ 是鞅，则 $\{\eta_k, \mathfrak{F}_k^*; k=1, 2, \cdots, s\}$是鞅，这里 $\eta_k = \zeta_{\tau_k}$.

这就是说，在随机时间观测的鞅(半鞅)仍是鞅(半鞅).

推论 2 若在引理 2 的条件中用假设 $\mathbf{E}\psi_k^- < \infty$ 代替 (9)式，这里 $\psi_k = \mathbf{E}\{\xi_k | \mathfrak{F}_{k-1}\}$，则

$$\int_A \left(\eta_1 - \sum_{k=1}^{n} \psi_k^-\right) \mathbf{P}(d\omega) \leqslant \int_A \eta_2 \mathbf{P}(d\omega). \tag{13}$$

事实上，若用 $\xi_k - \psi_k$ 代替 ξ_k 即可从(10)式得(13)式.

引理 3 假设随机变量 ξ_k 是 $\mathfrak{F}_k$ 可测的，$\mathbf{E}\xi_k^+ < \infty$，$\{\mathfrak{F}_k; k \in T\}$是 σ 代数流，$C > 0$. 令

$$\zeta_0 = 0, \zeta_k = \sum_{j=1}^{k} \xi_j, k = 1, 2, \cdots, n,$$

则

$$\mathbf{P}\left\{\max_{0\leqslant k\leqslant n}\zeta_k\geqslant c\right\}\leqslant\frac{1}{c}\mathbf{E}(\zeta_n^+ + \rho_n), \tag{14}$$

其中 $\rho_n=\sum_{k=1}^{n}\psi_k^-$. 此外,若对某 $p>1$ 有

$$\mathbf{E}(\zeta_n^+ + \rho_n)^p<\infty,$$

则

$$\mathbf{E}\left(\max_{0\leqslant k\leqslant n}\zeta_k\right)^p\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\mathbf{E}(\zeta_n^+ + \rho_n)^p. \tag{15}$$

证. 设 τ_1 是使得 $\zeta_k\geqslant C(k=1,2,\cdots,n)$的最小附标 k 值,若这样的附标不存在,则 $\tau_1=n$. 令 $\tau_2=n$,又 A 是事件 $\{\eta\geqslant C\}$,这里 $\eta=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n}\zeta_k$.

这时 τ_1 和 τ_2 是 $\mathfrak{F}_k$ 上的随机时间, A 是 $\mathfrak{F}_1^*$ 可测的, $\tau_1\leqslant\tau_2$. 利用(13)式得

$$C\,\mathbf{P}(A)\leqslant\int_A\zeta_{\tau_1}\mathbf{P}(d\omega)\leqslant\int_A(\zeta_n+\rho_n)\mathbf{P}(d\omega)\leqslant\mathbf{E}(\zeta_n^+ + \rho_n).$$

这就证明了不等式(14). 其次,若 $\chi(C)$ 表示事件 A 的示性函数,则

$$\eta^p=p\int_0^\infty\chi(C)\,C^{p-1}d\,C.$$

如同刚才所证明那样,

$$\mathbf{E}C\,\chi(C)\leqslant\mathbf{E}\chi(C)(\zeta_n^+ + \rho_n),$$

因此

$$\mathbf{E}\,\eta^p\leqslant p\,\mathbf{E}\int_0^\infty(\zeta_n^+ + \rho_n)\chi(C)\,C^{p-2}d\,C=\frac{p}{p-1}\times\cdot\mathbf{E}(\zeta_n^+ + \rho_n)\eta^{p-1}.$$

利用 Hölder 不等式得

$$\mathbf{E}\,\eta^p\leqslant\frac{p}{p-1}\{\mathbf{E}\,\eta^p\}^{\frac{p-1}{p}}\{\mathbf{E}(\zeta_n^+ + \rho_n)^p\}^{\frac{1}{p}}$$

由此即可推出(15)式 .

推论 若,$\{\zeta_k,k=1,\cdots,n\}$是下鞅,则

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\zeta_k^+ \geqslant C\right\} \leqslant \frac{1}{C}\mathbf{E}\,\zeta_n^+, \tag{16}$$

若除此之外，还对某 $p>1$ 有 $\mathbf{E}(\zeta_n^+)^p<\infty$，则

$$\mathbf{E}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\zeta_k^+\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{E}(\zeta_n^+)^p. \tag{17}$$

而且，若$\{\eta_k, k\in T\}$是鞅，则

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\zeta_k| \geqslant C\right\} \leqslant \frac{1}{C^p}\mathbf{E}|\zeta_n|^p \tag{18}$$

我们称 $\nu[a,b)$ 为随机变量族 $\{\zeta(t), t\in T\}$（这里 T 是有序集）自上而下穿越半开闭区间 $[a,b)$ 的次数，它定义为这样的数 s 的上确界：存在序列 $\{t_i, i=1,2,\cdots,2s\}$，$t_i<t_{i+1}$，$t_i\in T$，使得

$$\zeta(t_1)\geqslant b,\ \zeta(t_2)<a,\ \zeta(t_3)\geqslant b,\cdots,\zeta(t_{2s})<a.$$

我们估计在引理 3 中定义的序列$\{\zeta_k, k=1,2,\cdots,n\}$自上而下穿越半开闭区间$[a,b)$的次数的数学期望.

引入整数值随机变量序列 $j_1, j_2,\cdots,j_k,\cdots$，它们可以不一定存在. 以 A_k 表示数 j_k 存在这一事件. 这时，j_1 是使得 $\zeta_{j_1}\geqslant b_1$，$j_1\leqslant n$ 的最小整数，j_2 是大于 j_1 并且使得 $j_2\leqslant n$，$\zeta_{j_2}<a$ 的最小整数，$\cdots$，j_{2m-1} 是大于 j_{2m-2} 并且使得 $j_{2m-1}\leqslant n$，$\zeta_{j_{2m-1}}\geqslant b$ 的最小整数，j_{2m} 是大于 j_{2m-1} 并且使得 $\zeta_{j_{2m}}<a$，$j_{2m}\leqslant n$ 的最小整数.

$j_1, j_2,\cdots,j_k,\cdots$ 形成一单调不减的随机时间序列，$j_k\leqslant n$. 把 j_k 的定义区域扩大到整个 Ω，即若 $\omega\bar{\in}A_k$ 时令 $j_k=n$. 根据 j_k 的定义和不等式(13)有

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \int_{A_{2m-1}}(\zeta_{j_{2m-1}}-b)\mathbf{P}(d\omega) \leqslant \int_{A_{2m}}(\zeta_{j_{2m}}-b)\mathbf{P}(d\omega)\\ &\quad+\sum_{k\geqslant 1}\int_{B_{m,k}}\psi^-_{j_{2m-1}+k}\mathbf{P}(d\omega) \leqslant (a-b)\mathbf{P}(A_{2m})\\ &+\int_{A_{2m-1}\setminus A_{2m}}(\zeta_{j_{2m}}-b)\mathbf{P}(d\omega)+\sum_{k\geqslant 1}\int_{B_{m,k}}\psi^-_{j_{2m-1}+k}\mathbf{P}(d\omega),\end{aligned}$$

这里 $B_{m,k}=A_{2m-1}\cap\{j_{2m}-j_{2m-1}\geqslant k\}$. 因此

$$(b-a)\mathbf{P}(A_{2m}) \leqslant \int_{A_{2m-1}\setminus A_{2m}} (\zeta_n - b)\mathbf{P}(d\omega)$$
$$+ \sum_{k\geqslant 1}\int_{B_{m,k}} \phi^-_{i_{2m-1}+k}\mathbf{P}(d\omega) \leqslant \int_{A_{2m-1}\setminus A_{2m}} (\zeta_n - b)^+$$
$$\times \mathbf{P}(d\omega) + \sum_{k\geqslant 1}\int_{B_{m,k}} \phi^-_{i_{2m-1}+k}\mathbf{P}(d\omega).$$

将这些不等式对所有 $m \geqslant 1$ 求和，我们得到

$$(b-a)\sum_{m\geqslant 1}\mathbf{P}(A_{2m}) \leqslant \mathbf{E}[(\zeta_n - b)^+ + \rho_n],\quad \rho_n = \sum_{k=1}^{n}\phi^-_k.$$

注意 $\nu[a, b) = \sum_{m\geqslant 1}\chi(A_{2m})$，这里 $\chi(A)$是事件 A 的示性函数，因此

$$\mathbf{E}\,\nu[a, b) = \sum_{m\geqslant 1}\mathbf{P}(A_{2m}).$$

这样一来，就证明了下面的引理:

引理 4 若序列 $\{\xi_k, \mathfrak{F}_k, k = 1, 2, \cdots, n\}$ 满足引理 3 的条件，则

$$\mathbf{E}\,\nu[a, b) \leqslant \frac{\mathbf{E}[(\zeta_n - b)^+ + \rho_n]}{b-a}. \tag{19}$$

对于下鞅这个不等式变为

$$\mathbf{E}\,\nu[a, b) \leqslant \frac{\mathbf{E}(\zeta_n - b)^+}{b-a}. \tag{20}$$

不难把上面得到的不等式推广到 T 是可数序列的情形。即当 $T = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ 和 $T' = \{\cdots, -n, -n+1, \cdots, -1\}$ 时不等式(14)给出

$$\mathbf{P}\{\sup_{n\in T}\zeta_n \geqslant C\} \leqslant \frac{1}{C}\sup_{n\in T}\mathbf{E}(\zeta_n^+ + \rho_n) \tag{21}$$

和

$$\mathbf{P}\{\sup_{n\in T}\zeta_n \geqslant C\} \leqslant \frac{1}{C}\mathbf{E}(\zeta_{-1}^+ + \rho'), \tag{22}$$

其中 $\rho' = \sum_{k=1}^{\infty}\phi^-_{-k}$。

证． 这些关系式从 $\sup_{n\in T}\zeta_n = \lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\zeta_k$ 和

$$\mathbf{P}\{\sup_{n\in T}\zeta_n \geqslant C\} = \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\zeta_k \geqslant C\}$$

推得. 类似地，若 $\nu_\infty[a, b)$ 和 $\nu'_\infty[a, b)$分别表示序列$\{\zeta_n; n\in T\}$和$\{\zeta_n; n\in T'\}$自上而下穿越半开闭区间$[a, b)$的次数，而 $\nu_n[a,b)$ 和 $\nu'_n[a, b)$ 分别是对应于截尾序列 $\{\zeta_k; k=1,\cdots,n\}$ 和$\{\zeta_{-k}; k=1,\cdots,n\}$的穿越次数，则由 $\nu_n[a, b)$和 $\nu'_n[a, b)$构成单调不减序列，$\nu_\infty[a, b) = \lim\nu_n[a, b)$，$\nu'_\infty[a, b) = \lim\nu'_n[a, b)$以及性质 f) 可得下列不等式:

$$(b-a)\mathbf{E}\,\nu_\infty[a, b) \leqslant \sup_n \mathbf{E}\,[(\zeta_n - b)^+ + \rho_n], \tag{23}$$

$$(b-a)\,\mathbf{E}\nu'_\infty[a, b) \leqslant \mathbf{E}[(\zeta_{-1} - b)^+ + \rho']. \tag{24}$$

对于下鞅，我们可以把同样的讨论应用到T是任意可数的实数集合的情形.此时应引入单调上升的集合序列 T_n，其中每一T_n由有限多个点组成，把上面得到的不等式应用于序列 $\{\zeta(t), \mathfrak{F}_t, t\in T_n\}$，然后取 $n\to\infty$ 时的极限即可.

于是我们得到

$$\mathbf{P}\,\{\sup_{t\in T}\zeta^+(t) > C\} \leqslant \frac{\sup_{t\in T}\mathbf{E}\zeta^+(t)}{C}, \tag{25}$$

$$\mathbf{E}\,[\sup_{t\in T}\zeta^+(t)]^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t\in T}\mathbf{E}[\zeta^+(t)]^p, \tag{26}$$

$$\mathbf{E}\,\nu[a,b) \leqslant \frac{\sup_{t\in T}\mathbf{E}(\zeta(t)-b)^+}{b-a}. \tag{27}$$

而且，若集合T有最大元素 $t_{\max}$，则在 $t = t_{\max}$ 时达到不等式右边的上确界.

极限的存在性 考虑序列$\{\zeta_n, \mathfrak{F}_n; n\in T\}$，其中 $T = \{\cdots, -n, -n+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, n-1, n, \cdots\}$，$\mathfrak{F}_n$ 是单调不减的 σ 代数族，ζ_n 是 $\mathfrak{F}_n$ 可测的. 又设 $\mathbf{E}\zeta_n^+ < \infty$，$\xi_n = \zeta_n - \zeta_{n-1}$，$\mathbf{E}\,\{\xi_n|\mathfrak{F}_{n-1}\} = \psi_n$.

定理 1 a) 若

$$\sup_{n\geqslant 1}\mathbf{E}\,(\zeta_n^+ + \rho_n) < \infty,\ \rho_n = \sum_{k=1}^{n}\psi_k^-,$$

则以概率 1 存在有限的极限 $\zeta_\infty = \lim_{n\to\infty} \zeta_n$, b) 若 $\sup_{n\geq 1} \mathbf{E}\rho'_n < \infty$, 其中 $\rho'_n = \sum_{k=1}^{n} \psi_{-k}^-$,则以概率 1 存在有限的极限 $\zeta_{-\infty} = \lim_{n\to\infty} \zeta_{-n}$.

证. 由 Fatou 不等式

$$\mathbf{E} \varliminf_{n\to+\infty} \zeta_n^+ \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \mathbf{E}\, \zeta_n^+ < \infty$$

得知关系式 $\varliminf_{n\to+\infty} \zeta_n^+ = +\infty$ 仅能以概率 0 成立.

另一方面,由不等式(23)得

$$\varliminf_{a\to-\infty} \mathbf{E}\, \nu[a, b) = \mathbf{E} \lim_{a\to-\infty} \nu[a, b) = 0,$$

这里 $\nu[a, b)$是序列$\{\zeta_n; n \geqslant 1\}$自上而下穿越半开闭区间$[a, b)$的次数. 因此,若 $\zeta_1 > -\infty$, 则以概率 1 存在 $a = a(\omega)$, 使得对所有 $n \geqslant 1$, $\zeta_n > a$. 因此,几乎处处有 $\varliminf_{n\to+\infty} \zeta_n > -\infty$.

现设以正概率不存在有限的极限 $\lim_{n\to+\infty} \zeta_n$, 则也以正概率有不等式 $\varliminf_{n\to+\infty} \zeta_n < \varlimsup_{n\to+\infty} \zeta_n$. 从而能找出数对 a 和 b, 使得 $a < b$ 且以正概率有

$$\varliminf_{n\to+\infty} \zeta_n < a < b < \varlimsup_{n\to+\infty} \zeta_n.$$

但这时序列 $\{\zeta_n; n \geqslant 1\}$ 自上而下穿越半开闭区间 $[a, b)$ 的次数 $\nu[a, b)$至少以相同的概率等于∞, 这与不等式(23)相矛盾.因此,以概率 1 有 $\varliminf_{n\to+\infty} \zeta_n = \varlimsup_{n\to+\infty} \zeta_n$.

定理的论断 b) 的证明和上述类似, 但要注意在 (24) 式中令 $b \to +\infty$ 时得到的是以概率 1 有 $\lim_{b\to+\infty} \nu'[a,b) = 0$,这里 $\nu'[a, b)$ 是序列$\{\zeta_n; n \leqslant -1\}$自上而下穿越半开闭区间$[a, b)$的次数. 由此得到以概率 1 有$\varlimsup \zeta_n < +\infty$. 在证明定理 1 论断 a) 时给出的其余推理,经过显而易见的修改并以 ζ_{-n} 代替 ζ_n 后仍有效.

将刚才证明的定理应用于半鞅就得到

推论 若$\{\zeta_k, \mathfrak{F}_k; k = \cdots, -n, -n+1, \cdots, -1\}$是下鞅,则以概率 1 存在极限 $\lim_{n\to-\infty} \zeta_n = \zeta_{-\infty}$. 若 $\{\zeta_k, \mathfrak{F}_k, k = 1, 2, \cdots,$

$n, \cdots\}$是下鞅且 $\sup \mathbf{E}\zeta_n^+ < \infty$，则极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \zeta_n = \zeta_{+\infty}$ 也以概率 1 存在.

定义 2 随机变量 $\bar{\xi}(\underline{\xi})$称作下鞅$\{\xi(t), \mathfrak{F}_t;\ t\in T\}$的右(左)封闭元，如果 $\mathbf{E}\bar{\xi}^+ < \infty(\mathbf{E}\underline{\xi}^+ < \infty)$，$\bar{\xi}$ 关于 $\bar{\mathfrak{F}} = \sigma\{\mathfrak{F}_t;\ t\in T\}$可测($\underline{\xi}$ 关于 $\underline{\mathfrak{F}} = \bigcap\limits_{t\in T}\mathfrak{F}_t$可测)且对所有 $t\in T$

$$\xi(t) \leqslant \mathbf{E}\{\bar{\xi}|\mathfrak{F}_t\},(\underline{\xi} \leqslant \mathbf{E}\{\xi(t)|\underline{\mathfrak{F}}\}).$$

定理 2 下鞅$\{\zeta_n, \mathfrak{F}_n;\ n=1, 2,\cdots\}$有右封闭元的充分必要条件是序列$\{\zeta_n^+; n=1,2,\cdots\}$一致可积.

证. 若下鞅 $\{\zeta_n,\mathfrak{F}_n;n=1,2,\cdots\}$有右封闭元 $\bar{\xi}$，则令 $T = \{1, 2,\cdots,n,\cdots\}\cup\{\infty\}$，$\mathfrak{F}_\infty = \sigma\{\mathfrak{F}_n;n=1,2,\cdots\}$，$\zeta_\infty = \bar{\xi}$，我们就得到 $\{\zeta_t,\mathfrak{F}_t;t\in T\}$是一下鞅，而且集合 T 有最大元素∞. 因此(根据引理 1)，族$\{\zeta_n^+; n=1, 2,\cdots\}$一致可积. 现在假设族$\{\zeta_n^+; n=1, 2,\cdots\}$一致可积. 因为 $\sup \mathbf{E}\zeta_n^+ < \infty$，故以概率 1 存在极限 $\bar{\zeta} = \lim\zeta_n$. 令 $\xi_n^N = \max\{\zeta_n, -N\}$，$N>0$. 对任意 N，序列$\{\xi_n^N; n=1, 2,\cdots\}$是下鞅，因此，由下鞅的定义知，对任意 $A\in\mathfrak{F}_n$，$m>0$ 有 $\mathbf{E}\,\xi_n^N\chi(A) \leqslant \mathbf{E}\,\xi_{n+m}^N\chi(A)$. 在这不等式的右边取$m\to\infty$ 时的极限并考虑到序列$\{\xi_n^N;n=1,2,\cdots\}$的一致可积性(因为它是两个序列之和，其中的一个 ζ_n^+ 根据条件是一致可积的，而第二个的绝对值不超过常数 N，因而也是一致可积的)，我们就得到

$$\mathbf{E}\,\xi_n^N\chi(A) \leqslant \mathbf{E}\,\bar{\zeta}_n\chi(A).$$

再取 $N\to\infty$ 的极限就得不等式

$$\mathbf{E}\,\zeta_n\chi(A) \leqslant \mathbf{E}\,\bar{\zeta}_n\chi(A),$$

而且有 $\mathbf{E}\bar{\zeta}^+ \leqslant \underline{\lim}\,\mathbf{E}\,\zeta_n^+ < \infty$，因此 $\bar{\zeta}$ 是下鞅的封闭元.

定理 3 设 $\{\zeta_n, \mathfrak{F}_n;\ n=1, 2,\cdots\}$是鞅，则下列诸条件等价:

a) 族$\{\zeta_n; n=1,2,\cdots\}$一致可积;

b) 鞅$\{\zeta_n, \mathfrak{F}_n; n=1,2,\cdots\}$ 有右封闭元;

c) $\mathbf{E}|\zeta_n - \zeta_{n'}| \to 0$，当 $n', n\to\infty$.

若上述条件中有一个成立，则极限 $\lim\zeta_n = \zeta$ 既以概率 1 也

在 $\mathscr{L}_1$ 收敛的意义下存在，并且是鞅的右封闭元.

若对某 $p>1$ 有 $\mathbf{E}|\zeta_n|^p \leqslant C$，则 a)，b)，c) 成立且在 $\mathscr{L}_p$ 收敛的意义下 $\zeta = \lim \zeta_n$.

证. a) 和 b) 的等价性由上面的定理得出. 一致可积性和 $\mathscr{L}_1$ 收敛性相互等价是测度论的一般结果. 如果定理第二部分的论断成立，则序列 ζ_n 是一致可积的. 又由 (17) 式知，$|\zeta_n|^p$ 被可积函数 $\sup|\zeta_n|^p$ 控制，故序列 $|\zeta_n|^p$ 和 $|\zeta-\zeta_n|^p$ 是一致可积的（这里 $\zeta=\lim\zeta_n$），由此得到，当 $n\to\infty$ 时 $\mathbf{E}|\zeta_n-\zeta|^p\to 0$.

某些应用 设 $\mathfrak{F}_1\subset\mathfrak{F}_2\subset\cdots\subset\mathfrak{F}_n\subset\cdots$ 和 $\mathfrak{F}=\sigma\{\mathfrak{F}_n, n=1,2,\cdots\}$，$\xi$ 是一个随机变量，$\mathbf{E}|\xi|<\infty$. 令

$$\xi_n=\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{F}_n\}$$

定理 4 序列 $\{\xi_n, \mathfrak{F}_n; n=1,2,\cdots\}$ 是鞅且以概率 1 有

$$\lim \mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{F}_n\}=\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{F}\}.$$

证. 我们有 (第 1 章 § 3)

$$\mathbf{E}\{\xi_{n+1}|\mathfrak{F}_n\}=\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{F}_{n+1}\}|\mathfrak{F}_n\}=\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{F}_n\}=\xi_n,$$

而且 ξ_n 是 $\mathfrak{F}_n$ 可测的，因此序列 $\{\xi_n, \mathfrak{F}_n; n=1,2,\cdots\}$ 是鞅. 此外，

$$\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{F}\}|\mathfrak{F}_n\}=\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{F}_n\}=\xi_n.$$

最后的等式表示 $\mathbf{E}\{\xi|\mathfrak{F}\}$ 是这个鞅的封闭元. 现在，由定理 3 就可推得本定理的论断.

推论 1 若 $A\in\mathfrak{F}$，则以概率 1 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}\{A|\mathfrak{F}_n\}=\chi(A)$.

设 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 是一可测空间. 空间 $\mathscr{X}$ 的分划序列 $\{A_{nk}; k=1,2,\cdots\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 称作"详尽的"，如果

a) $A_{nk}\in\mathfrak{B}$, $A_{nk}\cap A_{nr}=\phi$，若 $k\neq r$，$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_{nk}=\mathscr{X}$, $n=1,2,\cdots$;

b) 第 $n+1$ 个分划是第 n 个分划的子分划，即对任意 i，存在某一 $k=k(i)$，使得 $A_{n+1,i}\subset A_{nk}$;

c) 包含所有 A_{nk} $(k=1,2,\cdots, n=1,2,\cdots)$ 的最小 σ 代

数就是 $\mathfrak{B}$.

推论 2 设 $\{A_{nk}; k=1,2,\cdots\}, n=1,2,\cdots$ 是 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 的一个详尽的分划序列，而 m 是 $\mathfrak{B}$ 上的测度，$m(\mathscr{X})=1$. 以 $A_n(x)$ 表示包含点 x 的集合 A_{nk}，则对于任意 $\mathfrak{B}$ 可测和 μ 可积函数 $f(x)$ 以及 m-几乎所有 x,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{A_n(x)}f(u)\,m(du)}{m(A_n(x))}=f(x).$$

这一论断可以看作是抽象积分的积分学基本定理的类似物. 它的正确性可从如下事实得到：若以 $\mathfrak{F}_n$ 表示由有限或可数多个集合 $\{A_{nk}; k=1,2,\cdots\}$ 产生的 σ 代数,则 $\sigma\{\mathfrak{F}_n; n=1,2,\cdots\}=\mathfrak{B}$ 且当 $x\in A_{nk}$ 时 $\mathbf{E}\{f|\mathfrak{F}_n\}=\int_{A_{nk}}f(u)m(du)/m(A_{nk})$(第 1 章 §3). 这时,若 $m(A_{nk})=0$,则等式右边没有定义. 但是,即使仅对某一 n 使得后一情况发生的点 x 的集合其 m 测度为零.

通过类似的推理可以得到关于测度绝对连续性的 Radon 定理(在某种意义下)的"直接"证明.

引理 5 设$\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$是可测空间,其中 $\mathfrak{B}$ 是由可数的集合序列产生的,即 $\mathfrak{B}=\sigma\{B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots\}$, 则在$\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$中存在详尽的分划序列.

证. 设序列 $\{A_{1k}; k=1,2,\cdots\}$ 由两个集合 B_1 和 $\bar{B}_1$ 组成. 若 $\{A_{nk}; k=1,2,\cdots\}$已经构造好,则序列 $\{A_{n+1,k}; k=1,2,\cdots\}$ 可定义为所有形如 $A_{nk}\cap B_{n+1}$ 和 $A_{nk}\cap\bar{B}_{n+1}$ $(k=1,2,\cdots)$的集合的总体.

定理 5 设$\{\mathscr{X},\mathfrak{B},m\}$是一概率空间,$q(\cdot)$是$\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$上的测度,$q(\mathscr{X})<\infty$,测度 q 是关于 m 绝对连续的. $\{A_{nk}, k=1,2,\cdots\}, n=1,2,\cdots$ 是 $\mathscr{X}$ 的任一详尽的分划序列. 对于 $m\cdot(A_{nk}(x))>0$,令

$$g_n(x)=\frac{q(A_{nk}(x))}{m(A_{nk}(x))},$$

其中 $A_{nk}(x)$ 是序列 $\{A_{nk}; k=1,2,\cdots\}$ 中包含点 x 的集合；如

果 $m(A_{nk}(x))=0$ 则令 $g_n(x)=0$. 于是,

a) 序列 $\{g_n, \mathfrak{F}_n; n=1,2,\cdots\}$ 构成鞅,其中 $\mathfrak{F}_n=\sigma\{A_{n1}, A_{n2},\cdots\}$;

b) 存在极限 $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)(\bmod m)$,它与详尽序列 $\{A_{nk}; k=1,2,\cdots\}, n=1,2,\cdots$的选取无关;

c) 对于任意 $B\in\mathfrak{B}$

$$q(B)=\int_B g(x)\,m(dx). \tag{28}$$

证. 函数 $g_n(x)$ 是 $\mathfrak{F}_n$ 可测的,它取值不多于可数个,因此

$$\mathbf{E}\{g_{n+1}|\mathfrak{F}_n\}=\sum_j \frac{q(A_{n+1,j})}{m(A_{n+1,j})}\frac{m(A_{n+1,j}\cap A_{nk}(x))}{m(A_{nk}(x))}$$

$$=\sum_{\substack{j'\\ A_{n+1,j'}\subset A_{nk(x)}}}\frac{q(A_{n+1,j'})}{m(A_{n+1,j'})}\cdot\frac{m(A_{n+1,j'})}{m(A_{nk}(x))}=\frac{q(A_{nk}(x))}{m(A_{nk}(x))}=g_n(x),$$

这就证明了 a). 其次

$$\int_{\mathscr{X}}|g_n(x)|\,m(dx)=\int_{\mathscr{X}}g_n(x)\,m(dx)=q(\mathscr{X})<\infty$$

和*)

$$\int_A g_n(x)\,m(dx)=\sum_k\int_{A\cap A_{nk}}g_n(x)\,m(dx)$$

$$=\sum_k q(A_{nk}\cap A)=q(A).$$

因为 q 关于 m 绝对连续,故对任意 $\varepsilon>0$, 可以找到 $\delta>0$, 使能从 $m(A)<\delta$ 推出 $q(A)<\varepsilon$. 由此得知,序列 $g_n(x)$ 是(关于测度 m)一致可积的,故对于 m 几乎所有 x 存在极限 $\lim g_n(x)=g(x)$,而且 $g(x)$是鞅的封闭元. 因此,对每一 $A_n\in\mathfrak{F}_n$

$$\int_{A_n}g(x)\,m(dx)=\lim_{k\to\infty}\int_{A_n}g_k(x)\,m(dx)=q(A_n).$$

---

*) 下式对 $A\in\mathfrak{F}_n$ 成立,但对 $A\bar{\in}\mathfrak{F}_n$ 未必成立. 如设 $\mathscr{X}=E\cup F, \mathfrak{B}=\{\phi,E,F,\mathscr{X}\}$, $m(E)=m(F)=\frac{1}{2}$, $q(E)=1$, $q(F)=0$, $A_{11}=\mathscr{X}$, $A_{21}=E$, $A_{22}=F$, 则 $g_1(x)=\frac{q(\mathscr{X})}{m(\mathscr{X})}=1$, $\int_E g_1(x)m(dx)=\frac{1}{2}\neq q(E)$. 关于这定理,读者可参考严加安《鞅与随机积分引论》(上海科学技术出版社) 2.30 引理.——译者注

因为使得(28)式成立的集合类是单调的，而且包含代数 $\bigcup_n \mathfrak{F}_n$，故(28)式对 $\sigma\{\mathfrak{F}_n; n=1,2,\cdots\}$，亦即对任意 $B \in \mathfrak{B}$ 也成立。最后，由论断 c) 可推出，函数 $g(x)$ 与详尽序列的选取无关。因若存在两个函数 g' 和 g''，使得 c) 都成立，则对任意 $B \in \mathfrak{B}$ 有 $\int_B [g'(x)-g''(x)]m(dx)=0$，这仅当 $g'(x)=g''(x)\ (\mathrm{mod}\ m)$ 时才有可能。

§3. 级　　数

级数收敛性的某些一般判别法　在这一节中讨论随机项级数以概率 1 收敛的条件。

设已给级数

$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n+\cdots. \tag{1}$$

定理 1　若存在数列 $\varepsilon_n>0, n=1,2,\cdots$，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<\infty, \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{|\xi_n|>\varepsilon_n\}<\infty, \tag{2}$$

则级数(1)以概率 1 绝对收敛。

证。令 $A_n=\{|\xi_n|>\varepsilon_n\}$，从(2)中第二个级数收敛和第 1 章 §2 定理 6 推得 $\mathbf{P}(\overline{\lim}\, A_n)=0$，即以概率 1 只有有限多个事件 A_n 发生。于是，存在 $N=N(\omega)$，使当 $n>N(\omega)$ 时 $|\xi_n|<\varepsilon_n$，即级数(1)收敛。

对于具有有限矩的随机变量 ξ_n，级数(1)收敛的充分条件可以陈述如下：

定理 2　若

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}|\xi_n|<\infty, \tag{3}$$

则级数(1)以概率 1 绝对收敛。

证明可由 Lebesgue 定理得出，因为

$$\mathbf{E}\sum_1^{\infty}\xi_n^+=\sum_1^{\infty}\mathbf{E}\xi_n^+, \mathbf{E}\sum_1^{\infty}\xi_n^-=\sum_1^{\infty}\mathbf{E}\xi_n^-,$$

故级数

$$\sum_{1}^{\infty}(\xi_n^+ + \xi_n^-) = \sum_{1}^{\infty}|\xi_n|$$

以概率 1 收敛.

推论 若存在序列 $C_n > 0, n = 1, 2, \cdots$ 和 $p > 1$, 使得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^{-q}, \sum_{n=1}^{\infty} C_n^p \mathbf{E}|\xi_n|^p, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

收敛,则级数(1)既以概率 1 收敛也在 $\mathscr{L}_p$ 中收敛.

为证此,我们指出,根据 Hölder 不等式和 Jensen 不等式有

$$\begin{aligned}\sum_{m+1}^{m+n}\mathbf{E}|\xi_k| &= \sum_{m+1}^{m+n} C_k^{-1}\mathbf{E}\, C_k|\xi_k| \\ &\leqslant \left(\sum_{m+1}^{m+n} C_k^{-q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{m+1}^{m+n} C_k^p(\mathbf{E}|\xi_k|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \left(\sum_{m+1}^{m+n} C_k^{-q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{m+1}^{m+n} C_k^p\mathbf{E}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

由此并注意到推论的条件即可得出级数(3)的收敛性*). 而由

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left|\sum_{m+1}^{m+n}\xi_k\right|^p &\leqslant \mathbf{E}\left|\sum_{m+1}^{m+n} C_k^{-1} C_k|\xi_k|\right|^p \\ &\leqslant \mathbf{E}\left|\left(\sum_{m+1}^{m+n} C_k^{-q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{m+1}^{m+n} C_k^p|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right|^p \\ &\leqslant \left(\sum_{m+1}^{m+n} C_k^{-q}\right)^{\frac{p}{q}}\sum_{m+1}^{m+n} C_k^p\mathbf{E}|\xi_k|^p\end{aligned}$$

知,级数(1)在 $\mathscr{L}_p$ 中收敛.

对于半鞅我们有更强的结果. 令

$$\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n,\ \zeta_0 = 0.$$

定理 3 设 ξ_n 是 $\mathfrak{F}_n$ 可测的, $\{\mathfrak{F}_n;\ n = 0, 1, \cdots\}$ 是 σ 代数

*) 以下的证明是译者加的. ——译者注

流．这时，

a）若 $\mathbf{E}\{\xi_n|\mathfrak{F}_{n-1}\}\geqslant 0$ 且 $\sup \mathbf{E}\,\zeta_n^+<\infty$，则级数（1）以概率 1 收敛：

b）若 $\mathbf{E}\{\xi_n|\mathfrak{F}_{n-1}\}=0$ 且对某 $p\geqslant 1$ 有

$$\sup_n \mathbf{E}|\zeta_n|^p<\infty,$$

则级数(1)既以概率 1 收敛，也在 $\mathscr{L}_p$ 中收敛．

条件 a）相当于假设 $\{\zeta_n,\mathfrak{F}_n;n=1,2,\cdots\}$ 是下鞅，因此相应的论断是下鞅收敛定理的推论．条件 b）表示 $\{\zeta_n,\mathfrak{F}_n;n=1,2,\cdots\}$ 是鞅，定理的这部分论断由 § 2 定理 3 推出．

推论 1 若 $\mathbf{E}\{\xi_n|\mathfrak{F}_{n-1}\}=0$ 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}\,\xi_n^2<\infty,$$

则级数(1)既以概率 1 收敛，也在 $\mathscr{L}_2$ 收敛．

证明如下：当 $k\neq n$ 时

$$\mathbf{E}\xi_k\,\xi_n=\mathbf{E}\{\xi_k\,\mathbf{E}\{\xi_n|\mathfrak{F}_{n-1}\}\}=0,$$

$$\mathbf{E}\,\zeta_n^2=\mathbf{E}\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\Big)^2=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\,\xi_k^2+2\sum_{j=2}^{n}\sum_{k<j}\mathbf{E}\,\xi_k\,\xi_j=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\,\xi_k^2.$$

再根据定理的论断 2)，即可得出本推论．

对于带有独立项的级数，我们有称作 Колмогоров 定理的如下结果．

推论 2 (Колмогоров 定理)若$\{\xi_n,n=1,2,\cdots\}$是独立随机变量，$\mathbf{E}\,\xi_k=0$ 且级数$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{D}\,\xi_k<\infty$，则级数(1)以概率 1 收敛．

这论断可由推论 1 得出，这时把 $\mathfrak{F}_n$ 取为由随机变量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 产生的 σ 代数，并且注意到由随机变量 ξ_n 的独立性有

$$\mathbf{E}\{\xi_n|\mathfrak{F}_{n-1}\}=\mathbf{E}\,\xi_n=0.$$

独立随机变量的级数 现在我们来详细地讨论独立项级数的收敛性．从前面所述已经知道，这样的级数收敛的概率是 0 或 1（第 1 章 § 2，定理 8)．

今后需要有关独立变量和的极大值分布的一个估计(界)．

定理 4 若 $\{\xi_k; k=1,2,\cdots,n\}$ 是独立的，$\mathbf{E}\,\xi_k=0$ 且以概率 1 有 $|\xi_k|<C$，这里 C 是某一常数，则

$$\mathbf{P}\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\zeta_k|\leqslant t\}\leqslant (C+t)^2/\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2, \tag{4}$$

其中 $\sigma_k^2=\mathbf{E}\,\xi_k^2=\mathbf{D}\,\xi_k$.

以 E_n 表示事件 $\{\max_{0\leqslant k\leqslant n}|\zeta_k|\leqslant t\}$, $n=1,2,\cdots$，这些事件构成单调递减序列. 我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,\chi(E_n)\,\zeta_n^2&=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\{\chi(E_k)\,\zeta_k^2-\chi(E_{k-1})\,\zeta_{k-1}^2\}\\&=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\,\chi(E_{k-1})\,(\zeta_k^2-\zeta_{k-1}^2)-\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\{\chi(E_{k-1}\backslash E_k)\,\zeta_k^2.\end{aligned} \tag{5}$$

其次，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,\chi(E_{k-1}\backslash E_k)\,\zeta_k^2&=\mathbf{E}\,\chi(E_{k-1}\backslash E_k)\,(\zeta_{k-1}+\xi_k)^2\\&\leqslant (t+C)^2\,\mathbf{E}\,\chi(E_{k-1}\backslash E_k),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\,\chi(E_{k-1}\backslash E_k)\,\zeta_k^2&\leqslant (t+C)^2\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\,\chi(E_{k-1}\backslash E_k)\\&=(t+C)^2\,[1-\mathbf{P}(E_n)].\end{aligned} \tag{6}$$

而且

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,\chi(E_{k-1})(\zeta_k^2-\zeta_{k-1}^2)&=\mathbf{E}\,\chi(E_{k-1})(2\,\zeta_{k-1}\xi_k+\xi_k^2)\\&=2\,\mathbf{E}\,\chi(E_{k-1})\zeta_{k-1}\,\mathbf{E}\,\xi_k+\mathbf{E}\,\chi(E_{k-1})\,\mathbf{E}\,\xi_k^2\\&=\sigma_k^2\mathbf{E}\chi(E_{k-1}).\end{aligned} \tag{7}$$

(5),(6)和(7)式给出

$$\begin{aligned}t^2\,\mathbf{P}(E_n)\geqslant \mathbf{E}\,\chi(E_n)\,\zeta_n^2&\geqslant\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\mathbf{E}\chi(E_{k-1})-(t+C)^2\\&\quad\times(1-\mathbf{P}(E_n))\\&\geqslant \mathbf{P}(E_n)\left\{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2+(t+c)^2\right\}-(t+c)^2\end{aligned}$$

或

$$(t+c)^2 \geqslant \mathbf{P}(E_n)\left\{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 + c^2 + 2ct\right\},$$

由此即得(4)式.

对于一般的独立项级数,级数(1)的收敛问题由下述定理完全解决.

定理 5 (Колмогоров 三级数定理)独立随机变量级数(1)收敛的充分条件是对某一 $c>0$ (必要条件是对每一 $c>0$, 还是必要的),级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{|\xi_n|>c\}, \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}\,\xi_n', \tag{9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{D}\,\xi_n' \tag{10}$$

收敛,其中 $\xi_n'=\xi_n$ 若 $|\xi_n|<c$, $\xi_n'=0$ 若 $|\xi_n|>c$.

证. 充分性. 由定理 3 的推论 2 知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\xi_n'-\mathbf{E}\,\xi_n')$ 以概率 1 收敛. 由此并注意到级数 (9) 的收敛性可得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\xi_n'$ 以概率 1 收敛. 根据条件(8)和 Borel-Cantelli 定理知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\xi_n-\xi_n')$ 只有有限多项不等于零, 故级数 (1) 以概率 1 收敛.

必要性. 设级数(1)以概率 1 收敛,于是它的通项以概率 1 趋于零, 因此级数只有有限多项的绝对值超过 $c(c>0)$, 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\xi_n'$ 以概率 1 收敛. 我们以 $\{\eta_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$表示这样的独立随机变量序列,它们独立于序列 $\{\xi_n'\}$ $(n=1,2,\cdots)$且和 ξ_n' 有相同的分布. 令 $\tilde{\xi}_n=\xi_n'-\eta_n$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tilde{\xi}_n$ 以概率 1 收敛, $\mathbf{E}$

$\mathbf{E}\tilde{\xi}_n = 0, |\tilde{\xi}_n| \leqslant 2c, \mathbf{D}\tilde{\xi}_n = 2\mathbf{D}\xi_n'$. 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\xi}_n$ 的收敛性得

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{1\leqslant n\leqslant\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}\tilde{\xi}_k\right| < \infty\right\} = 1.$$

因此对某一 t 有

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{1\leqslant n<\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}\tilde{\xi}_k\right| \leqslant t\right\} = a > 0.$$

由不等式(4)得知,对任意 n 有

$$2\sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}\xi_k' = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}\tilde{\xi}_k \leqslant \frac{(2c+t)^2}{a}.$$

这就证明了级数(10)的收敛性。现在,根据定理 3 的推论 2 即得,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\xi_n' - \mathbf{E}\xi_n')$ 以概率 1 收敛,从而又得级数(9)的收敛性.而级数(8)的收敛性可由 Borel-Cantelli 定理推得,因为若级数(1)收敛,则以概率 1 只能找到级数(1)的有限多项使有 $|\xi_n| > c$.定理证毕.

推论 非负独立随机变量级数(1)收敛的充分条件是对某一 $c > 0$ (必要条件是对每个 $c > 0$),级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\xi_n > c\}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}\xi_n'$$

收敛.

事实上,对于非负变量 ξ_n 有 $\mathbf{E}\xi_n'^2 \leqslant c\mathbf{E}\xi_n'$. 因此,由级数(9)收敛推知级数(10)收敛.

Lévy 得到的一个有意义的结果是: 独立随机变量级数的依概率收敛性蕴涵以概率 1 收敛性.

为证明这个论断,我们需要一个不等式,它类似于我们早先得到的有关下鞅的不等式,但这时不必假设数学期望存在.

定理 6 设 $\{\xi_n; n = 1, 2, \cdots\}$是独立随机变量序列. $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$, $\zeta_0 = 0$. 若 $\mathbf{P}\{|\zeta_n - \zeta_k| \leqslant t\} \geqslant \alpha$, $k = 0, 1, \cdots, n$,则

$$\mathbf{P}\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\zeta_k|>2t\}\leqslant\frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

证．我们引入事件 $A_k=\{|\zeta_1|\leqslant 2t,\ \cdots,\ |\zeta_{k-1}|\leqslant 2t, |\zeta_k|>2t\}$, $B_k=\{|\zeta_n-\zeta_k|\leqslant t\}$, $k=1,\cdots,n$. 于是有

$$\{|\zeta_n|>t\}\supset\bigcup_{k=1}^{n}(A_k\cap B_k),$$

而且事件 A_k, $k=1,\cdots,n$ 是两两不相交的，事件 A_k, B_k（对于固定的 $k=1,2,\cdots,n$)是相互独立的．因此，

$$1-\alpha>\mathbf{P}\{|\zeta_n|>t\}\geqslant\mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{n}(A_k\cap B_k)\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k)\mathbf{P}(B_k)\geqslant\alpha\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k)=\alpha\mathbf{P}\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\zeta_k|>2t\},$$

从而就得到(11)式．

定理 7　若级数(1)(其中 $\{\xi_n;\ n=1,2,\cdots\}$ 相互独立)依概率收敛,则它以概率 1 收敛．

以 $A_{n,N}$ 表示事件$\left\{\sup_{n',n''>n}|\zeta_{n'}-\zeta_{n''}|>\frac{1}{N}\right\}$. 级数(1)在集合 $D=\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}A_{n,N}$ 上发散．现在来估计D的概率． 设 ε 和 η 是任意正数．由级数(1)依概率收敛知,存在 $n_0=n_0(\varepsilon,\eta)$, 使得当 $n', n''>n_0$ 时

$$\mathbf{P}\{|\zeta_{n'}-\zeta_{n''}|>\varepsilon\}<\eta.$$

把定理 6 应用于变量 $\zeta'_k=\zeta_k-\zeta_{n_0}$, $k>n_0$,我们就得到

$$\mathbf{P}\{\max_{n_0\leqslant k\leqslant n'}|\zeta'_k|>2\varepsilon\}$$

$$=\mathbf{P}\{\max_{n_0\leqslant k\leqslant n'}|\zeta_k-\zeta_{n_0}|>2\varepsilon\}\leqslant\frac{\eta}{1-\eta},$$

这里 n' 是任意大于 n_0 的整数．因此

$$\mathbf{P}\{\sup_{n_0\leqslant k}|\zeta_k-\zeta_{n_0}|>2\varepsilon\}\leqslant\frac{\eta}{1-\eta},$$

其中 η 可以任意小. 由此推得,对任意N有

$$\mathbf{P}(A_{n,N}) \leqslant \frac{\eta}{1-\eta} \text{和} \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n,N}\right) = 0,$$

故 $\mathbf{P}(D) = 0$. 定理证毕.

应用于强大数定律 根据关于级数的以概率 1 收敛性定理,人们能借助简单的变换而建立强大数定律类型的定理(即关于随机变量的某些平均值以概率 1 收敛的定理).

引理 1 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$收敛,且 a_n 是单调递增序列, $a_n > 0$, $a_n \to \infty$,则

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} a_k z_k \to 0.$$

证. 设

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k \,(S_0 = 0) \text{和} |S_n| \leqslant c,$$

这里 c 是某一常数. 令 $a_k - a_{k-1} = \Delta_k$, $k = 1, 2, \cdots$, $a_0 = 0$. 则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k z_k = \sum_{k=1}^{n} (\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_k) z_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k (S_n - S_{k-1}).$$

因此对于任意 $\varepsilon > 0$,若 n 和 n_0 选得足够大,则有

$$\left|\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} a_k z_k\right| \leqslant \left|\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n_0} \Delta_k (S_n - S_{k-1})\right| + \sup_{n_0 \leqslant k \leqslant n} |S_n - S_{k-1}|$$

$$\leqslant 2c \frac{a_{n0}}{a_n} + \sup_{n_0 \leqslant k \leqslant n} |S_n - S_{k-1}| < \varepsilon.$$

根据这引理和前一小节给出的定理可得如下论断.

定理 8 a) 若 $\{\xi_n;\ n = 1, 2, \cdots\}$ 是任意具有有限一阶矩的随机变量序列,而且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbf{E}|\xi_n - a_n| < \infty,\ a_n = \mathbf{E}\,\xi_n,$$

则以概率 1 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k) = 0.$$

b）若序列 $\{\xi_n; n = 1, 2, \cdots\}$ 的部分和 $\{\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n\}$ 构成鞅，而且对某一 $p \geqslant 1$

$$\sup_n \mathbf{E}\left|\sum_{1}^{n}\frac{1}{k}\xi_k\right|^p < \infty,$$

则以概率 1 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k = 0.$$

c）若 $\{\xi_n; n = 1, 2, \cdots\}$ 是独立的，而且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\mathbf{D}\,\xi_n < \infty,$$

则以概率 1 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \mathbf{E}\xi_k) = 0.$$

对于同分布的随机变量 ξ_n 的更强的结果，今后将作为一般的遍历性定理的推论得到。

§ 4. Марков 链

把随机游动的概念加以推广，人们就可以得到 Марков 链（Марков 过程）这个广泛得多的概念，它在随机过程论中起着重要的作用。在给出正式定义之前，我们先研究一个引导到 Марков 链的简单而又很一般的模型。

有随机影响的系统　我们讨论一个随机系统 Σ，它的状态是某可测空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 的点。假设系统从它在时刻 t 所处的状态 $\xi(t)$ 转移到在时刻 $t+1$ 所处的新状态是由 t 的值、状态 $\xi(t)$ 和某一随机因子 α_t 完全确定，而且 α_t 与系统在时刻 t 之前（包括 t）所处的状态无关并依时间形成一个具有独立值的过程。于是

$$\xi(t+1) = f(t, \xi(t), \alpha_t), \tag{1}$$

这里 $f(t, x, \alpha)$ 是参数 $t \in T, x \in \mathscr{X}, \alpha \in \Lambda$ 的某一函数，其中 Λ 是某一可测空间．利用 (1) 式，人们能够从状态 $\xi(t)$ 出发表示出系统在任意时刻 $s(t < s)$ 的状态

$$\xi(s) = g_{t,s}(\xi(t), \alpha_t, \alpha_{t+1}, \cdots, \alpha_{s-1}). \tag{2}$$

如果在初始时刻 $t = 0$，$\xi(0)$ 与序列 $\{\alpha_t;\ t \in T\}$ 无关，则 $\xi(t)$ 与序列 $\{\alpha_t, \alpha_{t+1}, \cdots, \alpha_n, \cdots\}$ 无关．

设 $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$ 是概率空间，在其上定义随机元 α_t．又设对任意固定的 t 和 $s(s > t)$，函数 $g_{t,s}(x, \alpha_t, \alpha_{t+1}, \cdots, \alpha_{s-1})$ 是 $\mathfrak{B} \times \mathfrak{S}$ 可测的．于是，若系统 Σ 的运动从时刻 t 开始，并已知状态 $\xi(t) = x$，则由 (2) 式可以确定在时刻 $s > t$，Σ 处于任意集合 $A \in \mathfrak{B}$ 的概率．这概率称做转移概率并用 $P\{t, x, s, A\}$ 表示．若以 $\chi_A(x)$ 表示集合 A 的示性函数，则

$$P\{t, x, s, A\} = \mathbf{E}\,\chi_A\{g_{t,s}(x, \alpha_t, \cdots, \alpha_{s-1})\}.$$

设 $t < u < v$，由(2)式及随机变量 $\alpha_t, \cdots, \alpha_{v-1}$ 的独立性得到等式

$$\begin{aligned} P\{t, x, v, A\} &= \mathbf{E}\,\chi_A[g_{u,v}(\xi(u), \alpha_u, \cdots, \alpha_{v-1})] \\ &= \mathbf{E}[\{E\chi_A[g_{u,v}(y, \alpha_u, \cdots, \alpha_{v-1})]\}_{y=\xi(u)}] \\ &= \mathbf{E}\,P\{u, \xi(u), v, A\}. \end{aligned}$$

上式可以记为

$$P(t, x, v, A) = \int P(u, y, v, A)\, P(t, x, u, dy),\ t < u < v. \tag{3}$$

关系式(3)称为 Chapman-Колмогоров 方程，它表示我们讨论的系统的一个重要性质——没有后效：如果已知系统 Σ 在某时刻 u 的状态，则从这个状态转移的概率与系统在 u 以前各时刻的性态无关．具有这种性质的系统称作 Марков 的．在自然科学和工程的各种问题中常常会出现这样的系统．根据转移概率的定义推知，对任意非负 $\mathfrak{B}$ 可测函数 $f(x)$ 有

$$\mathbf{E}\, f(g_{t,s}(x, \alpha_t, \cdots, \alpha_{s-1})) = \int f(y)\, P(t, x, s, dy).$$

考虑到 $\xi(t)$ 对 $\alpha_t, \alpha_{t+1}, \cdots, \alpha_{s-1}$ 的独立性（第 1 章 § 3），我们可得

$$\mathbf{E} f(g_{t,s}(\xi(t), \alpha_t, \cdots, \alpha_{s-1})) = \mathbf{E}\int f(y)\, P(t, \xi(t), s, dy).$$

容易把这公式推广到任意 $\mathfrak{B}^m$ 可测非负函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ $x_k \in \mathscr{X}$ 的情形. 设 $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$,则

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E} f(\xi(t_1), \xi(t_2), \cdots, \xi(t_m)) \\
&\quad = \mathbf{E} f(\xi(t_1), \cdots, \xi(t_{m-1}), g_{t_{m-1},t_m}(\xi(t_{m-1}), \alpha_{t_{m-1}})) \\
&\quad = \mathbf{E}\int f(\xi(t_1), \cdots, \xi(t_{m-1}), y_m)\, P(t_{m-1}, \xi(t_{m-1}), t_m, dy_m) \\
&\quad = \mathbf{E}\iint f(\xi(t_1), \cdots, \xi(t_{m-2}), y_{m-1}, y_m)\, P(t_{m-1}, y_{m-1}, t_m, \\
&\qquad dy_m) P(t_{m-2}, \xi(t_{m-2}), t_{m-1}, dy_{m-1}) = \cdots.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} f(\xi(t_1), \xi(t_2), \cdots, \xi(t_m)) &= \mathbf{E}\int P(t_1, \xi(t_1), t_2, dy) \\
&\times \int P(t_2, y_2, t_3, dy_3) \cdots \int P(t_{m-1}, y_{m-1}, t_m, dy_m) \\
&\qquad \times f(\xi(t_1), y_2, \cdots, y_m). \qquad (4)
\end{aligned}$$

如果假定系统的初始状态是非随机的,即 $\xi(0) = x$,同时把(4)式应用于序列 $\xi(1), \xi(2), \cdots, \xi(n)$ 和函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \chi_{B^{(n)}}$,这里 $B^{(n)}$ 是 $\mathfrak{B}^n$ 中任一集合,我们就得到由下式确定的一族有限维分布 $\{P^{(x)}_{1,2,\cdots,n}(\cdot), n = 1, 2, \cdots\}$:

$$\mathbf{P}^{(x)}_{1,2,\cdots,n}(B^{(n)}) = \int_{B^{(n)}} \cdots \int P_1(x, dy_1) P_2(y_1, dy_2) \cdots P_n(y_{n-1}, dy_n), \quad (5)$$

其中 $P_k(x, A) = P(k-1, x, k, A)$ 是一步转移概率. 当系统的初始状态 $\xi(0)$ 有任意的分布 m 时(m 是 $\mathfrak{B}$ 上的概率测度),则从(4)式推得的不是(5)式而是依赖于 m(作为参数)的有限维分布族

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{(m)}_{0,1,\cdots,n}(B^{(n+1)}) &= \int_{B^{(n+1)}} \cdots \int m(dx) \\
&\times P_1(x, dy_1) P_2(y_1, dy_2) \cdots P_n(y_{n-1}, dy_n). \qquad (6)
\end{aligned}$$

这时

$$\mathbf{P}^{(m)}_{0,1,\cdots,n}(B^{(n+1)}) = \mathbf{P}\{(\xi(0), \xi(1), \cdots, \xi(n)) \in B^{(n+1)}\}.$$

(6)式可以用作 Марков 链一般定义的基础. 但是,我们在这样

做之前应先分析一下，当测度族 $P_k(x, A)$ 不是通过辅助变量 α_t 和函数 $f(t, x, \alpha)$ 而是独立地给定时，(6) 型积分的意义是怎样的.

随机核 设给定了两个可测空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{A}\}$ 和 $\{\mathscr{Y}, \mathfrak{B}\}$.

定义 1 满足下列条件的函数 $P(x, B)(x \in \mathscr{X}, B \in \mathfrak{B})$ 称作 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 上的**随机核**:

1) 对固定的 x，函数 $P(x, \cdot)$ 是 $\mathfrak{B}$ 上的概率测度;

2) 对固定的 B，函数 $P(\cdot, B)$ 是 $\mathfrak{A}$ 可测的.

若 $P(x, \cdot)$ 是测度且 $P(x, \mathscr{Y}) \leqslant 1$，则称 $P(x, B)$ 为**半随机核**.

引理 1 设 $f(x, y)$ 是非负的 $\sigma\{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}\}$ 可测函数，而 $P(\cdot, \cdot)$ 是 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 上的随机(半随机)核，则函数

$$g(x) = \int_{\mathscr{X}} f(x, y) P(x, dy)$$

是 $\mathfrak{A}$ 可测的.

证. 对固定的 x，函数 $f(x, \cdot)$ 是 $\mathfrak{B}$ 可测的，于是等式右边的积分有意义. 使得引理成立的非负函数 $f(x, \cdot)$ 的类是锥，又由 Lebesgue 定理知道它是单调类 (函数类 K 称作单调的，如果对于 $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots$, $f_n \in K$ 有 $\lim f_n \in K$). 因为它包含形如 $A \times B$ 的集合 (这里 $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$) 的示性函数，所以它包含所有非负的 $\sigma\{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}\}$ 可测函数.

下面的论断可以看作是著名的 Fubini 定理的推广.

定理 1 设 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{A}\}$, $\{\mathscr{Y}, \mathfrak{B}\}$, $\{\mathscr{Z}, \mathfrak{C}\}$ 是可测空间，$Q_1(x, B)$ 和 $Q_2(y, c)$ 分别是 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 和 $\{\mathscr{Y}, \mathfrak{C}\}$ 上的随机(或半随机)核，则存在 $\{\mathscr{X}, \sigma\{\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}\}\}$ 上唯一的随机(或半随机)核 $Q_3(x, D)$，使得

$$Q_3(x, B \times C) = \int_B Q_1(x, dy) Q_2(y, C). \tag{7}$$

这时，对于任意的非负 $\sigma\{\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}\}$ 可测函数 $f(y, z)$ 有

$$\int_{\mathscr{Y} \times \mathscr{Z}} f(y, z) Q_3(x, dy \times dz)$$

$$= \int_{\mathscr{Y}}\left(\int_{\mathscr{Z}} f(y, z)\, Q_2(y, dz)\right) Q_1(x, dy). \tag{8}$$

为证定理的第一部分，只须证明 (7) 式确定空间 $\mathscr{Y} \times \mathscr{Z}$ 中的矩形半环上的一个基本测度. 设 $D_1 = B_1 \times C_1$, $D_2 = B_2 \times C_2$ 和 $D_2 \subset D_1$, 则有 $B_2 \subset B_1$, $C_2 \subset C_1$ 和 $D_1 = D_2 \cup D' \cup D''$，其中 $D' = B_2 \times (C_1 \backslash C_2)$, $D'' = (B_1 \backslash B_2) \times C_1$.

集合 D_2, D' 和 D'' 两两不相交. 如果把 (7) 式依次应用于集合 D_2, D' 和 D''，我们就得到

$$Q_3(x, D_2) + Q_3(x, D') + Q_3(x, D'')$$

$$= \int_{B_1} Q_1(x, dy)\, Q_2(y, C_2) + \int_{B_2} Q_1(x, dy)\ \ Q_2(y_1, C_1 \backslash C_2) + \int_{B_1 \backslash B_2} Q_1(x, dy)\, Q_2(y, C)$$

$$= \int_{B_1} Q_1(x, dy)\, Q_2(y, C_1) = Q_3(x, D_1).$$

于是函数 $Q_3(x, D)$ 在这些特殊的集合分划上是可加的. 特别地，若 $D_3 = D_1 \cup D_2$, 其中 D_i 是矩形而且 $D_1 \cap D_2 = \phi$, 则有 $Q_3(x, D_1) + Q_3(x, D_2) = Q_3(x, D_3)$和 $Q_3(x, \mathscr{Y} \times \mathscr{Z}) = 1$.(若 Q_1 和 Q_2 是半随机核，则 $Q_3(x, \mathscr{Y} \times \mathscr{Z}) \leqslant 1$). 在一般情形中，函数 $Q_3(x, \cdot)$ 在所有矩形组成的半环上的可加性易由归纳法得到.

设 $D = \bigcup_{k=1}^{n} D_k$，其中 D_k 是两两不相交的矩形. 则 $D \backslash D_n = D' \cup D'' = \bigcup_{k=1}^{n-1} D_k$，这里 D' 和 D'' 由前面的公式确定. 如前面所证明的，

$$Q_3(x, D) = Q_3(x, D_n) + Q_3(x, D') + Q_3(x, D'').$$

利用归纳法假设可得

$$Q_3(x, D') = Q_3\left(x, D' \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} D_k\right)\right) = \sum_{k=1}^{n-1} Q_3(x, D' \cap D_k)$$

及 $Q_3(x, D'')$ 的类似表示式。所以

$$Q_3(x, D) = Q_3(x, D_n) + \sum_{k=1}^{n-1} [Q_3(x, D' \cap D_k)$$
$$+ Q_3(x, D'' \cap D_k)].$$

因为 D' 和 D'' 是不相交的矩形，它们之并覆盖 D_k，故 $D' \cap D_k$ 和 $D'' \cap D_k$ 也是矩形，而且 $(D' \cap D_k) \cup (D'' \cap D_k) = D_k$. 因此 $Q_3 \cdot (x, D' \cap D_k) + Q_3(x, D'' \cap D_k) = Q_3(x, D_k)$，从而

$$Q_3(x, D) = \sum_{k=1}^{n} Q_3(x, D_k).$$

这就证明了 $Q_3(x, \cdot)$ 的可加性. 往证 $Q_3(x, \cdot)$ 是可数半可加的. 设 $D_0 \subseteq \bigcup_1^\infty D_k$, $D_k = B_k \times C_k$, $k = 0, 1, \cdots$. 则

$$\chi_{D_0}(y, z) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{D_k}(y, z).$$

因为

$$\chi_{D_k}(y, z) = \chi_{B_k}(y) \chi_{C_k}(z),$$

故

$$\chi_{B_0}(y)\, \chi_{C_0}(z) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{B_k}(y)\, \chi_{C_k}(z).$$

上式两边对测度 $Q_2(y, \cdot)$ 在空间 $\mathscr{Z}$ 上积分，我们得到

$$\chi_{B_0}(y)\, Q_2(y, C_0) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{B_k}(y)\, Q_2(y, C_k).$$

再次将所得的不等式对测度 $Q_1(x, \cdot)$ 在空间 $\mathscr{Y}$ 上积分，我们得到不等式

$$Q_3(x, D_0) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} Q_3(x, D_k),$$

这就证明了 $Q_3(x, D_k)$是可数半可加的. 由此推知，$Q_3(x, B \times C)$ 可以唯一地延拓到 $\sigma\{\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}\}$ 上. 为了证明(8)式，首先注意，由前面的引理知，(8) 式右边括号内的积分是 $\mathfrak{B}$ 可测函数，因此 (8) 式右边的二重积分有意义. 其次，使得(8)式成立的函数 $f\,(f \geqslant 0)$

的类是锥和单调类．而且，由(7)式知，它包含矩形的示性函数．因此它包含所有 $\sigma\{\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}\}$ 可测的非负函数．定理证毕．

同样可证下述定理

定理 2 设 $\{\mathscr{X},\mathfrak{A}\}$, $\{\mathscr{Y}_1,\mathfrak{B}_1\}$, $\cdots$, $\{\mathscr{Y}_s,\mathfrak{B}_s\}$ 是可测空间，而 $Q_1(x,B^{(1)})$, $Q_2(y_1,B^{(2)})$, $\cdots$, $Q_s(y_{s-1},B^{(s)})$ 是随机（半随机）核，$y_k\in\mathscr{Y}_k$, $B^{(k)}\in\mathfrak{B}_k$ $(k=1,\cdots,s)$．则存在 $\{\mathscr{X},\mathfrak{D}\}$上唯一的随机（半随机）核 $Q^{(1,s)}(x,D)$（其中 $\mathfrak{D}=\sigma\{\mathfrak{B}_1\times\mathfrak{B}_2\times\cdots\times\mathfrak{B}_s\}$），使得

$$Q^{(1,s)}(x,B^{(1)}\times\cdots\times B^{(s)})$$
$$=\int_{B^{(1)}}Q_1(x,dy_1)\int_{B^{(2)}}Q_2(y_1,dy_2)$$
$$\cdots\int_{B^{(s-1)}}Q_s(y_{s-1},B^{(s)})\,Q_{s-1}(y_{s-2},dy_{s-1}).\tag{9}$$

而且对于任意的非负 $\mathfrak{D}$ 可测函数 $f(y_1,y_2,\cdots,y_s)$ 有

$$\int_{\mathscr{Y}_1\times\cdots\times\mathscr{Y}_s}f(y_1,\cdots,y_s)\,Q^{(1,s)}(x,dy_1\times\cdots\times dy_s)$$
$$=\int_{\mathscr{Y}_1}Q_1(x,dy_1)\cdots\int_{\mathscr{Y}_s}f(y_1,\cdots,y_s)\,Q_s(y_{s-1},dy_s).\tag{10}$$

注．我们就非负函数的情形证明了公式(8)和(10)，但对于任意函数 f，若 f^+ 和 f^- 中有一个是可积的，则这两个式子自然也成立．对于其它为简明起见而只提到非负函数的定理也有类似的情况发生．

核 $Q^{(1,s)}$ 称作核 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_s$ 的直积并记为

$$Q^{(1,s)}=Q_1\times Q_2\times\cdots\times Q_s.$$

若在 (9) 式中令 $B^{(1)}=\mathscr{Y}_1,\cdots,B^{(s-1)}=\mathscr{Y}_{s-1}$，则可得 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}_s\}$ 上的一个新的随机核

$$Q^{*(1,s)}(x,B^{(s)})=Q^{(1,s)}(x,\mathscr{Y}_1\times\mathscr{Y}_2\times\cdots\times\mathscr{Y}_{s-1}\times B^{(s)}).\tag{11}$$

我们称之为核 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_s$ 的卷积并记作

$$Q^{*(1,s)}=Q_1*Q_2*\cdots*Q_s.$$

把公式(10)应用于函数 $f(y_1,y_2,\cdots,y_s)=f(y_s)=\chi_{B^{(s)}}(y^{(s)})$并与 (11) 式比较，我们就得到

$$\int_{\mathscr{Y}_1\times\mathscr{Y}_2\times\cdots\times\mathscr{Y}_s} f(y_s)\, Q^{(1,s)}(x, dy_1\times dy_2\times\cdots\times dy_s)$$

$$=\int_{\mathscr{Y}_s} f(y_s)\, Q^{*(1,s)}(x, dy_s). \tag{12}$$

因为使得(12)式成立的非负函数类是锥，并且是单调类，故对于任意非负 $\mathfrak{B}_s$ 可测函数，(12)式也成立。由此又可推得，对于任意形如

$$f(y_{m_1}, y_{m_2}, \cdots, y_{m_r}, y_s)$$

$$(y_m\in\mathscr{Y}_m,\ 0\leqslant m_1<m_2<\cdots<m_r<s)$$

的 $r+1$ 元非负 $\sigma\{\mathfrak{B}_{m_1}\times\mathfrak{B}_{m_2}\times\cdots\times\mathfrak{B}_{m_r}\times\mathfrak{B}_s\}$ 可测函数有

$$\int_{\mathscr{Y}_{m_1}\times\mathscr{Y}_{m_2}\times\cdots\times\mathscr{Y}_{m_r}\times\mathscr{Y}_s} f(y_{m_1}, y_{m_2}, \cdots, y_{m_r}, y_s)$$

$$\times\, Q^{(1,s)}(x, dy_{m_1}\times dy_{m_2}\times\cdots\times dy_s)$$

$$=\int_{\mathscr{Y}_{m_1}} Q^{*(1,m_1)}(x, dy_{m_1})\int_{\mathscr{Y}_{m_2}} Q^{*(m_1+1,m_2)}(y_{m_1}, dy_{m_2})$$

$$\cdots\int_{\mathscr{Y}_s} f(y_{m_1},\cdots, y_{m_r}, y_s)\, Q^{*(m_r+1,s)}(y_{m_r}, dy_s). \tag{13}$$

(13)式的一种特殊情形是关系式

$$Q^{*(1,s)}=Q^{*(1,m_1)}*Q^{*(m_1+1,m_2)}*\cdots*Q^{*(m_r+1,s)},$$

它表明核的卷积运算满足结合律。

现在讨论随机核的无穷乘积。设 $\{\mathscr{X}_n, \mathfrak{B}_n\}(n=0,1,2,\cdots)$ 是可测空间的无穷序列，而 $P_n(\cdot,\ \cdot)\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ 是定义在 $\{\mathscr{X}_{n-1}, \mathfrak{B}_n\}$ 上的随机核序列。根据定理 2，我们构造核的直积

$$P^{(1,n)}=P_1\times P_2\times\cdots\times P_n,$$

$$P^{(1,n)}=P^{(1,n)}(x_0, D),\ x_0\in\mathscr{X}_0,\ D\in\mathfrak{C}_n,$$

其中 $\mathfrak{C}_n$ 是包含所有矩形 $B_1\times B_2\times\cdots\times B_n(B_k\in\mathfrak{B}_k)$ 的最小 σ 代数，即 $\mathfrak{C}_n=\sigma\{\mathfrak{B}_1\times\mathfrak{B}_2\times\cdots\times\mathfrak{B}_n\}$。

我们引入空间 $\mathscr{X}^\infty=\prod_{n=1}^{\infty}\mathscr{X}_n$，它的元素是无穷序列 $\omega=(x_1, x_2,\cdots,\ x_n,\cdots)$，$x_n\in\mathscr{X}_n$。以 $\mathfrak{C}^0$ 表示 $\mathscr{X}^\infty$ 中的柱集组成的代数，又在 $\mathfrak{C}^0$ 上用下述方法定义一族依赖于参数 $x_0(x_0\in\mathscr{X}_0)$ 的集函数 $P^{(x_0)}$：若 C 是柱集，

$$C=\{\omega:(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\},\ D\in\mathfrak{C}_n,$$

则令

$$P^{(x_0)}(C)=P^{(1,n)}(x_0,D).$$

这些集函数是唯一地确定的. 事实上，若

$$C=\{\omega:(x_1,x_2,\cdots,x_{n'})\in D'\},\ D'\in\mathfrak{C}_{n'}.$$

而且，譬如说，若 $n'>n$，则 $D'=D\times\mathscr{X}_{n+1}\times\cdots\times\mathscr{X}_{n'}$ 且

$$P^{(1,n')}(x_0,D')=\int\cdots\int_{\mathscr{X}_1\times\cdots\times\mathscr{X}_{n'}}P_1(x_0,dx_1)P_2(x_1,dx_2)$$

$$\cdots P_{n'}(x_{n'-1},dx_{n'})\chi_{D'}(x_1,\cdots,x_{n'}),$$

其中 $\chi_{D'}(x_1,\cdots,x_{n'})$是 D' 的示性函数. 注意到 $\chi_{D'}(x_1,\cdots,x_{n'})=\chi_D(x_1,\cdots,x_n)$和 $P_k(x,\mathscr{X}_k)=1$, 从后一表示式得

$$P^{(1,n')}(x_0,D')=P^{(1,n)}(x_0,D).$$

函数 $P^{(x_0)}$ 在 $\mathfrak{C}_0$ 上的可加性是显然的.

定理 3 存在 $\{\mathscr{X}^\infty,\mathfrak{C}\}$ 上(这里 $\mathfrak{C}$ 是由空间 $\mathscr{X}^\infty$ 中的柱集产生的 σ 代数)唯一的测度族 $P^{(x_0)}$,使得

$$P^{(x_0)}\{\omega:x_k\in B_k,\ k=1,\cdots,n\}$$

$$=\int_{B_1}P_1(x_0,dx_1)\int_{B_2}P_2(x_1,dx_2)$$

$$\cdots\int_{B_{n-1}}P_{n-1}(x_{n-2},dx_{n-1})P_n(x_{n-1},B_n).$$

证. 只须证明,在 $\mathfrak{C}_0$ 上引入的测度 $P^{(x_0)}$ 满足连续性条件: 对任意单调递减的柱集序列 C_n, 若 $\bigcap C_n=\phi$,则有 $P^{(x_0)}(C_n)\to 0$. 假若不然: 对某 x_0 有 $P^{(x_0)}(C_n)>\varepsilon$. 以 D_n 表示柱集 C_n 的底, $\chi(D_n;x_1,x_2,\cdots,x_{m_n})=\chi(D_n)$是 D_n 的示性函数, 又设 D_n 是处于坐标$(1,2,\cdots,m_n)$上的. 定义 $\mathfrak{B}$ 中的集合序列

$$B_n^{(1)}=\Big\{x_1:\int_{\mathscr{X}^{(2,m_n)}}\chi(D_n;x_1,x_2,\cdots,x_{m_n})$$

$$\times P^{(2,m_n)}(x_1,dx_2\times\cdots\times dx_{m_n})>\frac{\varepsilon}{2}\Big\},$$

这里 $\mathscr{X}^{(s,m)}$表示乘积空间 $\mathscr{X}_s\times\mathscr{X}_{s+1}\times\cdots\times\mathscr{X}_m$.

从 C_n 递减推知, $B_n^{(1)}$ 也是单调递减的, 其次, 若 $\chi(B_n^{(1)})$ 是

$B_n^{(1)}$ 的示性函数，而 $\bar{\chi}(B_n^{(1)}) = 1 - \chi(B_n^{(1)})$，则

$$\varepsilon \leqslant P^{(x_0)}(C_n) = \int_{\mathscr{X}_1}\int_{\mathscr{X}^{(2,m_n)}}(\chi(B_n^{(1)}) + \bar{\chi}(B_n^{(1)}))$$

$$\times \chi(D_n) P_1(x_0, dx_1) P^{(2,m_n)}(x_1, dx_2 \times \cdots \times dx_{m_n})$$

$$\leqslant P_1(x_0, B_n^{(1)}) + \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathscr{X}_1} \bar{\chi}(B_n^{(1)}) P_1(x_0, dx_1) \leqslant P_1(x_0, B_n^{(1)}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

所以 $P_1(x_0, B_n^{(1)}) > \frac{\varepsilon}{2}$. 因为 $P_1(x_0, \cdot)$ 是测度，故由此得到 $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^{(1)} \neq \phi$. 设 $\bar{x}_1 \in B_n^{(1)}, n = 1, 2, \cdots$，则

$$\int_{\mathscr{X}^{(2,m_n)}} \chi(D_n; \bar{x}_1, x_2, \cdots, x_{m_n})$$

$$\times P^{(2,m_n)}(\bar{x}_1, dx_2 \times \cdots \times dx_{m_n}) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

把上面的推理应用到核 $P^{(3,m_n)}(x_2, dx_3 \times \cdots \times dx_{m_n})$ 和测度 $P_2(\bar{x}_1, dx_2)$，我们就能够证明，存在点 $\bar{x}_2$，使得对任意 D_n

$$\int_{\mathscr{X}^{(3,m_n)}} \chi(D_n; \bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3, \cdots, x_{m_n})$$

$$\times P^{(3,m_n)}(\bar{x}_2, dx_3 \times \cdots \times dx_{m_n}) > \frac{\varepsilon}{4}.$$

因此，可以构造序列 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n, \cdots)$，其中 $\bar{x}_n \in \mathscr{X}_n$，使得对任意 s 和 D_n 有

$$\int_{\mathscr{X}^{(s+1,m_n)}} \chi(D_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_s, x_{s+1}, \cdots, x_{m_n})$$

$$\times P^{(s+1,m_n)}(\bar{x}_s, dx_{s+1} \times \cdots \times dx_{m_n}) > \frac{\varepsilon}{2^s}.$$

考虑任意集合 C_k，假定它的底 D_k 处于坐标 $(1, 2\cdots, s)$上. 最后一个不等式表明 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_s) \in D_k$（否则有 $\chi(D_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_s, x_{s+1}, \cdots, x_{m_n}) \equiv 0$ 对所有 $(x_{s+1}, \cdots, x_{m_n})$）. 因此，对任意 C_k 都有 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_s, \cdots) \in C_k$，故 $\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k \neq \phi$，这与原先的假设矛盾. 定理证毕.

推论 设给定了概率空间序列 $\{\mathscr{X}_n, \mathfrak{B}_n, q_n\}, n=1, 2, \cdots$.

又设 $\mathscr{X}^\infty$ 是由所有序列 $\omega=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)(x_n\in\mathscr{X}_n)$组成的空间，$\mathfrak{C}$ 是 $\mathscr{X}^\infty$ 中由柱集产生的 σ- 代数．则存在 $\{\mathscr{X}^\infty, \mathfrak{C}\}$ 上唯一的概率测度 Q,使得

$$Q\{\omega: x_k\in B_k, k=1, 2, \cdots, n\}=\prod_{k=1}^n q_k(B_k), \ B_k\in\mathfrak{B}_k.$$

换句话说，若给定了某一概率空间序列 $\{\mathscr{X}_n, \mathfrak{B}_n, q_n\}$, $n=1, 2, \cdots$,则恒存在概率空间 $\{\Omega, \mathfrak{S}, Q\}$ 及从空间 Ω 到 $\mathscr{X}_n$ 的映象序列 f_n，使得随机元 $\xi_n=f_n(\omega)$ 在 $\mathfrak{B}_n$ 上有给定的分布 q_n，而且 $\{\xi_n; n=1, 2, \cdots\}$ 是总体独立的．

注．刚才证明的定理和 Колмогоров 定理(第一章 § 4，定理 2)的区别在于它没有利用任何关于空间 $\mathscr{X}_n$ 的拓扑性质的假设．另一方面，它的普遍性不如 Колмогоров 定理，因为它只能应用于乘积空间中测度的一种特殊结构．

Марков 链的定义

定义 2 相空间为 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 的 Марков 链是这样的一族随机过程，它带有离散时间 $t\in T_+$并依赖于作为参数的 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 上的任意测度 m，而且过程的有限维分布由下式确定

$$\mathbf{P}^{(m)}\{\xi(k)\in B_k; k=0, 1, \cdots, n\}$$
$$=\int_{B_0} m(dx)\int_{B_1} P_1(x, dy_1)\cdots\int_{B_{n-1}} P_n(y_{n-1}, B_n), \quad (14)$$

这里 $\{P_t(x, B); t=1, 2, \cdots\}$ 是$\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$上的一族随机核．

随机核 $P_t(x, B)$ 称作链的一步转移概率，而 m 称作链的初始分布．固定测度 m 时，我们得到一个取值于 $\mathscr{X}$ 的随机序列，我们称之为对应于初始分布 m 的 Марков 过程．

这过程的有限维分布用 $\mathbf{P}^{(m)}_{t_1, t_2, \cdots, t_n}$ 表示，过程的某一函数对概率测度 $\mathbf{P}^{(m)}$ 取数学期望的运算则用符号 $\mathbf{E}_m$ 表示．

若测度 m 集中在相空间的某一固定点 x，则把 x 称为过程的初始状态，而有限维分布，$\{\mathscr{X}^T, \mathfrak{C}\}$ 中的测度和过程的某一函数对相应测度所取的数学期望分别以 $\mathbf{P}^{(x)}_{t_1, t_2, \cdots, t_n}$, $\mathbf{P}^{(x)}$ 和 $\mathbf{E}_x$ 表示．令

$$P(k,x,r,B)=\int_{\mathscr{X}}P_{k+1}(x,dy_{k+1})\int_{\mathscr{X}}P_{k+2}(y_{k+1},dy_{k+2})\times\cdots$$
$$\cdots\times\int_{\mathscr{X}}P_{r-1}(y_{r-2},dy_{r-1})P_r(y_{r-1},B).$$

从分析的观点来看，$P(k,\cdot,r,\cdot)$ 是一随机核，它是转移概率的卷积 $P_{k+1}*P_{k+2}*\cdots*P_r$，我们也称之为转移概率．更确切地说，$P(k,x,r,B)$ 是从状态 x 经过时间区间 (k,r) 之后转移到集合 B 中的概率．从核卷积的可结合性得到等式

$$P(k,x,s,B)=\int_{\mathscr{X}}P(k,x,r,dy)$$
$$\times P(r,y,s,B),\ k<r<s, \tag{15}$$

这就是 Chapman-Колмогоров 方程．又 (13) 式给出

$$\mathbf{E}_m f(\xi(t_1),\xi(t_2),\cdots,\xi(t_s))$$
$$=\int m(dx)\int P(0,x,t_1,dy_1)\int P(t_1,y_1,t_2,dy_2)\times\cdots$$
$$\cdots\times\int f(y_1,y_2,\cdots,y_s)P(t_{s-1},y_{s-1},t_s,dy_s). \tag{16}$$

这样一来，我们就得到和前面一样的公式(参看(3)和(4)式)，只不过现在它们是根据 Марков 链的一般定义推出的．另一方面，早些时候所作的讨论表明，在对函数 $f(t,\cdot,\cdot)$ 的可测性的最小假设下，借助递推公式

$$\xi(t+1)=f(t,\xi(t),\alpha_t),\ t=0,1,2,\cdots$$

得到的随机序列 $\{\xi(t);t\in T_+\}$ 是一 Марков 链，这里

$$\xi(0),\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\cdots$$

是总体独立的随机变量，而 $\xi(0)$ 有在 $\mathfrak{B}$ 上的任意分布 m．

公式(16)使得转移概率这个概念的概率意义更为精确．为了说明这一点，让我们计算，当给定由变量 $\xi(0),\xi(1),\cdots,\xi(t)$ 产生的 σ 代数 $\mathfrak{F}_{[0,t]}$ $(t\leqslant s)$ 时，非负函数 $f(\xi(s),\xi(s+1),\cdots,\xi(s+n))$ (这里 $f(y_0,y_1,\cdots,y_n)$ 是 $n+1$ 维 Borel 函数) 的条件数学期望．以 Ψ 表示对应的条件数学期望．按照定义，Ψ 是唯一使得对任意非负函数 $g(x_0,x_1,\cdots,x_t)$ 成立等式

$$\mathbf{E}_m g(\xi(0),\xi(1),\cdots,\xi(t))f(\xi(s),\xi(s+1),\cdots,\xi(s+n))$$

$$= \mathbf{E}_m g(\xi(0), \xi(1), \cdots, \xi(t))\Psi$$

的 $\mathfrak{F}_{[0,t]}$ 可测随机变量．另一方面，由(16)式得

$$\mathbf{E}_m g(\xi(0), \xi(1), \cdots, \xi(t)) f(\xi(s), \xi(s+1), \cdots, \xi(s+n))$$
$$= \mathbf{E}_m g(\xi(0), \xi(1), \cdots, \xi(t))\hat{f}.$$

这里

$$\hat{f} = \hat{f}(\xi(t)) = \int P(t, \xi(t), s, dy_0)\int P_{s+1}(y_0, dy_1) \times \cdots$$
$$\times \int f(y_0, y_1, \cdots, y_n) P_{s+n}(y_{n-1}, dy_n).$$

于是 $\Psi = \hat{f}$.

从已经得到的公式可推出以下结论．

定理 4 当给定 $\mathfrak{F}_{[0,t]}$ $(t < s)$ 时任意非负函数 $f(\xi(s), \xi(s+1), \cdots, \xi(s+n))$ 的条件数学期望既不依赖于初始分布 m，也不依赖于时刻 t 之前的转移概率和 $\xi(0), \xi(1), \cdots, \xi(t-1)$ 的值．它由下面的表示式给出：

$$\mathbf{E}_m\{f(\xi(s), \xi(s+1), \cdots, \xi(s+n)) | \mathfrak{F}_{[0,t]}\}$$
$$= \int P(t, \xi(t), s, dy_0) \int P_{s+1}(y_0, dy_1) \times \cdots$$
$$\cdots \times \int f(y_0, y_1, \cdots, y_n) P_{s+n}(y_{n-1}, dy_n). \tag{17}$$

给定 $\mathfrak{F}_{[0,t]}$ 时 $\{\mathscr{X}^{n+1}, \mathfrak{B}^{n+1}\}$中的变量 $\xi(s), \xi(s+1), \cdots, \xi(s+n)$ 的条件分布和核

$$P(t, \xi(t), s, \cdot), P_{s+1}(\cdot, \cdot), \cdots, P_{s+n}(\cdot, \cdot)$$

的直积相同．特别地，转移概率 $P(t, \xi(t), s, B)$等于当已知系统的状态 $\xi(0), \xi(1), \cdots, \xi(t)$ 时系统在时刻 s 处于集合 B 中的条件概率．这概率只依赖于在最后一个已知时刻 t 的状态 $\xi(t)$．它既不依赖于 $\xi(0), \xi(1), \cdots, \xi(t-1)$ 的值，也不依赖于m和转移概率 $P_1(\cdot,\cdot), P_2(\cdot,\cdot), \cdots, P_t(\cdot,\cdot)$．正像前面提到的那样，Марков 链的这一性质称作无后效性，它是 Марков 链的基本特性．

注．设给定了可测空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 及定义于其上的一族随机

核 $P_n(x, B), n=1,2,\cdots$. 则存在以 $P_n(x, B)$ 为其一步转移概率的 Марков 链. 定理 3 中给出了这一论断的证明以及对应的概率空间的构造.

Марков 链称作**齐次的**，如果它的一步转移概率与时间无关:

$$P_t(x, B)=P(x, B).$$

这时,时间区间 (t, s) 的转移概率只依赖于这区间的长度:

$$P(t, x, s, B)=\int_{\mathscr{X}} P(x, dy_1)\int_{\mathscr{X}} P(y_1, dy_2)\times\cdots$$

$$\cdots\times\int_{\mathscr{X}} P(y_{s-1}, B)P(y_{s-2}, dy_{s-1})=P^{(s-t)}(x, B).$$

对于齐次链，Chapman-Колмогоров 方程具有如下形式:

$$P^{(s+m)}(x, B)=\int_{\mathscr{X}} P^{(s)}(x, dy)P^{(m)}(y, B).$$

设 Марков 链是齐次的. (16) 式表明

$$\mathbf{E}_m f(\xi(s+1), \xi(s+2), \cdots, \xi(s+n))$$

$$=\mathbf{E}_{m_s} f(\xi(1), \xi(2), \cdots, \xi(n)), \qquad (18)$$

其中

$$m_s(B)=\int P(0, x, s, B)m(dx)=\int P^{(s)}(x, B)m(dx).$$

如果对于任意函数 $f(\cdot)$,(18) 式给出的期望值均不依赖于 s,则对应于给定初始分布 m 的齐次 Марков 过程称作**平稳的**. 为使一过程是平稳的充分必要条件是测度 m 满足条件

$$m(B)=\int P^{(s)}(x, B)m(dx). \qquad (19)$$

这条件等价于较简单的条件

$$m(B)=\int P(x, B)m(dx). \qquad (20)$$

事实上,(20) 式是 (19) 式的特殊情形. 然而若 (20) 式成立,则

$$m(B)=\int P(x, B)\int P(y, dx)\ m(dy)$$

$$=\int P^{(2)}(y, B)m(dy)=\cdots=\int P^{(s)}(y, B)m(dy).$$

满足(19)式的概率测度 m 称作**不变的**，或者更明确地说，对应于给定随机核的**不变测度**.

因此，若对应于给定的随机核存在不变的概率测度，则存在齐次 Марков 链的一个初始分布，使得对应于它的 Марков 过程是平稳的，而给定的核是这过程的一步转移概率.

如果不变测度是唯一的，则对于给定的链，存在唯一的平稳过程.

设 $\mathfrak{F}_t$ 表示使得变量 $\xi(0), \xi(1), \cdots, \xi(t)(t = 0, 1, 2, \cdots)$ 为可测的最小 σ 代数，τ 是 $\{\mathfrak{F}_t; t = 0, 1, \cdots\}$ 上的随机时间，Ω_τ 是 τ 的定义区域.我们考虑下述问题：设 $\xi(t)$ 是齐次 Марков 链，在 Ω_τ 上过程 $\xi_\tau(t) = \xi(t + \tau)$ 的特性如何？人们自然会期待，在假设 $\xi(\tau) = x$ 之下的随机过程 $\xi_\tau(t)$ 和在假设 $\xi(0) = x$ 之下的 Марков 夫过程 $\xi(t)$ 有完全一样的特性．现在我们把这论断叙述得更为确切并给予证明(这个性质称做强 Марков 性).

显然，$\xi(t + \tau)$ 是定义在 Ω_τ 上的，由第 1 章 § 1 的引理 5 得知，$\xi(t + \tau)(t \geqslant 0)$ 是 $\mathfrak{S}$ 可测的．假设 $P^{(\tau)}(x, A) = \mathbf{P}^{(x)}\{\Omega_\tau \cap (\xi(\tau) \in A)\}$．则 $P^{(\tau)}(x, A)$ 是 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 上的半随机核．事实上，

$$P^{(\tau)}(x, A) = \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{P}^{(x)}\{[\tau = s] \cap [\xi(s) \in A]\}.$$

由此马上得到 $P^{(\tau)}(x, A)$ 是 $\mathfrak{B}$ 上的测度，而且

$$P^{(\tau)}(x, \mathscr{X}) = \mathbf{P}^{(x)}\{\Omega_\tau\} \leqslant 1.$$

另一方面，存在集合 $B^{(s)} \in \mathfrak{B}^{(s)}$，使得事件 $\{\tau = s\}$ 等价于事件 $\{\xi(0), \xi(1), \cdots, \xi(s)\} \in B^{(s)}$．因此

$$\mathbf{P}^{(x)}\{[\tau = s] \cap [\xi(s) \in A]\} = \mathbf{P}^{(x)}\{(\xi(0), \xi(1), \cdots, \xi(s)) \in B^{(s)} \cap A^{(s)}\},$$

这里 $A^{(s)} = \mathscr{X} \times \mathscr{X} \times \cdots \times \mathscr{X} \times A$ (其中 $s - 1$ 个因子等于 $\mathscr{X}$)．又由半随机核的性质得出这个概率和 $P^{(\tau)}(x, A)$ 都是 $\mathfrak{B}$ 可测函数.

以 $\mathfrak{F}_\tau$ 表示由随机时间 τ 产生的 σ 代数.

定理 5 若 $D \in \mathfrak{F}_\tau$ 和 $D \subset \Omega_\tau$，则

$$\mathbf{P}^{(x)}\{D \cap (\bigcap_{k=1}^{r}[\xi(t_k+\tau) \in A_k])\}$$

$$= \int_{\mathscr{X}} \mathbf{P}^{(y)}\left(\bigcap_{k=1}^{r}[\xi(t_k) \in A_k]\right)\mathbf{P}^{(\tau)}(x, D, dy), \qquad (21)$$

这里 $P^{(\tau)}(x, D, A) = \mathbf{P}^{(x)}(D \cap [\xi(\tau) \in A])$.

证. 因为 $D \subset \Omega_\tau$，故

$$\mathbf{P}^{(x)}\{D \cap \left(\bigcap_{k=1}^{r}[\xi(t_k+\tau) \in A_k]\right)\}$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{P}^{(x)}\left\{D_s \cap \left(\bigcap_{k=1}^{r}[\xi(t_n+\tau) \in A_k]\right)\right\}$$

其中 $D_s = D \cap [\tau = s]$. 设 $\chi(D_s)$ 是事件 D_s 的示性函数，考虑到 Марков 链的条件概率之性质(定理 4)，我们有

$$\mathbf{P}^{(x)}\{D_s \cap \left(\bigcap_{k=1}^{r}[\xi(t_k+\tau) \in A_k]\right)\}$$

$$= \mathbf{E}_x\left\{\chi(D_s)\,\mathbf{P}^{(x)}\left(\bigcap_{k=1}^{r}[\xi(t_k+s) \in A_k] \mid \mathfrak{F}_s\right)\right\}$$

$$= \mathbf{E}_x\left\{\chi(D_s)\mathbf{P}^{(\xi(s))}\left(\bigcap_{k=1}^{r}[\xi(t_k) \in A_k]\right)\right\}.$$

由链的齐次性推得，最后一等式的右端等于

$$\int_{D_s} \mathbf{P}^{(\xi(s))}\left\{\bigcap_{k=1}^{r}[\xi(t_k) \in A_k]\right\}d\,\mathbf{P}^{(x)}$$

$$= \int_{\mathscr{X}} \mathbf{P}^{(y)}\left\{\bigcap_{k=1}^{r}[\xi(t_k) \in A_k]\right\}P(s, x, D, dy), \qquad (22)$$

这里 $P(s, x, D, \cdot)$ 是 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 上由公式

$$P(s, x, D, A) = \mathbf{P}^{(x)}\{D \cap [\tau = s] \cap [\xi(s) \in A]\}$$

定义的测度. 如果再引入测度

$$P^{(\tau)}(x, D, A) = \mathbf{P}^{(x)}\{D \cap [\xi(\tau) \in A]\} = \sum_{s=1}^{\infty} P(s, x, D, A)$$

并将等式(22)对 s 求和，我们就得到欲证的论断。

§5. 可数状态 Марков 链

可约性和不可约性　设 X 是可数或有限集合，这时我们恒约定把 X 的可测集 σ 代数了解为 X 的所有子集的总体，于是 X 上的任意函数都是可测的。

空间 X 的点用字母 $i, j, \cdots$ 表示。我们讨论取值于 X 的齐次 Марков 链，它由到单点集 $\{j\}$ 的一步转移概率 $p(i, j)\ (i, j \in X)$ 给定。到任意集合 B 的一步转移概率可通过 $p(i, j)$ 用公式

$$P(i, B) = \sum_{j \in B} p(i, j)$$

表示，而对相应于随机核 $P(i, B)$ 的测度的积分就变为求和

$$\int_X f(j) P(i, dj) = \sum_{j \in X} p(i, j) f(j).$$

到单点集 $\{j\}$ 的 n 步转移概率的表示式变为

$$P^{(n)}(i, j) = \sum_{j_1, j_2, \cdots, j_{n-1} \in X} p(i, j_1) p(j_1, j_2) \cdots p(j_{n-1}, j). \quad (1)$$

若引入矩阵 $P^{(n)}$（行数是有限或无限），它的元素是 n 步转移概率，即 $P^{(n)} = \{p^{(n)}(i, j)\}_{i, j \in X}$，则由 (1) 式得

$$P^{(n)} = P^n,$$

这里 P^n 是矩阵 $P = P^{(1)}$ 的 n 次幂，$P^{(1)}$ 则是一步转移概率矩阵。矩阵 $P = \{p(i, j)\}$ 具有性质：

$$\text{a)}\ p(i, j) \geqslant 0; \quad \text{b)} \sum_{j \in X} p(i, j) = 1. \quad (2)$$

具有性质 a) 和 b) 的矩阵称做**随机矩阵**。
从等式 $P^{n+m} = P^n P^m$ 得

$$p^{(n+m)}(i, j) = \sum_{k \in X} p^{(n)}(i, k) p^{(m)}(k, j), \quad (3)$$

另一方面，公式(3)是在我们所讨论的特殊情形中的 Chapman-Колмогоров 方程(§4，(15))。

定义 1 状态 $j\in X$ 是从状态 i 可达的，如果从 i 经若干步后转移到 j 的概率是正的。如果 j 是从 i 可达的，而 i 又是从 j 可达的，则称状态 i 和 j 是连通的。按照定义，状态 i 和 i 一定是连通的。

我们约定，把 i 和 j 是连通状态这一事实记为 $i\longleftrightarrow j$。如果 j 是从 i 可达的，而 k 是从 j 可达的，则 k 是从 i 可达的。这易由不等式 $p^{(n+m)}(i,k)\geqslant p^{(n)}(i,j)p^{(m)}(j,k)$ 推出。

关系 $\longleftrightarrow$ 是等价关系：

a) $i\longleftrightarrow i$;

b) 若 $i\longleftrightarrow j$，则 $j\longleftrightarrow i$;

c) 若 $i\longleftrightarrow j$ 和 $j\longleftrightarrow k$，则 $i\longleftrightarrow k$.

事实上，a) 从 $p^{(0)}(i,i)=1$ 得出。b) 从连通状态的定义中 i 和 j 的对称性得出。最后，c) 可从以下事实得出：若 $p^{(n)}\cdot(i,j)>0$，$p^{(m_1)}(j,i)>0$，$p^{(m)}(j,k)>0$，$p^{(n_1)}(k,j)>0$，则

$$p^{(n+m)}(i,k)\geqslant p^{(n)}(i,j)p^{(m)}(j,k)>0,$$

$$p^{(n_1+m_1)}(k,i)\geqslant p^{(n_1)}(k,j)p^{(m_1)}(j,i)>0.$$

任一 Марков 链都能够分解为不相交的连通状态类 X_α。这种分解可用下述方式实现。选取任一状态 i，并以 X_{i_1} 表示所有与 i_1 连通的状态的总体。根据关系《$\longleftrightarrow$》的性质 c) 知，X_{i_1} 中任意状态对都是连通的。若 X_{i_1} 不包含整个 X，则选取一状态 $i_2\bar{\in}X_{i_1}$，并仿照上述构造类 X_{i_2}。因为 i_1 和 i_2 不连通，故类 X_{i_1} 和 X_{i_2} 没有公共元素。在没有把整个空间 X 处理完之前继续构造集合 X_{i_k}。这样构造的类 X_α 具有下列性质：

1) 类 X_α 的数目最多是可数；

2) X 的每一个元素属于且只属于其中的一类 X_α;

3) X_α 中的任一状态对是连通的；

4) 分属不同类的任一状态对是不连通的。

最后两个性质也可以这样叙述：从给定类 X_α 中的任一状态

i 能以正的概率经若干步后到达这类中的任一其它状态. 这时,并不排除处于给定状态类的系统在某个时刻离开这状态类的可能性,但是,系统离开给定状态类后又返回这类中的概率等于零.

定义 2 Марков 链称作不可约的,如果它由一个连通的状态类组成.如果任一从 i 可达的状态 j 都和 i 连通,则状态 i 称作本质的,否则称作非本质的.

容易看出,只有本质状态才是从本质状态可达的. 事实上,设 i 是本质的,而 j 是从 i 可达的. 若 k 从 j 可达, 则 k 从 i 可达,又因为状态 i 是本质的,故 i 从 k 可达, 从而 j 是从 k 可达的, 亦即 j 是本质的.

于是下述推论成立: 在连通状态类中, 或者所有状态都是本质的,或者都是非本质的.

常返性 设 $\xi(n)$ 是 Марков 系统在时刻 n 的状态, 以 $\tau_j=\tau_j(n)$ 表示从时刻 n 开始, Марков 系统首次到达状态 j 所需要的步数. 于是, $\tau_j(n)$ 由一串关系式确定:

$$\xi(n+1)\neq j,\cdots,\xi(n+\tau_j-1)\neq j,\ \xi(n+\tau_j)=j.$$

我们引入 σ 代数族$\{\mathfrak{F}_{[n,t]},\ t=0,1,\cdots\}$,其中 $\mathfrak{F}_{[n,t]}$ 是使得 $\xi(n)$, $\xi(n+1),\cdots,\xi(n+\tau)$ 可测的最小 σ 代数.

变量 $\tau_j(n)$ 是对于这族 σ 代数的随机时间. 令

$$f^{(s)}(i,j)=\mathbf{P}\{\tau_j(n)=s\mid\xi(n)=i\},\ s=1,2,\cdots$$

$$f^{(0)}(i,j)=0.$$

这时

$$f^{(1)}(i,j)=p^{(1)}(i,j)=p(i,j).$$

由链的齐次性知,概率 $f^{(s)}(i,j)$与 n 无关. 当 $i\neq j$ 时这些概率称作首次到达状态 j 的概率, 而当 $i=j$ 时称作首次返回状态 i 的概率.

和数

$$F(i,j)=\sum_{s=1}^{\infty}f^{(s)}(i,j),\ i\neq j$$

是系统从状态 i 出发，或迟或早到达状态 j 的概率．类似地，$F(i, i)$ 是系统从状态 i 出发，经过有限多步后返回状态 i 的概率．当 $F(i, j) < 1$ 时随机变量 τ_j 是非正常的．

定义 3 当 $F(i, i) = 1$ 时状态 i 称作常返的，当 $F(i,i) < 1$ 时状态 i 称作非常返的．

不难建立转移概率和首次到达概率之间的关系，这就是

$$p^{(n)}(i, j) = \sum_{s=1}^{n} f^{(s)}(i, j)\, p^{(n-s)}(j, j),\ n \geqslant 1, \tag{4}$$

其中 $p^{(0)}(i, j) = \delta_{ij}$．事实上，设 τ_j 是首次到达 j 的时刻(从初始时刻算起)，则

$$\begin{aligned} P^{(n)}(i, j) &= \mathbf{P}^{(i)}\left\{\bigcup_{s=1}^{n} [\tau_j = s] \cap [\xi(n) = j]\right\} \\ &= \sum_{s=1}^{n} \mathbf{P}^{(i)}\{[\tau_j = s] \cap [\xi(n) = j]\} \\ &= \sum_{s=1}^{n} \mathbf{P}^{(i)}\{\tau_j = s\}\, \mathbf{P}^{(i)}\{\xi(n) = j \mid \tau_j = s\} \\ &= \sum_{s=1}^{n} f^{(s)}(i, j)\, P^{(n-s)}(j, j). \end{aligned}$$

这就证明了(4)式．注意它的一种特殊情形是

$$p^{(n)}(i, i) = \sum_{s=1}^{n} f^{(s)}(i, i)\, p^{(n-s)}(i, i), \tag{5}$$

它还可以改写为

$$f^{(n)}(i, i) = p^{(n)}(i, i) - \sum_{s=1}^{n-1} f^{(s)}(i, i)\, p^{(n-s)}(i, i).$$

这公式使我们能够在已知转移概率时依次计算返回概率．应当指出，为了计算返回状态 i 的概率，我们只须知道转移到这状态的概率．

我们引进序列 $\{p^{(n)}(i, j);\ n = 0, 1, 2, \cdots\}$，$\{f^{(n)}(i, j);\ n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 的母函数 $P_{ij}(z)$，$F_{ij}(z)$：

$$P_{ij}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p^{(n)}(i,j)z^n,\ F_{ij}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(i,j)z^n.$$

由 (5) 式得

$$P_{ii}(z)=p^{(0)}(i,i)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}f^{(k)}(i,i)z^k\,p^{(n-k)}(i,i)z^{n-k}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}f^{(k)}(i,i)z^k\,p^{(n-k)}(i,i)z^{n-k}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}f^{(k)}(i,i)z^k\,P_{ii}(z)$$

或

$$P_{ii}(z)=1+P_{ii}(z)\,F_{ii}(z).$$

因为上面考虑的级数当 $|z|\leqslant 1$ 时是绝对收敛的，所以我们能够改变求和的次序．后一式子也可改写为

$$P_{ii}(z)=\frac{1}{1-F_{ii}(z)}. \tag{6}$$

类似地，从(4)式可得

$$P_{ij}(z)=P_{jj}(z)\,F_{ij}(z),\ i\neq j. \tag{7}$$

现在设 z 是实数并令 $z\uparrow 1$．函数 $P_{ii}(z)$ 和 $F_{ii}(z)$ 是单调递增函数，而且根据 Abel 定理知 $\lim\limits_{z\uparrow 1}F_{ii}(z)$ 存在且 $\lim\limits_{z\uparrow 1}F_{ii}(z)=F_{ii}(1)=F(i,i)$，令 $\lim\limits_{z\uparrow 1}P_{ii}(z)=G(i,i)=P_{ii}(1)$．根据(6)式得到

定理 1 若 $G(i,i)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}p^{(n)}(i,i)=\infty$，则状态 i 是常返的；若 $G(i,i)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}p^{(n)}(i,i)<\infty$，则状态 i 是非常返的．当 i 是非常返时有

$$G(i,i)=\frac{1}{1-F(i,i)}.$$

定理 2 若状态 i 和 j 是连通的，则它们同是常返的或同是非常返的．

证．因为 $i\longleftrightarrow j$，故可找到 m_1 和 m_2，使得 $p^{(m_1)}(i,j)>0$，

$p^{(m_2)}(j, i) > 0$. 又因

$$p^{(m_1+m_2+n)}(j, j) \geqslant p^{(m_2)}(j, i) p^{(n)}(i, i) p^{(m_1)}(i, j),$$

故

$$\sum_{n=m_1+m_2}^{\infty} p^{(n)}(j, j) \geqslant p^{(m_2)}(j, i) p^{(m_1)}(i, j) \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(i, i).$$

若级数 $G(i, i)$ 发散,则级数 $G(j, j)$ 也发散. 互换 i 和 j 的位置,我们就得到 $G(j, j)$和 $G(i, i)$ 同是有限的或同是无穷的.

于是, Марков 链的常返性与其说是状态的性质,倒不如说是连通状态类的性质.

直观的考虑启示我们, 在无限的时间区间内返回常返状态的次数是无穷的,而返回非常返状态的次数则只能是有限的,这一事实是不难证明的.

设 $Q_j(m)$ 是系统至少有 m 次处于状态 j 的事件, 而 τ_j 是首次到达状态 j 之前的步数,则

$$Q_j(m) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_j(m) \cap \{\tau_j = n\}.$$

设 $q_{ij}(m)$ 是给定 $\xi(0) = i$ 时事件 $Q_j(m)$ 的概率. 我们有

$$\begin{aligned}
q_{ij}(m) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(Q_j(m) \cap [\tau_j = n] | \xi(0) = i) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}^{(i)}(Q_j(m) | \tau_j = n) \mathbf{P}^{(i)}(\tau_j = n | \xi(0) = i) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(i, j) \mathbf{P}^{(i)}(Q_j(m) | \tau_j = n).
\end{aligned}$$

不难验证

$$\mathbf{P}^{(i)}(Q_j(m) | \tau_j = n) = \mathbf{P}^{(j)}(Q_j(m-1)) = q_{jj}(m-1).$$

于是

$$q_{ij}(m) = F(i, j) q_{jj}(m-1). \tag{8}$$

设 $q_{ij} = q_{ij}(\infty)$ 是系统从状态 i 出发后无限多次到达状态 j 的

概率．因为 $q_{ij}=\lim_{m\to\infty}q_{ij}(m)$，故由(8)式得

$$q_{ij}=F(i,j)q_{jj}. \tag{9}$$

定理 3 若 j 是常返状态，则 $q_{ij}=F(i,j)$，特别地，这时 $q_{jj}=1$；若 j 是非常返状态，则对于任意 i 均有 $q_{ij}=0$.

证．若 $F(j,j)<1$，则在(9)式中令 $i=j$ 可得 $q_{jj}=0$，从同一等式又可推得 $q_{ij}=0$．若 $F(j,j)=1$，则从(8)式得 $q_{jj}(m)=[F(j,j)]^{m-1}=1$．因而 $q_{jj}=1$．于是从(9)式得 $q_{ij}=F(i,j)$.

设 $F(i,j)=1$．由强 Марков 性(参看§4，定理5)得，对任意 $B\in\mathfrak{F}_{\tau_j}$ 有

$$\mathbf{P}^{(i)}\left(B\cap\left(\bigcap_{k=1}^{r}\{\xi(\tau_j+t_k)=j_k\}\right)\right)$$

$$=\mathbf{P}^{(i)}(B)\,\mathbf{P}^{(j)}\left(\bigcap_{k=1}^{r}\{\xi(t_k)=j_k\}\right).$$

根据这一关系式可得

定理 4 若 $F(i,j)=1$，则随机过程 $\xi'(t)=\xi(\tau_j+t)$ $(\xi(0)=i)$ 随机等价于初始状态为 $\xi(0)=j$ 的过程 $\xi(t)$，而且与 σ 代数 $\mathfrak{F}_{\tau_j}$ 无关.

推论 设 $\xi(0)=i$，i 是常返状态，ξ_1 是首次返回 i 前的步数，ξ_2 是首次和第二次返回 i 之间的步数，等等．则随机变量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是同分布和独立的.

定理 5 若状态 i 是常返的，而且 $F(i,j)>0$，则系统从状态 i 出发后将会无穷多次到达状态 j (即 $q_{ij}=1$)，且有 $F(j,i)>0$．特别，这时有 $F(i,j)=1$.

从定理3得知，返回状态 i 的次数为无穷．以 C_k 表示系统在第 $k-1$ 次与第 k 次返回状态 i 之间将到达状态 j 这一事件．由过程的强 Марков 性，事件 C_k 相互独立且有相同的概率．因为 $\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}C_k\right)$ 是系统总会在某一时刻到达 j 的概率．故 $\mathbf{P}(C_k)>0$

且 $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(C_k)=\infty$.根据 Borel-Cantelli 定理得到,以概率 1 有无穷多个 C_k 发生. 而且系统若到达状态 j, 则以后它还会无穷多次到达状态 i.

推论 1 从常返状态只能到达常返状态. 而且常返状态是本质的.

这推论使早先利用母函数方法得到的定理 2 更为精确.

推论 2 在包含一常返状态的连通状态类中, 所有其它的状态也是常返的.若系统处于这个类中的一点,则它以概率 1 经过某一段时间后到达该类中的任何其它状态,而且这将发生无穷多次.

常返的连通状态类称做**常返类**.

令

$$G(i,\ j)=\sum_{n=0}^{\infty}p^{(n)}(i,\ j).$$

当 $i=j$ 时这级数的意义已被阐明.现在建立下面的关系式:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N}p^{(n)}(i,\ j)}{\sum_{n=0}^{N}p^{(n)}(j,\ j)}=F(i,\ j). \tag{10}$$

证明是基于(4)式. 在(4)式中令 $n=1,2,\cdots,N$ 并把所得等式加起来,我们就得到

$$\sum_{n=1}^{N}p^{(n)}(i,j)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{s=0}^{n-1}f^{(n-s)}(i,\ j)\,p^{(s)}(j,\ j)$$

$$=\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{n=s+1}^{N}f^{(n-s)}(i,\ j)\,p^{(s)}(j,\ j)=\sum_{s=0}^{N-1}p^{(s)}(j,\ j)\,F_{N-s},$$

这里 $F_{N-s}=\sum_{n=1}^{N-s}f^{(n)}(i,\ j)$,而且当 $N\to\infty$ 时 $F_N\to F(i,\ j)$,因此

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} p^{(n)}(i,j)}{\sum_{n=0}^{N} p^{(n)}(j,j)} = \sum_{s=0}^{N} F_{N-s} \frac{p^{(s)}(j,j)}{\sum_{n=0}^{N} p^{(n)}(j,j)}.$$

现在由下述引理即可得到(10)式的真确性.

引理 1 若 $\{b_n; n=0,1,\cdots,N\}$ 是非负数列，而且 $b_N/\sum_{s=0}^{N} b_s \to 0$,则对任意收敛序列 $\{c_n; n=1,2,\cdots\}$ 均有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k c_{N-k}}{\sum_{k=0}^{N} b_k} = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

证. 若 $c=\lim c_n$,则

$$\frac{\sum_{k=0}^{N} b_k c_{N-k}}{\sum_{k=0}^{N} b_k} - c = \frac{\sum_{k=0}^{N-n} b_k(c_{N-k}-c)}{\sum_{k=0}^{N} b_k}$$

$$-c\frac{\sum_{k=N-n+1}^{N} b_k}{\sum_{k=0}^{N} b_k} + \frac{\sum_{k=N-n+1}^{N} b_k c_{N-k}}{\sum_{k=0}^{N} b_k}. \tag{11}$$

若选取附标 n 使得当 $n'\geqslant n$ 时有 $|c-c_{n'}|<\varepsilon$, 这里 $\varepsilon>0$ 是任意的,则等式(11)后边第一项小于 ε. 因为 c_n 是有界的，故对于固定的 n,当 $N\to\infty$时第二项和第三项也趋于零. 引理证毕.

因为 $p^{(n)}(i,j)$ 有界，故在我们所考虑的情形中恒满足引理的条件,于是等式(10)也就得证.

从(10)式得

定理 6 在常返类中 $G(i,j)=+\infty$;但若 j 是非常返的，则对所有 i 均有 $G(i,j)<\infty$.

事实上，若 i 是非常返状态，则(10)式左边的分母趋于一个有限的极限，因而分子的极限为有限．若 i 是常返的，则分母的极限等于∞，故若 $F(i, j) > 0$，则分子的极限也是∞．

周期性 注意，若 $p^{(n)}(i, i) > 0$，则也有 $p^{(kn)}(i,i) > 0$．事实上，$p^{(kn)}(i, i) \geqslant p^{(n)}(i, i)\, p^{(n)}(i, i)\cdots p^{(n)}(i, i)$．以 $d(i)$ 表示所有使得 $p^{(n)}(i, i) > 0$ 的那些 n 的最大公约数．若对所有 $n \geqslant 1$ 均有 $p^{(n)}(i,i) = 0$，则假定 $d(i) = \infty$．

定理 7 若 $i \longleftrightarrow j$，则 $d(i) = d(j)$．

证．首先，若 $i \longleftrightarrow j$，则 $d(i)$ 和 $d(j)$ 是有限的．设 $p^{(s)}(i, i) > 0$．我们可以找到 $n > 0$ 和 $m > 0$ 使 $p^{(n)}(i, j) > 0$ 和 $p^{(m)}(j, i) > 0$．因而 $p^{(n+m+s)}(j, j) \geqslant p^{(m)}(j, i)\ p^{(s)}(i, i)\ p^{(n)}(i, j) > 0$，类似地有 $p^{(n+m+2s)}(j, j) > 0$．所以 $d(j)$ 能整除 $(n+m+2s)-(n+m+s)=s$．由此推得 $d(j) \leqslant d(i)$．又由 i 和 j 的对称性得 $d(i) \leqslant d(j)$，即 $d(i) = d(j)$．

推论 在任一连通状态类中 $d(i)$ 是常数．

特别，对不可约 Марков 链 $d = d(i)$ 与状态无关．

定义 4 若在一不可约链中 $d = 1$，则这个 Марков 链称作非周期的；若 $d > 1$，则这链称作周期的，而数 d 是它的周期．

下面的引理是一个数论的结果：

引理 2 设 d 是正整数序列 $n_1, n_2, \cdots, n_s$ 的最大公约数，则存在数 $m_0 > 0$，使得对所有整数 $m \geqslant m_0$，不定方程

$$md = \sum_{j=1}^{s} c_j n_j$$

有非负整数解 c_j．

证．设 A 是所有能表为 $x = \sum\limits_{1}^{s} a_j n_j$ 的数 x 的集合，其中 a_j 是整数(正的、负的或 0)．每一 x 可被 d 整除．设 d_0 是 A 中的最小正数．因为对任意整数 k 有 $x - kd_0 \in A$，故对任意 x 总能找到一个 k，使得 $x = kd_0$（否则可以找到一个 k_1，使得 $x_1 = x - k_1 d_0$ 且满足不等式 $0 < x_1 < d_0$，这与 d_0 的定义矛盾）．因此 d_0 是

A 中的最大公约数．现在，令 $B=\left\{x:x=\sum_{j=1}^{s}b_j n_j\right\}$，其中 b_j 是非负整数．再令 $d_1=\sum_{j=1}^{s}n_j$．数 d_0 可表为 $d_0=N_1-N_2$，这里 $N_i\in B$．设 c 是 N_2 的表示式中 n_j 的整数系数的最大者．对于任意整数 $m>0$，设 $m=kd_1+m_1$，其中 $0\leqslant m_1\leqslant d_1$．则若 $kd_0>m_1c$ 时有 $md_0=kd_0d_1+m_1d_0\in B$，故当 $k>d_1c/d_0$ 或 $m>\frac{d_1^2c}{d_0}+d_1$ 时更应该有这结论．引理证毕．

定理 8 若 $d(i)<\infty$，则可找到 n_0，使当 $n>n_0$ 时有

$$p^{(nd(i))}(i,\ i)>0.$$

证．设 $n_k(k=1,2,\cdots,s)$ 是使得 $p^{(n_k)}(i,i)>0$ 的数列，又 $n_1,n_2,\cdots,n_s$ 的最大公约数等于 $d(i)$．根据上述引理，我们可以找到 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时有 $nd(i)=\sum_{k=1}^{s}c_k n_k$．因此 $p^{(nd(i))}(i,i)\geqslant[p^{(n_1)}(i,\ i)]^{c_1}[p^{(n_2)}(i,\ i)]^{c_2}\cdots[p^{(n_s)}(i,i)]^{c_s}>0$．

推论 若 $p^{(m)}(j,\ i)>0$，则对所有充分大的 n 有

$$p^{(m+nd(i))}(j,\ i)>0.$$

事实上

$$p^{(m+nd(i))}(j,\ i)\geqslant p^{(m)}(j,\ i)\ p^{(nd(i))}(i,\ i).$$

在研究 Марков 链时，在很多情况下，更为方便的是首先讨论非周期链，然后把所得的结果推广到周期链的方法．

我们还要证明，状态的周期可以根据首次返回概率算出．

引理 3 状态 i 的周期等于使得 $f^{(n)}(i,\ i)>0$ 的那些 n 的最大公约数．

证．设 Z_N 和 Z'_N 分别是使得 $p^{(n)}(i,\ i)>0$ 和 $f^{(n)}(i,\ i)>0$ 的那些 $n\leqslant N$ 的集合，d_N 和 $d_{N'}$ 是它们的最大公约数．显然有 $Z'_N\subset Z_N$，因此 $d'_N\geqslant d_N$，而且 $d'_1=d_1$．假设存在这样的 N，使当 $n\leqslant N$ 时 $d'_n=d_n$ 和 $d'_{N+1}>d_{N+1}$，则有 $f^{(N+1)}(i,\ i)=0$ 和 $p^{(N+1)}(i,\ i)>0$．由等式 $p^{(N+1)}(i,\ i)=f^{(N+1)}(i,\ i)+\sum_{k=1}^{N}f^{(k)}(i,\ i)$

$\times p^{(N+1-k)}(i, i)$ 推得，对某 $s(0<s\leqslant N)$ 有 $f^{(s)}(i, i)\, p^{(N+1-s)}(i, i)>0$，即 s 和 $N+1-s$ 能被 d_N 整除，因而 $N+1$ 能被 d_N 整除，这与不等式 $d_{N+1}<d'_{N+1}=d_N$ 相矛盾．引理证毕．

定理 9 每一周期为 $d(d<\infty)$ 的连通状态类 K 可以分为 d 个两两不相交的子类 $K_0, K_1, \cdots, K_{d-1}$，使得从 $K_s(s<d-1)$ 只能转移到 K_{s+1}，而从 K_{d-1} 只能转移到 K_0．并且，如果 $i\in K_r$，$j\in K_s$，则可找到 $N=N(i, j)$，使得当 $n>N$ 时 $p^{nd+s-r}(i, j)>0$．

证．设 K_0 是所有这样的状态 j 的集合，对于这集合中的每一状态 j，至少存在一整数 k，使有 $p^{(kd)}(i,j)>0$，这里 i 是任一个从 K 中选取的状态．于是 $i\in K_0$．因为 i 和 j 是连通的，故可找到使得 $p^{(m)}(j, i)>0$ 的数 m，它是 d 的倍数．事实上，$p^{(kd+m)}(i, i)\geqslant p^{(kd)}(i,j)\times p^{(m)}(j, i)>0$，因而 $kd+m$ 能被 d 整除．因为 m 能被 d 整除，故若在 K_0 的定义中取任一使得对某 k 有 $p^{(kd)}(i, j)>0$ 的状态 j 来代替 i，集合 K_0 仍保持不变．我们现在定义集合 K_1，它由那些使得 $j\in K$ 和 $\sum_{i\in K_0} p(i, j)>0$ 的状态 j 组成，集合 K_2 是由那些使得 $j\in K$ 和 $\sum_{i\in K_1} p(i, j)>0$ 的状态 j 组成，等等．从集合 K_s 的定义推得，对任意 r 和 s 有 $K_{rd+s}\subset K_s$．另一方面，若 $j\in K_s$，则可以找到这样的 $j_0, j_1, \cdots, j_s=j$，使得 $j_r\in K_r(r\leqslant s)$ 和 $p(j_{r-1}, j_r)>0$，即 $p^{(s-r)}(j_r, j)>0$．相反的论断也成立：若 $p^{(s-r)}\cdot(j_r, j)>0$，$j_r\in K_r$，$j\in K$，则 $j\in K_s$（因为从 $j_r\to j_{r+1}$，$j_{r+1}\to j$ 和 $j_r\longleftrightarrow j$ 得 $j_{r+1}\longleftrightarrow j_r$）．现在证明类 K_r 和 K_s $(0\leqslant r<s<d)$ 没有公共元素．事实上，设 $j\in K_r$，$j\in K_s$，则可以找到 i_1 和 $i_2\in K_0$，使得 $p^{(r)}(i_1, j)>0$ 和 $p^{(s)}(i_2, j)>0$．因为 i_2 和 j 是连通的，故对某 m 有 $p^{(m)}(j, i_2)>0$，因而 $p^{(m+s)}(i_2, i_2)\geqslant p^{(s)}(i_2, j)\, p^{(m)}(j, i_2)>0$，所以 $m+s$ 能被 d 整除，即 $m=kd-s$，s 是某一整数．但这时有

$$0<p^{(r)}(i_1, j)\, p^{(m)}(j, i_2)\leqslant p^{(kd-s+r)}(i_1, i_2),$$

这是不可能的，因为如前面所证明的那样，从 i_1 转移到 $i_2(i_1, i_2\in K_0)$ 仅当所经的步数为 d 的倍数时才有可能．其次，设 $i\in K_r$

和 $j \in K_t$，则可以找到 m 使得 $p^{(m)}(i, j) > 0$，这时 m 形如 $m = k_0 d + (s - r)$. 另一方面，根据定理 8 知，对所有 $n > n_0(i)$ 有 $p^{(nd)}(i, i) > 0$. 因此，对所有 $n > n_0(i)$ 有 $p^{((n+k_0)d+s-r)}(i, j) \geqslant p^{(nd)}(i, i)\, p^{(k_0 d+s-r)}(i, j) > 0$. 定理证毕.

我们约定，把 $K_0, K_1, \cdots, K_{d-1}$ 称为周期连通状态类的子类.

更新理论的基本定理 为了研究转移概率 $p^{(n)}(j, i)$ 当 $n \to \infty$ 时的渐近性态，我们需要一个定理，人们常常把它称为更新理论的基本定理. 但是，我们在此讨论的基本定理只是后面所必需的，而不是最一般的形式. 为了阐明术语，我们设想，对某设备的工作进行观察. 设备有时会损坏（发生故障）. 设备发生故障时马上用一台新的去替换. 第 n 台（替换）设备的正常工作时间 τ_n 是一随机变量，它取值 1，2，…，而且 $\tau_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 是相互独立同分布的. 令

$$p_k = \mathbf{P}\{\tau_n = k\},\ k = 1, 2, \cdots, \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

和 $\tau_0 + \tau_1 + \cdots + \tau_{n-1}$ 称作第 n 次更新时刻，而变量 τ_n 称作第 n 次更新的时间间隔. 以 $G(n)$ 表示 n 是更新时刻这一事件的概率. 事件

$$\{\tau_0 = n\}, \{\tau_0 + \tau_1 = n\}, \cdots, \{\tau_0 + \tau_1 + \cdots + \tau_{k-1} = n\}, \cdots$$

是两两不相交的，因此

$$G(n) = \mathbf{P}\{\tau_0 = n\} + \mathbf{P}\{\tau_0 + \tau_1 = n\} + \\ + \cdots + \mathbf{P}\{\tau_0 + \tau_1 + \cdots + \tau_{k-1} = n\} + \cdots,$$

而且当 $n \geqslant 1$ 时 $G(n) \leqslant 1$. 假设 $G(0) = 1$. 函数 $G(n)$ 称作**更新函数**.

描述当 $n \to \infty$ 时 $G(n)$ 的渐近性态的定理称作更新理论的基本定理.

我们用 d 表示使得 $p_n > 0$ 的那些 n 的最大公约数. 当 $d = 1$ 时更新过程称作非周期的，当 $d > 1$ 时称作周期的，而 d 则称作更新周期. 不难证明，在非周期更新的情形中，对于所有从某个 n_0 开始的 n（即所有 $n \geqslant n_0$）有 $G(n) > 0$. 如果 $d > 1$，则对所

有足够大的 k（即 $k \geqslant k_0$）有 $G(kd) > 0$. 这些论断可从引理 2 推出. 如果更新是非周期的，则 $G_\infty = \lim_{n\to\infty} G(n) = \frac{1}{m}$，其中 $m = \mathbf{E}\tau_k$（当 $\mathbf{E}\tau_k = \infty$ 时 $G_\infty = 0$）.

我们首先证明极限 G_∞ 存在，然后求出它的值.

引理 4 设 τ 是随机变量，它取值 $n(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 的概率是 p_n，$J(u)$ 是变量 τ 的特征函数. 若 $d = 1$，则当 $|u| < 2\pi$ 且 $u \neq 0$ 时 $J(u) \neq 1$.

证. 我们有

$$J(u) = \mathbf{E}\, e^{iu\tau} = \sum_{-\infty}^{\infty} p_n\, e^{iun}.$$

设 $J(u_0) = 1$, $|u_0| < 2\pi$, $u_0 \neq 0$，则有

$$0 = 1 - \operatorname{Re} J(u_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos nu_0) p_n.$$

因此对于所有使得 $p_n > 0$ 的 n 有 $\cos nu_0 = 1$ 或 $nu_0 = 2k\pi$. 选取这样的整数序列 $n_1, n_2, \cdots, n_s$，使得 $p_{n_r} > 0$ 而且它们的最大公约数是 1. 于是 $n_r u_0 = 2\pi k_r (r = 1, 2, \cdots, s)$. 另一方面，方程 $\sum_{r=1}^{s} a_r n_r = 1$ 有整数解 a_r，故

$$u_0 = \sum_{r=1}^{s} a_r n_r u_0 = 2\pi \sum_{r=1}^{s} a_r k_r = 2\pi k_0,$$

其中 k_0 是整数，这与条件 $|u_0| < 2\pi$ 矛盾.

引理 5 如果更新是非周期的，则极限 $G_\infty = \lim_{n\to\infty} G(n)$ 存在.

证. 设

$$G(z, n) = \sum_{s=0}^{\infty} z^s p_n(s), n \geqslant 0,\ 0 \leqslant z \leqslant 1,$$

其中 $p_n(s) = \mathbf{P}\{\eta_s = n\}$, $\eta_s = \tau_0 + \tau_1 + \cdots + \tau_{s-1}$，对于 $s \geqslant 1$ 和 $p_n(0) = 0$. 由幂级数理论的 Abel 定理得

$$G(n) = \lim_{z \uparrow 1} G(z, n).$$

因为随机变量 η_s 的特征函数等于 $[J(u)]^s$，即

$$[J(u)]^s = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(s)\, e^{inu},$$

其中 $J(u)$ 是随机变量 τ_0 的特征函数，由此得

$$p_n(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inu}[J(u)]^s\, du.$$

因此

$$G(z, n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inu}du}{1 - zJ(u)},\ n \geqslant 0.$$

当 $n < 0$ 时上式右边的积分等于零．所以

$$G(z, n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nudu}{1 - zJ(u)}.$$

令 $h(z, u) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}(1 - zJ(u))^{-1}$. 因为 $G(z, n)$ 是实函数，故

$$G(z, n) = \int_{-\pi}^{\pi} h(z,u)\cos nudu.$$

由更新的非周期性和引理 4 知，核 $h(z, u)$ $(z \in [0, 1],\ 0<|u|< 2\pi)$ 是正的和连续的．因而对任意 $\varepsilon > 0$

$$G(n) = \lim_{z\uparrow 1}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(z, u)\cos nudu + \int_{\varepsilon\leqslant|u|\leqslant\pi} h(1, u)\cos nudu. \tag{12}$$

在此令 $n = 0$，我们就看到极限

$$h_\varepsilon = \lim_{z\uparrow 1}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(z, u)du$$

存在且有 $h_\varepsilon \leqslant G(0)$．因为当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时 h_ε 是递减的，故极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon = h_0$ 也存在，从而二重极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{z\uparrow 1}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(z, u)\cos nu\, du = h$$

也存在．现在回到公式(12)，我们看出 $h(1, u)$ 是区间 $(-\pi, \pi)$ 上(在 Cauchy 意义下)的可积函数，而且

$$G(n) = h + \int_{-\pi}^{\pi} h(1, u)\cos nudu.$$

因为 $h(1, u)$ 是可积的，故由 Riemann-Lebesgue 定理有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} h(1, u)\cos nu du = 0,$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} G(n) = h$ 存在。

定理 10 若更新是非周期的，则

$$\lim_{n\to\infty} G(n) = \frac{1}{m},\quad m = \mathbf{E}\tau_k,$$

而且若 $\mathbf{E}\tau_k = \infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} G(n) = 0$。

证．由上述引理知，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} G(n) = h$ 存在，故利用关于幂级数的 Abel 定理可得

$$h = \lim_{z\uparrow 1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n[G(n) - G(n-1)]\right)$$

$$= \lim_{z\uparrow 1}\sum_{n=0}^{\infty} z^n(1-z)G(n) = \lim_{z\uparrow 1}(1-z)\Phi(z),$$

其中 $\Phi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n G(n)$ 是序列 $\{G(n); n = 0, 1, \cdots\}$ 的母函数。因为变量 τ_k 是独立同分布的，故 $G(n)$ 满足方程

$$G(n) = \delta(n) + \sum_{k=1}^{n} G(n-k)p_k,\ n \geqslant 0 \tag{13}$$

$(\delta(n) = 0$ 当 $n > 0$，$\delta(0) = 1)$。用 z^n 乘这等式并对所有 $n \geqslant 0$ 求和，我们就得到

$$\Phi(z) = 1 + F(z)\Phi(z),\ |z| < 1,$$

其中 $F(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n z^n$。于是

$$\Phi(z) = [1 - F(z)]^{-1},$$

$$h = \lim_{z\uparrow 1}\left[\frac{1 - F(z)}{1 - z}\right]^{-1}.$$

若 $m = \infty$，则对任意 $N > 0$ 有

$$\lim_{z\uparrow 1}\frac{1 - F(z)}{1 - z} \geqslant \lim_{z\uparrow 1}\sum_{n=1}^{N} p_n\frac{1 - z^n}{1 - z} = \sum_{n=1}^{N} p_n n.$$

由此可得 $h=0$. 但若 $m<\infty$ 时,则考虑到当 $|z|<1$ 时 $\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right|<n$,我们就得到

$$\lim_{z\uparrow 1}\frac{1-F(z)}{1-z}=\lim_{z\uparrow 1}\sum_1^\infty p_n\frac{1-z^n}{1-z}=\sum_{n=1}^\infty p_n n=m.$$

定理证毕.

推论 若更新有周期 d, 则

$$\lim_{n\to\infty}G(nd)=\frac{d}{m},\quad m=\mathbf{E}\,\tau_k. \tag{14}$$

事实上,若给定的更新是周期的,它的周期是 d,则更新时间间隔为 $\tau_n'=\frac{\tau_n}{d}$ 的新的更新是非周期的. 若 $G'(n)$ 是这个新的更新的更新函数,则 $G'(n)=G(nd)$. 另一方面, $\mathbf{E}\,\tau_n'=\frac{\mathbf{E}\tau_n}{d}=\frac{m}{d}$,故由刚才证明的定理可得 (14) 式.

转移概率的极限定理

定理 11 设 $p^{(n)}(i,j)$ 是不可约的常返非周期 Марков 链的转移概率. 以 m_i 表示首次返回状态 i 之前的平均步数,

$$m_i=\sum_{n=1}^\infty nf^{(n)}(i,i).$$

则对任意 j 有

$$\lim_{n\to\infty}p^{(n)}(j,i)=\frac{1}{m_i}. \tag{15}$$

证. 设 τ_0 是首次返回状态 i 之前的步数,τ_1 是首次返回和第二次返回这状态之间的步数等等, 根据定理 4 的推论, 变量 τ_0, $\tau_1,\cdots,\tau_n,\cdots$ 是相互独立同分布的且取不小于 1 的整数值, 此外还有

$$\mathbf{P}\{\tau_k=n\}=f^{(n)}(i,i),\quad \sum_{n=1}^\infty f^{(n)}(i,i)=1.$$

变量 τ_n 的数学期望等于 m_i. 我们考虑这样的一个更新过程, τ_n 是它的更新时间间隔. 在这里 $f^{(n)}(i,i)$ 和 $p^{(n)}(i,i)$ 分别起着

p_n 和 $G(n)$ 的作用. 因为链是非周期的,故由引理 3 知,更新也是非周期的.

从定理 10 得等式

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)}(i, i) = \frac{1}{m_i},$$

它是 (15) 式在 $j = i$ 时的特殊情形. 现在不难过渡到一般情形. 利用 (4) 式可得

$$\frac{p^{(n)}(j, i)}{\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(j, i)} = \sum_{k=1}^{n} \bar{f}^{(k)}(j, i)\, p^{(n-k)}(i, i),$$

$$\bar{f}^{(n)}(j, i) = \frac{f^{(n)}(j, i)}{\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(j, i)}.$$

注意当 $n \to \infty$ 时有 $f^{(n)}(j, i) \to 0$ 和 $\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(j, i) \to 1$ (根据链的不可约性和常返性),再应用引理 1 就得到一般情形的(15)式.

常常把刚才证明的定理称为 Марков 链的遍历定理. 有关遍历定理的进一步论述可参看 § 8.

定理 12 若不可约的常返 Марков 链是周期的,它的周期是 d,则

$$\lim_{n\to\infty} p^{(nd)}(i, i) = \frac{d}{m_i}. \tag{16}$$

若 K_s 是定理 9 中引入的子类,而且 $i \in K_r$, $j \in K_s$,则

$$\lim_{n\to\infty} p^{(nd+l)}(i, j) = \begin{cases} \dfrac{d}{m_j}, l = s - r(\operatorname{mod} d), \\ 0, \ l \neq s - r(\operatorname{mod} d). \end{cases} \tag{17}$$

证. 从引理 3 得知,不可约 Марков 链和证明前面的定理时引入的更新过程有相同的周期,故等式(16)可直接由定理 10 的推

论得到．根据定理 9 有：

$p^{(nd+l)}(i,j)=0$ 对于 $i\in K_r$，$j\in K_s$ 和 $l\neq s-r(\bmod d)$.

因此，例如若 $r<s$，则

$$p^{(nd+s-r)}(i,j)=\sum_{k=0}^{n}f^{(kd+s-r)}(i,j)\,p^{(n-k)d}(j,j).$$

正如定理11的证明一样，利用引理 1 即可完成（17）式的证明．

定义 5 常返状态 j 称做零状态，如果 $\lim p^{(nd_j)}(j,j)=0$；称做正状态，如果 $\lim p^{(nd_j)}(j,j)>0$.

在一常返状态类中所有状态或者同是正的，或者同是零的．事实上，如果 $i\longleftrightarrow j$，则由不等式

$$p^{(m+nd_j+s)}(i,i)\geqslant p^{(m)}(i,j)\,p^{(nd_j)}(j,j)\,p^{(s)}(j,i)$$

推得

$$\lim p^{(nd)}(i,i)\geqslant \lim p^{(nd)}(j,j),\ d=d_i=d_j,$$

这里 m 和 s 是使得 $p^{(m)}(i,j)>0$ 和 $p^{(s)}(j,i)>0$ 的数．交换 i 和 j 的位置，我们就得到欲证的论断．

我们把得到的结果归纳如下：

定理 13 a）状态 j 为非常返的充分必要条件是 $G_{jj}=\sum_{n=1}^{\infty}p^{(n)}(j,j)<\infty$．这时对所有 i

$$G_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}p^{(n)}(i,j)\leqslant G_{jj}<\infty,\lim_{n\to\infty}p^{(n)}(i,j)=0.$$

b）设 j 是常返状态，它的周期是 d，而平均返回时间是 m_j．若 i 是从 j 可达的，则 i 也是具有相同周期 d 的常返状态，它和 j 同时是零状态或正状态，而且存在只依赖于 i 和 j 的 k，$0\leqslant k<d$，使得

$$\lim p^{(md+r)}(i,j)=\begin{cases}\dfrac{d}{m_j}, 若\ r=k(\bmod d);\\[2ex] 0, 若\ r\neq k(\bmod d).\end{cases}\tag{18}$$

c）若 i，j 属于同一常返类，则

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}p^{(n)}(i,j)=\frac{1}{m_j}. \tag{19}$$

论断 c) 是 b) 的直接推论. 另一方面,(19)式不像论断 b) 那样,它没有反映周期的与非周期的状态类之间的区别.

如果一不可约常返 Марков 链的状态是正的(零的),我们就把这链称做正的(零的).

常返性判别准则．平稳分布 Марков 链是常返的(正的或零的)性质与线性方程组

$$\sum_{j\in I}p(j,i)x_j=x_i,\ i\in I, \tag{20}$$

和它的转置方程组

$$\sum_{j\in I}p(i,j)x_j=x_i,\ i\in I \tag{21}$$

的非平凡解有密切的联系.

如果方程组(20)有非负的可和解,即 $x_i\geqslant 0$, $\Sigma x_i<\infty$,则可以认为 $\Sigma x_i=1$,而且这样的解可以看作是一个产生平稳 Марков 过程的不变初始分布 $x_i=\mathbf{P}\{\xi(0)=i\}=\mathbf{P}\{\xi(1)=i\}=\cdots$. 另一方面,存在具有给定转移概率的平稳 Марков 过程等价于方程组(20)存在非负可和解.

就转置方程组(21)来说,存在非平凡解 $x_i=c$ 这一事实是显然的. 常返 Марков 链的一个特点是对应于它的方程组(21)没有其它的非平凡非负解. 而且我们还有下面的定理.

定理 14 不可约 Марков 链是常返的,当且仅当不等式组

$$\sum_{j\in I}p(i,j)x_j\leqslant x_i,\ i\in I, \tag{22}$$

除了形如 $x_i=c$ $(i\in I)$ 的解外没有其它非负解.

证. 假设链是常返的,而且 $x_i\geqslant 0$ $(i\in I)$ 是方程组(22)的一个解.我们选取任一 $x_i>0$ (若这样的 x_i 不存在,则所有 $x_i\equiv 0$). 由(22)式得

$$x_i \geqslant \sum_{j \in I} p(i, j) \sum_{k \in I} p(j, k) x_k = \sum_{k \in I} p^{(2)}(i, k) x_k,$$

再由归纳法可得

$$x_i \geqslant \sum_{k \in I} p^{(n)}(i, k) x_k.$$

对于每一 i,可以找到使得 $p^{(n)}(i, l) > 0$ 的 n, 因而 $x_i \geqslant p^{(n)}(i, l) x_l > 0$. 于是对所有 $i \in I$ 均有 $x_i > 0$. 令 $y_i = \frac{x_i}{x_l}$,其中 l 是一任意选取的状态. 我们有 $y_i \geqslant \sum_{j \in I} p(i, j) y_j \geqslant p(i, l) + \sum_{j \neq l} \cdot p(i, j) y_j$. 将这不等式应用于在它右端出现的 y_j, 我们就得到

$$y_i \geqslant p(i, l) + \sum_{j \neq l} p(i, j) p(j, l) + \sum_{j \neq l} \sum_{k \neq l} p(i, j) p(j, k) y_k$$

$$= f^{(1)}(i, l) + f^{(2)}(i, l) + \sum_{k \neq l} {}_l p^{(2)}(i, k) y_k,$$

式中 ${}_l p^{(2)}(i, k) = \sum_{j \neq l} p(i, j) p(j, k)$ 是从状态 i 出发,经两步到达状态 k 而中间没有经过状态 l 的概率. 反复使用这方法可推得不等式

$$y_i \geqslant \sum_{n=1}^{N} f^{(n)}(i, l) + \sum_{k \neq l} {}_l p^{(N)}(i, k) y_k,$$

这里 ${}_l p^{(N)}(i, k)$ 是从状态 i 出发,经 N 步转移到状态 k 而中间没有经过状态 l 的概率. 在上式中令 $N \to \infty$ 就得到

$$y_i \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(i, l) = 1,$$

即 $x_i \geqslant x_l$.

因为 i 和 l 是任意的,故 $x_i = x_l =$ 常数,即不等式组(22)除了 $x_i = c,\ i \in I$ (这时 (22) 的所有式子均变成等式)外没有其它的非负解.

现在设链至少有一个非常返状态 (这时没有用到链的不可约性). 设 $x_l = 1$; $x_i = F(i, l)$ 当 $i \neq l$,这里 l 是任一非常返状态. 注意不会对所有 $i (i \neq l)$ 均有 $F(i, l) = 1$. 事实上,假若

不然，我们就有 $F(l, l) = \sum_{k \neq l} p(l, k)F(k, l) + p(l, l) = \sum_{k \in I} p(l, k) = 1$，这与状态 l 的非常返性相矛盾．于是，上面定义的非负数 x_i 不全相等．对于 $i \neq l$，我们有

$$x_i = F(i, l) = \sum_{k \neq l} p(i, k)\, F(k, l) + p(i, l) = \sum_{k \in I} p(l, k) x_k$$

和

$$x_l = 1 > F(l, l) = \sum_{k \in I} p(i, k) x_k,$$

即 $\{x_i, i \in I\}$ 是不等式组(22)的不全等于一常数的非负解．定理证毕．

现在，我们研究不变初始分布的存在性与 Марков 链的常返性之间的关系问题，亦即关于常返链的方程组(20)的可解性问题．

定理 15 设 Марков 链是不可约的和常返的，则方程组(20)不可能有多于一个满足条件

$$\sum_{i \in I} |x_i| < \infty, \sum_{i \in I} x_i = 1 \tag{23}$$

的解．如果链是正常返的，则方程组(20)的满足(23)式的解形如

$$x_i = v_i = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} p^{(n)}(j, i). \tag{24}$$

如果链是零常返的，则方程组(20)的唯一绝对可和解是平凡的 $(x_i = 0)$．

证．首先证明，在条件(23)之下方程组(20)的解的唯一性．设存在这样的一个解．用 $p(i, k)$ 乘(20)式并对所有 i 求和就得到

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{i \in I} x_i\, p(i, k) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} x_j p(j, i)\, p(i, k) \\ &= \sum_{j \in I} x_j \sum_{i \in I} p(j, i)\, p(i, k) = \sum_{j \in I} x_j p^{(2)}(j, k). \end{aligned}$$

因为上式中的二重级数绝对收敛，故可以交换求和次序．类似地，我们可得

$$x_k = \sum_{j\in I} x_j p^{(n)}(j, k). \tag{25}$$

令

$$S_N(j, k) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p^{(n)}(j, k),$$

则

$$x_k = \sum_{j\in I} x_j S_N(j, k).$$

考虑到 $S_N(j, k) \to m_k^{-1}$ 以及级数 $\sum_{j\in I} x_j$ 的绝对收敛性，在上式中取极限就得到

$$x_k = \sum_{j\in I} x_j m_k^{-1} = m_k^{-1}. \tag{26}$$

这就证明了方程组(20),(23)的解的唯一性．由此还可推得,如果链是零常返的,则对所有 $k\in I$ 均有 $x_k = 0$.

现在证明对于正常返链，(24)是我们所要求的方程组(20)的解．设 I' 是 I 的任意有限子集．由不等式 $p^{(n+1)}(k, i) \geqslant \sum_{j\in I'} p^{(n)}$ $\cdot(k, j) p(j, i)$得

$$S_{N+1}(k, i) - \frac{1}{N+1} p(k, i) \geqslant \frac{N}{N+1}\sum_{j\in I'} S_N(k, j) p(j, i).$$

取$N \to \infty$时的极限,我们就得到

$$v_i \geqslant \sum_{j\in I'} v_j p(j, i).$$

现设 $I' \to I$，于是有 $v_i \geqslant \sum_{j\in I} v_j p(j, i)$．用 $p(i, k)$乘这不等式并对 k 求和就得到不等式

$$v_k \geqslant \sum_{i\in I} v_i p(i, k) \geqslant \sum_{i\in I} v_i p^{(2)}(i, k).$$

继续这一程序可得

$$v_k \geqslant \sum_{i\in I} v_i p^{(n)}(i, k),\text{对任意 } n \geqslant 1.$$

如果在上式中至少对某一k严格的不等式成立,则有

$$\sum_{k\in I} v_k > \sum_{i\in I} v_i \sum_{k\in I} p^{(n)}(i, k) = \sum_{i\in I} v_i,$$

这是不可能的．因此

$$v_k = \sum_{i\in I} v_i\, p^{(n)}(i, k),\ k\in I,\ n = 1, 2, \cdots. \tag{27}$$

特别，v_i 构成方程组(20)的解．由(27)式得

$$v_k = \sum_{i\in I} v_i\, S_N(i, k). \tag{28}$$

我们指出，由不等式 $\sum_{k\in I'} p^{(n)}(i, k) \leqslant 1$ 可推出 $\sum_{k\in I'} S_N(i,k) \leqslant 1$ 和 $\sum_{k\in I'} v_k \leqslant 1$ 对任意有限的 $I'\subset I$．因此 $\sum_{k\in I} v_k \leqslant 1$．于是我们可以在(28)式中取 $N\to\infty$ 的极限，这就产生等式 $v_k = \sum_{i\in I} v_i v_k$，从而 $\sum_{i\in I} v_i = 1$．故方程组(20)的解 v_i 满足条件(23)．定理证毕．

注．若 Марков 链是任意的，$\{x_i;\ i\in I\}$ 是方程组(20)的绝对可和解，k 是非常返状态，则 $x_k = 0$．

这论断可从以下事实推出：可以在等式(25)中取 $n\to\infty$ 的极限，而且对于任意非常返状态 k 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} p^{(n)}(j, k) = 0$．

推论

1．不可约 Марков 链是正常返的，当且仅当方程组(20)有非平凡绝对可和解 $\{x_i;\ i\in I\}$，而且 $x_i = cv_i$，这里 c 是常数，$v_i>0$．

2．不可约 Марков 链有不变的初始分布，当且只当它是正常返的．

3．若链是正常返和非周期的，则方程组(20)的满足(23)的唯一解形如

$$x_i = v_i = \lim_{n\to\infty} p^{(n)}(j, i). \tag{29}$$

最后一论断由以下事实推出：对于正的非周期链，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p^{(n)}(j, i)$ 存在，故由(24)式可推出(29)式．

从上面的定理知，对于零常返链方程组(20)不可能有非平凡

的绝对可和解．但是，它有一个重要的非平凡不可和解．为了获得这个解，我们引入有禁区的转移概率（简称禁区概率），它是首达概率这一概念的推广，我们在证明定理 14 时已遇见过．禁区概率 ${}_lp^{(n)}(i,j)$ 是从初始状态出发后第 n 步到达状态 j 而且在时刻 $1,2,\cdots,n-1$ 没有到过状态 l 的概率．于是

$$ {}_lp^{(n)}(i,j)=\sum_{\substack{j_1,j_2,\cdots,j_{n-1}\\ j_r\neq l,\, r=1,\cdots,n-1}} p(i,j_1)\,p(j_1,j_2)\cdots p(j_{n-1},j),\ n\geqslant 1. $$

显然

$$ {}_lp^{(1)}(i,j)=p(i,j),\ {}_jp^{(n)}(i,j)=f^{(n)}(i,j). $$

我们又设

$$ {}_lp^{(0)}(i,j)=\delta(i,j). $$

类似地可引入禁区概率 ${}_Hp^{(i,j)}$，这时禁区是某一状态集合 H．如果有两个状态 l,j 被禁止到达，则禁区概率 ${}_{(l,j)}p^{(n)}(i,j)$ 可以合乎逻辑地用 ${}_lf^{(n)}(i,j)$ 来表示，这是从初始状态 i 出发后第 n 步首达状态 j，而中间没有到过状态 l 的概率．

我们指出下面两个等式：

$$ {}_lp^{(n)}(i,j)=\sum_{k=1}^{n} {}_lf^{(k)}(i,j)\,{}_lp^{(n-k)}(j,j), \tag{30} $$

$$ {}_lp^{(n)}(i,j)=\sum_{k=1}^{n} {}_lp^{(k)}(i,i)\,{}_{\{i,l\}}p^{(n-k)}(i,j). \tag{31} $$

公式(30)右端的每一项给出从初始状态 i 出发后第 k 步（$k\leqslant n$）首次到达状态 j，然后在第 n 步又到达状态 j，而在这 n 步中没有到过状态 l 的概率．将这些概率对 k 求和就给出(30)式的左端．(31)式右端的每一项有如下的意义：它等于从初始状态 i 出发后第 k 步（$k\leqslant n$）到达状态 i（这是第 n 步之前的最后一次），然后在第 n 步到达状态 j，而在时刻 n 之前没有到过状态 l 的概率．特别地，由(31)式得（当 $l=j$ 时）

$$ f^{(n)}(i,j)=\sum_{k=1}^{n} {}_jp^{(k)}(i,i)\,{}_if^{(n-k)}(i,j). \tag{32} $$

我们引入如下的母函数

$$_lP_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} {_lp^{(n)}(i, j)z^n},$$

$$_lF_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} {_lf^{(n)}(i, j)z^n}, \quad _lf^{(0)}(i, j) = 0.$$

等式(30)和(32)的右端是两个序列的卷积，因此

$$_lP_{ij}(z) = {_lF_{ij}(z)}{_lP_{jj}(z)}, \quad F_{ij}(z) = {_jP_{ij}(z)}{_iF_{ij}(z)}. \tag{33}$$

注意级数 $_lF_{ij}(z)$ 当 $z=1$ 时收敛，而且若状态 i 和 j 连通，则 $_iF_{ij}(1) > 0$. 在这假设下，(33)中的第二个式子表明，当 $z \to 1$ 时 $_jP_{ij}(z)$ 存在有限的极限，因而 $_jP_{ij}(1) < \infty$. 设

$$_lG(i, j) = \sum_{n=0}^{\infty} {_lp^{(n)}(i, j)}. \tag{34}$$

于是，若状态 i 和 j 连通，则

$$_jG(i, i) = \frac{F_{ij}(1)}{_iF_{ij}(1)} < \infty. \tag{35}$$

另一方面，(33)中的第一个式子给出

$$_iG(i, j) = {_iF_{ij}(1)}{_iG(j, j)}.$$

因此

$$_iG(i, j) \leqslant {_iG(j, j)} < \infty. \tag{36}$$

回过头来讨论方程组 (20) 的解，我们证明下述定理.

定理 16 设 l 是不可约常返 Марков 链的任意状态，则方程组(20)有非负解

$$x_l = 1, \ x_i = {_lG(l, i)} \ (i \neq l), \ i \in I.$$

证. 设

$$u_l = 1; \ u_i = {_lG(l, i)} \ (i \neq l). \tag{37}$$

当 $i \neq l$ 时有

$$\sum_{j \in I} u_j p(j, i) = p(l, i) + \sum_{j \neq l} {_lG(l, j)}\, p(j, i)$$

$$= p(l, i) + \sum_{j \neq l} \sum_{n=1}^{\infty} {_lp^{(n)}(l, j)}\, p(j, i)$$

$$= p(l, i) + \sum_{n=1}^{\infty} {}_l p^{(n+1)}(l, i) = {}_l G(l, i) = u_i,$$

如果 $i = l$,则

$$\sum_{j \in I} u_j p(j, l) = p(l, l) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n+1)}(l, l)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(l, l) = u_l.$$

定理证毕.

现在讨论方程组 (20) 满足条件 $u_l = 1$, $u_i \geqslant 0$ 的解的唯一性问题. 为此我们利用连系于引入逆转 Марков 链的方法.

首先假设链是正常返的,而 $\{v_j;\ j \in I\}$ 是不变的初始分布.

考虑一对应于初始分布 $\{v_j;\ j \in I\}$ 的平稳 Марков 过程, 以 $\mathbf{P}^{(v)}$ 表示对应于这过程的概率测度. 我们引入条件概率

$$q_i(j_1, j_2, \cdots, j_n) = \mathbf{P}^{(v)}\{\xi(t-1) = j, \xi(t-2)$$
$$= j_2, \cdots, \xi(t-n) = j_n | \xi(t) = i\},$$

其中 $t > n$;我们有

$$q_i(j_1, j_2, \cdots, j_n) = \frac{v_{j_n} p(j_n, j_{n-1}) p(j_{n-1}, j_{n-2}) \cdots p(j_1, i)}{v_i}$$

$$= q(i, j_1) q(j_1, j_2) \cdots q(j_{n-1}, j_n),$$

其中 $q(i, j) = p(j, i)\frac{v_j}{v_i}$.

于是在一平稳正常返 Марков 链中, 通过改变计算时间的方向(从现在到过去)而得到的条件转移概率也对应某一 Марков 链. 应当注意,所有 $v_i > 0$, 因而 $q(i, j) \geqslant 0$, $\sum_{j \in I} q(i, j) = \frac{1}{v_i} \sum_{j \in I} v_j p(j, i) = \frac{v_i}{v_i} = 1$. 上述构造不仅可应用于正常返 Марков 链, 而且也可应用于任意的常返(即也包括零常返) Марков 链. 为此目的, 我们考虑方程组(20)的任一正解 $\{x_j;\ j \in I\}$ (下面将要证明这样的解存在)并设

$$q(i, j) = p(j, i) \cdot \frac{x_j}{x_i}. \tag{38}$$

如同前面一样,这时有

$$q(i, j) \geqslant 0, \sum_{j \in I} q(i, j) = 1.$$

带有转移概率(38)的 Марков 链称作原有链的逆转(逆链).

我们指出,逆链的 n 步转移概率有

$$q^{(n)}(i, j) = \sum_{j_1, j_2, \cdots, j_{n-1}} q(i, j_1) q(j_1, j_2) \cdots q(j_{n-1}, j)$$

$$= \sum_{j_1, j_2, \cdots, j_{n-1}} p(j_1, i) p(j_2, j_1) \cdots p(j, j_{n-1}) \frac{x_j}{x_i},$$

即

$$q^{(n)}(i, j) = \frac{x_j}{x_i} p^{(n)}(j, i). \tag{39}$$

由此可得以下推论:

如果原有链是不可约的,常返的,正的或零的,则逆链也具有同样的性质.

根据比的极限定理推得,当链是常返时有

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} q^{(n)}(i, j)}{\sum_{n=0}^{N} q^{(n)}(j, j)} = 1.$$

利用 (39) 式可得

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} p^{(n)}(j, i)}{\sum_{n=0}^{N} p^{(n)}(j, j)} = \frac{x_i}{x_j}. \tag{40}$$

下述定理是上面得到的关系的一个推论:

定理 17 对于不可约常返链,方程组(20)满足条件 $x_l = 1$ 的非负解是唯一的. 这时 $x_i = {}_iG(l, i)$ 且

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N}p^{(n)}(j,i)}{\sum_{n=0}^{N}p^{(n)}(j,i)}={}_jG(j,i). \tag{41}$$

(41)式可从方程组(20)的解的唯一性和定理 16 推得，而唯一性则由在对所有 i 均有 $x_i>0$ 的假设下的 (40) 式推出. 于是，根据定理 16 我们只须证明，若 $\{x_j;\ j\in I\}$ 是方程组(20)的非负非平凡解，则 $x_j>0$. 这论断的推导如下：对于 (20) 的非平凡解我们有

$$x_i=\sum_j x_j p(j,i)=\sum_j\sum_k x_k\,p(k,j)\,p(j,i)$$

$$=\sum_k x_k\sum_j p(k,j)\,p(j,i)=\sum_k x_k\,p^{(2)}(k,i).$$

由归纳法易得 $x_i=\sum_{k\in I}x_k\,p^{(n)}(k,i)$. 设 $x_l>0$;对于任意 i,可以找到 n 使得 $p^{(n)}(l,i)>0$, 因此 $x_i\geqslant x_l\,p^{(n)}(l,i)>0$. 对于方程组(20)的这个给定解，我们构造相应的逆链并令 $x_l=1$, 则由 (40)式就可得到 $x_i\,(i\in I)$ 的唯一性. 根据定理 16 我们有 $x_i={}_lG(l,i)$.

注. (40)式是关系式 $\lim_{N\to\infty}N^{-1}\sum_{n=1}^{N}p^{(n)}(j,i)=v_i$ (对正常返链此式成立)的推广，这里 $\{v_i\}$ 是不变的初始分布.

定理 17 可以加强为

定理 18 对于不可约常返 Марков 链，不等式组

$$x_i\geqslant\sum_{j\in I}x_j\,p(j,i),\ x_i\geqslant 0,\ x_l=1 \tag{42}$$

有唯一解，而且 $x_i=\sum x_j\,p(j,i),\ i\in I$.

根据定理 16，我们只须证明(42)的解的唯一性. 引入带有转移概率 $q(i,j)=p(j,i)\dfrac{u_j}{u_i}$ 的逆转 Марков 链，这里 u_i 是方程组(20)的正解. 逆链是不可约的和常返的. 我们有

$$\sum_j q(i,j)\frac{x_j}{u_j}=\sum_j p(j,i)\frac{x_j}{u_i}\leqslant\frac{x_i}{u_i},\frac{x_l}{u_l}=1.$$

但由定理 14 知,不等式组

$$\sum_j q(i,j)y_j\leqslant y_i,\ y_l=1$$

有唯一的非负解 $y_i=1$，因此 $x_i=u_i$ 对所有 $i\in I$. 定理证毕.

§6. 格子上的随机游动

不可约性

定义 1 向量 $z=\sum_{i=1}^{s}a_i e_i$ 的集合 Z 称作格子，这里 $e_i(i=1,\cdots,s)$ 是 $\mathscr{R}^m$ 中的线性无关向量，a_i 是整数 $(a_i=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

显然，Z 是包含向量 $e_1,e_2,\cdots,e_s$ 的最小加法群. 数 s 称做这格子的维，而向量 $e_1,e_2,\cdots,e_s$ 是它的基. 如果 $s<m$，格子称作退化的;当 $s=m$ 时是非退化的.

在格子 Z 上的随机游动 $\{\zeta(n);\ n=0,1,2,\cdots\}$ 由公式 $\zeta(n)=x+\xi_1+\cdots+\xi_n(n\geqslant1)$ 和 $\zeta(0)=x$ 定义，其中 x 是一非随机向量，它表示随机游动的初始位置，$x\in Z$，而 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$是取值于 Z 的独立同分布随机向量. 假设 $p(x)=\mathbf{P}\{\xi_k=x\}$, $x\in Z$. 若 $x_k\in Z$ $(k=0,1,\cdots,n)$，则由随机游动的定义有

$$\mathbf{P}\{\zeta(0)=x_0,\zeta(1)=x_1,\cdots,\zeta(n)=x_n\}$$

$$=\delta(x_0-x)\prod_{k=1}^{n}p(x_k-x_{k-1}).$$

因此格子上的随机游动就是可数状态齐次 Марков 链的一种特殊情形，它的一步转移概率是 $p(x,y)=p(y-x)$. 随机游动与一般的可数状态齐次 Марков 链的区别在于它的转移概率具有空间齐次性这一基本特征:

$$p(x+z,y+z)=p(x,y)=p(y-x).$$

这个性质只不过是游动的位移向量 $\xi_{n+1}=\zeta(n+1)-\zeta(n)$ 对

游动在给定时刻的位置的独立性的另一种表示. 显然，n 步转移概率也具有空间齐次性:

$$p^{(n)}(x+z, y+z) = \mathbf{P}\{\zeta(n) = y+z \mid \zeta(0) = x+z\}$$
$$= \mathbf{P}\{\zeta(n) - \zeta(0) = y - x \mid \zeta(0) = x\} = p^{(n)}(y-x),$$

这里 $p^{(n)}(x) = \mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n = x\}$ 是 n 个独立同分布随机向量之和取值 x 的概率.

根据游动的空间齐次性推得，若 Z 中所有从给定点 x 可达的点组成集合 K_x，则 K_x 可表为 $K_0 + x$ 的形式，这里 K_0 是从 0 ($0 \in K_0$) 可达的点集. 为了描述集合 K_0,我们引入集合 D,它由所有使得 $p(x) > 0$ 的点 $x \in Z$ 组成. 集合 D 称作随机向量 ξ_k 的分布的支承. 从 0 经一步只能到达 D 中的点，从 0 经两步能够而且只能到 Z 中那些可以写成 $x = x_1 + x_2$ 的点，这里 $x_i \in D$ ($i = 1, 2$). 令 H_+ 表示 $\mathscr{R}^m$ 中所有形如 $x = n_1x_1 + \cdots + n_sx_s$ 的点，其中 $s \geqslant 0$, n_k($k = 1, \cdots, s$) 是任意正整数和 $x_k \in D$. 显然

$$K_0 = H_+,$$

即 H_+ 是所有那些从 0 可达的点集.

Z 中的两点 x 和 y 称作**连通的**，如果 $x - y \in H_+$ 和 $y - x \in H_+$. 设

$$H_* = H_+ \cap \{-H_+\}.$$

§5 中所描述的关于连通状态类的分解现在变成: H_* 是包含零点的状态类，其余所有的连通状态类均形如 $H_k = x_k + H_*$，这里 x_k 是 Z 中任一使得 $x_k - x_j \bar{\in} H_*(k \neq j)$ 的序列.

从随机游动的空间齐次性推得，不同的连通状态类或者同是本质的，或者同是非本质的，因此本质性或非本质性是随机游动的整体属性.

本质性条件等价于要求 $H_+ = \{-H_+\}$，这意味着 H_+ 是群.

于是，为使随机游动的状态是本质的，必须且只须 Z 的子集 H_+ 是群.

应当指出，对于随机游动的研究来说，连通状态类的划分和在这些状态类内游动性态的研究并不能反映其特性.

现在引入能表为 $z=x-y$ 的点 z 之集合 H，这里 $x,y\in H_+$. H 是包含从 0 可达的点 $z\in Z$ 的最小群. 我们将要证明，H 是 $\mathscr{R}^m$ 中的一个格子(其维数可能较低). 由此推得，在研究随机游动时可以限于讨论这样的情形，即假定 H 就是空间 $\mathscr{R}^m$ 中所有具有整数值坐标的向量组成的格子 Z. 我们用 Z^m 表示空间 $\mathscr{R}^m$ 中所有整数值向量的格子.

下述定理带有纯代数的性质.

定理 1 线性空间 $\mathscr{R}^m$ 中向量的 r 维加法群 H ($H\subset Z^m$) 是一 r 维格子.

证. 设 r 是 H 中线性无关向量的最大数目. 我们证明存在 r 个这样的线性无关向量 $x_k\in H$，使得 H 就是形如 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_rx_r$ 的向量集合，这里 a_k 是任意整数 ($a_k=0,\pm1,\pm2,\cdots$, $k=1,2,\cdots,r$). 设 $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_r^*$ 是 H 中任一最大线性无关向量组，则每一向量 $x\in H$ 可表为

$$x=\sum_{k=1}^{r} b_k x_k^*,\tag{1}$$

其中 b_k 是实数. 另一方面，$x_k^*=\sum\limits_{j=1}^{m} c_{kj} e_j$，这里 c_{kj} 是整数且矩阵 $\{c_{kj}\}$ 的秩等于 r .(1)等价于线性方程组 $\sum\limits_{k=1}^{r} b_k c_{kj}=a_j$, $j=1,2,\cdots,m$，其中 a_j 是 x 在基 $\{e_j;j=1,\cdots,m\}$ 中的整数值坐标.由此可得，当 $0\leqslant b_k<1$ 时只能存在有限多个形如(1)的向量，而且 b_k 是有理数. 因此，若 B 是所有 b_k 的最小公分母，则(1)式可写成

$$x=\sum_{k=1}^{r} c_k y_k,\quad y_k=\frac{x_k^*}{B},$$

其中 c_k 是整数. 现在考虑任一带有整数值坐标的线性变换 $z_k=\sum\limits_{j=1}^{r} n_{kj} y_j$ ($k=1,\cdots,r$)，以及由向量 $z_1,\cdots,z_r$ 在基 $\{y_j;j=1,\cdots,r\}$ 中的坐标组成的行列式

$$V(z_1, z_2, \cdots, z_r) = \begin{vmatrix} n_{11} \cdots n_{1r} \\ n_{21} \cdots n_{2r} \\ \cdots\cdots \\ n_{r1} \cdots n_{rr} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

当且仅当向量组 $z_1, \cdots, z_r$ 是线性无关时这行列式取异于零的整数值. 我们选取一向量组 $z_1, \cdots, z_r$, 使得 $z_k \in H$ 且行列式 (2) 取最小正值. 这样的向量组是存在的. 以 $l_1, \cdots, l_r$ 表示对应的向量. 如果对某 $x \in H$,展式 $x = \sum_{k=1}^{r} d_k l_k$ 中的 d_k 不全为整数,则存在向量 $l' \in H$, 使得 $l' = \sum d'_k l_k$, $0 \leqslant d'_k < 1$ 且对某个 j 有 $d'_j > 0$. 这时

$$\begin{aligned} & V(l_1, \cdots, l_{j-1}, l', l_{j+1}, \cdots, l_r) \\ & = V(l_1, \cdots, l_{j-1}, d'_j l_j, l_{j+1}, \cdots, l_r) \\ & = d'_j V(l_1, \cdots, l_{j-1}, l_j, l_{j+1}, \cdots, l_r), \end{aligned}$$

这与行列式 $V(l_1, \cdots, l_r)$ 的最小性相矛盾.

因此,以向量组 $\{l_1, \cdots, l_r\}$ 为基的格子和 H 是一致的. 定理证毕.

定义 2 给定在整数格子 Z^m 上的随机游动称做不可约的,如果 $H = Z^m$;称做可约的,如果 $H \neq Z^m$.

应当注意,刚才引入的随机游动不可约性这一概念和 Марков 链的不可约性定义并没有联系.

上面的定理表明, 借助空间的仿射变换恒能使 m 维随机游动成为 m 维不可约的.

利用特征函数可以给出如下关于随机游动不可约性的判别准则. 设

$$J(u) = \mathbf{E}\, e^{i(u,\xi_1)} = \sum_{x \in Z^m} p(x) e^{i(u,x)} \tag{3}$$

是向量 $\xi_1 = \zeta(1) - \zeta(0)$ 的特征函数, 这里 ξ_1 是随机游动的一步.

定理 2 为使随机游动是不可约的,必须且只须对 $u \neq 2\pi x$,

$x \in Z^m$ 有 $J(u) \neq 1$.

证. 充分性. 设随机游动是可约的. 如果H的维数小于 m, 则存在正交于H的向量 e, 因此以概率 1 有 $(ce, \xi_1) = 0$ 对任意 c,故定理的条件不成立. 现设H的维数等于 m. 我们在H中选取基 $l_1, \cdots, l_m$,又设T是把基 $\{e_k; k = 1, \cdots, m\}$ 变为 $\{l_k; k = 1, \cdots, m\}$ 的线性变换: $l_k = Te_k$. 基 $\{e_k; k = 1, \cdots, m\}$ 的变换矩阵T由向量 l_k 的坐标组成,因而它的元素有整数值. 但它的行列式不等于± 1. 事实上,假若不是这样,则逆变换 T^{-1} 也是具有整数值元素的,因而 Z^m 中的每一点都是H中的点,这与游动的可约性相矛盾. 我们考虑所有使得 $T^* v \in Z^m$ 的向量 $v \in \mathscr{R}^m$ 组成的集合 Z', 这里 T^* 是T的共轭变换. 显然 Z' 是一加法群,而且 $Z^m \subset Z'$.另一方面, $Z' \neq Z^m$, 因为否则整数变换 T^* 就有一整数逆变换,这与关系式

$$1 = \mathrm{Det}\,(T^* T^{*-1}) = \mathrm{Det}\,(T)\,\mathrm{Det}\,(T^{*-1})$$

相矛盾(因为 $\mathrm{Det}\,(T) \neq \pm 1$). 所以存在一向量 v, 使得 $v \in Z'$, $v \bar{\in} Z^m$ 和 $T^* v \in Z^m$. 因而对任意 k, $(v, l_k) = (v, Te_k) = (T^* v, e_k)$是整数,故 (v, ξ_1) 以概率 1 是整数, 因此对 $v \bar{\in} Z^m$ 有 $J(2\pi v) = \mathbf{E}\exp\{2\pi i(v, \xi_1)\} = 1$. 定理条件的充分性得证.

必要性 设游动是不可约的,而且 $J(2\pi v) = 1$,则仅当 (v, ξ_1) 以概率 1 是整数才可能有 $\mathbf{E}[1 - \exp\{2\pi i(v, \xi_1)\}] = 0$. 从游动的不可约性推得 (v, l_k) 是整数 $(k = 1, 2, \cdots, m)$,即 $v \in Z^m$.定理证毕.

常返游动 设 $f^{(s)}(x, y)$ 是初始状态为 x 的随机游动在时刻 s 首次处于状态 y 的概率,又令 $F(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} f^{(s)}(x, y)$.

由 § 5 的(4)式得

$$f^{(n)}(x, y) = p^{(n)}(x, y) - \sum_{s=1}^{n-1} f^{(s)}(x, y)\, p^{(n-s)}(y, y),$$

又由随机游动的空间齐次性得

$$f^{(n)}(x, y) = f^{(n)}(0, y - x) = f^{(n)}(y - x).$$

前一个等式可以改写为

$$f^{(n)}(x) = p^{(n)}(x) - \sum_{s=1}^{n-1} f^{(s)}(x) p^{(n-s)}(0).$$

函数 $F(x, y)$ 也只依赖于差 $y - x$,我们可以令 $F(y, y + x) = F(x)$。特别地,$F(x, x) = F(0, 0)$,因此随机游动的所有状态或者同时是常返的,或者同时是非常返的. 所以,今后我们将要讨论常返的或非常返的随机游动.

设

$$F_x(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x) z^n, \quad P_x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(x) z^n.$$

函数 $F_x(z)$和 $P_x(z)$之间有下面的关系(参看 §5,(6)):

$$P_0(z) = (1 - F_0(z))^{-1}, \quad P_x(z) = P_0(z) F_x(z), \quad (x \neq 0).$$

于是我们得到如下论断:

为使随机游动是常返的,必须且只须 $G(0) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(0) = \infty$.

我们回想一下,由于 §5 的结果,若游动是常返的,则在无限的时间区间内以概率 1 返回初始状态无穷多次. §5 的 (10) 式这时变为

$$F(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} p^{(n)}(x)}{\sum_{n=0}^{N} p^{(n)}(0)}. \tag{4}$$

因此,如果状态 x 是从 0 可达的,而游动又是常返的,则 $G(x) = \infty$,这里

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(x).$$

如果游动不是常返的,则

$$G(x) \leq G(0) < \infty.$$

函数 $G(x)$ 有如下的概率意义. 它等于从 0 点开始的随机游动在

时间区间 $(0, \infty)$ 内到达状态 x 的次数之平均值(数学期望)。对于常返的游动，$G(x)$ 等于 0 或 ∞。在非常返的情形中，$G(x)$ 称为随机游动的 Green 函数。

下面的随机游动非常返性判别准则是强大数定律（§ 3）的一个简单推论。

设随机游动的一步具有有限的非零数学期望，则该游动是非常返的。

事实上，以概率 1 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\zeta(n)}{n}=\mathbf{E}\xi_1=m\neq 0.$$

因此对几乎所有的 ω，可以找到 $n_0=n_0(\omega)$，使当 $n\geqslant n_0$ 时 $|\zeta(n)|>\frac{|m|}{2}n$，故从时刻 n_0 开始不可能返回 0 点。

利用随机游动一步的特征函数 $J(u)$ 可以得到一些其它的常返性和非常返性判别准则。不难看出，

$$G(0)=\lim_{t\uparrow 1}\frac{1}{(2\pi)^m}\int_C \mathrm{Re}(1-tJ(u))^{-1}du, \tag{5}$$

其中 m 是格子的维数，C 是 $\mathscr{R}^m$ 中的一个方体，$C=\{u: |u^i|<\pi, i=1,\cdots,n\}$，$0<t<1$。事实上，首先

$$G(0)=\lim_{t\uparrow 1}\sum_{n=0}^{\infty}p^{(n)}(0)\,t^n.$$

另一方面，随机游动的特征函数的表达式 (3) 表明，$p(x)$ 是 $J(u)$ 的 Fourier 级数展式中的 Fourier 系数。因此

$$p(x)=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_C J(u)\,e^{-i(u,x)}\,du$$

和

$$p^{(n)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_C J^n(u)\,e^{-i(u,x)}\,du. \tag{6}$$

故当 $0<t<1$ 时

$$P_0(t)=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_C(1-tJ(u))^{-1}\,du.$$

因为 $P_0(t)$ 是实的，故在最后一个积分中被积函数可用它的实部来

代替．取 $t \to 1$ 时的极限就得到(5)式． 令 $J_c(u) = \operatorname{Re} J(u)$ 时(5)式可改写成

$$G(0) = \lim_{t \uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^m} \int_C \frac{1 - tJ_c(u)}{|1 - tJ(u)|^2} du.$$

利用这个公式，我们可以得到一些特殊的常返性判别准则．例如，可以证明 $m = \mathbf{E}\,\xi_1 = 0$ 的一维随机游动是常返的．

事实上，

$$\frac{1 - J(u)}{u} \to m = 0, \text{当 } u \to 0.$$

因此，对于任意 $\varepsilon > 0$，可以找到 $\delta > 0$，使当 $|u| < \delta$ 时有 $|1 - J(u)| < \varepsilon u$．因而

$$G(0) \geqslant \varlimsup_{t \uparrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1 - t}{2[(1 - t)^2 + |1 - J(u)|^2]} du$$

$$\geqslant \varlimsup_{t \uparrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} \frac{1 - t}{(1 - t)^2 + \varepsilon^2 u^2} du = \varlimsup_{t \uparrow 1} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{arc\,tg} \frac{\varepsilon\,\delta}{1 - t} = \frac{1}{4\varepsilon},$$

由此得欲证的 $G(0) = \infty$．

为了得到多维游动的类似结果，我们需要特征函数的某些估计．

引理 1 对于维数 $\geqslant 2$ 的不可约随机游动，存在这样的常数 K，使得

$$1 - J_c(u) \geqslant k|u|^2, \; u \in C,$$

这里 C 是 m 维方体 $\{u: \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |u^i| \leqslant \pi\}$．

证．因为

$$1 - J_c(u) = \sum_{x \in Z^m} [1 - \cos(u, x)] p(x)$$

并且对 $|(u, x)| \leqslant \pi$ 有

$$1 - \cos\,(u, x) = 2 \sin^2 \frac{(u, x)}{2} \geqslant 2 \left(\frac{2}{\pi} \frac{(u, x)}{2} \right)^2 = \frac{2}{\pi^2} (u, x)^2,$$

故

$$1 - J_c(u) \geqslant \frac{2}{\pi^2} \Sigma' (u, x)^2 p(x),$$

这里 $\sum'$ 表示对满足条件 $|(u,x)|\leqslant\pi$ 的 $x\in Z^m$ 求和. 因为游动是不可约的，所以在集合 $\{x: p(x)>0\}$ 中可选出 $\mathscr{R}^m$ 中的一组基，设 $\{e_1,\cdots,e_m\}$ 是这组基的向量，$N=\max\{|e_k|, k=1,2,\cdots,m\}$. 再设 $|u|\leqslant\pi N^{-1}$,则

$$1-J_c(u)\geqslant\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}(u,e_k)^2p(e_k).$$

上式右端的二次型是正定的,因此存在常数 k_1,使得 $\sum_{k=1}^{m}(u,e_k)^2\times p(e_k)\geqslant k_1|u|^2$. 于是

$$1-J_c(u)\geqslant\frac{2}{\pi}k_1|u|^2, \text{对 } |u|\leqslant\pi N^{-1}.$$

根据 § 1 的定理 2 知,在区域 $C_1=C\backslash\{u: |u|<\pi N^{-1}\}$ 中 $J(u)$不等于 1,因而 $\min\limits_{u\in C_1}[1-J_c(u)]=k_2>0$. 但这时对于 $|u|\geqslant\pi N^{-1}$ 和 $u\in C$ 有 $1-J_c(u)\geqslant k_2(\sqrt{m}\pi)^{-1}|u|^2$. 论断得证.

现在我们来考虑随机游动的常返性问题. 我们假设二维随机游动是不可约的，$\mathbf{E}\xi_1=0$ 和 $\mathbf{E}|\xi_1|^2<\infty$. 根据 Fatou 引理有

$$\lim_{t\uparrow 1}\int_C\frac{1-tJ_c(u)}{|1-tJ(u)|^2}du\geqslant\int_C\frac{1-J_c(u)}{|1-J(u)|^2}du. \tag{7}$$

由引理 1 得知，当 $u\in C$ 时 $1-J_c(u)\geqslant k|u|^2$. 另一方面，因为 ξ_1 有有限的二阶矩,

$$J(u)=1-\frac{1}{2}\mathbf{E}(\xi_1,u)^2+o(|u|^2).$$

因而在点 $u=0$ 的某个邻域中有 $|1-J(u)|\leqslant k_1|u|^2$. 故不等式(7)右端的被积函数在点 $u=0$ 的某个邻域中不小于 $\frac{k|u|^2}{k_1|u|^4}\sim\frac{1}{|u|^2}$,从而对应的积分发散.因此,所考虑的随机游动是常返的.至于维数≥3 的随机游动则恒是非常返的. 事实上,因为

$$I=\lim_{t\uparrow 1}\int_C\frac{1-tJ_c(u)}{|1-tJ(u)|^2}du\leqslant\lim_{t\uparrow 1}\int_C\frac{du}{1-tJ_c(u)}\leqslant\int_C\frac{du}{1-J_c(u)}$$

于是,利用引理 1 就得到

$$I \leqslant \int_C \frac{du}{k|u|^2},$$

如果空间的维数 $m \geqslant 3$，上面的积分是收敛的．我们可以把所得的结果归纳如下：

定理 3 维数 $m \geqslant 3$ 的随机游动一定是非常返的．对于一维和二维的随机游动，若 $\mathbf{E}\,\xi_1$ 存在且 $\mathbf{E}\,\xi_1 \neq 0$，则它也是非常返的．另一方面，在一维的情形，若 $\mathbf{E}\,\xi_1 = 0$ 时，它是常返的；在二维的情形若再补充假设 $\mathbf{E}|\xi_1|^2 < \infty$，则它也是常返的．

§7. 格子游动的局部极限定理

在这一节中讨论随机游动经 n 步落在格子点 x 的概率 $p^{(n)}(x)$ 当 $n \to \infty$ 时的渐近性态．从分析的观点来看，问题是研究积分

$$p^{(n)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_C [J(u)]^n e^{-i(u,x)}\,du \tag{1}$$

当 $n \to \infty$ 时的渐近性态(参看 §6(6))．我们只考虑不可约的随机游动，而且还进一步假设随机游动具有所谓完全不可约的性质．

定义 1 不可约游动称作完全不可约的，如果对于任一点 $x_0 \in D$，一步为 $\eta_1 = \xi_1 - x_0$ 的随机游动也是不可约的．

借助 §6 的定理 2 容易给出随机游动的完全不可约性的判别准则．

定理 1 为使游动是完全不可约的，必须且只须

$$|J(u)| \neq 1,\ 当\ u \neq 2\pi x,\ x \in Z^m.$$

证．设游动是完全不可约的，又设 $J(u) = e^{it}$，t 是实数．从等式

$$\sum_{x \in Z^m} e^{i(x,u)} p(x) = e^{it},\quad \sum_{x \in Z^m} p(x) = 1$$

推得，对于每一个使得 $p(x) > 0\,(x \in D)$ 的 x 有 $(x,u) = t + 2\pi n$，$n = n(x)$．设 $x_0 \in D$，于是

$$1 = \sum_{x \in Z^m} p(x) e^{i(x - x_0, u)}$$

$$= \sum_{x \in Z^m} p(x + x_0) e^{i(x,u)} = \sum_{x \in Z^m} q(x) e^{i(x,u)},$$

其中 $q(x)$是随机向量 $\eta_1 = \xi_1 - x_0$ 的分布．从游动一步为 η_1 的随机游动的不可约性和 § 6 定理 2 推得，仅当 $u = 2\pi x$, $x \in Z^m$ 时上式才有可能成立 *⁾．另一方面，若对某 $x_0 \in D$，游动一步为 $\eta_1 = \xi_1 - x_0$ 的随机游动是可约的，则由 § 6 定理 2 推得，存在某一u，$u \neq 2\pi x_1$，$x_1 \in Z^m$，使得

$$\sum_{x \in Z^m} p(x) e^{i(x - x_0, u)} = 1,$$

因此

$$J(u) = \sum_{x \in Z^m} p(x)\, e^{i(x,u)} = \sum_{x \in Z^m} p(x) e^{i(x - x_0, u)} e^{i(x_0, u)}$$
$$= e^{i(x_0,u)}.$$

定理证毕．

现在转到估计积分(1)，首先对它作变换，令

$$x = na + \sqrt{n}\, x_n,\ \ a = \mathbf{E}\xi_1,\ \ x \in Z^m.$$

则

$$p^{(n)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^m n^{m/2}} \int_{\sqrt{n} C} \left[J\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) e^{-i\left(a, \frac{u}{\sqrt{n}}\right)} \right]^n e^{-i(u, x_n)} du, \quad (2)$$

这里$\sqrt{n}\, C$ 表示m维方体 $\{u: |u^j| < \sqrt{n}\,\pi, j = 1,2,\cdots,m\}$．假设 ξ_1 有有限的 $r + 2 (r > 0)$ 阶矩．按照 Taylor 公式将 $e^{i(u,x)}$ 展开，我们就得到 $J(u)$ 的如下表示式：

$$J(u) = 1 + iA_1(u) + i^2 A_2(u) + \cdots + i^{r+2} A_{r+2}(u) + o(|u|^{r+2}), \quad (3)$$

式中 $A_k(u)$ 是u的k阶齐次型，而且

$$A_1(u) = \mathbf{E}(u, \xi_1), A_2(u) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(u, \xi_1)^2.$$

由此得知，在点 $u = 0$ 的某个邻域内，可以定义单值连续函数 $\ln J(u)$使有

$$\ln J(u) = iS_1(u) + i^2 S_2(u) + \cdots + i^{r+2} S_{r+2}(u) + o(|u|^{r+2}),$$

---

*⁾ 原书实际上未证明条件的充分性，下面的证明是译者加的．——译者注

其中 $S_k(u)$ 也是 u 的 k 阶齐次型。

$$S_1(u)=A_1(u)=\mathbf{E}(u,\xi_1)=(u,a),$$

$$S_2(u)=\frac{1}{2}\mathbf{D}(u,\xi_1)=\frac{1}{2}(Bu,u),$$

这里 B 是向量 ξ_1 的协方差矩阵。

于是，令 $J_1(u)=J(u)e^{-i(u,a)}$，就得到

$$J_1^n\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)=e^{-S_2(u)+I_n},$$

其中

$$I_n=\sum_{k=1}^{r}\frac{i^{k+2}}{\sqrt{n^k}}S_{k+2}(u)+o\left(\frac{|u|^{r+2}}{\sqrt{n^r}}\right).$$

因为

$$e^{I_n}=\sum_{j=0}^{r}\frac{1}{j!}I_n^j+O(I_n^{j+1})$$

且在区域 $|u|\leqslant k\ln n$ 中有 $I_n^{r+1}=O\left(\frac{\ln^{3r+3}n}{\sqrt{n^{r+1}}}\right)$，故

$$\left[J_1\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right]^n=e^{-\frac{1}{2}(Bu,u)}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}l_1(u)+\frac{1}{n}l_2(u)+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{n^r}}l_r(u)+\frac{Q_{nr}^*(u)}{\sqrt{n^{r+1}}}\right)+O\left(\frac{\ln^{3r+3}n}{\sqrt{n^{r+1}}}\right). \tag{4}$$

式中 $Q_{nr}^*(u)$ 是 u 的阶数为固定的多项式，它的系数当 $n\to\infty$ 时仍是有界的，而 $l_j(u)$ 是 u 的 $3j$ 阶多项式。

以 D_j^k 表示对 u^j 求 k 次偏微商，注意(3)式至少可以求 $r+2$ 次微商，即有

$$D_j^{k_1}D_{i_2}^{k_2}\cdots D_{i_s}^{k_s}J(u)$$

$$=D_{i_1}^{k_1}D_{i_2}^{k_2}\cdots D_{i_s}^{k_s}\left(\sum_{k=0}^{r+2}i^k A_k(u)\right)+o(|u|^{r+2-p}),$$

其中 $p=k_1+k_2+\cdots+k_s$。由此推得类似的论断对于 $\ln J(u)$ 也成立。从这一事实出发就能够证明(4)式允许对 u 逐项微分，因而有

$$D^{(p)}J_1^n\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)=D^{(p)}e^{-\frac{1}{2}(Bu,u)}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}l_1(u)+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{n^r}}l_r(u)+\frac{Q_{nr}^*(u)}{\sqrt{n^{r+1}}}\right)+O\left(\frac{\ln^{3r+3}n}{\sqrt{n^{r+1}}}\right), \tag{5}$$

式中

$D^{(p)}=D_{i_1}^{k_1}D_{i_2}^{k_2}\cdots D_{i_s}^{k_s}$, $k_1+k_2+\cdots+k_s\leqslant r+2$.

转而估计积分

$$I=\int_{\sqrt{n}C}\left|D^{(p)}J_1^n\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)-D^{(p)}e^{-\frac{1}{2}(Bu,u)}\right.$$

$$\left.\times\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}l_1(u)+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^r}}l_r(u)\right)\right|du,$$

为此我们需要某些关于函数 $J(u)$ 的不等式．从游动的不可约性和二阶矩的有限性推得（参看§6），存在 $\delta>0$，使当 $|u|<\delta$ 时有

$$|J(u)|<1-\frac{1}{4}(Bu,u),$$

又因为 ξ_1 的分布是非退化的，故对 $|u|<\delta$，有 $|J(u)|<1-c|u|^2<e^{-c|u|^2}$,这里 c 是某一常数． 另一方面，从游动的完全不可约性推得,对 $|u|\geqslant\delta$, $u\in C$ 有 $|J(u)|\leqslant 1-\rho$, 这里 $0<\rho<1$. 这两个关于 $J(u)$ 的估计可以结合为

$$|J(u)|\leqslant\rho e^{-c|u|^2}+1-\rho,\quad u\in C. \tag{6}$$

同样的估计也可以应用于 $J_1(u)$.

现在回过头来考虑积分 I. 我们有

$$I\leqslant I_1+I_2+I_3,$$

这里

$$I_1=\int_{B_n}\left|D^{(p)}J_1^n\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)-D^{(p)}e^{-\frac{1}{2}(B,u)}\sum_{k=0}^{r}n^{-k/2}l_k(u)\right|du,$$

$$I_2=\int_{B_n^*}\left|D^{(p)}J_1^n\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right|du,$$

$$I_3=\int_{B_n^*}\left|D^{(p)}e^{-\frac{1}{2}(Bu,u)}\sum_{k=0}^{r}n^{-k/2}l_k(u)\right|du,$$

和

$$B_n=\{u:|u|\leqslant\sqrt{k\ln n}\}\cap(\sqrt{n}C),$$
$$B_n^*=\{u:|u|>\sqrt{k\ln n}\}\cap(\sqrt{n}C).$$

由(5)式得

$$I_1\leqslant\int_{B_n}\left[D^{(p)}\left(e^{-\frac{1}{2}(Bu,u)}\frac{Q_{nr}^*(u)}{\sqrt{n^{r+1}}}\right)+O\left(\frac{\ln^{3r+3}n}{\sqrt{n^{r+1}}}\right)\right]du.$$

考虑到多项式 $Q_{nr}^*(x)$ 的系数作为 n 的函数是一致有界的，以及对于任意多项式 $P(u)$，积分 $\int_{R^m}P(u)e^{-\frac{1}{2}(Bu,u)}du$ 收敛，我们就得到

$$I_1=O\left(\frac{1}{\sqrt{n^{r+1}}}\right)+O\left(\frac{\ln^{3r+3}n}{\sqrt{n^{r+1}}}\right)O(\sqrt{k\ln n})^m=o(n^{-r/2}).$$

其次

$$I_2=\int_{B_n^*}\left|D^{(p)}J_1^n\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right|du=n^{m/2}\int_{C\cap\{|u|>\sqrt{\frac{k\ln n}{n}}\}}|D^{(p)}J_1^n(u)|du.$$

表示式 $D^{(p)}J_1^n(u)$ 是 $J_1(u)$ 及其偏导数的一个多项式，而且在这多项式中 $J_1(u)$ 的幂次不低于 $n-p$，$J_1(u)$ 的偏导数之阶数不高于 $p\leqslant r+2$，其幂次则不高于 p. 最后，这多项式的系数是 n^p 阶的. 因此

$$|D^{(p)}J_1^n(u)|\leqslant An^p|J_1(u)|^{n-p},$$

其中 A 与 n 无关. 故由(6)式得

$$I_2\leqslant An^{p+\frac{m}{2}}\left(1+\rho\left(e^{-\frac{ck\ln n}{n}}-1\right)\right)^{n-p}\int_C du\leqslant(2\pi)^{m/2}An^{p+\frac{m}{2}}$$
$$\times e^{\rho(n-p)\left(e^{-\frac{ck\ln n}{n}}-1\right)}=O\left(\frac{1}{n^{\rho ck-p-\frac{m}{2}}}\right).$$

因此，可以选出一个与 n 无关的常数 k，使得

$$I_2\leqslant o\left(\frac{1}{n^{r/2}}\right).$$

余下是估计 I_3. 我们有

$$I_3=\int_{B_n^*}e^{-\frac{1}{2}(Bu,u)}|\bar{Q}_{nrp}(u)|du$$
$$\leqslant e^{-\frac{1}{4}ck\ln n}\int_{\mathscr{R}^m}e^{-\frac{1}{4}c|u|^2}|\bar{Q}_{nrp}(u)|du,$$

其中 $\bar{Q}_{nrp}$ 是某一个多项式，它的幂次只依赖于 r 和 p，而系数则还依赖于 n，但当 $n\to\infty$ 时仍然是有界的. 根据上式右端的积分之收敛性再次推知，我们可以选取 k 使得

$$I_3 = o\left(\frac{1}{n^{r/2}}\right).$$

于是就证明了对于适当选取的 k 有

$$I = o\left(\frac{1}{n^{r/2}}\right).$$

现在讨论积分

$$L = \int_{\mathscr{R}^m} e^{-i(u,x)} D^{(p)} e^{-\frac{1}{2}(Bu,u)} \sum_{k=0}^{r} n^{-k/2} l_k(u) du.$$

当 $r=0$ 和 $p=0$ 时，这积分是 m 维正态分布的特征函数的 Fourier 变换. 于是

$$\int_{\mathscr{R}^m} e^{-i(u,x)-\frac{1}{2}(Bu,u)} du = (2\pi)^{\frac{m}{2}} \sqrt{|B|^{-1}} e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}x,x)},$$

式中 $|B|$ 是矩阵 B 的行列式，B^{-1} 是 B 的逆矩阵. 在这公式中可以对 x 求无限多次微商，而且在这等式左边求微商可在积分号下进行. 因此对任意多项式 $P(u)$ 有

$$\int_{\mathscr{R}^m} P(u) e^{-i(u,x)-\frac{1}{2}(Bu,u)} du = (2\pi)^{m/2} \sqrt{|B|^{-1}} e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}x,x)} Q(x),$$

这里 $Q(x)$ 是 x 的一个多项式，它与多项式 P 有相同的幂次. 其次，利用分部积分法可得

$$\int_{\mathscr{R}^m} e^{-i(u,x)} D^{(p)}\left(e^{-\frac{1}{2}(Bu,u)} P(u)\right) du$$

$$= (ix^1)^{k_1} (ix^2)^{k_2} \cdots (ix^m)^{k_m} \int_{\mathscr{R}^m} e^{-i(u,x)-\frac{1}{2}(Bu,u)} P(u) du,$$

式中 $D^{(p)} = \dfrac{\partial^p}{(\partial u^1)^{k_1}(\partial u^2)^{k_2}\cdots(\partial u^m)^{k_m}}$. 于是

$$L = (ix^1)^{k_1}(ix^2)^{k_2}\cdots(ix^m)^{k_m}(2\pi)^{\frac{m}{2}}$$

$$\times \sqrt{|B|^{-1}}\, e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}x,x)} \sum_{k=0}^{r} \frac{Q_k(x)}{n^{k/2}},$$

这里 $Q_k(x)$ 是和 $l_k(u)$ 有相同幂次（即 $3k$ 次）的多项式，而且 $Q_0(x)=1$。

到现在为止，我们已经差不多证明了下面的定理.

定理 2 设 $\zeta(n)$ 是完全不可约的随机游动，$\zeta(n)=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$，这里 ξ_k 是相互独立同分布的随机向量，它们取值于 Z^m 且有有限的 $r+2(r\geqslant 0)$ 阶矩，则

$$n^{\frac{m}{2}}P\{\zeta(n)=na+\sqrt{n}\,x_n\}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{m/2}\sqrt{|B|}}e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}x_n,x_n)}\left(1+\sum_1^r\frac{Q_k(x_n)}{n^{k/2}}\right)+\varepsilon_n,$$

这里对 x_n 一致地有

$$\varepsilon_n=\frac{1}{(1+|x_n|^{r+2})}o\left(\frac{1}{n^{r/2}}\right),$$

而 a 是随机游动一步的平均值向量，B 是相关矩阵.

事实上，我们有

$$(2\pi\sqrt{n})^m(ix^1)^{k_1}(ix^2)^{k_2}\cdots(ix^m)^{k_m}p^{(n)}(x)$$

$$=\int_{\sqrt{n}C}e^{-i(u,x_n)}D^{(p)}J_1^n\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)du$$

$$=\int_{\mathscr{R}^m}e^{-i(u,x_n)}D^{(p)}\left[e^{-\frac{1}{2}(Bu,u)}\sum_{k=0}^r\frac{l_k(u)}{n^{k/2}}\right]du+I_4+I_5,$$

其中

$$I_4=\int_{\sqrt{n}C}e^{-i(u,x_n)}D^{(p)}\left[J_1^n\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{1}{2}(Bu,u)}\sum_{k=0}^r\frac{l_k(u)}{n^{k/2}}\right]du$$

$$I_5=-\int_{\mathscr{R}^m\setminus\sqrt{n}C}^{\mathscr{R}}e^{-i(u,x_n)}D^{(p)}\left[e^{-\frac{1}{2}(Bu,u)}\sum_{k=0}^r\frac{l_k(u)}{n^{k/2}}\right]du.$$

但从不等式(7)得

$$|I_4|\leqslant I=o\left(\frac{1}{n^{r/2}}\right).$$

此外，

$$|I_5|\leqslant\int_{\mathscr{R}^m\setminus\sqrt{n}C}\left|D^{(p)}\left[e^{-\frac{1}{2}(Bu,u)}\sum_{k=0}^r\frac{l_k(u)}{n^{k/2}}\right]\right|du$$

$$\leqslant e^{-\frac{1}{4}n}\int_{\mathscr{R}^m} e^{-\frac{1}{4}(Bu,u)} R(u)\,du,$$

式中 $R(u)$ 是一多项式，因此对任意 k 有 $|I_5| = O(\rho^n) = o(n^{-k})$（这里 $\rho = e^{-\frac{1}{4}}$）. 于是对幂次不高于 $r+2$ 的任意多项式 $P(x)$ 有

$$(2\pi\sqrt{n})^m P(x_n)\, p^{(n)}(x_n)$$

$$= P(x_n)(2\pi)^{m/2}\sqrt{|B|^{-1}}\, e^{-1/2(B^{-1}x_n, x_n)} \sum_{k=0}^{r} \frac{Q_k(x_n)}{n^{k/2}} + o\left(\frac{1}{n^{r/2}}\right).$$

显然，上式右端第二项依赖于 $P(x)$ 的选取. 设 $P(x) = 1 + m^{r/2} \times \sum_{j=1}^{m} |x^j|^{r+2}$. 考虑到 $P(x)$ 可以用一取较小值的函数代替以及 $m^{r/2}\sum_{j=1}^{m} |x^j|^{r+2} \geqslant |x|^{r+2}$，我们就得到所需要的结果.

§8. 遍历定理

保测变换

定义 1 取值于可测空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 的随机过程 $\{\xi(t), t\in T\}$ 称作平稳的，如果对任意使得 $t_k + t \in T(k = 1, \cdots, n)$ 的 $n, t_1, t_2, \cdots, t_n$ 和 t，序列

$$\xi(t_1 + t), \xi(t_2 + t), \cdots, \xi(t_n + t)$$

在 $\{\mathscr{X}^n, \mathscr{B}^n\}$ 中的联合分布不依赖于 t.

平稳过程的定义等价于：对任意有界 $\mathfrak{B}^n$ 可测函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$x_k \in \mathscr{X}$ 和任意 n，$t_1, \cdots, t_n$，$(t_k + t \in T)$，数学期望

$$\mathbf{E}\, f(\xi(t_1 + t), \xi(t_2 + t), \cdots, \xi(t_n + t))$$

不依赖于 t. 由此得到，若 $h(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\{\mathscr{X}^n, \mathfrak{B}^n\} \to \{\mathscr{Y}, \mathfrak{C}\}$ 的一个可测映象，则 $\eta(t) = h(\xi(t_1 + t), \cdots, \xi(t_n + t))$ 是在 $\eta(t)$ 有定义的 t 值集上的平稳过程.

本节讨论平稳序列，即定义在集合 $T = \{t:\ t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 上而取值于 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 的平稳过程.

令 $\mathscr{X}^T$ 表示所有序列 $u = \{\cdots, x_{-n}, x_{-n+1}, \cdots, x_0, x_1, \cdots,$

x_n, …} 组成的空间，$\mathfrak{C}$ 是 $\mathscr{X}^T$ 中包含所有柱集的最小 σ 代数，$\mathbf{P}_\xi$ 是 $\mathfrak{C}$ 上由序列 $\{\xi(t),\ t\in T\}$ 诱导的测度. 于是，概率空间 $\{\mathscr{X}^T, \mathfrak{C}, \mathbf{P}_\xi\}$ 就是过程 $\{\xi(t),\ t\in T\}$ 的一种自然的表示. 我们用 $\{\mathscr{X}^T, \tilde{\mathfrak{C}}, \tilde{\mathbf{P}}_\xi\}$ 表示带有完备测度的空间. 在 $\mathscr{X}^T$ 中引入时间平移算子 S: $u' = Su$，如果 $x'_n = x_{n+1}$，$n\in T$，这里 $u = \{x_n; n\in T\}$，$u' = \{x'_n; n\in T\}$，S 有逆算子 S^{-1}，而且若 $u'' = S^{-1}u$，则 $u'' = \{x''_n, n\in T\}$，$x''_n = x_{n-1}$. 序列 $\xi(t)$ 的平稳性条件意味着对任意柱集 C 有

$$\mathbf{P}_\xi(C) = \mathbf{P}_\xi(SC). \tag{1}$$

因为在柱集上的测度唯一地确定在 $\mathfrak{C}$（从而在它的完备化 $\tilde{\mathfrak{C}}$）上的测度，故(1) 式对任意 $A\in\tilde{\mathfrak{C}}$ 仍成立，即有

$$\mathbf{P}_\xi(A) = \mathbf{P}_\xi(SA), A\in\tilde{\mathfrak{C}}. \tag{2}$$

定义 2 设 $\{\mathscr{U}, \mathfrak{F}, \mu\}$ 是某一测度空间，S 是从 $\{\mathscr{U}, \mathfrak{F}\}$ 到 $\{\mathscr{U}, \mathfrak{F}\}$ 中的可测映象.

变换 S 称做保测的，如果对任意 $A\in\mathfrak{F}$

$$\mu(S^{-1}A) = \mu(A),$$

其中 $S^{-1}A$ 是集 A 的全原象.

映象 S 称做可逆的，如果存在可测变换 S^{-1}，使得 $SS^{-1} = S^{-1}S = I$，这里 I 是恒等映象. 这时把映象 S^{-1} 称为 S 的逆映象. 显然，平稳序列的定义等价于：序列 $\{\xi(t),\ t\in T\}$ 是平稳的，如果 $\mathscr{X}^T$ 中的时间平移算子 S 对测度 $\mathbf{P}_\xi$ 是保测的.

因此，研究平稳序列的问题是研究某测度空间的保测可逆变换(自同构)问题的一种特殊情形. 我们考虑平均值

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(S^k u),\ n\to\infty \tag{3}$$

的渐近性态问题，其中 S^k 是变换 S 的 k 次幂，$f(u)$ 是任意 $\mathfrak{F}$ 可测函数，$\{\mathscr{U}, \mathfrak{F}, \mu\}$ 是某一带有测度 μ 的空间，而且 $\mu(\mathscr{U})\leqslant\infty$. 为了了解这一问题的意义，我们考虑当 $\{\mathscr{U}, \mathfrak{F}, \mu\}$ 就是 $\{\mathscr{X}^T, \tilde{\mathfrak{C}}, \tilde{\mathbf{P}}_\xi\}$ 和 S 是时间平移算子的情形. 设 $\xi_k = \xi(k, u) = x_k$，$f(u) = \chi_B(x_0)$，这里 $\chi_B(x)$ 是集合 $B\in\mathfrak{B}$ 的示性函数，则

$$f(S^k u) = \chi_B(S^k u) = \chi_B(\xi(k))$$

和

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(S^k u) = \frac{\nu_n(B, u)}{n}, \tag{4}$$

这里 $\nu_n(B, u)$ 是序列 $\xi(0), \xi(1), \cdots, \xi(n-1)$ 中其值落在集合 B 中的项数，即 $\nu_n(B, u)$ 是这序列的前 n 项 $\xi(t)$ $(t = 0, 1, \cdots, n-1)$ 落在集合 B 中的频数。因此，上面提出的问题是有关随机变量 $\xi(t)$ 的值落在任意集合 B 中的频率性态问题的一种特殊情形。首先，我们证明，当 $n \to \infty$ 时平均值(3)的极限以概率 1 存在，这命题就是著名的 Birkhoff-Хинчин 定理。

引理 1 若 S 是对测度 μ 保测的，$D \in \mathfrak{F}$，而且 $f(u)$ 是 $\mathfrak{F}$ 可测非负(μ 可积)函数，则

$$\int_{S^{-1}D} f(Su)\,\mu(du) = \int_D f(u)\,\mu(du). \tag{5}$$

证. 如果令 $f(u) = \chi_A(u)$，则(5)式变为等式 $\mu(S^{-1}(A \cap D)) = \mu(A \cap D)$，这对任意 A 和 $D \in \mathfrak{F}$ 真确，因此(5)式对任意 $\mathfrak{F}$ 可测非负函数和 μ 可积函数真确。

下面的引理带有初等算术的性质。设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是实数序列，p 是整数。我们称序列的项 a_k 为 p 标记的，如果在下面的和数序列

$$a_k,\ a_k + a_{k+1}, \cdots,\ a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+p-1}$$

中最少有一个是非负的(当且只当 a_k 是非负时它是 1 标记的)。

引理 2 所有 p 标记的元素之和是非负的。

证. 设 a_{k_1} 是序列中带有最小附标的 p 标记元素，而 $a_{k_1} + a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_1+r}$ $(r \leqslant p-1)$ 是求和项数最少的非负和数。对于 $h < r$ 有 $a_{k_1} + a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_1+h} < 0$，因而 $a_{k_1+h+1} + \cdots + a_{k_1+r} \geqslant 0$，即序列 $a_{k_1}, a_{k_1+1}, \cdots, a_{k_1+r}$ 的所有项都是 p 标记的，而且它们的和数是非负的。对从 a_{k_1+r+1} 开始的序列应用同样的推理。于是整个序列可以分为许多部分，其中每一部分以一组 p 标记的项结尾，而且每一部分的 p 标记元素之和是非负的。整

个序列的 p 标记元素集合等于它的各个部分的 p 标记元素集合之并. 引理得证.

下面的引理是 Birkhoff-Хинчин 定理的证明中最基本的一步.

引理 3 设 $f(u)$ 是 μ 可积函数, S 是从 $\{\mathscr{U},\mathfrak{F}\}$ 到 $\{\mathscr{U},\mathfrak{F}\}$ 中对 μ 保测的可测映象, 又设

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{u:\sum_{k=1}^{n}f(S^{k-1}u)\geqslant 0\right\},$$

则

$$\int_E f(u)\ \mu(du)\geqslant 0. \tag{6}$$

证. 考察序列 $f(u), f(Su),\cdots, f(S^{N+p-1}u)$, 并以 $s(u)$ 表示这序列中所有 p 标记元素之和. 根据引理 2 有 $s(u)\geqslant 0$. 设 $D_k=\{u: f(S^ku)$ 是 p 标记元素$\}$, $\chi_k(u)$ 是集合 D_k 的示性函数. 注意

$$D_0=\left\{u:\sup_{n\leqslant p}\sum_{k=1}^{n}f(S^{k-1}(u))\geqslant 0\right\}$$

和

$$D_k=S^{-1}D_{k-1}, \text{ 对于 } k\leqslant N.$$

因而 $D_k=S^{-k}D_0(k\leqslant N)$, 由此得

$$0\leqslant\int_{\mathscr{U}}s(u)\mu(du)=\int_{\mathscr{U}}\sum_{k=0}^{N+p-1}f(S^ku)\chi_k(u)\ \mu(du)$$

$$=\sum_{k=0}^{N+p-1}\int_{D_k}f(S^ku)\ \mu(du).$$

由引理 1 有

$$\int_{D_k}f(S^ku)\ \mu(du)=\int_{S^{-k}D_0}f(S^ku)\ \mu(du)$$

$$=\int_{D_0}f(u)\mu(du),\ k\leqslant N.$$

故

$$N\int_{D_0}f(u)\mu(du)+\sum_{k=N+1}^{N+p-1}\int_{D_k}f(S^ku)\ \mu(du)\geqslant 0. \tag{7}$$

因为

$$\left|\int_{D_k} f(S^k u)\,\mu(du)\right| \leqslant \int_{\mathscr{U}} |f(S^k u)|\,\mu(du)$$

$$= \int_{\mathscr{U}} |f(u)|\,\mu(du) < \infty,$$

故用N除不等式(7)并令N趋于∞时，我们就得到

$$\int_{D_0} f(u)\,\mu(du) \geqslant 0. \tag{8}$$

集合 $D_0 = D_0(p)$ $(p = 1, 2, \cdots)$ 形成单调上升序列，而且

$$\lim_{p\to\infty} D_0(p) = \bigcup_{p=1}^{\infty} D_0(p) = E.$$

在(8)式取 $p \to \infty$ 时的极限即得(6)式.

引理 4 （极大遍历定理） 若 $f(u)$ 是μ可积的，λ是实数，而

$$E_\lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{u: \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(S^{k-1}u) \geqslant \lambda\right\},$$

则

$$\int_{E_\lambda} f(u)\,\mu(du) \geqslant \lambda\mu(E_\lambda). \tag{9}$$

把引理 3 应用于函数 $f(u) - \lambda\chi_{E_\lambda}(u)$ 就得到本引理的证明.

定理 1 （Birkhoff-Хинчин 定理）设 $\{\mathscr{U}, \mathfrak{F}, \mu\}$ 是测度空间，S 是从 $\{\mathscr{U}, \mathfrak{F}\}$ 到 $\{\mathscr{U}, \mathfrak{F}\}$ 中对μ保测的可测映像，又$f(u)$是任意的μ可积函数. 则在$\mathscr{U}$中μ几乎处处存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(S^k u) = f^*(u) \quad (\mathrm{mod}\,\mu), \tag{10}$$

函数$f^*(u)$是S不变的，即

$$f^*(Su) = f^*(u) \quad (\mathrm{mod}\,\mu), \tag{11}$$

$f^*(u)$还是可积的，而且若$\mu(\mathscr{U}) < \infty$，则

$$\int_{\mathscr{U}} f^*(u)\,\mu(du) = \int_{\mathscr{U}} f(u)\,\mu(du). \tag{12}$$

证. 不失一般性，我们可以假设函数 $f(u)$ 是有限的和非负的. 设

$$g^*(u)=\overline{\lim}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(S^ku),\ g_*(u)=\underline{\lim}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(S^ku).$$

需要证明 $g^*(u)=g_*(u)\ (\mathrm{mod}\mu)$. 令

$$K_{\alpha\beta}=\{u:\ g^*(u)>\beta,\ g_*(u)<\alpha\},\ 0\leqslant\alpha<\beta.$$

我们只须证明 $\mu(K_{\alpha\beta})=0$ (事实上, $\{u:\ g^*(u)>g_*(u)\}=\bigcup\limits_{\substack{\alpha<\beta\\ \alpha,\beta\in R}}K_{\alpha\beta}$, 这里$R$是非负有理数集). 注意到

$$g^*(Su)=\overline{\lim}\left\{\frac{n+1}{n}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}f(S^ku)-\frac{f(u)}{n}\right\}=g^*(u),$$

以及类似的关系式 $g_*(Su)=g_*(u)$. 特别地, 这表示 $S^{-1}K_{\alpha\beta}=K_{\alpha\beta}$, 故可把引理 4 应用于测度空间 $\{K_{\alpha\beta},\mathfrak{S}\cap K_{\alpha\beta},\mu\}$. 于是有

$$\int_{K_{\alpha\beta}}f(u)\,\mu(du)\geqslant\beta\mu(K_{\alpha\beta}).\tag{13}$$

又把引理 4 应用于函数$-f(u)$可得

$$\int_{K_{\alpha\beta}}f(u)\,\mu(du)\leqslant\alpha\mu(K_{\alpha\beta}).\tag{14}$$

因为 $\beta>0$,故由(13)式得 $\mu(K_{\alpha\beta})<\infty$, 但这仅当 $\mu(K_{\alpha\beta})=0$ 时(14)才能成立. 于是证明了极限(10)的存在性$(\mathrm{mod}\mu)$. 令 $f^*(u)=g^*(u)$, 则(10)式成立且函数 $f^*(u)$ 是 S 不变的.

为了证明(12)式,我们令 $A_{kn}=\left\{u:\frac{k}{2^n}\leqslant f^*(u)<\frac{k+1}{2^n}\right\}$.

这时有 $\mathscr{U}=\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty}A_{kn}$, $S^{-1}A_{kn}=\left\{u:\frac{k}{2^n}\leqslant f^*(Su)<\frac{k+1}{2^n}\right\}=A_{kn}$. 把引理 4 应用于集合 A_{kn}, 则对任意 $\varepsilon>0$ 有

$$\int_{A_{kn}}f(u)\,\mu(du)>\left(\frac{k}{2^n}-\varepsilon\right)\mu(A_{kn}).$$

令 $\varepsilon\to0$ 即得不等式

$$\int_{A_{kn}}f(u)\,\mu(du)\geqslant\frac{k}{2^n}\mu(A_{kn}).$$

类似地,我们有 $\int_{A_{kn}}f(u)\,\mu(du)\leqslant\frac{k+1}{2^n}\mu(A_{kn})$, 由此得

$$\left|\int_{A_{kn}} f(u)\,\mu(du) - \int_{A_{kn}} f^*(u)\mu(du)\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\mu(A_{kn}).$$

把这些不等式对所有 k 求和就得到

$$\left|\int_{\mathscr{U}} f(u)\,\mu(du) - \int_{\mathscr{U}} f^*(u)\,\mu(du)\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\mu(\mathscr{U}).$$

注意到当 $\mu(\mathscr{U}) < \infty$ 时 n 的任意性，即得(12)式. 定理证毕.

Birkhoff-Хинчин 定理的某些推论.

推论 1 设 $\mu(\mathscr{U}) < \infty$, $f(u) \in \mathscr{L}_p\{\mathscr{U}, \mathfrak{F}, \mu\}$ 则

$$\int_{\mathscr{U}} \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(S^k u) - f^*(u)\right|^p \mu(du) \to 0, \text{当 } n \to \infty. \quad (15)$$

为了证明这一推论，我们取任一有界函数 $f_0(u)$，并设 $\|f(u) - f_0(u)\|_p = \delta$，其中 $\|f\|_p$ 是 $\mathscr{L}_p\{\mathscr{U}, \mathfrak{F}, \mu\}$ 中元素 f 的范数. 则

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(S^k u) - f^*(u)\right\|_p \leqslant \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} [f(S^k u) - f_0(S^k u)]\right\|_p$$

$$+ \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_0(S^k u) - f_0^*(u)\right\|_p + \|f_0^*(u) - f^*(u)\|_p.$$

根据 Jensen 不等式和引理 1 有

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} [f(S^k u) - f_0(S^k u)]\right\|_p$$

$$= \left\{\int_{\mathscr{U}} \left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (f(S^k u) - f_0(S^k u))\right]^p \mu(d\mu)\right\}^{1/p}$$

$$\leqslant \left\{\int_{\mathscr{U}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |f(S^k u) - f_0(S^k u)|^p \mu(du)\right\}^{1/p}$$

$$= \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\mathscr{U}} |f(u) - f_0(u)|^p \mu(du)\right\}^{1/p} = \delta.$$

利用 Fatou 引理得

$$\|f_0^*(u) - f^*(u)\|_p = \left\{\int_{\mathscr{U}} \lim \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} [f(S^k u) - f_0(S^k u)]\right|^p \mu(du)\right\}^{1/p}$$

$$\leqslant \underline{\lim} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [f(S^k u) - f_0(S^k u)] \right\|_p \leqslant \delta.$$

其次，因为函数 $f_0(u)$ 是有界的，故它的所有平均值都以同样的常数为界. 因此根据 Lebesgue 定理知，在表示式

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_0(S^k u) - f_0^*(u) \right\|_p$$

$$= \left\{ \int_{\mathscr{U}} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_0(S^k u) - f_0^*(u) \right|^p \mu(du) \right\}^{1/p}$$

中取 $n \to \infty$ 的极限时可把极限搬进积分号内. 故这表示式趋于零，从而当 n 足够大时变得小于 δ. 因此

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(S^k u) - f^*(u) \right\|_p < 3\delta, \ n \geqslant n_0 = n_0(\delta),$$

这里的数 δ 可以选得任意小，于是(15)式得证.

定义 3 集合 $A \in \mathfrak{F}$ 称作 S 不变的，如果 $\mu((S^{-1}A) \triangle A) = 0$，这里$\triangle$是集合对称差的符号.

容易验证，所有 S 不变集构成 $\mathfrak{F}$ 可测集的一个 σ 代数. 其次，若 $g(u)$ 是 S 不变函数，则集合 $\{u: g(u) \geqslant c\}$, $\{u: g(u) = c\}$ 是 S 不变的. 另一方面，若 A 是 S 不变集，则 $\chi_A(u)$ 是 S 不变函数. 以 I 表示 S 不变集的 σ 代数. 设 $\mu(\mathscr{U}) = 1$. 我们把$\{\mathscr{U}, \mathscr{F}, \mu\}$ 看作是一个概率空间，并以符号 $\mathbf{E}$ 表示对测度 μ 的积分(数学期望).

推论 2 $f^*(u) = \mathbf{E}\{f(u) | I\} \pmod{\mu}$.

显然，$\mathbf{E}\{f(u)|I\}$ 是 S 不变函数，因此为了证明推论 2，只须验证，对任意有界 S 不变函数 $g(u)$ 有

$$\mathbf{E}g(u)(f^*(u) - \mathbf{E}\{f(u)|I\}) = 0$$

或 $\mathbf{E}(g(u)f^*(u) - g(u)f(u)) = 0$. 然而后者可由(12)式推出，这是因为

$$(g(u)f(u))^* = \lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(S^k u) f(S^k u) = g(u) f^*(u) \pmod{\mu}.$$

遍历的平稳序列 现在我们回来讨论平稳序列.

设 $\{\xi(t),\ t\in T\}$ 是平稳序列，$\{\mathscr{X}^T,\ \mathfrak{C},\ \mathbf{P}\}$ 是它的自然表示.

推论 3 若 f 是 $\{\mathscr{X}^m,\ \mathfrak{B}^m\}$ 中的可测函数，而 $\mathbf{E}\, f(\xi(0), \xi(1),\cdots,\xi(m-1))\neq\infty$,则当 $n\to\infty$ 时以概率 1 有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi(k),\xi(k+1),\cdots,\xi(k+m-1))\to$$

$$\to\mathbf{E}\{f(\xi(0),\xi(1),\cdots,\xi(m-1))\mid I\},$$

这里 I 是 $\mathfrak{F}$ 中对时间平移不变的事件组成的 σ 代数.

我们考虑事件 $A\in\tilde{\mathfrak{C}}$ 和由对 A 作《时间平移》而得到的事件序列：$A, S^{\pm1}A, S^{\pm2}A,\cdots$. 如果 χ_n 是事件 S^nA 的示性函数，则 $\chi_n(n=0,\ \pm1,\ \cdots)$ 构成一平稳随机变量序列，而 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\chi_k$ 是事件 A 发生的频率,这时是根据序列 $\{\xi(t);\ t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ 的一个现实并对时间原点的 $n-1$ 个顺次平移来计算的，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\chi_k=\frac{\nu_n(A)}{n}.$$

根据 Birkhoff-Хинчин 定理知,以概率 1 存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\nu_n(A)}{n}=\pi(A)=\mathbf{E}\{\chi_A\mid I\}\ \text{和}\ \mathbf{E}\pi(A)=\mathbf{P}(A).$$

可以把 $\pi(A)$ 称为事件 A 的经验概率，它是一个随机变量并按无穷序列 $\{\xi(t),\ t=0,\ 1,\ 2,\cdots\}$ 的一个现实来确定. 人们自然会提出这样的问题：什么时候经验概率 $\pi(A)$ 与偶然性无关而且就等于 $\mathbf{P}(A)$?

具有这种性质的平稳序列称作**遍历的**.

定义 4 设 $\{\mathfrak{F},\ \mathscr{F},\ \mu\}$ 是概率空间，S 是从 $\mathscr{U}$ 到其自身的保测变换，$\nu_n(A)=\nu_n(A,\ u)$ 是序列 $\{u,\ Su,\cdots,\ S^{n-1}u\}$ 落在集合 A 中的项数. 变换 S 称作**遍历的**,如果对任意 $A\in\mathfrak{F}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\nu_n(A,u)}{n}=\mu(A)\qquad(\mathrm{mod}\,\mu).$$

变换 S 称做**度量传递的**,如果任意 S 不变集有测度 0 或 1.

定理 2 为使概率空间 $\{\mathscr{U}, \mathfrak{F}, \mu\}$ 中的变换 S 是遍历的，下列每一条件都是充分必要条件：

a) S 是度量传递的；

b) 对任意 $\mathfrak{F}$ 可测 μ 可积函数 $f(u)$，函数

$$f^*(u) = \lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(S^k u)$$

以概率 1 是常数.

证. 设 A 是 S 不变集，$0 < \mu(A) < 1$. 集合 $A, SA, S^2A, \cdots$ 相互间只差一个零测集，而且 $\nu_n(A) = n\chi_A(u)$ (modμ). 因而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\nu_n(A)}{n}$ 不可能是常数 (modμ). 因此从遍历性可推出度量传递性. 现设 S 是度量传递的，因为函数 $f^*(u)$ 是 S 不变的，故集合

$$S^{-1}\{u: f^*(u) < x\} = \{u: f^*(Su) < x\}$$

和 $\{u: f^*(u) < x\}$ 的对称差之 μ 测度为0. 由此推得，对任意实数 x, $\mu\{u: f^*(u) < x\} = 0$ 或 1，即 $f^*(u) =$ 常数(modμ)，于是就从 a) 推出 b). 最后，遍历性条件是条件 b) 当 $f(u)$ 是某一事件的示性函数时的一种特殊情形.

我们现在给出遍历性的一些推论.

设 $\{\mathscr{X}^T, \mathfrak{C}, \mathbf{P}\}$ 是平稳序列 $\xi(n)$ 的自然表示，S 是 $\mathscr{X}^T$ 中的时间平移变换，$\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_2\{X^T, \tilde{\mathfrak{C}}, \mathbf{P}\}$.

由定理 1 的推论 1 得到，对 $\mathscr{L}_2$ 中的任意函数 $f(u)$ 和 $g(u)$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathscr{X}^T} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(S^k u)\, g(u)\, \mathbf{P}(du)$$

$$= \int_{\mathscr{X}^T} f^*(u)\, g(u)\, \mathbf{P}(du). \tag{16}$$

如果变换 S 是遍历的，我们就说序列 $\{\xi(n), n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 是遍历的. 令 $g(u) = \eta$, $f(S^k u) = \zeta_k$, 又设原来的平稳序列 $\{\xi(n), n = 0, \pm 1, \cdots\}$是遍历的，则 (16) 式变成

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\,\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\zeta_k\eta=\mathbf{E}\,\zeta_0\,\mathbf{E}\eta. \tag{17}$$

设 $g(u)=\chi_B(u)$, $f(u)=\chi_A(u)$, A 和 $B\in\mathfrak{C}$. 由(17)式得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}(S^{-k}A\cap B)=\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) \tag{18}$$

或(当 $\mathbf{P}(B)\neq 0$ 时)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}(S^{-k}A\,|\,B)=\mathbf{P}(A), \tag{19}$$

这里 $\mathbf{P}(S^{-k}A\,|\,B)$ 是当给定 B 时事件 $S^{-k}A$ 的条件概率.

引理 5 对于任意 A, $B\in\mathfrak{C}$ 的等式(18)(或(19))等价于遍历性.

只须证明(18)式蕴涵遍历性. 设 C 是任一 S 不变事件. 在(18)中令 $A=B=C$, 则(18)式变为 $\mathbf{P}(C)=\mathbf{P}^2(C)$, 因此 $\mathbf{P}(C)=0$ 或 1. 根据定理 2 即得本引理.

等式(19)有如下的概率意义: 设 A 和 B 是 $\mathfrak{C}$ 中两事件, 若在时间上将事件 A 无限地平移, 则按平均来说, 事件 $S^{-n}A$ 和任意事件 $B(\in\mathfrak{C})$ 都是独立的. 条件(19)可以用更严的要求

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(S^{-n}A\,|\,B)=\mathbf{P}(A) \tag{20}$$

来代替. 条件(20)称作**混合条件**, 它是等式

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\,\zeta_n\eta=\mathbf{E}\,\zeta_0\,\mathbf{E}\eta \tag{21}$$

的特殊情形, 这里 $\zeta_n=f(S^nu)$, $\eta=g(u)$, $f(u)$ 和 $g(u)$ 是 $\mathscr{L}_2$ 中任意函数. 另一方面, 从(20)式可推出对于简单函数 f 和 g 的(21)式. 当用 $\mathscr{L}_2$ 中收敛于 $f(u)$ 和 $g(u)$ 的简单函数序列 $f_n(u)$ 和 $g_n(u)$ 分别逼近 $f(u)$ 和 $g(u)$ (它们是 $\mathscr{L}_2$ 中任意两个函数)时, 我们不难看出, 混合条件等价于条件(21). 另一方面, 条件(21)只须对某函数集合进行验证, 这集合的函数所张成的线性包要在 $\mathscr{L}_2$ 中处处稠密. 我们可以选取所有柱集的示性函数作这样的函数集合.

考虑使得 $\mathbf{E}|\xi_n|<\infty$ 的独立同分布随机变量序列 $\{\xi_n,\ n=$

$0, \pm 1, \cdots\}$. 这样的序列是平稳的. 根据 Birkhoff-Хинчин 定理有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k = \xi^*(\text{mod}\mathbf{P}),\ \mathbf{E}\,\xi^* = \mathbf{E}\xi.$$

显然,随机变量 ξ^* 独立于任意有限多个变量 $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_p$, 因此 ξ^* 是对 $\overline{\lim}\,\sigma\{\xi_k\}$ 可测的,而且由零-壹律知,它是一常数,即$\xi^* = c(\text{mod}\mathbf{P})$, $c = \mathbf{E}\,\xi$. 于是我们就得到下面的定理.

定理 3 (强大数定律) 若 $\{\xi_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 是独立同分布的随机变量序列且 $\mathbf{E}|\xi_n| < \infty$,则以概率 1 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k = \mathbf{E}\,\xi_0. \tag{22}$$

这定理是独立同分布随机变量序列的遍历性的推论. 但是,我们能够证明更强的结果,即 $\mathscr{X}^T$ 中的时间平移算子是关于 $\mathscr{X}^T$ 中由独立随机变量序列诱导的测度的混合. 这结论可从一个更一般的论断推出. 设 $\{\xi_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 是 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 中随机元的平稳序列, $\mathfrak{F}_n$ 是随机元 $\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots$ 产生的 σ 代数, $\mathfrak{F}_\infty = \bigcap_n \mathfrak{F}_n = \overline{\lim}\,\mathfrak{F}_n$. 如果 σ 代数 $\mathfrak{F}_\infty$ 只含概率为 0 或 1 的事件,我们就说零-壹律适用于序列 $\{\xi_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$.

定理 4 若序列 $\{\xi_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 满足零-壹律,则时间平移变换是一混合.

令 $\zeta_{-n} = \mathbf{P}\{B|\mathfrak{F}_n\}$. 序列 $\{\zeta_n, \mathfrak{F}_n, n = \cdots, -k, -k+1, \cdots, 0\}$ ($\mathfrak{F}_{-n} = \mathfrak{F}_n$) 是鞅 (参阅第 2 章 § 2, 定理 4), 而且 $\mathbf{P}\{B|\mathfrak{F}_\infty\}$ 是它的左封闭元素. 因为 σ 代数 $\mathfrak{F}_{-\infty}$ 是平凡的, 故 $\mathbf{P}\{B|\mathfrak{F}_{-\infty}\} =$ 常数 $= \mathbf{P}(B)$ $(\text{mod}\mathbf{P})$. 根据鞅的收敛定理 (第 2 章 § 2, 定理 1 的推论) 知, 以概率 1 有 $\lim \mathbf{P}\{B|\mathfrak{F}_n\} = \mathbf{P}(B)$. 设 A 是在坐标 $n = 0, 1, 2, \cdots$上的柱集, 则 $S^{-n}A \in \mathfrak{F}_n$, 因此当 $n \to \infty$ 时

$$\mathbf{P}(B\cap S^{-n}A) = \int_{S^{-n}A}\mathbf{P}\{B|\mathfrak{F}_n\}\,\mathbf{P}(du)$$
$$\sim \mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(S^{-n}A) = \mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(A),$$

显然，上式对任意柱集 A 都成立．如同前面所指出那样，由此可得(21)式．定理证毕．

相关系数趋于零的平稳 Gauss 序列是满足混合条件的过程的另一个例子．设 $\{\xi_n; n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 是平稳 Gauss 序列，$\mathbf{E}\xi_n = m$，$\mathbf{E}(\xi_n - m)(\xi_0 - m) = R_n$；$f(u) = f(x_0, x_1, \cdots, x_p)$ 和 $g(u) = g(x_0, x_1, \cdots, x_p)$ 是充分光滑的 $p+1$ 元有界函数，它们有绝对可积的 Fourier 变换 $f^*(\lambda_0, \cdots, \lambda_p)$ 和 $g^*(\lambda_0, \cdots, \lambda_p)$，则

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E} f(\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots, \xi_{n+p}) g(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_p) \\
&= \mathbf{E}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\sum_{k=0}^{p} \lambda_k \xi_{n+k} + \sum_{k=0}^{p} \mu_k \xi_k\right)} \\
&\times f^*(\lambda_0, \cdots, \lambda_p) g^*(\mu_0, \cdots, \mu_p) d\lambda_0 \cdots d\lambda_p d\mu_0 \cdots d\mu_p \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left\{\sum_{k,r=0}^{p} R_{k-r}(\lambda_k \lambda_r + \mu_k \mu_r) + \sum_{k,r=0}^{p} R_{n+k-r} \lambda_k \mu_r\right\}} \\
&\times f^*(\lambda_0, \cdots, \lambda_p) g^*(\mu_0, \cdots, \mu_p) d\lambda_0 \cdots d\lambda_p d\mu_0 \cdots d\mu_p.
\end{aligned}
$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$，则在上式取 $n \to \infty$ 时的极限就得到

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} f(\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots, \xi_{n+p}) g(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_p) \\
&= \mathbf{E} f(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_p) g(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_p). \qquad (23)
\end{aligned}
$$

因为我们已经证明了使上式成立的函数（f 与 g）类在 $\mathscr{L}_2$ 中处处稠密，故(23)式对 $\mathscr{L}_2$ 中任意函数 f 与 g 都成立．

于是我们就证明了下面的定理．

定理 5 相关系数 $R_n \to 0$（当 $n \to \infty$）的平稳 Gauss 序列满足混合条件．

现在给出有关 Марков 链遍历性的某些推论和注记． Марков 链遍历性的一般理论将在第 II 卷中讨论．

我们讨论具有可数状态的不可约 Марков 链．当且仅当这样的链是正常返时它有不变的初始分布(§5 定理 15 的推论 2)，但这又等价于方程组

$$\sum_k x_k p(k, j) = x_j$$

有非平凡的绝对可和解. 若这方程组存在满足条件 $\sum_k x_k = 1$ 的解,则这个解有如下形式:

$$x_k = v_k = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} p^{(n)}(j, k). \tag{24}$$

如果这链是非周期的,则

$$x_k = v_k = \lim_{n\to\infty} p^{(n)}(j, k)$$

(§5 定理 15). 假设链是不可约的和正常返的,这种链的不变初始分布是唯一的,对应于它的平稳 Марков 过程是 $\{\xi(t), t = 0, \pm 1, \cdots\}$,这过程的遍历性条件可以表为

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{P}\{\xi(1) = i_1, \xi(2) = i_2, \cdots, \xi(s) = i_s, \xi(n+1) = j_1, \cdots, \xi(n+r) = j_r\} = \mathbf{P}\{\xi(1) = i_1, \cdots, \xi(s) = i_s\}\mathbf{P}\{\xi(1) = j_1, \cdots, \xi(r) = j_r\}. \tag{25}$$

事实上,一方面这条件是(18)式的一种特殊情形. 另一方面,容易看出,从(25)式可推出对于 $\mathscr{A}^T$ 中任意柱集 A 和 B 的(18)式. 其次,条件(25)等价于

$$\lim_{N\to\infty} v_i \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} p^{(n)}(i, j) = v_i v_j,$$

这就是等式 (24).

于是有如下的定理.

定理 6 对应于不可约正常返 Марков 链的不变初始分布的平稳过程是遍历的.

注. 类似地可看出,平稳 Марков 过程的混合条件归结为要求 $\lim_{n\to\infty} p^{(n)}(j, k) = v_k$. 因此对应于非周期正常返 Марков 链的平稳过程具有混合性质.

第三章 随 机 函 数

§1. 某些随机函数类

Gauss 随机函数

定义 1 实随机函数 $\xi(x)(x\in X)$ 称作 Gauss 随机函数，如果对于任意整数 $n\geqslant 1$ 和任意 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$，$x_k\in X$，序列$\{\xi(x_1),\xi(x_2),\cdots,\xi(x_n)\}$ 有联合正态分布.

由定义得知，这分布的特征函数形如

$$J(x_1,x_2,\cdots,x_n,u^1,\cdots,u^n)$$
$$=\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}u^k a_k-\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{n}b_{kr}u^k u^r\right\},\tag{1}$$

这里常数 a_k 和 b_k 满足

$$a_k=\mathbf{E}\xi(x_k),\quad b_{kr}=\mathbf{E}(\xi(x_k)-a_k)(\xi(x_r)-a_r).\tag{2}$$

由此看出，Gauss 随机函数的所有边沿分布由两个实函数——平均值 $a(x)$ 和相关函数 $b(x_1,x_2)$ 确定，这里

$$a(x)=\mathbf{E}\xi(x),\quad b(x_1,x_2)=\mathbf{E}(\xi(x_1)-a(x_1))(\xi(x_2)-a(x_2)).$$

相关函数 $b(x,y)$ 有如下性质:

1) $b(x,y)=b(y,x)$,

2) 对于任意 n，任意实数 u_k 和点 $x_k\in X$

$$\sum_{k,r=1}^{n}b(x_k,x_r)u_k u_r\geqslant 0.$$

具有这些性质的实函数称作 X^2 上的正定核*).

---

*) 正定核(положительно определенное ядро)及非负定核(неотрицательно определенное ядро)均按原文译出，然而，文中两者常是同义的，而此处按习惯称为非负定核会更合适. ——译者注

这定义等价于要求对任意 x_r 和 $x_k \in X$，矩阵 $\|b(x_k, x_r)\|(k, r = 1, 2, \cdots, n)$ 是实对称的和非负定的.

我们指出，对于任意集合 X，实函数 $a(x)(x \in X)$ 和 X^2 上的非负定核 $b(x_1, x_2)$，存在一 Gauss 随机函数，使得 $a(x)$ 是它的平均值，$b(x_1, x_2)$ 是它的相关函数. 为了证明这一论断，我们考虑一分布族 $\{p_{x_1 \cdots x_n}(\cdot), n = 1, 2, \cdots, x_k \in X\}$，这些分布的特征函数由(1)式给出. 不难验证，这分布族满足相容性条件. 余下只须应用 Колмогоров 定理(第 1 章 § 4 定理 2).

可以类似地定义带有实分量的向量值 Gauss 过程. 设 $\xi(x)$ $(x \in X)$ 是取值于 m 维空间 $\mathscr{R}^m$ 的随机函数. 它称作 Gauss 的，如果对任意 $n \geqslant 1$ 和任意 $x_k \in X$，序列 $\{\xi(x_1), \xi(x_2), \cdots, \xi(x_n)\}$ 的分量的联合分布是正态的. 相应的特征函数形如

$$J(x_1, \cdots, x_n, u_1^{(1)}, \cdots, u_m^{(1)}, \cdots, u_1^{(n)}, \cdots, u_m^{(n)})$$

$$= \exp\left\{i \sum_{r=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} u_r^{(k)} a^{(r)}(x_k)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{r,s=1}^{m} b^{rs}(x_k, x_l) u_r^{(k)} u_s^{(l)}\right\}.$$

为了简化这表示式，我们引入取值于 $\mathscr{R}^m$ 的向量 $u^{(k)} = (u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \cdots, u_m^{(k)})$，$a(x) = (a^1(x), \cdots, a^m(x))$ 及元素为 $b^{rs}(x_1, x_2)$ $(r, s = 1, 2, \cdots, m)$ 的矩阵 $b(x_1, x_2)$. 于是上面的表示式可改写为

$$J(x_1, \cdots, x_n, u^{(1)}, \cdots, u^{(n)})$$

$$= \exp\left\{i \sum_{k=1}^{n} (u^{(k)}, a(x_k)) - \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} (b(x_k, x_l) u^{(l)}, u^{(k)})\right\}.$$

其中向量函数 $a(x)$ 是任意的，实矩阵函数 $b(x_1, x_2)$ 应是对称的，而且要满足条件：对任意整数 $n \geqslant 1$，任意 $x_k \in X$ 和 $u^{(k)} \in \mathscr{R}^m$ 有

$$\sum_{k,l=1}^{n} (b(x_k, x_l) u^{(l)}, u^{(k)}) \geqslant 0. \tag{3}$$

逆命题也是显然的：对于任意取值于 $\mathscr{R}^m$ 中的函数 $a(x)$ 和

满足条件(3)的矩阵函数 $b(x_1,x_2)$，存在一 Gauss 随机函数 $\xi(x)=(\xi^1(x),\cdots,\xi^m(x))$，使得

$$a^{(k)}(x)=\mathbf{E}\xi^k(x),$$

$$b^{rs}(x_1,x_2)=\mathbf{E}(\xi^r(x_1)-a^r(x_1))(\xi^s(x_2)-a^s(x_2)).$$

在某些问题中，人们有兴趣于 Gauss 函数的矩. 这些矩可以根据特征函数的级数展式得到. 我们只限于讨论纯量随机函数的中心矩. 设

$$a(x)=0,\ u=(u^{(1)},u^{(2)},\cdots,u^{(n)}),$$

$$B=\|b(x_k,x_r)\|,\ k,r=1,\cdots,n.$$

则

$$J(x_1,x_2,\cdots,x_n,tu)=e^{-\frac{t^2}{2}(Bu,u)}$$

$$=1-\frac{t^2}{2}(Bu,u)+\frac{t^4}{2!2^2}(Bu,u)^2+\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{t^{2n}}{2^n n!}(Bu,u)^n+\cdots,$$

由此得

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^n u^{(k)}\xi(x_k)\right)^{2n}=(2n-1)!!(Bu,u)^n \tag{4}$$

和

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^n u^{(k)}\xi(x_k)\right)^{2n-1}=0.$$

我们引入 n 点矩函数

$$m_{j_1j_2\cdots j_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\mathbf{E}[\xi(x_1)]^{j_1}[\xi(x_2)]^{j_2}\cdots[\xi(x_n)]^{j_n}.$$

$j_1+j_2+\cdots+j_n$ 称作矩函数的阶. 奇数阶的矩函数等于零:

$$m_{j_1j_2\cdots j_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\ 对\ \sum_1^n j_k=2s-1.$$

(4)式可以写成如下的形式:

$$m_{j_1j_2\cdots j_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\partial^{2n}}{\partial u_1^{j_1}\partial u_2^{j_2}\cdots\partial u_n^{j_n}}\frac{1}{2^n n!}(Bu,u)^n. \tag{5}$$

二阶矩函数就是相关函数

$$m_{11}(x_1,x_2)=b(x_1,x_2),\ \ m_2(x)=m_{11}(x,x)=b(x,x).$$

四阶矩函数有如下的形式:

$$m_4(x)=3b^2(x,x),\ \ m_{22}(x_1,x_2)=2b^2(x_1,x_2)$$

$$m_{31}(x_1,x_2)=3b(x_1,x_1)b(x_1,x_2),$$

$$m_{211}(x_1,x_2,x_3)=b(x_1,x_1)b(x_2,x_3)+2b(x_1,x_2)b(x_1,x_3),$$

$$\begin{aligned}&m_{1111}(x_1,x_2,x_3,x_4)\\&\quad=b(x_1,x_2)b(x_3,x_4)+b(x_1,x_3)b(x_2,x_4)\\&\qquad+b(x_1,x_4)b(x_2,x_4).\end{aligned}$$

在一般情形中有如下的关系式

$$m_{j_1j_2\cdots j_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\prod b(x_p,x_q). \tag{6}$$

这公式的结构可描述如下：将点 $x_1,\cdots,x_n$ 依次写成一序列，其中 x_k 写 j_k 次（j_k 是 x_k 的阶）. 然后把写出来的序列分划成任意的偶对. (6)式右端的乘积是对这分划的所有偶对取的，而求和是对所有分划取的(只是元素排列不同的偶对看作是一样的). 这论断可从(5)式直接推出.

在许多问题中要考虑复值 Gauss 随机函数. 它们的定义和一般的实向量值 Gauss 函数有些不同. 我们将只讨论取值于 $\mathscr{Z}^1$ 的函数$\zeta(x)=\xi(x)+i\eta(x)$,这里 $\xi(x)$ 和 $\eta(x)$ 是实的.

定义 2 随机函数 $\{\zeta(x),x\in X\}$ 称作复 Gauss 随机函数，如果实向量函数 $\{((\xi(x)),\eta(x),x\in X\}$ 是 Gauss 的，而且对任意 x, $y\in X$ 有 $\mathbf{E}(\zeta(x)-a(x))(\zeta(y)-a(y))=0, a(x)=\mathbf{E}\zeta(x)$.

不失一般性可假设 $a(x)=0$. 不难验证，条件$\mathbf{E}\,\zeta(x)\zeta(y)=0$ 等价于条件

$$\mathbf{E}\xi(x)\xi(y)=\mathbf{E}\eta(x)\eta(y),\ \ \mathbf{E}\xi(x)\eta(y)=-\mathbf{E}\xi(y)\eta(x). \tag{7}$$

另一方面，如果等式(7)成立，则

$$b(x,y)=\mathbf{E}\zeta(x)\overline{\zeta(y)}=2(b_{11}(x,y)-ib_{12}(x,y)), \tag{8}$$

其中 $b_{11}(x,y)=\mathbf{E}\xi(x)\xi(y), b_{12}(x,y)=\mathbf{E}\xi(x)\eta(y)$. 特别地，由条件(7)可得 $b_{12}(x,x)=\mathbf{E}\xi(x)\eta(x)=0$, 又因为 $(\xi(x),\ \eta(x))$ 有联合 Gauss 分布，故变量 $\xi(x)$ 和 $\eta(x)$ 是独立的. 据此不难验

证，若令 $\zeta(x)=\rho(x)e^{i\varphi(x)}$，则 $\rho(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是独立的，$\varphi(x)$ 有 $(-\pi,\pi)$ 上的均匀分布，而 $\rho(x)$ 有由

$$\frac{u}{\sigma^2(x)}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2(x)}},\ u>0,\ \sigma^2(x)=\mathbf{D}\xi(x)=b_{11}(x,x)$$

给出的分布密度.

在(8)式中 $b_{11}(x,y)$ 是非负定核，而 $b_{12}(x,y)$ 具有性质 $b_{12}(x,y)=-b_{12}(y,x)$. 利用这一事实不难验证，由(8)式定义的函数 $b(x,y)$（其中 $b_{11}(x,y)$ 和 $b_{12}(x,y)$ 是任意具有这性质的函数）满足下面的关系：对于任意 $n, x_k\in X$ 和任意复数 Z_k，

$$\sum_{k,r=1}^{n} b(x_k,x_r)Z_k\bar{Z}_r\geqslant 0.$$

具有这个性质的函数称作 X^2 上的正定核.

定理 1 对于任意正定核 $b(x,y)(x,y\in X)$，恒存在复 Gauss 随机函数 $\zeta(x)$，使得 $\mathbf{E}\zeta(x)=0$ 和 $\mathbf{E}\zeta(x)\overline{\zeta(y)}=b(x,y)$.

为了证明这定理，我们引入实的二阶矩阵函数 $B(x,y)=\|b_{ik}(x,y)\|(i,k=1,2)$，其中

$$b_{11}(x,y)=b_{22}(x,y)=\frac{b'(x,y)}{2},$$

$$b_{12}(x,y)=-b_{21}(x,y)=-\frac{1}{2}b''(x,y),$$

这里 $b'(x,y)=\operatorname{Re}b(x,y)$，$b''(x,y)=\operatorname{Im}b(x,y)$. 因为 $b(x,y)$ 是正定核，故 $b(x,y)=\overline{b(y,x)}$，由此得 $b_{11}(x,y)=b_{11}(y,x)$，$b_{12}(x,y)=-b_{12}(y,x)$. 我们来构造具有相关矩阵 $B(x,y)$ 的二维 Gauss 随机函数 $(\xi(x),\eta(x))$. 根据前面的注记知，$\zeta(x)=\xi(x)+i\eta(x)$ 是复 Gauss 随机函数，而且

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,\zeta(x)\overline{\zeta(y)}&=2(b_{11}(x,y)-ib_{12}(x,y))\\&=b'(x,y)+ib''(x,y)=b(x,y).\end{aligned}$$

为什么 Gauss 随机函数在实际问题中起着重要的作用呢？对

此我们可以阐明如下：在很一般的条件下，大量独立而又是很小的（从量的角度来说）随机函数之和近似地是一 Gauss 随机函数，这时单个分量的概率性质并不起什么作用．这就是所谓正态相关定理，它是中心极限定理在多维情形的推广．下面给出这定理的一种表达方式．

设给定了一个二重随机函数序列 $\{\alpha_{nk}(x);\ x\in X\}$，$k=1,2,\cdots,m_n, n=1,2,\cdots$．令

$$\eta_n(x)=\sum_{k=1}^{m_n}\alpha_{nk}(x).$$

考虑 $\alpha_{nk}(x)$ 的"截尾"变量和它们的矩

$$\alpha_{nk}^{\varepsilon}(x)=\chi_{\varepsilon}(\alpha_{nk}(x))\alpha_{nk}(x),\quad a_{nk}^{\varepsilon}(x)=\mathbf{E}\alpha_{nk}^{\varepsilon}(x),$$
$$b_{nk}^{\varepsilon}(x_1,x_2)=\mathbf{E}[\alpha_{nk}^{\varepsilon}(x_1)-a_{nk}^{\varepsilon}(x_1)][\alpha_{nk}^{\varepsilon}(x_2)-a_{nk}^{\varepsilon}(x_2)],$$

其中 $\varepsilon>0$，而 $\chi_{\varepsilon}(x)$ 是区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 的示性函数．

定理 2 设对每一 n，函数 $\alpha_{n1}(x),\alpha_{n2}(x),\cdots,\alpha_{nm_n}(x)$ 相互独立并且满足条件：

1）对任意 $\varepsilon>0$

$$\sum_{k=1}^{m_n}\mathbf{P}\{|\alpha_{nk}(x)|>\varepsilon\}\to 0,\text{当 } n\to\infty;$$

2）对某一 $\varepsilon=\varepsilon_0=\varepsilon_0(x)>0$，当 $n\to\infty$ 时有

$$\sum_{k=1}^{m_n}a_{nk}^{\varepsilon_0}(x)\to a(x),\sum_{k=1}^{m_n}b_{nk}^{\varepsilon_0}(x_1,x_2)\to b(x_1,x_2).\tag{9}$$

则当 $n\to\infty$ 时，随机函数 $\eta_n(x)$ 的边沿分布弱收敛于数学期望为 $a(x)$ 和相关函数为 $b(x_1,x_2)$ 的 Gauss 随机函数的对应边沿分布．

独立增量过程 设 T 是有限或无穷的左闭区间，$a=\min T>-\infty$．

定义 3 取值于 $\mathscr{R}^m$ 的随机过程 $\{\xi(t),\ t\in T\}$ 称作**独立增量过程**，如果对任意 $n,t_k\in T,t_1<t_2<\cdots<t_n$，随机变量 $\xi(a)$，$\xi(t_1)-\xi(a),\cdots,\xi(t_n)-\xi(t_{n-1})$ 相互独立．向量 $\xi(a)$ 称作**过程的初始状态（值）**，它的分布则称作**过程的初始分布**．

为了给定一广义的独立增量过程，只须给定初始分布 $\mathbf{P}_0(B)$ 和分布族 $P(t,h,B)(t \geq a,\ h > 0, B \in \mathfrak{B}^m)$，这里 $\mathfrak{B}^m$ 是 $\mathscr{R}^m$ 中 Borel 集的 σ 代数，$P(t,h,B)$ 是向量 $\xi(t+h)-\xi(t)$ 的分布。事实上，如果给定了这些分布，则向量 $\xi(t_1),\xi(t_2),\cdots,\xi(t_n)$ 的任意联合分布由下式唯一地确定

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n}\{\xi(t_k)\in B_k\}\right)$$

$$=\int_{B_0}P_0(dy_0)\int_{B_1-y_0}P(a,t_1-a,dy_1)\int_{B_2-(y_0+y_1)}P(t_1,t_2-t_1,dy_2)$$

$$\cdots\int_{B_n-(y_0+\cdots+y_{n-1})}P(t_{n-1},t_n-t_{n-1},dy_n). \tag{10}$$

这里 $B-z$ 表示集合 $\{x:x=y-z,y\in B\}$。初始分布 $\mathbf{P}_0(B)$ 可以任意选取。另一方面，不能保证任一给定的分布族 $P(t,h,B)$ 都对应一独立增量过程。

为了使得给定的分布族 $P(t,h,B)$ 对应一独立增量过程，必须且只须 $P(t,h,B)$ 有如下的性质：对任意 n 和任意 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=t+h$，$P(t,h,B)$ 是独立随机向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 之和的分布，其中 ξ_k 有分布 $P(t_{k-1},t_k-t_{k-1},B)$。

事实上，若满足这条件，则分布族(10)满足相容性条件。因此，由 Колмогоров 定理知，存在具有有限维分布(10)的随机过程。而这些分布的形式表明过程有独立增量。

利用特征函数来研究独立增量是方便的。设

$$J(t,h,u)=\int_{\mathscr{R}^m}e^{i(u,x)}P(t,h,dx).$$

函数 $J(t,h,u)$ 称作独立增量过程的特征函数，这函数完全确定差

$$\xi(t_1)-\xi(a),\xi(t_2)-\xi(t_1),\cdots,\xi(t_n)-\xi(t_{n-1}) \tag{11}$$

的联合分布。事实上，向量序列(11)的联合分布的特征函数 $J(t_1,t_2,\cdots,t_n,u^1,u^2,\cdots,u^n)$ 等于

$$J(t_1,t_2,\cdots,t_n,u^1,u^2,\cdots,u^n)=\prod_{k=1}^{n}J(t_{k-1},\Delta t_k,u_k),$$

$$\Delta t_k=t_k-t_{k-1},\ t_0=a.$$

因此，为了给定一个广义独立增量过程，除了 $\mathbf{P}_0(B)$ 之外，只须给定 $J(t,h,u)$. 上面叙述的关于 $P(t,h,B)$ 应满足的充分必要条件表明，特征函数 $J(t,h,u)$ 作为区间 $[t,t+h)$ 的函数应当是可乘的:

$$J(t,h_1+h_2,u)=J(t,h_1,u)J(t+h_1,h_2,u).$$

这条件本身是使得 $J(t,h,u)$ 为一独立增量过程的特征函数的充分必要条件.

定义 4 独立增量过程称作齐次的，如果差 $\xi(t+h)-\xi(t)$ 有不依赖于 t 的分布，即 $P(t,h,B)=P(h,B)$. 齐次过程称作随机连续的，如果对任意 $\varepsilon>0$ 和球 $S_\varepsilon=\{x:|x|<\varepsilon\}$ 有

$$\lim_{h\to 0}P(h,\bar{S}_\varepsilon)=0.$$

关于随机连续性的条件及其意义可参看 § 2. 如果齐次过程是随机连续的，则对任意 t，差 $\xi(t+h)-\xi(t)$ 依概率收敛于零，因此 $\xi(t+h)-\xi(t)$ 的分布弱收敛于零(当 $h\downarrow 0$ 时). 根据分布和它们的特征函数之间对应的连续性推知，随机连续性等价于下述性质：当 $h\downarrow 0$ 时，在任意有界区域 $|u|\leqslant N$ 中，一致地有 $J(h,u)\to 1$.

下面我们指出随机连续的齐次独立增量过程的特征函数的一些性质.

a) 齐次独立增量过程的特征函数满足方程

$$J(h_1+h_2,u)=J(h_1,u)J(h_2,u). \tag{12}$$

特别，对任意整数 n 有

$$J(nh,u)=[J(h,u)]^n.$$

b) 齐次的随机连续过程的特征函数 $J(h,u)$ 处处不等于零.

事实上，对任意 u 人们能够找到 t_0，使得当 $0<h\leqslant t_0$ 时 $|J(h,u)|\geqslant\frac{1}{2}$. 若 t 是任意的且 $t=t_0(n+\theta)$，这里 $0\leqslant\theta<1$，则 $J(t,u)=J(t_0n,u)J(t_0\theta,u)=[J(t_0,u)]^n\times J(t_0\theta,u)$，因此 $|J(t,u)|\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. 因为当 $h\downarrow 0$ 时在任一个球 $|u|\leqslant N$ 中一致地有

$J(h,u) \to 1$，故在区域 $t \in [0,h]$，$|u| \leqslant N, h = h(N)$ 中可定义一单值函数 $g_1(t,u) = \ln J(t,u)$，而且这函数是在所讨论的区域内的二元连续函数．由(12)式推得，$g_1(t,u)$ 满足方程

$$g_1(t_1+t_2,u) = g_1(t_1,u) + g_2(t_2,u), |u| \leqslant N,$$
$$t_i > 0, \ t_1 + t_2 \leqslant h.$$

因此 $g_1(t,u) = tg(u)$ 且 $J(t,u) = e^{tg(u)}$．容易验证，上式应对所有的 t 和 u 都成立．事实上，若这等式对给定的 u 和所有的 $t \leqslant h_0, t > 0$ 成立，则对任意 t 有

$$J(t,u) = \left[J\left(\frac{t}{n},u\right)\right]^n = \left[e^{\frac{t}{n}g(u)}\right]^n = e^{tg(u)}, \text{ 当 } n > \frac{t}{h_0},$$

因此

$$J(t,u) = e^{tg(u)}, \tag{13}$$

这里 $g(u)$ 是一单值连续函数．

这个简单的结果完全刻划出特征函数 $J(t,u)$ 对 t 的依赖关系．显然，形如(13)的特征函数满足条件(12)．剩下就是阐明函数 $g(u)$ 的结构．从上述得知，$g(u)$ 可以是任一使得 $e^{tg(u)}$（对任意 t）是某一分布的特征函数的函数．由(13)式推得

$$g(u) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{J(t,u)-1}{t}, \tag{14}$$

而且在每一个有界球 $|u| \leqslant N (0 < N < \infty)$ 内收敛是一致的．

定理 3 设 $J(t,u)(t > 0, u \in \mathscr{R}^m)$ 是一族特征函数，使得在任意一个球 $|u| \leqslant N (N > 0)$ 内极限 (14) 一致地存在．则存在 $\{\mathscr{R}^m, \mathfrak{B}^m\}$ 中的一个有限测度 $\Pi(B)$，$\mathscr{R}^m$ 中的一个非负定算子 b 和向量 a，使得，

$$g(u) = i(a,u) - \frac{1}{2}(bu,u)$$
$$+ \int_{\mathscr{R}^m}\left[e^{i(u,z)} - 1 - \frac{i(u,z)}{1+|z|^2}\right]\frac{1+|z|^2}{|z|^2}\Pi(dz). \tag{15}$$

证． 设 $\{Q_t(\cdot), \mathfrak{B}^n\}$ 是对应于特征函数 $J(t,u)$ 的分布．令

$$\Pi_t(B)=\frac{1}{t}\int_B\frac{|z|^2}{1+|z|^2}\,Q_t(dz),\quad B\in\mathfrak{B}^m.$$

下面我们将证明，测度族 $\{\Pi_t(\cdot),\ t>0\}$ 是弱紧的. 我们选取序列 $t_n\downarrow 0$，使得 Π_{t_n} 弱收敛于 $\mathfrak{B}^m$ 上的某一测度 Π'. 其次，

$$\frac{J(t,u)-1}{t}=\int_{\mathfrak{R}^m}(e^{i(u,z)}-1)\frac{1+|z|^2}{|z|^2}\Pi_t(dz)$$

$$=iA_t(u)-\frac{1}{2}B_t(u)+\int_{\mathfrak{R}^m}f(u,z)\Pi_t(dz),\tag{16}$$

式中

$$A_t(u)=\int_{\mathfrak{R}^m}\frac{(u,z)}{|z|^2}\Pi_t(dz),\quad B_t(u)=\int_{\mathfrak{R}^m}\frac{(u,z)^2}{|z|^2}\Pi_t(dz),$$

$$f(u,z)=\Big(e^{i(u,z)}-1-\frac{i(u,z)}{1+|z|^2}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{(u,z)^2}{1+|z|^2}\Big)\frac{1+|z|^2}{|z|^2}.$$

如果我们定义 $f(u,0)=0$，则 $f(u,z)$ 是连续有界函数. 因此

$$\lim\int_{\mathfrak{R}^m}f(u,z)\Pi_{t_n}(dz)=\int_{\mathfrak{R}^m}f(u,z)\Pi'(dz).$$

因为等式(16)的左端当 $t=t_n$ 和 $n\to\infty$ 时极限存在，故极限

$$\lim A_{t_n}(u)=a(u),\quad \lim B_{t_n}(u)=B(u)$$

也存在，而且 $a(u)$ 是线性函数，$B(u)$ 是正定二次型，即 $a(u)=(a,u)$和 $B(u)=(b'u,u)$，其中 b' 是一正定对称算子. 在(16)式中沿序列 t_n 取极限，我们就得到

$$g(u)=i(a,u)-\frac{1}{2}(b'u,u)+\int_{\mathfrak{R}^m}f(u,z)\Pi'(dz).\tag{17}$$

设 $\Pi(A)=\Pi'(A-\{0\})$ ($\{0\}$ 是由 0 这一点组成的集合). 在等式(17)右端的积分中，可用测度 $\Pi(\cdot)$ 代替测度 $\Pi'(\cdot)$. 另一方面，积分

$$\frac{1}{2}\int_{\mathfrak{R}^m}\frac{(u,z)^2}{|z|^2}\Pi(dz)$$

存在，而且是某一个正定二次型$(b''u,u)$. 不难验证，$(b'u,u)\geqslant(b''u,u)$. 因此 $b=b'-b''$ 是一正定对称算子. 于是我们有

$$g(u)=i(a,u)-\frac{1}{2}(bu,u)+\int_{\mathscr{R}^m}\left(f(u,z)-\frac{1}{2}\frac{(u,z)^2}{|z|^2}\right)\Pi_t(dz),$$

这就证明了(15).

现在验证族 $\{\Pi_t,t>0\}$ 的弱紧性. 我们应当证明

a) $\Pi_t(\mathscr{R}^m)\leqslant C$， b) $\lim\limits_{N\to\infty}\overline{\lim\limits_{t\downarrow 0}}\Pi_t\{\bar{S}_N\}=0$,

其中 $\bar{S}_N=\{z:|z|>N\}$.

设 $|u|\leqslant N_1,N_1$ 是任意的. 从定理的条件和(16)式推得，对于任意 $\delta>0$，可以找到 $t_0=t_0(N_1,\delta)$，使得

$$-\mathrm{Re}g(u)+\delta\geqslant\int_{S_1}\frac{1-\cos(u,z)}{|z|^2}\Pi_t(dz),\ t<t_0 \tag{18}$$

而且对 $c\geqslant 1$

$$-\mathrm{Re}g(u)+\delta\geqslant\int_{\bar{S}_c}[1-\cos(u,z)]\Pi_t(dz),t<t_0. \tag{19}$$

因为对所有 $x\geqslant 1$ 均有 $1-\cos x\geqslant\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}$，故由(18)式得

$$-\mathrm{Re}g(u)+\delta\geqslant\int_{S_1}\left[\frac{(u,z)^2}{2!}-\frac{(u,z)^4}{4!}\right]\frac{1}{|z|^2}\Pi_t(dz). \tag{20}$$

为了获得我们所需要的下界，必须计算下列积分的值:

$$I(\rho)=\int_{S_\rho}e^{i(u,z)}du,\ I_k(\rho)=\int_{S_\rho}(u,z)^k du,k=2,4.$$

它们分别等于

$$\left.\begin{aligned}&I(\rho)=\left(\frac{2\pi\rho}{|z|}\right)^{m/2}I_{m/2}(\rho|z|),\\&I_2(\rho)=\frac{\pi^{m/2}\rho^{m+2}|z|^2}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}+2\right)},\quad I_4(\rho)=\frac{3\pi^{m/2}\rho^{m+4}|z|^4}{4\Gamma\left(\frac{m}{2}+3\right)}\end{aligned}\right\}. \tag{21}$$

将不等式(18)和(19)对 $u\in S_\rho$ 积分并除以 S_ρ 的体积 $\left(\text{它等于}\ \Omega_m\rho^m,\ \Omega_m=\pi^{m/2}\Big/\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\right)$，我们就得到

$$-\frac{1}{\Omega_m\rho^m}\int_{S_\rho}\mathrm{Re}g(u)+\delta$$
$$\geqslant\int_{S_1}\frac{\rho^2}{2(m+2)}\left(1-\frac{\rho^2|z|^2}{4(m+4)}\right)\Pi_t(dz)\tag{22}$$

和

$$-\frac{1}{\Omega_m\rho^m}\int_{S_\rho}\mathrm{Re}g(u)du+\delta$$
$$\geqslant\int_{\bar{S}_c}\left[1-\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\left(\frac{2}{\rho|z|}\right)^{m/2}I_{m/2}(\rho|z|)\right]\Pi_t(dz).\tag{23}$$

在(22)式中根据条件 $\rho^2=2(m+4)$ 选定 ρ 并取 $N_1>\rho$，我们就得到

$$\Pi_t(S_1)\leqslant 2\left[\delta-\frac{1}{\Omega_m\rho^m}\int_{S_\rho}\mathrm{Re}g(u)du\right].$$

因为函数 $I_{m/2}(x)$ 是有界的，所以对任意 $c>0$，我们可以根据条件

$$(\rho_1c)^{m/2}\geqslant 2^{m+2/2}\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\sup_{x>0}|I_{m/2}(x)|\tag{24}$$

选取 $\rho=\rho_1$。于是有

$$\Pi_t(\bar{S}_c)\leqslant 2\left[\delta-\frac{1}{\Omega_m\rho_1^m}\int_{S_{\rho_1}}\mathrm{Re}g(u)du\right].$$

这就证明了 $\Pi_t(\mathscr{R}^m)<K$。最后，注意到当 $\rho\to 0$ 时有

$$-\frac{1}{\Omega_m\rho^m}\int_{S_\rho}\mathrm{Re}g(u)du\to g(0)=0,$$

我们首先把 $\rho=\rho_2$ 选得如此之小，使得不等式(23)的左端不超过 2δ，然后选取 $c=N=N_\delta$，使得(24)式成立。于是就得到

$$\Pi_t(\dot{S}_{N_\delta}) < 4\delta,$$

而且这些不等式的确立都不依赖于 $t \in [0, t_0], t_0 = t_0(N_1, \delta)$. 定理证毕.

从上面的结果可得

定理 4 若 $\xi(t)(t \geq 0)$ 是取值于 $\mathscr{R}^m$ 的齐次随机连续过程,则差 $\xi(S+t) - \xi(s)$ 的特征函数 $J(t,u)$ 形如

$$J(t,u) = e^{tg(u)}, \tag{25}$$

其中 $g(u)$ 由(15)式给出.

现在考察(25)式的某些特殊情形.

a) $b = 0, \Pi(B) \equiv 0$.

这时 $J(t,u) = e^{it(a,u)}$,它对应于集中在点 $ta \in \mathscr{R}^m$ 的退化分布的特征函数. 于是以概率1有 $\xi(t) = \xi(0) + at$,即点 $\xi(t)$ 以速度 a 作匀速运动.

b) $\Pi(B) \equiv 0$.

这时增量 $\xi(t+s) - \xi(s)$ 有正态分布,其平均值是 a,相关矩阵是 bt. 因此,例如若 $\xi(0) = 0$,则 $\xi(t)$ 是 Gauss 过程. 在这一章的 § 5 中,我们将要证明,在这种情形而且只有在这种情形,独立增量过程随机等价于样本函数以概率1连续的过程. 所考虑的过程称作 Brown **运动过程**.

众所周知,如果用高放大倍数的显微镜观察浸在液体中的胶状小微粒,人们就可以看到,这微粒处于不断运动的状态中,而且它的运动路径是很复杂有随机方向节的折线,这种现象是由于液体分子与胶状微粒相碰撞而产生的. 胶状微粒的体积比起液体分子的体积要大得多,它在一秒钟之内受到液体分子碰撞的次数是很大的. 要把微粒和分子的每一次碰撞的后果搞清楚是不可能的. 我们所看到的微粒运动叫做 Brown 运动. 作为粗略的近似,我们可以认为,在介质分子碰撞的影响下微粒的位移是相互独立的,并且可以把 Brown 运动看作是具有独立增量的连续过程. 鉴于上述情况,这样的一种过程是 Gauss 过程. 如果 $\xi(t)$ 是一维的,$b = 1$ 和 $a = 0$,则这样的 Brown 运动称作 Wiener 过程.

c) $a=0, b=0$，测度 Π 是集中在点 z_0 的质量 q.

这时特征函数(25)形如

$$J(t,u)=\exp\left\{\frac{qt(1+|z_0|^2)}{|z_0|^2}\left(e^{i(u,z_0)}-1-\frac{i(u,z_0)}{1+|z_0|^2}\right)\right\}. \quad (26)$$

容易验证，增量 $\xi(t)-\xi(0)$ 可表为

$$\xi(t)-\xi(0)=z_0\left(\nu(t)-\frac{qt}{|z_0|^2}\right),$$

其中 $\nu(t)$ 是平均值为 $\mathbf{E}\nu(t)=\dfrac{q(1+|z_0|^2)}{|z_0|^2}t$ 的 Poisson 过程.

d) 设 $b=0$，测度 Π 具有性质

$$\int_{\mathscr{R}^m}\frac{\Pi(dz)}{|z|^2}<\infty. \quad (27)$$

这时 $g(u)$ 可以表为

$$g(u)=i(\tilde{a},u)+q\int_{\mathscr{R}^m}(e^{i(u,z)}-1)\Pi_0(dz), \quad (28)$$

其中 $q>0$，而 Π_0 是 $\{\mathscr{R}^m,\mathfrak{B}^m\}$ 上的概率测度. 这表达式的解释如下：我们有

$$J(t,u)=e^{i(\tilde{a}t,u)}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-qt}\frac{(qt)^n}{n!}\left[\int_{\mathscr{R}^m}e^{i(u,z)}\Pi_0(dz)\right]^n,$$

它是和

$$\tilde{a}t+\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{\nu(t)}$$

的特征函数，这里 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$ 是独立同分布的随机向量，它们取值于 $\mathscr{R}^m$ 且分布为 Π_0，$\tilde{a}$ 是常值向量，而 $\nu(t)$ 是一个整数值随机变量，它独立于族 $\{\xi_k, k=1,2,\cdots\}$ 且有参数为 qt 的 Poisson 分布：

$$\mathbf{P}\{\nu(t)=n\}=e^{-qt}\frac{(qt)^n}{n!}.$$

这过程称作 $\mathscr{R}^m$ 中的**广义 Poisson 过程**.

应当指出，不管由(15)式确定的函数 $g(u)$ 如何，人们都可以构造收敛于它的形如(28)的函数序列. 因为这序列中的函数实际

上确定某些分布的特征函数，故 $e^{tg(u)}$ 是某一分布的特征函数，这里 $g(u)$ 是任意形如(15)的函数．于是得到

定理 5 过程 $\xi(t)$ 是具有独立增量的齐次随机连续过程的充分必要条件是，它的特征函数由(25)和(15)式表出，其中 a 是任意的向量，b 是任一正定算子，$\Pi(B)$ 是 $\{\mathscr{R}^m, \mathfrak{B}^m\}$ 上任一使得 $\Pi\{z=0\}=0$ 的有限测度．

Марков 过程 Марков 过程在现代概率论及其应用中起着重要的作用．在第二卷中我们将要对它们作详细的研究．在这里我们只给出这类过程的最简单定义．离散时间 Марков 过程的概念在第 2 章 § 4 中已经引入和讨论过．

Марков 过程（Марков 系统）的概念是基于这样一种系统的表示，该系统未来的演变只依赖于系统现在的状态(即与系统过去的性态无关)．设 $\xi(t)$ 是取值于完备距离空间 $\mathscr{Y}$ 的随机过程，其中 $t \in T$，T 是有限或无穷的时间区间，$\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{Y}$ 中 Borel 集的 σ 代数。

空间 $\mathscr{Y}$ 称作系统的相空间，$\xi(t)$ 是系统在时刻 t 的状态．关于“将来与过去无关”或“无后效”的假设可以很简单地利用条件概率描述如下：对于任意 $B \in \mathfrak{B}$ 和 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$，有

$$\mathbf{P}\{\xi(t) \in B \mid \xi(t_1), \xi(t_2), \cdots, \xi(t_n)\} = \mathbf{P}\{\xi(t) \in B \mid \xi(t_n)\} (\mathrm{mod}\mathbf{P}). \tag{29}$$

因为给定一个随机变量时的条件概率可以看作是这个变量的函数，故令

$$\mathbf{P}\{\xi(t) \in A \mid \xi(s)\} = \mathbf{P}(s, \xi(s), t, A) \quad (s < t).$$

由第 1 章 § 3 的(19)式得到，对于任意的 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 和任意有界 Borel 函数 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $(x_k \in \mathscr{Y}, k = 1, 2, \cdots, n)$ 下面的等式成立：

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\{g(\xi(t_1), \xi(t_2), \cdots, \xi(t_n)) \mid \xi(t_1)\} \\ &= \int \mathbf{P}(t_1, \xi(t_1), t_2, dy_2) \int \mathbf{P}(t_2, y_2, t_3, dy_3) \\ &\cdots \int \mathbf{P}(t_{n-1}, y_{n-1}, t_n, dy_n) g(\xi(t_1), y_2, \cdots, y_n) (\mathrm{mod}\mathbf{P}). \end{aligned} \tag{30}$$

特别地，若令 $g=\chi_B(x_3)$，这里 $\chi_B(y)$ 是集合 $B\in\mathfrak{B}$ 的示性函数，则由(30)式推得，以概率 1 有

$$\mathbf{P}(t_1,\xi(t_1),t_3,B)=\int\mathbf{P}(t_2,y_2,t_3,B)\mathbf{P}(t_1,\xi(t_1),t_2,dy_2). \tag{31}$$

我们在第 2 章 § 4 中已经碰见过这等式，在那里称之为 Chapman-Колмогоров 方程.

定义 5 取值于 $\mathscr{Y}$ 的随机过程 $\xi(t)$ $(t\in T)$ 称做 Марков 过程，如果

a) 对于任意 $t_1<t_2<\cdots<t_n<t$，$t_k\in T(k=1,\cdots,n)$，$t\in T$，(29)式成立.

b) 存在函数 $\mathbf{P}(s,y,t,B)$，对于固定的 s,t,B，它是 y 的 $\mathfrak{B}$ 可测函数，对于固定的 s,y,t，它是 $\mathfrak{B}$ 上的概率测度，而且这函数满足 Chapman-Колмогоров 方程

$$\mathbf{P}(t_1,y,t_3,B)=\int\mathbf{P}(t_2,y_2,t_3,B)\mathbf{P}(t_1,y_1,t_2,dy_2) \tag{32}$$

并以概率 1 等于条件概率

$$\mathbf{P}(s,\xi(s),t,A)=\mathbf{P}\{\xi(t)\in A\,|\,\xi(s)\}.$$

函数 $\mathbf{P}(t,y,s,B)$ 称作 Марков 过程的转移概率. 因此，按照定义，条件概率族(29)是正则的，而且过程 $\xi(t)$ 与"过去"无关. 过程由等式(29)表示的性质称作 Марков 性和无后效性.

现在我们证明，从 Марков 性可以推出某些更强的论断. 再次应用第 1 章 § 3 的(19)式和这一章的等式(30)，我们就得到，对于 $t_1<t_2<\cdots<t_m<\cdots<t_{n+m}$，$t_k\in T(k=1,\cdots,n+m)$ 有

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\{g(\xi(t_{m+1}),\xi(t_{m+2}),\cdots,\xi(t_{n+m}))\,|\,\xi(t_1),\xi(t_2),\cdots,\xi(t_m)\}\\&=\int\mathbf{P}(t_m,\xi(t_m),t_{m+1},dy_1)\cdots\\&\quad\times\cdots\int\mathbf{P}(t_{n+m-1},y_{n-1},t_{n+m},dy_n)g(y_1,\cdots,y_n)\\&=\mathbf{E}\{g(\xi(t_{m+1}),\cdots,\xi(t_{n+m}))\,|\,\xi(t_m)\}(\mathrm{mod}\mathbf{P}).\end{aligned}$$

如果令 $g(y_1,\cdots,y_n)=\chi_{B^{(n)}}(y_1,\cdots,y_n)$，这里 $B^{(n)}$ 是 $\mathscr{Y}^n$ 中的

Borel 集，则由此可推出下面的等式，它推广了过程的 Марков 性：对于任意的 $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+m} (\in T)$ 和 n, m

$$\mathbf{P}\{[\xi(t_{m+1}),\cdots,\xi(t_{m+n})]\in B^{(n)}|\xi(t_1),\cdots,\xi(t_m)\}$$
$$=\mathbf{P}\{[\xi(t_{m+1}),\cdots,\xi(t_{m+n})]\in B^{(n)}|\xi(t_m)\}(\mathrm{mod}\mathbf{P}).$$

我们用 $\mathfrak{F}_t$ 表示由随机变量 $\xi(s)\ (s\in T,\ s\leqslant t)$ 产生的事件 σ 代数，$\mathfrak{F}_t^*$ 表示由随机变量 $\xi(s)(s\in T, s>t)$ 产生的 σ 代数. 则对任意柱集 $C\in\mathfrak{F}_t^*$ 和 $t_1<t_2<\cdots<t_n\leqslant t$ 有

$$\mathbf{P}\{C|\xi(t_1),\cdots,\xi(t_n)\}=\mathbf{P}\{C|\xi(t_n)\}(\mathrm{mod}\mathbf{P}). \tag{33}$$

设 Λ 是使得(33)式成立的事件类. 根据条件概率的性质(第 1 章 § 3)，Λ 是一个 λ 类，而且它包含由 $\mathfrak{F}_t^*$ 中的柱集组成的 Π 类，所以 $\Lambda\supset\mathfrak{F}_t^*$. 另一方面，设 $\mathfrak{N}$ 是由所有使得对任意 $S\in\mathfrak{F}_t^*$ 有

$$\int_N \mathbf{P}(S|\mathfrak{F}_t)d\mathbf{P}=\int_N \mathbf{P}(S|\xi(t))d\mathbf{P} \tag{34}$$

的事件 N 组成的事件类. 根据(33)式知，$\mathfrak{N}$ 包含 $\mathfrak{F}_t$ 中所有柱集. 因为等式(34)的左端和右端都是 $\mathfrak{F}_t$ 上的可数可加集函数，故由它们在 $\mathfrak{F}_t$ 的柱集上相等这一事实可推出，它们在 $\mathfrak{F}_t$ 上也相等. 于是有

定理 6 对任意 $S\in\mathfrak{F}_t^*$

$$\mathbf{P}(S|\mathfrak{F}_t)=\mathbf{P}(S|\xi(t))\quad(\mathrm{mod}\mathbf{P}). \tag{35}$$

(35)式表明，当完全给定了 Марков 过程的“过去”时，由过程“将来”的性态确定的任意事件 S 的条件概率只依赖于“现在”.

定义在 $T=[0,b]$ 或 $T=[0,\infty]$ 上的广义 Марков 过程 我们把由 $\{\mathscr{Y},\mathfrak{B}\}$ 上的概率测度 μ_0 和满足定义 5 中条件 b)的转移概率 $\mathbf{P}(t,y,s,B)\ (t<s, t, s\in T,\ B\in\mathfrak{B})$ 组成的族称做**广义 Марков 过程**.

测度 μ_0 称做系统的初始分布.

对于任一 n 个变元 $y_k\in\mathscr{Y}$ 的有界 Borel 函数 $f(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 和任意 $t_k\in T(k=1,\cdots,n, 0<t_1<\cdots<t_n)$，我们令

$$F_{t_1t_2\cdots t_n}[f]=\int\mu_0(dy_0)\int\mathbf{P}(0,y_0,t_1,dy_1)\times\cdots$$

$$\times \int f(y_1, y_2, \cdots, y_n) \mathbf{P}(t_{n-1}, y_{n-1}, t_n, dy_n) \quad (36)$$

和

$$\mathbf{P}_{t_1 t_2 \cdots t_n}(A^{(n)}) = F_{t_1 t_2 \cdots t_n}[\chi_{A^{(n)}}], \quad (37)$$

其中 $\chi_{A^{(n)}}$ 是集合 $A^{(n)} \in \mathfrak{B}^n$ 的示性函数，$\mathfrak{B}^n$ 是 $\mathscr{Y}^n$ 中 Borel 集的 σ 代数. 注意，对于任意 Borel 函数 $f(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，函数

$$f_1(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}) = \int f(y_1, y_2, \cdots, y_n) \mathbf{P}(t, y_{n-1}, s, dy_n) (t < s)$$

也是 Borel 函数，这是因为式中的积分是简单函数积分的极限，而后者是变元 $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ 的 Borel 函数. 根据积分的性质知，$\mathbf{P}_{t_1 \cdots t_n}(B^{(n)})$ 是 $\mathfrak{B}^n$ 上的测度. 显然，测度族 $\mathbf{P}_{t_1 \cdots t_n}(B^{(n)})$ 满足相容性条件，根据 Колмокоров 定理(第 1 章 § 4 定理 2)知，若$\mathscr{Y}$是可分完备距离空间，则容许某一表示 $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$，其中 Ω 是由所有取值于$\mathscr{Y}$的函数 $\omega(t)$ $(t \in T)$ 组成的空间. 设 $\xi(t)$ 是任一随机等价于 $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$ 的过程，我们可以验证

$$\mathbf{P}\{\xi(t) \in B | \xi(t_1), \xi(t_2), \cdots, \xi(t_n)\} = \mathbf{P}(t_n, \xi(t_n), t, B) \ (\mathrm{mod}\,\mathbf{P}),$$

即 $\xi(t)$ 是具有给定转移概率的 Марков 过程. 为此只须验证等式：对于任意 $B^{(n)} \in \mathfrak{B}^n, B \in \mathfrak{B}$ 和 $t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n < t$

$$\int_{B^{(n)}} \mathbf{P}(t_n, y_n, t, B) \mathbf{P}_{t_1 t_2 \cdots t_n}(dy_1, dy_2, \cdots, dy_n)$$
$$= \mathbf{P}_{t_1 t_2 \cdots t_n t}(B^{(n)} \times B).$$

然而这等式可直接由(36),(37)式和第 2 章 § 4 的定理 2 推出.

因此，若$\mathscr{Y}$是可分完备距离空间，则任一广义 Марков 过程都存在某一种表示.

§ 2. 可分随机函数

基本定理 设给定了概率空间 $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$ 上的一个取值于某可测空间 $\{\mathscr{Y}, \mathfrak{B}\}$ 的随机函数 $\zeta(x) = g(x, \omega)$，$x \in \mathscr{X}$. 我们将假设，$\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$ 是完备的概率空间.

在许多问题中，形如

$$\{\omega:\zeta(x)\in F \quad 对所有 \ x\in G\} \tag{1}$$

的事件起着重要的作用。遗憾的是，当G是不可数时，一般不能断定事件(1)是$\mathfrak{S}$可测的。但是，我们常常需要讨论这样的随机函数，它使得对于足够广泛的集合类F和G来说，这事件是$\mathfrak{S}$可测的。

基于以下的注记，我们有可能克服由于集合G的不可数性而产生的困难。假设在$\mathscr{X}$中存在一可数点集I和这样的ω集合N，使得$\mathbf{P}\{N\}=0$且对所有$G\in\mathfrak{G}$和$F\in\mathfrak{F}$，集合(1)与集合

$$\{\omega:\zeta(x)\in F \ 对所有 \ x\in G\cap I\}=\bigcap_{x\in G\cap I}\{\omega:\zeta(x)\in F\} \tag{2}$$

的对称差被包含在N中。于是集合(1)是可测的。满足上述假设的随机函数称作(关于集合类$\mathfrak{G}$和$\mathfrak{F}$)可分的。从直观上可以看出，为使随机函数是可分的，$\mathfrak{G}$中的集合应该在某种意义下是"充实的"，即它要包含I中充分多的点，使得人们有理由认为，集合(1)和(2)之间没有本质的差别。

例如，若$\mathscr{X}$和$\mathscr{Y}$是距离空间，$\mathscr{X}$是可分空间，$\mathfrak{G}$是$\mathscr{X}$中的开集类，$\mathfrak{F}$是$\mathscr{Y}$中的闭集类，而函数$\zeta(x)=g(x,\omega)$对几乎所有ω是连续的。如果选取$\mathscr{X}$中任一处处稠密的可数点集作为I，则函数$\zeta(x)$是可分的。这时，集合(1)和(2)在使得$\zeta(x)$为连续的那些ω处是相同的。

在本节中恒设$\mathscr{X}$和$\mathscr{Y}$分别是带有距离$r(x_1,x_2)$和$\rho(y_1,y_2)$的距离空间，$\mathscr{X}$是可分空间，而随机函数的可分性则理解为关于$\mathscr{X}$中的开集类$\mathfrak{G}$和$\mathscr{Y}$中的闭集类$\mathfrak{F}$的可分性。

定义 1 随机函数$\zeta(x)=g(x,\omega)$称作**可分的**，如果存在$\mathscr{X}$中处处稠密的可数点集$I=\{x_i\}$，$i=1,2,\cdots$，以及Ω中的零概率集合N，使得对任意开集$G\subset\mathscr{X}$和任意闭集$F\subset\mathscr{Y}$两个集合$\{\omega:g(x,\omega)\in F$ 对所有 $x\in G\}$和$\{\omega: g(x,\omega)\in F$ 对所有 $x\in G\cap I\}$只能在N的子集上不相重合。

在这定义中出现的可数点集$I=\{x_i\}$称作随机函数的可分性集合。对于随机函数来说，可分性并不是一个严格的限制。在

对随机函数的定义域 $\mathscr{X}$ 和值域 $\mathscr{Y}$ 的性质作出足够广泛的假设之下，存在随机等价于给定随机函数的可分随机函数．然而，应当指出，在构造等价的随机函数时，有时必须扩大函数的值域而使它变为一个紧集．

我们首先给出一个关于随机函数可分性的判别准则．设 $\mathscr{Y}$ 是紧的，$\tilde{g}(x,\omega)$ 是取值于 $\mathscr{Y}$ 的可分随机函数，I 是可分性集合，N 是相应的例外 ω 点集．

以 V 表示空间 $\mathscr{X}$ 中所有这样的开球类，它们具有有理半径，而且球心是在 $\mathscr{X}$ 中一个固定的处处稠密可数集的点上．类 V 是可数的．另一方面，$\mathscr{X}$ 的任意开集可以表为 V 中的(可数多个)球之并．

设 $A(G,\omega)$ 是当 x 取遍集合 $I\cap G$ 时函数 $\tilde{g}(x,\omega)$ 的值集之闭包；而且

$$A(x,\omega)=\bigcap A(S,\omega)$$

是当 S 取遍所有包含点 x 的球的总体时所有 $A(S,\omega)$ 的交．闭集族 $A(S,\omega)(x\in S)$ 是"集中的"，即这族中任意有限多个集合必有公共点，又由 $\mathscr{Y}$ 的紧性知，它们的交非空．根据函数 $\tilde{g}(x,\omega)$ 的可分性得

$$\tilde{g}(x,\omega)\in A(x,\omega),\omega\bar{\in}N. \tag{3}$$

反之，若对任意 $\omega\bar{\in}N(\mathbf{P}\{N\}=0)(3)$ 式成立，则 $\tilde{g}(x,\omega)$ 是可分随机函数．事实上，若对所有 $x\in I\cap S$ 有 $\tilde{g}(x,\omega)\in F$，这里 F 是 $\mathscr{Y}$ 中某一闭集和 $S\in V$，则对任意 $x\in S$ 有 $A(x,\omega)\subset A(S,\omega)$，因而对 S 中所有 x 均有 $\tilde{g}(x,\omega)\in F$.

设 G 是 $\mathscr{X}$ 的任意开集．我们把它表为 V 中集合之并 $G=\bigcup_k S_k$．基于刚才所作的注记，由

$$\tilde{g}(x,\omega)\in F,\ \text{对所有}\ x\in I\cap G,\omega\notin N$$

可推出

$$\tilde{g}(x,\omega)\in F,\text{对任意}\ x\in G.$$

我们把已得到的结果归纳为

引理 1 为使取值于紧空间$\mathscr{Y}$的随机函数 $\tilde{g}(x,\omega)$ 是可分的，必须且只须存在 $\mathbf{P}\{N\}=0$ 的集合 N，使当 $\omega\bar{\in}N$ 时(3)式成立.

因此，为了构造随机等价于 $g(x,\omega)$ 的可分随机函数，只须找出满足(3)式并以概率 1 等价于 $g(x,\omega)$ 的函数 $\tilde{g}(x,\omega)$:

$$\mathbf{P}\{\tilde{g}(x,\omega)\neq g(x,\omega)\}=0.$$

引理 2 设 B 是 $\mathscr{Y}$ 中任意的 Borel 集，$\mathscr{Y}$ 是紧的. 则存在有限或可数的点列 $x_1,x_2,\cdots$，使得对任意 $x\in\mathscr{X}$，集合 $N(x,B)=\{\omega:g(x_k,\omega)\in B,k=1,2,\cdots,g(x,\omega)\bar{\in}B\}$ 的概率等于 0.

证. 设 x_1 是任意的. 如果 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 已经构造出，则令 $m_k=\sup\limits_{x\in\mathscr{X}}\mathbf{P}\{g(x_1,\omega)\in B,\cdots,g(x_k,\omega)\in B,g(x,\omega)\bar{\in}B\}$. 若 $m_k=0$，则相应的序列已经构造出来. 若 $m_k>0$，则令 x_{k+1} 为使得

$$\mathbf{P}\{g(x_1,\omega)\in B,\cdots,g(x_k,\omega)\in B,g(x_{k+1},\omega)\bar{\in}B\}\geqslant m_k/2$$

成立的任一点. 因为集合

$$L_k=\{\omega:g(x_i,\omega)\in B,i=1,2,\cdots,k,g(x_{k+1},\omega)\bar{\in}B\}$$

不相交，故

$$1\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\{L_k\}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}m_k.$$

因此当 $k\to\infty$ 时 $m_k\to0$. 于是对任意 x 有

$$\mathbf{P}\{g(x_k,\omega)\in B,k=1,2,\cdots,g(x,\omega)\bar{\in}B\}\leqslant\lim m_k=0,$$

这就证明了引理 2.

从上面的引理容易推出下述论断.

引理 3 设 $\mathfrak{M}_0$ 是可数的集合类，$\mathfrak{M}$ 是由 $\mathfrak{M}_0$ 中所有可能的集合序列之交组成的集合类. 则存在有限或可数的点列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 和集合 $N(x)$ (对每一点 x)，使得

$$P\{N(x)\}=0,$$

且对任意 $B\in\mathfrak{M}$ 有

$$\{\omega:g(x_n,\omega)\in B,n=1,2,\cdots,g(x,\omega)\bar{\in}B\}\subset N(x).$$

引理的证明如下：设 I 是 $\mathscr{X}$ 中的可数点集，它是像在引理 2 中那样对每一 $B\in\mathfrak{M}_0$ 构造出来的序列 $\{x_n,n=1,2,\cdots\}$ 之

并，又设 $N(x)=\bigcup_{B\in\mathfrak{M}_0}N(x,B)$. 如果 $B'\in\mathfrak{M}$ 且 $B\supset B'$, $B\in\mathfrak{M}_0$, 则 $\{\omega: g(x_n,\omega)\in B', x_n\in I, g(x,\omega)\bar{\in}B\}\subset\{\omega: g(x_n,\omega)\in B, x_n\in I, g(x,\omega)\bar{\in}B\}\subset N(x,B)\subset N(x)$. 此外，若 $B'=\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k\in\mathfrak{M}_0$, 则

$$\begin{aligned}&\{\omega:g(x_n,\omega)\in B',x_n\in I,g(x,\omega)\bar{\in}B'\}\\&\quad\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\omega:g(x_n,\omega)\in B',x_n\in I,g(x,\omega)\bar{\in}B_k\}\\&\quad\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}N(x,B_k)\subset N(x).\end{aligned}$$

引理得证.

现在不难证明下面的定理:

定理 1 (J. L. Doob) 设 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 是距离空间，$\mathscr{X}$ 是可分的，$\mathscr{Y}$ 是紧的. 则任意取值于 $\mathscr{Y}$ 的随机函数 $g(x,\omega)$ $(x\in\mathscr{X})$ 随机等价于某一可分随机函数.

证. 我们固定 $\mathscr{Y}$ 中某一个处处稠密可数点集 L，又设 $\mathfrak{M}_0$ 是由以 L 的点为球心且具有有理半径的球之余集所组成的集合类. 因此由 $\mathfrak{M}_0$ 中集合之交组成的集合类 $\mathfrak{M}$ 包含空间 $\mathscr{Y}$ 的所有闭集. 其次，对于每一 $S\in V$，我们把随机函数 $g(x,\omega)$ 看作是只对 $x\in S$ 定义的，同时按照引理 3 构造序列 $I=I(S)$ 和集合 $N(x)=N_S(x)$. 令

$$J=\bigcup_{S\in V}I(s),\quad N_x=\bigcup_{S\in V}N_s(x).$$

设

$$\tilde{g}(x,\omega)=g(x,\omega), \text{若 } x\in J \text{ 或 } \omega\bar{\in}N_x,$$

若 $\omega\in N_x, x\bar{\in}J$，则以任意方式定义 $\tilde{g}(x,\omega)$（只要求 $\tilde{g}(x,\omega)\in A(x,\omega)$）. 因为对于 $x\in J$ 函数 $\tilde{g}(x,\omega)$ 和 $g(x,\omega)$ 有相同的值，故对函数 $\tilde{g}(x,\omega)$ 和 $g(x,\omega)$ 所构造的集合 $A(x,\omega)$ 也相同. 由 $\tilde{g}(x,\omega)$ 的定义推得，对任意 x 和 ω 有

$$\tilde{g}(x,\omega) \in A(x,\omega).$$

因为 $\{\omega: g(x,\omega) \neq \tilde{g}(x,\omega)\} \subset N_x$，故 $\mathbf{P}\{\tilde{g}(x,\omega) = g(x,\omega)\} = 1$，这就证明了定理.

定理1能够直接推广到取值于可分局部紧空间的随机函数的情形.

定理 2 设 $\mathscr{Y}$ 是可分局部紧空间，$\mathscr{X}$ 是任意的可分距离空间. 对任意定义在 $\mathscr{X}$ 上取值于 $\mathscr{Y}$ 中的随机函数 $g(x,\omega)$，存在随机等价的可分随机函数 $\tilde{g}(x,\omega)$，它取值于空间 $\mathscr{Y}$ 的某一个紧扩充 $\tilde{\mathscr{Y}}, \tilde{\mathscr{Y}} \supset \mathscr{Y}$.

本定理的证明可由以下事实得到：任意可分局部紧空间 $\mathscr{Y}$ 可以看作是某一紧空间 $\tilde{\mathscr{Y}}$ 的子集. 例如，若 $g(x,\omega)$ 是取值于有限维空间 $\mathscr{Y}$ 的，则给 $\mathscr{Y}$ 添加一"无穷远"点 ∞ 后，我们就容易得到带有新的距离的紧空间 $\tilde{\mathscr{Y}} = \mathscr{Y} \cup \{\infty\}$，使得(在空间 $\mathscr{Y}$ 的拓扑中)每一闭集 $F \subset \mathscr{Y}$ 在 $\tilde{\mathscr{Y}}$ 中也是闭的(对于新的距离来说). 在构造随机函数的可分现实时，可能必须给这函数指定附加的《∞》值，但是对于一个固定的 x 来说，这样的概率显然等于零.

随机连续性 在许多问题中，知道怎样的集合 I 可以作为可分性集合是重要的. 在给出这问题的回答之前，我们引进一个重要的概念并给出一些与之有关的简单定理.

定义 2 我们说取值于 $\mathscr{Y}$ 的随机函数 $g(x,\omega)$ 在点 x_0($x_0 \in \mathscr{X}$) 随机连续，如果对任意 $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{\rho(g(x_0,\omega), g(x,\omega)) > \varepsilon\} \to 0, \text{当 } r(x,x_0) \to 0. \tag{4}$$

如果 $g(x,\omega)$ 在某集合 $B \subset \mathscr{X}$ 的每一点都随机连续，我们就说它在 B 上随机连续.

应当指出，随机连续性的条件是对随机函数的"二维分布"，即随机元 $g(x_1,\omega)$ 和 $g(x_2,\omega)$ 的联合分布所加的条件，其中 $x_1, x^2 \in \mathscr{X}$. 特别地，这概念可应用于广义随机函数.

在点 x_0 随机连续的要求表示当 $x \to x_0$ 时 $\zeta(x) = g(x,\omega)$ 依概率收敛于 $\zeta(x_0)$.

定义 3 如果存在点 $y \in \mathscr{Y}$，使当 $K \to \infty$ 时

$$\sup_{x\in B}\mathbf{P}\{\rho[g(x,\omega),y]>K\}\to 0, \tag{5}$$

则称随机函数 $g(x,\omega)$ 在集合 B 上随机有界.

定理 3 在紧集 $\mathscr{X}$ 上随机连续的随机函数 $g(x,\omega)$ 也是在 $\mathscr{X}$ 上随机有界的.

证. 设 $\varepsilon>0$ 是任意预先给定的数. 对于每一x,我们构造以点 x 为心的球 S_x,使得对任意 $x'\in S_x$ 有

$$\mathbf{P}\{\rho(g(x,\omega),g(x',\omega))>1\}<\varepsilon/2.$$

从这些球 S_x 的总体中选出序列 $S_{x_1},S_{x_2},\cdots,S_{x_n}$, 这序列形成 $\mathscr{X}$ 的一个有限覆盖. 因此,对于任意 y 有

$$\rho(g(x,\omega),y)\leqslant\rho(g(x_1,\omega),y)$$
$$+\max_{i=2,\cdots,n}\rho(g(x_1,\omega),g(x_i,\omega))+\rho(g(x_j,\omega),g(x,\omega)),$$

式中 x_j 是某一个包含 x 的球 $S_{x_k}(k=1,\cdots,n)$ 的球心. 不等式右边的各项是有限随机变量,因此对充分大的N有

$$\mathbf{P}\{\rho(g(x_1,\omega),y)+\max_{i=2,\cdots,n}\rho(g(x_1,\omega),g(x_i,\omega))>N\}<\varepsilon/2.$$

如果假定 $N>1$,则对于任意 $x\in\mathscr{X}$ 有

$$\mathbf{P}\{\rho(g(x,\omega),y)>2N\}\leqslant\mathbf{P}\{\rho(g(x_j,\omega),g(x,\omega))>1\}$$
$$+\mathbf{P}\{\rho(g(x_1,\omega),y)+\max_{i=2,\cdots,n}\rho(g(x_1,\omega),g(x_i,\omega))$$
$$>N\}<\varepsilon.$$

由此得

$$\sup_{x\in\mathscr{X}}\mathbf{P}\{\rho(g(x,\omega),y)>2N\}<\varepsilon,$$

定理证毕.

定义 4 随机函数 $g(x,\omega)$ 称作在$\mathscr{X}$上一致随机连续的, 如果对任意小的正数 ε 和 ε_1,可以找到 $\delta>0$, 使当 $r(x,x')<\delta$ 时有

$$\mathbf{P}\{\rho(g(x,\omega),g(x',\omega))>\varepsilon\}<\varepsilon_1. \tag{6}$$

定理 4 若 $g(x,\omega)$ 在紧空间 $\mathscr{X}$ 上随机连续, 则 $g(x,\omega)$ 是一致随机连续的.

事实上,假若不然,则可以找到一对正数 ε 和 ε_1, 对于任意 δ_n

>0，存在一对点 x_n 和 x'_n 使 $r(x_n,x'_n)<\delta_n$ 和

$$\mathbf{P}\{\rho(g(x_n,\omega),g(x'_n,\omega))>\varepsilon\}>\varepsilon_1.$$

我们可以假设 $\delta_n\to 0$ 和 $x_n\to x_0$，于是 $x'_n\to x_0$ 和

$$\begin{aligned}\varepsilon_1&<\mathbf{P}\{\rho(g(x_n,\omega),g(x'_n,\omega))>\varepsilon\}\\&\leqslant\mathbf{P}\{\rho(g(x_n,\omega),g(x_0,\omega))>\varepsilon/2\}\\&\quad+\mathbf{P}\{\rho(g(x_0,\omega),g(x'_n,\omega))>\varepsilon/2\}.\end{aligned}$$

这不等式与随机连续性条件相矛盾.

定理 5 设 $\mathscr{X}$ 是可分空间，$\mathscr{Y}$ 是任意的距离空间，而 $g(x,\omega)$ 是取值于 $\mathscr{Y}$ 的随机连续可分随机函数. 则 $\mathscr{X}$ 的任一处处稠密可数点集都可作为随机函数 $g(x,\omega)$ 的可分性集合.

证. 设 $V=\{S\}$ 是前面引入的由 $\mathscr{X}$ 中可数多个球组成的集合，$I=\{x_k,\ k=1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 是随机函数 $g(x,\omega)$ 的可分性集合，N 是在可分性定义中出现的 ω 例外集，而 J 是 $\mathscr{X}$ 中任一个处处稠密的点集. 以 $B(S,\omega)$ 表示当 x'_k 取遍 $J\cap S$ 时 $g(x'_k,\omega)$ 的值集之闭包，$N(S,k)=\{\omega:g(x_k,\omega)\bar{\in}B(S,\omega)$ 若 $x_k\in S\}$. 事件 $N(S,k)$ 的概率为零. 事实上，设 $x'_r(r=1,2,\cdots,n,\cdots)$ 是 $J\cap S$ 中任一收敛于 x_k 的点列. 则

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{g(x_k,\omega)\notin B(S,\omega)\}&\leqslant\mathbf{P}\left\{\varliminf_{r\to\infty}\rho(g(x_k,\omega),g(x'_r,\omega))>0\right\}\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\varliminf_{r\to\infty}\rho(g(x_k,\omega),g(x'_r,\omega))>\frac{1}{n}\right\}\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\varliminf_{r\to\infty}\mathbf{P}\left\{\rho(g(x_k,\omega),g(x'_r,\omega))>\frac{1}{n}\right\}=0.\end{aligned}$$

令 $N'=\bigcup\limits_{S}\bigcup\limits_{x_k\in S}N(S,k)$，则 $\mathbf{P}\{N'\}=0$. 如果 $\omega\bar{\in}N\cup N'$ 且对所有 $x\in J\cap G$ 有 $g(x,\omega)\in F$，这里 G 是某一开集，$F\subset\mathscr{Y}$ 是一闭集，则对于每一 $x_k\in G$ 和使得 $x_k\in S\subset G$ 的 S，我们有

$$g(x_k,\omega)\in B(S,\omega)\subset F.$$

由集合 $\{x_k\}$ 的定义推得，对于所有 $x\in G$ 和 $\omega\bar{\in}N\cup N'$ 有 $g(x,\omega)\in F$. 因此集合 J 满足随机函数的可分性集合定义中的条件.

§3. 可测随机函数

设 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 像前面那样分别表示有距离 $r(x_1, x_2)$ 和 $\rho(y_1, y_2)$ 的距离空间，$g(x,\omega)$ 是定义在 $\mathscr{X}$ 上而取值于 $\mathscr{Y}$ 中的随机函数，又设 ω 是概率空间 $\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$ 中的基本事件.

假设在 $\mathscr{X}$ 上定义一个集合 σ 代数 $\mathfrak{A}$，它包含所有 Borel 集，又在 $\mathfrak{A}$ 上定义一完备测度 μ. 以 $\sigma\{\mathfrak{A}\times\mathfrak{S}\}$ 表示 $\mathscr{X}\times\Omega$ 中由 σ 代数 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{S}$ 的乘积产生的最小 σ 代数，而 $\tilde{\sigma}\{\mathfrak{A}\times\mathfrak{S}\}$ 则表示这 σ 代数对于测度 $\mu\times\mathbf{P}$ 的完备化.

定义 1 随机函数 $g(x,\omega)$ 称作可测的，如果它对于 $\tilde{\sigma}\{\mathfrak{A}\times\mathfrak{S}\}$ 是可测的.

我们用 $\mathfrak{B}$ 表示空间 $\mathscr{Y}$ 的 Borel 集 σ 代数. 回忆在一般情形中我们根据随机函数的定义推得，对任意 $B\in\mathfrak{B}$ 和固定的 x 有

$$\{\omega: g(x,\omega)\in B\}\in\mathfrak{S}.$$

然而，如果随机函数 $g(x,\omega)$ 可测，则

$$\{(x,\omega): g(x,\omega)\in B\}\in\tilde{\sigma}\{\mathfrak{A}\times\mathfrak{S}\}.$$

因此由 Fubini 定理得知，$g(x,\omega)$ 作为 x 的函数以概率 1 是 $\mathfrak{A}$ 可测的.

现在讨论随机等价于给定随机函数的可测可分随机函数的存在性问题.

定理 1 设 $\mathscr{X}$ 是可分完备距离空间，$\mathscr{Y}$ 是可分局部紧的，又设测度 μ 是 σ 有限的，如果对于 μ 几乎所有的 x，随机函数 $g(x,\omega)$ 是随机连续的. 则存在随机等价于函数 $g(x,\omega)$ 的可测可分随机函数 $g^*(x,\omega)$.

证. 首先假设 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 都是紧的，而且 $\mu(\mathscr{X})<\infty$. 由 §2 定理 1 得知，存在随机等价于 $g(x,\omega)$ 的可分随机函数 $\tilde{g}(x,\omega)$. 设 I 是函数 $\tilde{g}(x,\omega)$ 的可分性集合，它在 $\mathscr{X}$ 中处处稠密. 我们把 I 的点排成某一序列 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ 并令 $r_n=\min\{r(x_k,x_s); k,s=1,\cdots,n\}$.

对于每一n，我们构造$\mathscr{X}$的一个有限覆盖，它由以点$x_i^{(n)}\in I$为中心和半径等于$r_n/2$的球$S_1^{(n)},\cdots,S_{m_n}^{(n)}$组成．在此假设$x_i^{(n)}=x_i$（对于$i=1,2,\cdots,n$），而其它的点$x_i^{(n)}(i=n+1,\cdots,m_n)$则可以任意方式从$I$中选取，但要求球$S_i^{(n)}(i=n+1,\cdots,m_n)$是$\mathscr{X}$的覆盖集合．令$\bar{g}_n(x,\omega)=\tilde{g}(x_k,\omega)$，若$x\in S_k^{(n)}$，$k=1,2,\cdots n$（这些球是互不相交的，因而这样定义是适切的）；$\bar{g}_n(x,\omega)=\tilde{g}(x_i^{(n)},\omega)$，若$x\in S_i^{(n)}\setminus\bigcup_{i=1}^{j-1}S_i^{(n)}$，$j=n+1,\cdots,m_n$，这里$x_i^{(n)}$是球$S_i^{(n)}$的中心．

注意，对于固定的ω，$\bar{g}_n(x,\omega)$是变元x的 Borel 函数，而且$\bar{g}_n(x,\omega)$作为偶对(x,ω)的函数是$\sigma\{\mathfrak{A}\times\mathfrak{S}\}$可测的．此外，$r_n\to0$且

$$\rho[\bar{g}_n(x,\omega),\tilde{g}(x,\omega)]=\rho[\tilde{g}(x_k^{(n)},\omega),\tilde{g}(x,\omega)]\quad \text{当}\ r(x_k^{(n)},x)<r_n/2. \tag{1}$$

如果令

$$G_{nm}(x)=\mathbf{P}\{\omega:\rho[\bar{g}_n(x,\omega),\bar{g}_{n+m}(x,\omega)]>\varepsilon\},$$

则根据定理条件推知，对于μ几乎所有x，当$n\to\infty$时$G_{nm}(x)\to0$．故当$n\to\infty$时

$$(\mu\times\mathbf{P})\{(x,\omega):\rho[\bar{g}_n(x,\omega),\bar{g}_{n+m}(x,\omega)]>\varepsilon\}=\int_{\mathscr{X}}G_{nm}(x)\mu(dx)\to0,$$

即序列$\bar{g}_n(x,\omega)$依测度$\mu\times\mathbf{P}$是基本的． 故可从这序列中选出一子序列$\bar{g}_{n_k}(x,\omega)$，这子列$\mu\times\mathbf{P}$几乎处处收敛于某一$\sigma\{\mathfrak{A}\times\mathfrak{S}\}$可测函数$\bar{g}(x,\omega)$．以$K$表示这收敛不成立的$(x,\omega)$点集，因为$K$的测度为 0 ，所以它$\mu$几乎所有的截口有$\mathbf{P}$测度 0 ．我们用$X_1$表示使这测度大于 0 的$x$点集，根据上面的构造可以认为$X_1\cap I=\varnothing$和$\bar{g}(x_n,\omega)=\tilde{g}(x_n,\omega)$．以$X_2$表示在其上不随机连续的点$x$的集合．由(1)式得

$$\mathbf{P}\{\bar{g}(x,\omega)\neq\tilde{g}(x,\omega)\}=0,\quad \text{若}\ x\bar{\in}X_1\cup X_2.$$

现在令

$$g^*(x,\omega)=\begin{cases}\bar{g}(x,\omega), & 若\ (x,\omega)\bar{\in}K\ 和\ x\bar{\in}X_1\cup X_2;\\ \tilde{g}(x,\omega) & 若\ (x,\omega)\in K\ 或\ x\in X_1\cup X_2.\end{cases}$$

于是 $\mathbf{P}\{g^*(x,\omega)\neq\tilde{g}(x,\omega)\}=0$ 对所有 x，因而 $g^*(x,\omega)$ 随机等价于 $\tilde{g}(x,\omega)$.

因为 $g^*(x,\omega)$ 只能在一 $\mu\times\mathbf{P}$ 零测集上与 $\sigma\{\mathfrak{A}\times\mathfrak{S}\}$ 可测函数 $\tilde{g}(x,\omega)$ 不相同，故这函数是 $\bar{\sigma}\{\mathfrak{A}\times\mathfrak{S}\}$ 可测的. 余下只须证明 $g^*(x,\omega)$ 是可分的. 令 $A(G,\omega)$ 表示(像在 §2 中那样)当 x 取遍集合 $G\cap I$ 时 $\tilde{g}(x,\omega)$ 的值集之闭包，$A(x,\omega)$是所有集合 $A(S,\omega)$ 之交，这里 S 是任意包含点 x 的球. 函数 $\tilde{g}(x,\omega)$ 的可分性等价于条件 $\tilde{g}(x,\omega)\in A(x,\omega)$. 因为当 $x\in I$ 时 $g^*(x,\omega)=\tilde{g}(x,\omega)$，故对 $g^*(x,\omega)$ 构造的集合 $A^*(x,\omega)$ 和 $A(x,\omega)$ 是相同的. 其次，由 $g_n(x,\omega)$ 的定义得知，对任意 $x\bar{\in}X_1\cup X_2$ 和 $(x,\omega)\bar{\in}K$ 有 $g^*(x,\omega)=\bar{g}(x,\omega)=\lim g_n(x,\omega)\in A(x,\omega)$，而且按定义知对任意 $x\in X_1\cup X_2$ 或 $(x,\omega)\in K$ 有 $g^*(x,\omega)=\tilde{g}(x,\omega)\in A(x,\omega)$. 因此 $g^*(x,\omega)$ 是可分的随机函数，这就对我们所考虑的特殊情形证明了定理. 现在不难得到一般情形的证明. 对空间$\mathscr{Y}$所加的紧性要求可以用局部紧性和可分性的要求来代替. 事实上，空间的紧性仅仅是为了引用 §2 定理 1 的需要. 然而，我们现在可以援引 §2 定理 2，这时函数 $g(x,\omega)$ 的可分可测表示 $g^*(x,\omega)$ 一般是取值于空间$\mathscr{Y}$ 的某个紧的拓扑扩充. 其次，如果 $\mathscr{X}$ 是可分完备空间，而测度 μ 是 σ 有限的，于是$\mathscr{X}$就可表为可数多个具有有限测度的紧集 $\{K_n;n=1,2,\cdots\}$ 和一个 μ 零测集N之并，这论断可由以下事实推出：在可分完备距离空间中，每一具有有限测度的可测集 A 可以依概率用紧集 $K\subset A$ 作随意的逼近. 对每一个紧集 K_n 作如上的推理，由此易得定理的一般论断.

注 1. 特别，当 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 是 Euclid 空间而 μ 是$\mathscr{X}$上的 Lebesgue 测度时，定理 1 成立.

注 2. 如果不要求已给函数的可测表示是可分的，定理 1 的证明就更简单些. 这时不必考虑集合 I，点 $x_k^{(n)}$ 能以任意的方式从相应的集合中选出，而且仅要用到空间 $\mathscr{Y}$ 的完备性. 因此，若 $\mathscr{Y}$

是完备的，$\mathscr{X}$ 是可分完备距离空间，而 μ 是 σ 有限测度，则当取值于 $\mathscr{Y}$ 的随机函数 $g(x,\omega)(x\in\mathscr{X},\ \omega\in\Omega)$ 对于 μ 几乎所有的 x 是随机连续时，它必随机等价于一可测随机函数.

根据 Fubini 定理可直接推出下面的重要结果.

定理 2 设 $\xi(x)=g(x,\omega)$ 是一取实或复值的可测随机函数，如果

$$\int_{\mathscr{X}} \mathbf{E}|\xi(x)|\mu(dx)<\infty,$$

则对任意集合 $A\in\mathfrak{A}$ 有

$$\int_A \mathbf{E}\xi(x)\mu(dx)=\mathbf{E}\int_A \xi(x)\mu(dx).$$

上面的等式表示随机变量的取数学期望运算和对参数 x 的积分运算可以交换次序.

§4. 没有第二类间断点的判别准则

没有第二类间断点的函数 设 $\xi(t)(t\in[a,b])$ 是取值于完备距离空间 $\mathscr{Y}$ 的随机过程.

定义 1 如果以概率 1 过程的样本函数在每一点 $t\in(a,b)$ 有左极限和右极限，而在点 $a(b)$ 有右(左)极限，我们就说过程在区间 (a,b) 上没有第二类间断点.

在这一节中，我们恒设过程 $\xi(t)$ 是可分的，并以 J 表示过程的可分性集合.

定义 2 函数 $y=f(t)(y\in\mathscr{Y})$ 在区间 $[a,b]$ 上有不少于 m 个 ε 振幅 $(\varepsilon>0)$，如果存在点 $t_0,\cdots,t_m$，$a\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_m\leqslant b$，使得

$$\rho(f(t_{k-1}),f(t_k))>\varepsilon,k=1,2,\cdots,m.$$

引理 1 为使函数 $y=f(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上没有第二类间断点，必须且只须对任意 $\varepsilon>0$，它在 $[a,b]$ 上只有有限多个 ε 振幅，

证. 必要性. 设 ε 振幅的数目为无穷，于是可以找到序列 t_0, $t_1,\cdots,t_n,\cdots$,使得 $t_n\uparrow t_0$ 或 $t_n\downarrow t_0$，而且 $\rho(f(t_n),\ f(t_{n+1}))>\varepsilon$. 但这表示 $f(t_0-0)$ 或 $f(t_0+0)$ 不存在.

充分性. 设在某点 t_0 不存在单边极限(譬如说,左极限). 于是可以找到序列 $t_n\uparrow t_0$,使得对任意 n 有 $\sup\limits_{m>n}\rho(f(t_m),f(t_n))>\varepsilon$, 即 ε 振幅的数目为无穷.

应当指出，定义 2 可以平凡地搬到定义在任意实数 t 的集合上的随机函数.

今后在讨论没有第二类间断点的函数时，我们将把两个在每一点 $t\in[a,b]$ 有相同的左极限和右极限的函数看作是一样的. 因此，自然要选取某一准则来规定这些函数在间断点的值. 我们用 $D[a,b]=D[a,b;\mathscr{Y}]$ 表示定义在 $[a,b]$ 上而取值于 $\mathscr{Y}$ 的没有第二类间断点,并且在每一点 $t\in[a,b]$ 是左或右连续的函数空间. 令

$$\begin{aligned}\Delta_c(f)=\sup\{&\min[\rho(f(t'),f(t)),\rho(f(t''),f(t))];\\ &t-c\leqslant t'<t<t''\leqslant t+c,t',t,t''\in[a,b]\}\\ &+\sup\{\rho(f(t),f(a));a<t<a+c\}\\ &+\sup\{\rho(f(t),f(b));b-c<t<b\}.\end{aligned}\tag{1}$$

引理 2 为使函数 $y=f(t)$ 没有第二类间断点，必须且只须

$$\lim_{c\to0}\Delta_c(f)=0.\tag{2}$$

证. 必要性. 由定义得知，对每一函数 $f\in D[a,b]$，当 $c\to0$ 时,(1)式右端的后两项均趋于零.

假设不满足条件(2),于是可以找到序列 t'_n,t_n,t''_n,使得 $t'_n<t_n<t''_n,t''_n-t'_n\to0$, 而且对某一 $\varepsilon>0$ 有 $\rho(f(t'_n),\ f(t_n))>\varepsilon$, $\rho(f(t''_n),\ f(t_n))>\varepsilon$. 我们可以假设 t_n 收敛于某一 t_0 (假若不然，则可用 t_n 的某一收敛子列代替 t_n). 三个序列 $\{t'_n\},\{t_n\},\{t''_n\}$ 之中至少有两个有无穷多个点位于 t_0 的一侧. 譬如说，若 $\{t'_n\}$ 和 $\{t_n\}$ 在 t_0 之左侧,则 $f(t_n)\to f(t-0),f(t'_n)\to f(t-0)$，这与条件 $\rho(f(t'_n),\ f(t_n))>\varepsilon$ 相矛盾. 当 $\{t_n\}$ 和 $\{t''_n\}$ 有无穷多个点在

t_0 之右侧时情况是类似的．其余的情形可以归结为这两种情形．

充分性．从条件(2)推得 $f(x)$ 在点 a 右连续和在点 b 左连续． 如果对某个 $t_0\in(a,b)$, $f(t_0+0)$ 不存在，则可以找到序列 $t_n\downarrow t$ 和 $\varepsilon>0$，使有 $\rho(f(t_n),f(t_{n+1}))>\varepsilon$，这与条件(2)相矛盾．因此对任意 $t_0\in[a,b)$, $f(t_0+0)$ 必存在． 类似地可得 $f(t_0-0)$ 的存在性．根据(2)还能推得 $f(t_0)=f(t_0-0)$ 或 $f(t_0)=f(t_0+0)$．引理证毕．

某些不等式

引理 3 设 $\xi(t)(t\in[0,T])$ 是取值于 $\mathscr{Y}$ 的可分随机连续过程，而且存在非负单调递增函数 $g(h)$ 和函数 $q(C,h)\geqslant 0, h>0$，使得

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{[\rho(\xi(t),\xi(t-h))>Cg(h)]\cap[\rho(\xi(t+h),\xi(t))\\ >Cg(h)]\}\leqslant q(C,h)\end{aligned}\tag{3}$$

和

$$G=\sum_{n=0}^{\infty}g(T2^{-n})<\infty,\quad Q(C)=\sum_{n=1}^{\infty}2^nq(C,T2^{-n})<\infty.\tag{4}$$

则

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t',t''\in[0,T]}\rho(\xi(t'),\xi(t''))>N\right\}\leqslant\mathbf{P}\left\{\rho(\xi(0),\xi(T))>\frac{N}{2G}\right\}+Q\left(\frac{N}{2G}\right).$$

证．令

$$A_{nk}=\left\{\rho\left(\xi\left(\frac{k+1}{2^n}T\right),\xi\left(\frac{k}{2^n}T\right)\right)\leqslant Cg(T2^{-n})\right\},$$

$$k=0,1,2,\cdots,2^n-1,\ n=0,1,2,\cdots,$$

$$B_{nk}=A_{nk-1}\cup A_{nk},\quad D_n=\bigcap_{m=n}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{2^m-1}B_{mk}\quad(n\geqslant 1),$$

$$D_0=A_{00}\cap D_1.$$

由于随机连续性，可以假设过程 $\xi(t)$ 的可分性集合 J 是形如

$k/2^n(k=0,1,2,\cdots;n=0,1,2,\cdots)$ 的数集(参看 § 2 定理 5).
我们有

$$\mathbf{P}\{\bar{D}_n\} \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^m-1} \mathbf{P}\{\bar{B}_{mk}\} \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} 2^m q(C, T2^{-m}) = Q(n, C),$$

式中 $Q(n,C) = \sum_{m=n}^{\infty} 2^m q(C, T2^{-m})$.

从 D_0 可得 $\rho(\xi(T), \xi(0)) \leqslant Cg(T)$, 而且 $\rho(\xi(T/2), \xi(0)) \leqslant Cg(T2^{-1})$ 和 $\rho(\xi(T), \xi(T/2)) \leqslant Cg(T2^{-1})$ 这两事件中有一个发生. 在这两种情形中都有

$$\rho(\xi(0), \xi(T/2)) \leqslant Cg(T) + Cg(T2^{-1}),$$
$$\rho(\xi(T/2), \xi(T)) \leqslant Cg(T) + Cg(T2^{-1}).$$

现在我们应用归纳法. 假定在 D_0 为真的假设下, 对于 $m=n$ 和 $k, j = 0, 1, \cdots, 2^n$ 已经证明了不等式

$$\rho\left(\xi\left(\frac{k}{2^m}T\right), \xi\left(\frac{j}{2^m}T\right)\right) \leqslant Cg(T) + 2C\sum_{s=1}^{m} g\left(\frac{T}{2^s}\right). \quad (5)$$

下面要证明, 对于 $m=n+1$ 类似的不等式也成立. 设 k 和 j 是奇数 $k = 2k_1+1, j = 2j_1-1$. 因为由 D_{n+1} 可得不等式

$$\rho\left(\xi\left(\frac{k_1}{2^n}T\right), \xi\left(\frac{2k_1+1}{2^{n+1}}T\right)\right) \leqslant Cg\left(\frac{T}{2^{n+1}}\right),$$

$$\rho\left(\xi\left(\frac{k_1+1}{2^n}T\right), \xi\left(\frac{2k_1+1}{2^{n+1}}T\right)\right) \leqslant Cg\left(\frac{T}{2^{n+1}}\right)$$

中至少有一个成立, 故得

$$\rho\left(\xi\left(\frac{k}{2^{n+1}}T\right), \xi\left(\frac{k'}{2^n}T\right)\right) \leqslant Cg(T2^{-(n+1)}),$$

其中 k' 等于 k_1 或 k_1+1. 类似地, 可以找到整数 j', 使得

$$\rho\left(\xi\left(\frac{j}{2^{n+1}}T\right), \xi\left(\frac{j'}{2^n}T\right)\right) \leqslant Cg(T2^{-(n+1)}).$$

考虑到归纳法的假设, 我们就得到

$$\rho\left(\xi\left(\frac{k}{2^{n+1}}T\right),\xi\left(\frac{j}{2^{n+1}}T\right)\right)\leqslant Cg(T)+2C\sum_{s=1}^{n+1}g(T2^{-s}).$$

当 k 或 j 是偶数的情形可以类似地处理. 因此我们对于所有 $m\geqslant 1$ 证明了不等式(5). 由过程的可分性推得,若事件 D_0 发生,则以概率 1 有

$$\sup\{\rho(\xi(t'),\xi(t'')),t',t''\in[0,T]\}\leqslant 2CG,$$

由此得

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t',t''\in[0,T]}\rho(\xi(t'),\xi(t''))>N\right\}\leqslant Q\left(\frac{N}{2G}\right)$$

$$+\mathbf{P}\left\{\rho(\xi(0),\xi(T))>\frac{N}{2G}\right\}.$$

于是引理得证.

引理 4 设引理 3 的条件成立,则

$$\mathbf{P}\left\{\Delta_\varepsilon(\xi)>CG\left(\left[\lg_2\frac{T}{2\varepsilon}\right]\right)\leqslant Q\left(\left[\lg_2\frac{T}{2\varepsilon}\right],C\right)\right\},\tag{6}$$

这里

$$G(n)=\sum_{m=n}^{\infty}g(T2^{-m}),\quad Q(n,C)=\sum_{m=n}^{\infty}2^m q(C,T2^{-m}).$$

证. 我们继续作上述引理的推理. 设事件 D_n 发生. 我们将要利用归纳法证明, 对于任意的 k 和 m, 可以找到整数 $j_{nm}(0\leqslant j_{nm}<2^{m+1})$,使得

$$\max_{0\leqslant j\leqslant j_{nm}}\rho\left(\xi\left(\frac{k-1}{2^n}T\right),\xi\left(\left[\frac{k-1}{2^n}+\frac{j}{2^{n+m}}\right]T\right)\right)$$

$$\leqslant C\sum_{s=n}^{n+m}g(T2^{-s}),\tag{7}$$

$$\max_{j_{nm}+1\leqslant j\leqslant 2^{m+1}}\rho\left(\xi\left(\left[\frac{k-1}{2^n}+\frac{j}{2^{n+m}}\right]T\right),\xi\left(\frac{k+1}{2^n}T\right)\right)$$

$$\leqslant C\sum_{s=n}^{n+m}g(T2^{-s}).\tag{8}$$

而且量 $j_{nm}2^{-(n+m)}$ 作为 m 的函数(对固定的 n 和 k)是单调不减的. 当 $m=0$ 时，如果 $\rho\left(\xi\left(\frac{k}{2^n}\right),\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right)\leqslant Cg(T2^{-n})$ 我们就选取 $j_{n0}=0$；如果 $\rho\left(\xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right),\xi\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)\leqslant Cg(T2^{-n})$ 则选取 $j_{n0}=1$. 在假设 D_n 之下这两个不等式中必有一个成立. 设 j_{nm} 已选好，则当

$$\rho\left(\xi\left(\left[\frac{k-1}{2^n}+\frac{2j_{nm}+1}{2^{n+m+1}}\right]T\right),\xi\left(\left[\frac{k-1}{2^n}+\frac{j_{nm}+1}{2^{n+m}}\right]T\right)\right)$$
$$\leqslant Cg(T2^{-(n+m+1)})$$

时定义 $j_{nm+1}=2j_{nm}$；当

$$\rho\left(\xi\left(\left[\frac{k-1}{2^n}+\frac{j_{nm}}{2^{n+m}}\right]T\right),\xi\left(\left[\frac{k-1}{2^n}+\frac{2j_{nm}+1}{2^{n+m+1}}\right]T\right)\right)$$
$$\leqslant Cg(T2^{-(n+m+1)})$$

时定义 $j_{nm+1}=2j_{nm}+1$. 这样的选择是可能的,因为若 D_n 发生，则这两个不等式中必有一个成立；当两个不等式都成立时可在上面指出的值中间任意选取.

在(7)和(8)式中取 $m\to\infty$ 时的极限,我们就得知，对于每一个使 D_n 发生的样本函数,可以找出 $\tau=\tau(\omega),0\leqslant\tau\leqslant T2^{-(n-1)}$，使得

$$\sup_{\substack{0<t<\tau\\ t\in J}}\rho\left(\xi\left(\frac{k-1}{2^n}T\right),\xi\left(\frac{k-1}{2^n}T+t\right)\right)\leqslant CG(n)$$

和

$$\sup_{\substack{\tau<t<T2^{-(n-1)}\\ t\in J}}\rho\left(\xi\left(\frac{k-1}{2^n}T+t\right),\xi\left(\frac{k+1}{2^n}T\right)\right)\leqslant CG(n).$$

设 $\varepsilon\in[2^{-(n+1)}T,2^{-n}T]$ 和 $0<t''-t'<\varepsilon$. 则可以找到一个 k，使得 $(k-1)2^{-n}T\leqslant t'<t''<(k+1)2^{-n}T$. 如果 $t\in[t',t'']$,则或有 $(t',t)\subset[(k-1)2^{-n}T,(k-1)2^{-n}T+\tau]$,或有 $(t,t'')\subset[(k-1)2^{-n}T+\tau,(k+1)2^{-n}T]$. 此外,若 t',t,t'' 是从 J 中选取,则不等式

$$\rho(\xi(t'),\xi(t)) \leqslant 2CG(n), \ \rho(\xi(t),\xi(t'')) \leqslant 2CG(n)$$

中至少有一个成立．根据过程的可分性推得，对于过程的任一个样本函数，这些不等式中的一个以概率 1 成立．因此由 D_n 推得以概率 1 有

$$\Delta_\varepsilon(\xi) \leqslant 2CG(n).$$

根据不等式(5)有

$$\mathbf{P}\{\Delta_\varepsilon(\xi) > 2CG(n)\} \leqslant \mathbf{P}(\bar{D}_n) \leqslant Q(n,C),$$

或者考虑到 $\varepsilon \geqslant 2^{-(n+1)}T$ 及函数 $g(h)$ 和 $q(h)$ 的单调性，我们最终就得到

$$\mathbf{P}\left\{\Delta_\varepsilon(\xi) > CG\left(\left[\lg_2 \frac{T}{2\varepsilon}\right]\right)\right\} \leqslant Q\left(\left[\lg_2 \frac{T}{2\varepsilon}\right], C\right).$$

引理证毕．

基于过程之边沿分布的没有第二类间断点的条件　根据前面的引理可立刻推得下述定理．

定理 1　若 $\xi(t), t \in [0,T]$ 是取值于$\mathscr{Y}$的可分随机连续过程，它满足条件

$$\mathbf{P}\{[\rho(\xi(t),\xi(t-h)) \geqslant Cg(h)] \cap [\rho(\xi(t+h),\xi(t)) \geqslant Cg(h)]\} \leqslant q(C,h), \tag{9}$$

这里

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(T2^{-n}) < \infty, \ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n q(C,T2^{-n}) < \infty, \tag{10}$$

则 $\xi(t)$ 以概率 1 没有第二类间断点．如果除此之外，对某个 n 和 $C \to \infty$ 有

$$Q(n,C) = \sum_{m=n}^{\infty} 2^m q(C,T2^{-m}) \to 0, \tag{11}$$

则对于这过程的每一个样本函数以概率 1 能够找到一常数 α，使得

$$\Delta_\varepsilon(\xi) \leqslant \alpha G\left(\left[\lg_2 \frac{T}{2\varepsilon}\right]\right), \quad \text{对于 } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

这里

$$G(n)=\sum_{m=n}^{\infty}g(T2^{-m}).$$

证. 在不等式(6)中令 $C=1$，我们就看到,在定理的条件下当 $\varepsilon\to 0$ 时 $\Delta_\varepsilon(\xi)$ 依概率趋于零. 但是 $\Delta_\varepsilon(\xi)$ 作为 ε 的函数当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时是单调递减的. 因此当 $\varepsilon\to 0$ 时 $\lim\Delta_\varepsilon(\xi)$ 以概率 1 存在且等于零,这就是定理的第一个论断. 第二个论断也可由条件(11)和引理 4 推出.

作为定理 1 的一种特殊情形,我们讨论满足条件

$$\mathbf{E}[\rho(\xi(t+h),\xi(t))\rho(\xi(t),\xi(t-h))]^p\leqslant Kh^{1+r}\quad(12)$$

的可分随机连续的随机过程,这里 $p>0, r>0$. 如果令 $g(h)=h^{r'/2p}$ 并利用 Чебышев 不等式，我们就看到(9),(10)和(11)式对于 $q(C,h)=\frac{K}{C^{2p}}h^{1+r-r'}$ 和 $0<r'<r$ 成立. 于是我们得到

推论 1 若可分随机连续的随机过程满足条件(12)，则它的样本函数以概率 1 满足下式:

$$\Delta_\varepsilon(\xi)\leqslant\alpha\varepsilon^{r'/2p},$$

式中 $\alpha=\alpha(\omega)$ 是一常数,r' 是$(0,r)$中的任一数.

我们还要提出定理 1 的如下推论.

推论 2 设给定在 $[0,T]$ 上的一个 Q 随机连续的广义随机过程，这过程取值于可分完备的局部紧空间 $\mathscr{Y}$，它的“三维”边沿分布满足条件(9)和(10). 则存在这过程的一个没有第二类间断点的表示.

基于条件概率的没有第二类间断点的条件 在前面的定理中，没有第二类间断点的条件是通过随机过程的边沿(“三维”)分布来表示的. 我们现在给出一些性质上有些不同的结果. 它们是利用有关条件概率的假设，当人们掌握了过程的条件分布的重要知识时就可以应用这些结果.

设 $\{\mathfrak{F}_t, t\in[0,T]\}$ 是一 σ 代数流. 我们约定，过程 $\xi(t)$ 适应于 σ 代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t\in[0,T]\}$,如果对每一 $t\in[0,T]$,随机元 $\xi(t)$

是 $\mathfrak{F}_t$ 可测的.

我们引入如下的量

$$\alpha(\varepsilon,\delta)=\inf\ \sup[\mathbf{P}\{\rho(\xi(s),\xi(t))\geqslant\varepsilon|\mathfrak{F}_s\};$$
$$0\leqslant s\leqslant t\leqslant s+\delta\leqslant T,\omega\in\Omega'],\tag{13}$$

这里 inf 是对所有概率为 1 的子集 $\Omega'(\Omega'\in\mathfrak{S})$ 取的. 不难验证,存在一 Ω_0,使得 $\mathbf{P}(\Omega^0)=1,\Omega^0\in\mathfrak{S}$, 而且下确界在这集合上达到,于是

$$\alpha(\varepsilon,\delta)=\sup\{\mathbf{P}\{\rho(\xi(s),\xi(t))\geqslant\varepsilon|\mathfrak{F}_s\};0\leqslant s\leqslant t\leqslant s+\delta\leqslant T,\omega\in\Omega^0\}.$$

我们要证明条件 $\alpha(\varepsilon,\delta)\to 0$ (对于 $\delta\to 0$ 和任意 $\varepsilon>0$) 能保证可分过程没有第二类间断点. 设区间 $[c,d]\subset[0,T]$ 是固定的, I 是任意有限的时刻序列 $t_1,t_2,\cdots,t_n,s\leqslant c\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n\leqslant d$. 我们用 $A(\varepsilon,Z)$ 表示如下的事件: 随机过程的样本函数 $\xi(t)$ 在 $[c,d]\cap Z$ 上至少有一个 ε 振幅.

引理 5 以概率 1 有

$$\mathbf{P}\{A(\varepsilon,I)|\mathfrak{F}_s\}\leqslant 2\alpha\left(\frac{\varepsilon}{4},d-c\right).\tag{14}$$

证. 首先要指出,因为当 $s<t$ 有 $\mathfrak{F}_s\subset\mathfrak{F}_t$,故由条件数学期望的性质得到对于 $s<t<u$ 有

$$\mathbf{P}\{\rho(\xi(t),\xi(u))\geqslant\varepsilon|\mathfrak{F}_s\}$$
$$=\mathbf{E}\{\mathbf{P}\{\rho(\xi(t),\xi(u))\geqslant\varepsilon|\mathfrak{F}_t\}|\mathfrak{F}_s\}\leqslant\alpha(\varepsilon,u-s).\tag{15}$$

我们现在引入事件

$$B_k=\left\{\rho(\xi(c),\ \xi(t_i))<\frac{\varepsilon}{2},\quad i=1,2,\cdots,k-1,\right.$$
$$\left.\rho(\xi(c),\ \xi(t_k))>\frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

$$C_k=\left\{\rho(\xi(t_k),\ \xi(d))\geqslant\frac{\varepsilon}{4}\right\},D_k=B_k\cap C_k,\ k=1,2,\cdots,n,$$

$$C_0=\left\{\rho(\xi(c),\ \xi(d))\geqslant\frac{\varepsilon}{4}\right\}.$$

事件 B_k 是互不相交的，而且若令 $D = \bigcup_{k=1}^{n} D_k$，则 $A(\varepsilon, I) \subset C_0 \cup D$. 事实上，若 $A(\varepsilon, I)$ 发生，则对某个 k 不等式 $\rho(\xi(c), \xi(t_k)) \geqslant \varepsilon/2$ 首次被满足，即事件 $B_k (k = 1, \cdots, n)$ 中有一个发生. 而且若这时 D 不发生，即若 $\rho(\xi(t_k), \xi(d)) < \frac{\varepsilon}{4}$，则 $\rho(\xi(c), \xi(d)) \geqslant \rho(\xi(c), \xi(t_k)) - \rho(\xi(t_k), \xi(d)) > \frac{\varepsilon}{4}$，即事件 C_0 发生. 于是 $A(\varepsilon, I) \subset C_0 \cup D$. 我们现在以概率 1 有

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\{D_k | \mathfrak{F}_s\} &= \mathbf{E}\{\chi_{D_k} | \mathfrak{F}_s\} = \mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\chi_{B_k}\chi_{C_k} | \mathfrak{F}_{t_k}\} | \mathfrak{F}_s\} \\
&= \mathbf{E}\{\chi_{B_k}\mathbf{P}\{C_k | \mathfrak{F}_{t_k}\} | \mathfrak{F}_s\} \\
&\leqslant \alpha\left(\frac{\varepsilon}{4}, d - c\right) E\{\chi_{B_k} | \mathfrak{F}_s\},
\end{aligned}
$$

这里 χ_A 像通常那样表示事件 A 的示性函数. 由此得

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\{D | \mathfrak{F}_s\} &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{D_k | \mathfrak{F}_s\} \leqslant \alpha\left(\frac{\varepsilon}{4}, d - c\right) \mathbf{E}\left\{\sum_{k=1}^{n} \chi_{B_k} | \mathfrak{F}_s\right\} \\
&\leqslant \alpha\left(\frac{\varepsilon}{4}, d - c\right) (\operatorname{mod} \mathbf{P}).
\end{aligned}
$$

根据(15)式有 $\mathbf{P}\{C_0 | \mathfrak{F}_s\} \leqslant \alpha\left(\frac{\varepsilon}{4}, d - c\right)$. 因此

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\{A(\varepsilon, I) | \mathfrak{F}_s\} &\leqslant \mathbf{P}\{D | \mathfrak{F}_s\} + \mathbf{P}\{C_0 | \mathfrak{F}_s\} \\
&\leqslant 2\alpha\left(\frac{\varepsilon}{4}, d - c\right) (\operatorname{mod} \mathbf{P}),
\end{aligned}
$$

这就证明了引理.

引理 6 设 $A^k(\varepsilon, I)$ 表示事件：$\xi(t)$ 在 I 上至少有 k 个 ε 振幅. 则

$$
\mathbf{P}\{A^k(\varepsilon, I) | \mathfrak{F}_s\} \leqslant \left[2\alpha\left(\frac{\varepsilon}{4}, d - c\right)\right]^k (\operatorname{mod} \mathbf{P}).
$$

证. 令 $B_r(\varepsilon, I)$ 表示事件：过程的样本函数 $\xi(t)$ 在集合 $(t_1, \cdots, t_r)$ 上至少有 $k-1$ 个 ε 振幅，但在集合 $(t_1, \cdots, t_{r-1})$ 上

的 ε 振幅数少于 $k-1$．事件 $B_r(\varepsilon,I)(r=1,\cdots,n)$ 是不相交的，而且 $\bigcup_{r=1}^{n} B_r(\varepsilon,I)=A^{k-1}(\varepsilon,I)\supset A^k(\varepsilon,I)$．另一方面，从 $A^k(\varepsilon,I)\subset B_r(\varepsilon,I)$ 可推得，集合 $(t_r,t_{r+1},\cdots,t_n)$ 上至少有一个 ε 振幅．因而

$$A^k(\varepsilon,I)\subset\bigcup_{r=1}^{n}(B_r(\varepsilon,I)\cap C_r(\varepsilon,I)),$$

其中 $C_r(\varepsilon,I)$ 表示 $\xi(t)$ 在 $(t_r,t_{r+1},\cdots,t_n)$ 上至少有一个 ε 振幅．所以

$$\mathbf{P}\{A^k(\varepsilon,I)|\mathfrak{F}_s\}\leqslant\sum_{r=1}^{n}\mathbf{P}\{B_r(\varepsilon,I)\cap C_r(\varepsilon,I)|\mathfrak{F}_s\}(\mathrm{mod}\mathbf{P}).\tag{16}$$

利用条件数学期望的性质，我们就得到

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{B_r(\varepsilon,I)\cap C_r(\varepsilon,I)|\mathfrak{F}_s\}&=\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\chi_{B_r(\varepsilon,I)}\chi_{C_r(\varepsilon,I)}|\mathfrak{F}_{t_r}\}|\mathfrak{F}_s\}\\&\leqslant\mathbf{E}\{\chi_{B_r(\varepsilon,I)}\mathbf{P}\{C_r(\varepsilon,I)|\mathfrak{F}_{t_r}\}|\mathfrak{F}_s\}\\&\leqslant2\alpha\left(\frac{\varepsilon}{4},d-c\right)\mathbf{P}\{B_r(\varepsilon,I)|\mathfrak{F}_s\}\ (\mathrm{mod}\mathbf{P}).\end{aligned}$$

根据已得的不等式和(16)式推出

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{A^k(\varepsilon,I)|\mathfrak{F}_s\}&\leqslant2\alpha\left(\frac{\varepsilon}{4},d-c\right)\sum_{r=1}^{n}\mathbf{P}\{B_r(\varepsilon,I)|\mathfrak{F}_s\}\\&=2\alpha\left(\frac{\varepsilon}{4},d-c\right)\mathbf{P}\{A^{k-1}(\varepsilon,I)|\mathfrak{F}_s\}(\mathrm{mod}\mathbf{P}),\end{aligned}$$

由此即得所欲证．

定理 2 若 $\xi(t)$ 是可分过程，又对任意 $\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{\delta\to0}\alpha(\varepsilon,\delta)=0,\tag{17}$$

则过程没有第二类间断点．

只须证明以概率 1 每个样本函数 $\xi(t)$ 只有有限多个 ε 振幅．设 J 是过程 $\xi(t)$ 的可分性集合，我们把它表为 $J=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$，这里

$\{I_n\}$ 是单调递增的集合序列，而每一 I_n 只含有限多个元素. 设已给定 $\varepsilon>0$，把 $[0,T]$ 分为 m 个等长的区间 $\Delta_r, r=1,\cdots,m$，使得 $2\alpha\left(\frac{\varepsilon}{4}, \frac{T}{m}\right)=\beta<1$. 于是

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{A^\infty(\varepsilon,J\cap\Delta_r)|\mathfrak{F}_s\} &\leqslant \mathbf{P}\{A^k(\varepsilon,J\cap\Delta_r)|\mathfrak{F}_s\}\\ &=\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{A^k(\varepsilon,I_n\cap\Delta_r)|\mathfrak{F}_s\}\leqslant\beta^k,\end{aligned}$$

因此

$$\mathbf{P}\{A^\infty(\varepsilon,J\cap\Delta_r)|\mathfrak{F}_s\}=0(\mathrm{mod}\mathbf{P}) \text{ 和 } \mathbf{P}\{A^\infty(\varepsilon,J\cap\Delta_r)\}=0.$$

从而 $\mathbf{P}\{A^\infty(\varepsilon,J)\}=0$. 定理证毕.

由已证明的定理我们得到一些重要的推论.

定理 3 取值于线性赋范空间 $\mathscr{Y}$ 的可分随机连续独立增量过程 $\xi(t)$ ($t\in[0,T]$) 没有第二类间断点.

事实上，根据独立增量过程的定义有

$$\mathbf{P}\{|\xi(s)-\xi(t)|\geqslant\varepsilon|\mathfrak{F}_s\}=\mathbf{P}\{|\xi(s)-\xi(t)|\geqslant\varepsilon\}(\mathrm{mod}\mathbf{P}).$$

另一方面，由一致随机连续性(参看 § 2 定理 4)推得对于任意 $\varepsilon>0$，当 $\delta\to0$ 时

$$\alpha(\varepsilon,\delta)=\sup[\mathbf{P}\{|\xi(s)-\xi(t)|\geqslant\varepsilon\};0\leqslant s\leqslant t\leqslant s+\delta\leqslant T]$$

趋于零，因此满足定理 2 的条件.

对于 Марков 过程来说，由定理 2 可推出某些更强的结果.

定理 4 若 $\xi(t)$ ($t\in[0,T]$) 是取值于距离空间 $\mathscr{Y}$ 的可分 Марков 过程，它的转移函数 $\mathbf{P}(t,x,s,A)$ 满足条件：当 $\delta\to0$ 时

$$\alpha(\varepsilon,\delta)=\sup[\mathbf{P}\{s,y,t,\bar{S}_\varepsilon(y)\};y\in\mathscr{Y},0\leqslant s\leqslant t\leqslant s+\delta\leqslant T]\to0,$$

其中 $S_\varepsilon(y)$ 是以点 y 为心，ε 为半径的球，而 $\bar{S}_\varepsilon(y)$ 是它的余集. 则过程 $\xi(t)$ 没有第二类间断点.

这论断可由定理 2 及 Марков 过程的定义直接推得.

没有第二类间断点的过程之样本函数的规则化 前面已经提到，在讨论没有第二类间断点的函数时，我们把在每一点有同一右极限和左极限的函数看作是相同的.

大家回想一下，如果过程是可分的，则以概率 1 样本函数在 t 的值 $\xi(t)$ 是 $t_i\to t$ 时序列 $\xi(t_i)$ 的极限值，这里 t_i 是可分性集合的点．如果这时过程没有第二类间断点，则以概率 1 $\xi(t)$ 在每一点 t 等于 $\xi(t-0)$ 或 $\xi(t+0)$.

定理 5 若 $\xi(t)$ 是没有第二类间断点的随机连续过程，它取值于距离空间 $\mathscr{Y}$．则存在等价于 $\xi(t)$ 的过程 $\xi'(t)$，这过程的样本函数是右连续的（modP）.

证．事件 $A=\left\{\text{对每一 } t\in[0,T),\text{极限 } \lim\limits_{n\to\infty}\xi\left(t+\frac{1}{n}\right)\text{存在}\right\}$

的概率等于 1．当 A 发生时令 $\xi'(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\xi\left(t+\frac{1}{n}\right)$；当 $\bar{A}$ 发生时则令 $\xi'(t)=\xi(t)$．于是有

$$\{\xi'(t)\neq\xi(t)\}=\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{\rho(\xi(t),\ \xi'(t))>\frac{1}{m}\right\}\cap A,$$

$$\mathbf{P}\{\xi'(t)\neq\xi(t)\}=\lim_{m\to\infty}\mathbf{P}\left\{\left[\rho(\xi(t),\ \xi'(t))>\frac{1}{m}\right]\cap A\right\}.$$

另一方面

$$\mathbf{P}\left\{\rho(\xi(t),\ \xi'(t))>\frac{1}{m}\right\}$$

$$=\mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\left\{\rho\left(\xi(t),\xi\left(t+\frac{1}{n}\right)\right)>\frac{1}{m}\right\}\right\}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\mathbf{P}\left\{\bigcap_{n=k}^{\infty}\left\{\rho\left(\xi(t),\xi\left(t+\frac{1}{n}\right)\right)>\frac{1}{m}\right\}\right\}$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\rho\left(\xi(t),\xi\left(t+\frac{1}{n}\right)\right)>\frac{1}{m}\right\}.$$

因此 $\mathbf{P}\{\xi'(t)\neq\xi(t)\}=0$．余下只须注意到在集合 A 上函数 $\xi'(t)$ 是右连续的．定理证毕．

类似地，我们可以证明存在随机等价的左连续过程.

鞅 我们考虑可分半鞅 $\{\xi(t),\mathfrak{F}_t,\ t\in[0,T]\}$ 的样本函数的性质．半鞅和鞅的一般定义在前面已经给出(第 2 章 § 2)．在那

里我们得到了离散参数半鞅的一些重要性质. 应当指出，我们易把第 2 章 § 2 中的不等式搬到可分下鞅的情形. 事实上，对于可分过程来说，事件 $\sup\{\xi(t), t\in[0,T]\}\neq\sup\{\xi(t), t\in I\}$ 的概率等于零，这里 I 是过程 $\xi(t)$ 的可分性集合. 因此对应的随机变量有相同的分布. 其次，如果过程的样本函数 $\xi(t)$ 在 $[0,T]$ 上有 n 次自上而下穿越半开闭区间 $[a,b)$ 而且 $\xi(\cdot)\bar{\in}N$，这里 N 是可分性定义中的例外集，则局限于 I 上的 $\xi(t)$ 也自上而下穿越 $[a,b)$ n 次. 这表明 $\nu_{[0,T]}[a,b)$ 和 $\nu_I[a,b)$ 的分布是相同的(ν 的附标表示过程局限于其上的集合).

定理 6 $[0,T]$上的可分半鞅没有第二类间断点.

为了证明本定理，我们应当基本上重复在证明第 2 章 § 2 定理 1 时所作的推理. 从不等式 $\mathbf{P}\{\sup\{\xi^+(t), t\in[0, T]\}>C\}\leqslant C^{-1}\mathbf{E}\xi^+(T)$ 得到以概率 1 有 $\sup\{\xi(t), t\in[0,T]\}<\infty$. 类似地，从不等式 $\mathbf{E}\nu[a,b)\leqslant(b-a)^{-1}\mathbf{E}(\xi(T)-b)^+$ (当 $a\to-\infty$ 时)推得，以概率为 1 有 $\inf\{\xi(t), t\in[0,T]\}>-\infty$. 其次，因为 $\nu[a,b)$ 可积，故存在集合 $N_1\in\mathfrak{S}$, $\mathbf{P}(N_1)=0$，使得当 $\omega\bar{\in}N_1$ 时 $\xi(t)$ 穿越任意半开闭区间 $[a,b)$ 的次数有限，因此 $\xi(t)$ 没有第二类间断点. 我们可以取所有 $N(a,b)$ 之并作 N_1，这里 $N(a,b)$ 是使得 $\nu[a,b)=\infty$ 的集合，a 和 b 取遍所有有理数而且 $a<b$. 定理证毕.

令 $\mathfrak{F}_{t-0}$ 表示包含 $\mathfrak{F}_s(s<t)$ 的最小 $\mathfrak{S}$ 代数，而 $\mathfrak{F}_{t+0}$ 则是所有 $\mathfrak{F}_s(s>t)$ 之交. 显然有 $\mathfrak{F}_{t-0}\subset\mathfrak{F}_t\subset\mathfrak{F}_{t+0}$，并且 $\xi(t-0)$ 和 $\xi(t+0)$ 分别是 $\mathfrak{F}_{t-0}$ 可测和 $\mathfrak{F}_{t+0}$ 可测的随机变量.

定理 7 设 $\{\xi(t),\mathfrak{F}_t;\ t\in[0,T]\}$ 是可分下鞅. 则 $\{\xi(t+0),\mathfrak{F}_{t+0}; t\in[0,T]\}$ $(\xi(T+0)=\xi(T))$ 也是下鞅，它的样本函数以概率 1 是右连续的. 而且，在 $\mathbf{E}\xi(t)$ 连续和 $\mathfrak{F}_t=\mathfrak{F}_{t+0}$ 的每一点 t 有 $\mathbf{P}\{\xi(t)=\xi(t+0)\}=1$.

证. 注意 $\max(\xi(t),a)$ 是下鞅 (第 2 章 § 2)，而且是一致可积的随机变量族(第 2 章 § 2). 因此，当 $s\leqslant t$ 时对任意 $A\in\mathfrak{F}_s$ 有

$$\int_A \max(\xi(s),a)d\mathbf{P} \leqslant \lim_{t'\downarrow t}\int_A \max(\xi(t'),a)d\mathbf{P}$$

$$= \int_A \max(\xi(t+0),a)d\mathbf{P}.$$

令 $a\to-\infty$ 就得到

$$\int_A \xi(s)d\mathbf{P} \leqslant \int_A \xi(t+0)d\mathbf{P},$$

即

$$\xi(s) \leqslant \mathbf{E}\{\xi(t+0)|\mathfrak{F}_s\}, \quad 对\ s\leqslant t.$$

因此

$$\xi(s+0) \leqslant \mathbf{E}\{\xi(t+0)|\mathfrak{F}_{s+0}\}, 对\ s\leqslant t.$$

这就证明了定理的第一部分. 不难看出，上面的推理也可产生不等式

$$\xi(t) \leqslant \mathbf{E}\{\xi(t+0)|\mathfrak{F}_t\} \leqslant \mathbf{E}\{\xi(t')|\mathfrak{F}_t\}(\mathrm{mod}\mathbf{P}), 对\ t'>t,$$

由此推知,在使得 $\mathfrak{F}_t=\mathfrak{F}_{t+0}$ 的点 t 有

$$\xi(t) \leqslant \xi(t+0) \leqslant \mathbf{E}\{\xi(t')|\mathfrak{F}_t\}\ (\mathrm{mod}\mathbf{P}).$$

现在,若 $\mathbf{E}\xi(t')\to\mathbf{E}\xi(t)$，则 $\xi(t+0)=\xi(t)\ (\mathrm{mod}\mathbf{P})$. 而且我们容易验证,函数 $\xi(t+0)$ 是右连续的. 定理证毕.

§5. 连 续 过 程

没有第二类间断点的过程是连续的条件 和上节一样，我们将假设 $\mathscr{Y}$ 是完备距离空间，$\xi(t)(t\in[0,T])$ 是取值于 $\mathscr{Y}$ 的随机过程.

定义 1 过程 $\xi(t)$ $(t\in[0,T])$ 称做*连续的*，如果它几乎所有的样本函数在 $[0,T]$ 上是连续的.

对于没有第二类间断点的过程，我们能够给出相当简单的连续性充分条件.

定理 1 设 $\{t_{nk},\ k=0,1,\cdots,m_n\}$，$n=1,2,\cdots$——区间 $[0,T]$ 的某一个分划序列，$0=t_{n0}<t_{n1}<\cdots<t_{nm_n}=T$，而且

当 $n\to\infty$ 时 $\lambda_n=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m_n}(t_{nk}-t_{n,k-1})\to 0$. 如果可分过程 $\xi(t)$ 没有第二类间断点，则这过程连续的充分条件是，对于任意 $\varepsilon>0$，当 $n\to\infty$ 时有

$$\sum_{k=1}^{m_n}\mathbf{P}\{\rho[\xi(t_{nk}),\ \xi(t_{n,k-1})]>\varepsilon\}\to 0. \tag{1}$$

证. 以 $\nu_\varepsilon(0\leqslant\nu_\varepsilon\leqslant\infty)$ 表示使得 $\rho[\xi(t+0),\xi(t-0)]>2\varepsilon$ 的那些 t 值的数目，$\nu_\varepsilon^{(n)}$ 表示使得 $\rho[\xi(t_{nk}),\xi(t_{n,k-1})]>\varepsilon$ 的那些附标 k 的数目. 显然有 $\nu_\varepsilon\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\nu_\varepsilon^{(n)}$. 另一方面，

$$\mathbf{E}\nu_\varepsilon^{(n)}=\sum_{k=1}^{m_n}\mathbf{P}\{\rho[\xi(t_{nk}),\xi(t_{n,k-1})]>\varepsilon\}$$

根据 Fatou 引理，$\mathbf{E}\nu_\varepsilon\leqslant\mathbf{E}\varliminf\limits_{n\to\infty}\nu_\varepsilon^{(n)}\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\mathbf{E}\nu_\varepsilon^{(n)}$. 因而 $\mathbf{E}\nu_\varepsilon=0$，即对任意 $\varepsilon>0$ 以概率 1 有 $\nu_\varepsilon=0$. 故对任意 t 以概率 1 有 $\xi(t-0)=\xi(t+0)$. 因为过程是可分的，所以 $\xi(t)=\xi(t-0)=\xi(t+0)$，即过程是连续的.

推论 若 $\{\xi(t),\mathfrak{F}_t;\ t\in[0,T]\}$ 是可分半鞅，又当 $\lambda_n\to 0$ 时有

$$\sum_{k=1}^{m_n}\mathbf{P}\{|\xi(t_{nk})-\xi(t_{n,k-1})|>\varepsilon\}\to 0,$$

则 $\xi(t)$ 是一连续过程.

这推论由可分半鞅没有第二类间断点这一事实推得.

现在，我们把定理 1 应用于满足 § 4 定理 2 条件的过程. 设 $\alpha(\varepsilon,\delta)$ 是由 § 4 的(13)式定义.

定理 2 若过程 $\xi(t)$ 可分且对任意 $\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\mathbf{E}\alpha(\varepsilon,\delta)}{\delta}=0, \tag{2}$$

则过程 $\xi(t)$ 是连续的.

因为若条件(2)成立，则过程 $\xi(t)$ 没有第二类间断点，故只须验证(1)式. 考虑到

$$\mathbf{P}\{\rho[\xi(t_{nk}),\xi(t_{n,k-1})]>\varepsilon\}\leqslant\alpha(\varepsilon,\Delta t_{nk}),$$

式中 $\Delta t_{nk}=t_{nk}-t_{n,k-1}$，我们就得到当 $\lambda_n\to 0$ 时

$$\sum_{k=1}^{m_n}\mathbf{P}\{\rho[\xi(t_{nk}),\xi(t_{n,k-1})]>\varepsilon\}\leqslant(b-a)\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{\mathbf{E}\alpha(\varepsilon,\Delta t_{nk})}{\Delta t_{nk}}\to 0.$$

定理证毕.

把定理 2 应用于 Марков 过程，我们就得到如下的 Марков 过程之连续性条件.

定理 3 若 $\xi(t)$ 是可分 Марков 过程，而且对任意固定的 $\varepsilon>0$ 和 $\delta\to 0$

$$\frac{1}{\delta}\mathbf{P}(s,y,t,\bar{S}_\varepsilon(y))\to 0$$

对 $y,s,t,0\leqslant t-s\leqslant\delta$，一致地成立，则过程 $\xi(t)$ 是连续的.

这里 $\bar{S}_\varepsilon(x)$ 是以点 x 为心，ε 为半径的球 $S_\varepsilon(x)$ 的余集.

独立增量过程 刚才证明的定理只是给出了随机过程为连续的充分条件. 但是，对于独立增量过程这种特殊情形来说，定理 1 的条件也是必要的.

定理 4 如果独立增量过程是连续的，则对区间 $[0,T]$ 的任一使得 $\lambda_n=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m_n}(t_{nk}-t_{n,k-1})\to 0$ 的分划序列 $\{t_{nk};\ k=0,\cdots,m_n\},n=1,2,\cdots$，条件(1)成立.

证. 令 $\Delta_h=\sup\limits_{|t_1-t_2|\leqslant h}\rho[\xi(t_1),\ \xi(t_2)]$. 由过程 $\xi(t)$ 的连续性知，当 $h\to 0$ 以概率 1 有 $\Delta_h\to 0$. 故 $\lim\limits_{h\to 0}\mathbf{P}\{\Delta_h>\varepsilon\}=0$. 另一方面，若 $\lambda_n<h$，则

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\Delta_h>\varepsilon\}&\geqslant\mathbf{P}\{\sup\rho[\xi(t_{nk}),\xi(t_{n,k-1})]>\varepsilon\}\\&=\mathbf{P}\{\rho[\xi(t_{n1}),\xi(t_{n0})]>\varepsilon\}+\mathbf{P}\{\rho[\xi(t_{n1}),\xi(t_{n0})]\\&\leqslant\varepsilon\}\mathbf{P}\{\rho[\xi(t_{n2}),\xi(t_{n1})]>\varepsilon\}+\cdots\\&\quad+\prod_{k=1}^{m_n-1}\mathbf{P}\{\rho[\xi(t_{nk}),\xi(t_{n,k-1})]\leqslant\varepsilon\}\mathbf{P}\{\rho[\xi(t_{nm_n}),\end{aligned}$$

$$\xi(t_{n,m_n-1})>\varepsilon\}\geqslant\mathbf{P}\{\Delta_h\leqslant\varepsilon\}\left[\sum_{k=1}^{m_n}\mathbf{P}\left\{\rho[\xi(t_{nk}),\xi(t_{n,k-1})]>\varepsilon\right\}\right].$$

因此当 $h \to 0$ 时，对任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\{\rho[\xi(t_{nk}), \xi(t_{n,k-1})] > \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathbf{P}\{\Delta_h > \varepsilon\}}{\mathbf{P}\{\Delta_h \leqslant \varepsilon\}} \to 0.$$

定理证毕.

现在不难给出取值于有限维空间的连续独立增量过程的一个完全的描述.

定理 5 取值于 $\mathscr{R}^m$ 的独立增量过程 $\xi(t)(t \geqslant 0, \xi(0) = 0)$ 是连续的，当且只当 $\xi(t)$ 是一 Gauss 过程，而且具有连续的均值 $a(t)$ 和连续的矩阵相关函数 $R(s, t) = \sigma^2(\min(t, s))$，这里 $\sigma^2(t)$ 是一矩阵函数，$\sigma^2(0) = 0$ 且 $\sigma^2(t) - \sigma^2(s)$（对于 $s < t$）是非负定矩阵.

证. 设 $\xi(t)$ 是连续的独立增量过程. 我们要证明 $\xi(t) - \xi(s)$ $(s < t)$ 有正态分布. 取任意向量 $z, z \in \mathscr{R}^m$. 纯量过程 $\eta(t) = (z, \xi(t))$ 也是连续的独立增量过程. 如果我们能证明 $\eta(t) - \eta(s)$ 有正态分布，则由此可推出，$\xi(t) - \xi(s)$ 有 m 维正态分布. 设 $\{t_{nk}; k = 1, \cdots, m_n\}$ 是区间 (s, t) 的一个等长分划，对于这分划有(参看定理 4)

$$\sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\left\{|\eta(t_{nk}) - \eta(t_{n,k-1})| > \frac{1}{n}\right\} < \frac{1}{n}. \tag{3}$$

令 $\eta'_{nk} = \eta(t_{nk}) - \eta(t_{n,k-1}) = \Delta\eta_{nk}$，若 $|\eta(t_{nk}) - \eta(t_{n,k-1})| \leqslant \frac{1}{n}$；否则令 $\eta'_{nk} = 0$. 再令 $\eta'_n = \sum_k \eta'_{nk}$. 由不等式(3)得 $\mathbf{P}\{\eta'_n \neq \eta(t) - \eta(s)\} < \frac{1}{n}$，因此 $\mathbf{P}\text{-}\lim \eta'_n = \eta(t) - \eta(s)$. 设 $a'_{nk} = \mathbf{E}\eta'_{nk}$，$\sigma^2_{nk} = \mathbf{D}\eta'_{nk}$，$a'_n = \sum_k a'_{nk}$ 和 $\sigma^2_n = \sum_k \sigma'_{nk}$. 我们考虑下面两种情形：1) $\underline{\lim}\,\sigma^2_n < \infty$；2) $\lim \sigma^2_n = \infty$. 在第一种情形中存在子序列 n_r，使得 $\lim \sigma^2_{n_r} = \sigma^2 < \infty$. 因为

$$\eta'_{n_r} = a'_{n_r} + \sum_k (\eta'_{n_r k} - a'_{n_r k}),$$

我们可以把中心极限定理应用于上式右边的和数。于是这和数的分布弱收敛于参数为 $(0,\sigma^2)$ 的正态分布。因为 η'_{n_r} 依概率收敛于一极限，故 a'_{n_r} 也应收敛于某一极限 a。于是 $\eta(t)-\eta(s)=a+\eta$，其中 η 是一 Gauss 随机变量。

在第二种情形中，对于任意 $c>0$，可以找到这样的 q_n，使得 $\sum_{k=1}^{q_n}\sigma^2_{nk}\to c$，这是由于 σ^2_{nk} 是一致地小$\left(\sigma^2_{nk}<\frac{1}{n^2}\right)$的缘故。我们可以再次应用中心极限定理于和数 $\sum_1^{q_n}(\eta_{nk}-a_{nk})$。但这时从等式

$$\mathbf{E}e^{iu\eta'_n}=e^{iua'_n}\prod_{k=1}^{q_n}\mathbf{E}e^{iu(\eta'_{nk}-a'_{nk})}$$

推出

$$\overline{\lim}\,|\mathbf{E}e^{iu\eta'_n}|\leqslant\lim\left|\prod_{k=1}^{q_n}\mathbf{E}e^{iu(\eta'_{nk}-a'_{nk})}\right|=e^{-\frac{u^2c^2}{2}},$$

这里 c 是任意的数。因此 $\lim\mathbf{E}e^{iu\eta'_n}=0$，这与 η'_n 收敛于 $\eta(t)-\eta(s)$ 矛盾。所以第二种情形是不可能的。这样一来，我们就证明了 $\xi(t)-\xi(s)$ 有正态分布。设 $a(t)=\mathbf{E}\xi(t)$，$\sigma^2(t)=\mathbf{E}(\xi(t)-a(t))(\xi(t)-a(t))^*$。如果 $t>s$，则对于矩阵相关函数有

$$R(t,s)=\mathbf{E}(\xi(t)-a(t))(\xi(s)-a(s))^*=\sigma^2(s).$$

从 $\xi(t)$ 的连续性推知，特征函数

$$J(u,t)=\mathbf{E}e^{i(u,\xi(t))}=e^{i(a(t),u)-\frac{1}{2}(\sigma^2(t)u,u)}$$

是 t 的连续函数。这当且只当 $a(t)$ 与 $\sigma^2(t)$ 为参数 t 的连续函数和 $\sigma^2(t)$ 满足定理条件时是可能的。定理的第一部分得证。

现在设 $\xi(t)$ 是具有均值 $a(t)$ 和矩阵相关函数 $R(t,s)=\sigma^2(\min(t,s))$ 的 Gauss 过程，其中 $a(t)$ 和 $\sigma^2(t)$ 是连续的。令 $\xi'(t)=\xi(t)-a(t)$。于是若 $t_1<t_2<t_3<t_4$，则

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(\xi'(t_4)-\xi'(t_3))(\xi'(t_2)-\xi'(t_1))^*\\&=R(t_4,t_2)-R(t_3,t_2)-R(t_4,t_1)+R(t_3,t_1)\\&=\sigma^2(t_2)-\sigma^2(t_2)-\sigma^2(t_1)+\sigma^2(t_1)=0,\end{aligned}$$

即过程 $\xi(t)$ 有独立增量．其次

$$\mathbf{E}(\xi'(t_2)-\xi'(t_1))(\xi'(t_2)-\xi'(t_1))^*=\sigma^2(t_2)-\sigma^2(t_1),$$

根据关于 Gauss 分布的矩的著名表示式有

$$\mathbf{E}|\xi'(t_2)-\xi'(t_1)|^4=3[S_p\{\sigma^2(t_2)-\sigma^2(t_1)\}]^2.$$

利用 Чебышев 不等式得当 $\max(t_{nk}-t_{n,k-1})\to 0$ 时有

$$\sum_{k=1}^{m_n}\mathbf{P}\{|\xi'(t_{nk})-\xi'(t_{n,k-1})|>\varepsilon\}$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{m_n}\frac{3[\mathrm{Sp}\{\sigma^2(t_{nk})-\sigma^2(t_{n,k-1})\}]^2}{\varepsilon^4}$$

$$\leqslant\frac{3\max\mathrm{Sp}\{\sigma^2(t_{nk})-\sigma^2(t_{n,k-1})\}}{\varepsilon^4}\mathrm{Sp}\sigma^2(T)\to 0.$$

根据定理 1 知，过程 $\xi'(t)$ 是连续的，因而过程 $\xi(t)$ 也是连续的．定理证毕．

随机过程连续性的 Колмогоров 条件 我们证明随机过程连续性的一个方便而直接的充分条件，其中不需要利用没有第二类间断点的假设．这条件是基于 § 4 引理 3 和引理 4 的一个简化的版本．

引理 1 设 $\xi(t)$ $(t\in[0,T])$ 是满足下述条件的可分过程：存在单调不减的非负函数 $g(h)$ 和函数 $q(C,h),h\geqslant 0$，使得

$$\mathbf{P}\{\rho(\xi(t+h),\xi(t))>Cg(h)\}\leqslant q(C,h)\tag{4}$$

和

$$G=\sum_{n=0}^{\infty}g(2^{-n}T)<\infty,\ Q(C)=\sum_{n=1}^{\infty}2^nq(C,2^{-n}T)<\infty.\tag{5}$$

则

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t'<t''\leqslant T}\rho(\xi(t'),\xi(t''))>N\right\}\leqslant Q\left(\frac{N}{2G}\right)\tag{6}$$

和

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{|t'-t''|\leqslant\varepsilon}\rho(\xi(t'),\xi(t''))>CG\left(\left[\lg_2\frac{T}{2\varepsilon}\right]\right)\right\}$$

$$\leqslant Q\left(\left[\lg_2\frac{T}{2\varepsilon}\right],C\right),\tag{7}$$

其中

$$G(m)=\sum_{n=m}^{\infty}g(2^{-n}T),\ Q(m,C)=\sum_{n=m}^{\infty}2^{n}q(C,2^{-n}T). \quad (8)$$

为证此引理，只须以简化的形式重复证明§4引理3和引理4的推理. 在这里我们只限于给出简单的证明要点. 引入事件

$$A_{nk}=\left\{\rho\left(\xi\left(\frac{k+1}{2^{n}}T\right),\xi\left(\frac{k}{2^{n}}T\right)\right)\leqslant Cg(2^{-n}T)\right\},$$

$$k=0,1,\cdots,2^{n}-1,\ n=0,1,2,\cdots$$

并设 $D_n=\bigcap_{m=n}^{\infty}\bigcap_{k=0}^{2n-1}A_{nk}$. 于是

$$\mathbf{P}\{\overline{D}_n\}\leqslant Q(n,C).$$

由 D_n 得对任意 $t',t''\in J$ 有(所用记号见§4引理3)

$$\rho(\xi(t'),\xi(t''))\leqslant 2CG,$$

如果除 D_n 外还满足不等式 $0\leqslant t''-t'\leqslant 2^{-n}$,则 $\rho(\xi(t'),\xi(t''))\leqslant 2CG(n)$. 通过类似于在完成上面提到的§4的引理证明时所作的推理就可得所欲证的论断. 这时我们应当考虑到，从条件(4)和(5)可推出过程 $\xi(t)$ 的连续性.

定理 6 若满足引理1的条件，则过程 $\xi(t)$ 是连续的. 如果除此之外还有 $Q(m,C)\to 0$ 对某 m 和 $C\to\infty$，则过程 $\xi(t)$ 具有以下性质：以概率1存在常数 $\gamma=\gamma(\omega)$,使得

$$\sup_{|t'-t''|<\varepsilon}\rho(\xi(t'),\xi(t''))\leqslant\gamma G\left(\left[\lg_2\frac{T}{2\varepsilon}\right]\right)\ (\mathrm{mod}\mathbf{P}). \quad (9)$$

本定理易由引理1推出.

作为一种满足条件(4)和(5)的特殊情形，我们讨论满足条件

$$\mathbf{E}\rho^{p}[\xi(t'),\xi(t'')]\leqslant L|t''-t'|^{1+r} \quad (10)$$

的过程,其中 $p>0$, $r>0$. 令 $g(h)=h^{r'/p}$,这里 $0<r'<r$. 于是 $G\left(\left[\lg_2\frac{T}{2\varepsilon}\right]\right)\leqslant K_1\varepsilon^{r'/p}$,而 $Q\left(\left[\lg_2\frac{T}{2\varepsilon}\right],C\right)\leqslant C^{-p}K_2\varepsilon^{(r-r')}$,

其中 K_1 和 K_2 是某两个常数. 现在由定理6可得

推论 1 如果可分随机过程 $\xi(t)$ 满足条件(10)，则它的样本函数以概率 1 满足 Lipschitz 条件

$$\rho(\xi(t'),\xi(t'')] \leqslant \gamma|t''-t'|^{r'/p},$$

其中 $\gamma=\gamma(\omega)$ 是常数，r' 是从 $(0,r)$ 中任意选取的数.

推论 2 考虑满足 $\mathbf{E}[\xi(t+h)-\xi(t)]=0$ 和 $\mathbf{E}[\xi(t+h)-\xi(t)]^2=h$ 的 Wiener 过程 $\xi(t)$. 因为对任意整数 m 有 $\mathbf{E}|\xi\times(t+h)-\xi(t)|^{2m}=(2m-1)!!|h|^m$，故可分 Wiener 过程的样本函数以概率 1 满足 $\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)$ 阶的 Lipschitz 条件，这里 ε 是任意正数.

推论 3 如果可分过程满足条件(4)，(5)和 $q^mG(m)\leqslant K$ 对所有 m 和某一 $q>1$，则过程的样本函数以概率 1 满足 Lipschitz 条件

$$\rho(\xi(t'),\xi(t''))\leqslant\gamma|t''-t'|^{\lg_2 q}.$$

我们还要讨论另一个保证假设(4)，(5)成立的条件，它比(10)更为一般. 设

$$\mathbf{E}\rho^p[\xi(t),\xi(t+h)]\leqslant\frac{L|h|}{|\lg_2|h||^{1+r}},p<r. \tag{11}$$

如果令 $g(h)=|\lg_2|h||^{-r'/p}$，其中 $p<r'<r$，则

$$G=\sum_{n=0}^{\infty}|\lg_2|2^{-n}T||^{-r'/p}<\infty,$$

$$Q(C)\leqslant\frac{LT}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}C^p|\lg_2|2^{-n}T||^{1+r-r'}}<\infty.$$

推论 4 如果可分过程 $\xi(t)$ 满足(11)式，则这过程是连续的.

Gauss 过程 现在，我们把前面的结果应用于一维可分实 Gauss 过程 $\xi(t),t\in[0,T]$，这过程有相关函数 $R(s,t)$ 和零均值. 差 $\xi(t+h)-\xi(t)$ 有方差

$$\sigma^2(t,h)=R(t+h,t+h)-2R(t,t+h)+R(t,t),$$

因此

$$\mathbf{P}\{|\xi(t+h)-\xi(t)|>Cg(h)\}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\infty}e^{-t^2/2}dt,$$

式中 $\alpha=Cg(h)\sigma^{-1}(t,h)$. 利用不等式

$$\int_{\alpha}^{\infty}e^{-t^2/2}dt\leqslant\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha^2/2} \tag{12}$$

(这不等式容易用分部积分法验证)可得

$$\mathbf{P}\{|\xi(t+h)-\xi(t)|>Cg(h)\}\leqslant\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma(t,h)}{Cg(h)}e^{-c^2g^2(h)/2\sigma^2(t,h)}. \tag{13}$$

定理 7 如果 Gauss 过程满足条件

$$\sigma^2(t,h)\leqslant\frac{K}{|\ln|h||^p},\quad p>3, \tag{14}$$

则这过程是连续的.

证. 令 $g(h)=|\ln|h||^{-p'}$,其中 p' 是任一满足不等式 $1<p'<\dfrac{p-1}{2}$ 的数. 于是我们可选取

$$q(C,h)=\frac{K'}{C|\ln|h||^{(p/2)-p'}}e^{-(C^2/2k)|\ln|h||p-2p'},$$

这时级数(5)收敛. 由此即得定理的论断.

根据定理 6 的第二部分还能推得，对于过程的每一个样本函数,以概率 1 可以找到一个常数 $\gamma=\gamma(\omega)$,使得

$$|\xi(t+h)-\xi(t)|\leqslant\gamma\left[\ln\frac{T}{|h|}\right]^{1-p'}.$$

如果我们假设过程的相关函数比较光滑，则样本函数也比较光滑. 设

$$\sigma^2(t,h)\leqslant K|h|^p,\ p>0. \tag{15}$$

由(13)式得知 $q(C,h)$ 能选为

$$q(C,h)=\frac{K_1|h|^{p/2}}{Cg(h)}e^{-C^2g^2(h)/2K|h|^p}.$$

令 $g(h) = |h|^{p/2} |\ln|h||^{1+\varepsilon}$,其中 $\varepsilon > 0$,则当 $C \to \infty$时

$$Q(m, C) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{K_1}{C} \frac{1}{|n - \ln T|^{1+\varepsilon}} e^{-(C^2/2K')|n - \ln T|^{2+2\varepsilon} + n \ln 2}$$

趋于零. 其次,我们有

$$G(m) \leqslant K_3 m^{1+\varepsilon} 2^{-mp/2}.$$

于是我们就得到

定理 8 如果 Gauss 过程的相关函数满足条件(15),则它的样本函数以概率 1 满足下面的不等式:

$$|\xi(t+h) - \xi(t)| \leqslant \gamma |h|^{p/2} |\ln|h||^{1+\varepsilon},$$

其中 ε 是一个任意的正数,而 γ 是一常数.

特别地,可分 Wiener 过程的样本函数以概率 1 满足下面的不等式:

$$|\xi(t+h) - \xi(t)| \leqslant \gamma \sqrt{|h|} \cdot |\ln|h||^{1+\varepsilon}, t, t+h \in [0, T],$$

其中 ε 是任意正数. 这结果改进了定理 6 的推论 2.

第四章 随机过程线性理论

§1. 相关函数

正定核 对于仅仅需要知道随机函数的很一般性质和它的一阶、二阶矩就能解决的一类重要且很广泛的问题的存在，确实是值得注意的. 随机函数线性变换理论的很大一部分就是针对这些问题的，并且它们构成这一章的主要内容. 因而在这一章里，如没有特别声明，所考虑的随机函数均取值于线性空间且具有有限二阶矩.

设 $\zeta(x), x \in X$，是一个具有有限二阶矩的复值随机函数. 我们称这样的随机函数为 Hilbert 随机函数. Hilbert 随机函数可以考虑作为定义在 X 上取值于随机变量的 Hilbert 空间 $\mathscr{L}_2$ 中的一个函数:

$$x \to \zeta(x) = f(x, \omega) \in \mathscr{L}_2.$$

特别，如果 X 是实直线上的一个区间 (a, b)，$\zeta(x)$ 为在 $\mathscr{L}_2$ 中的某一曲线，那末，记号 $\zeta = \zeta(x)$，$x \in (a, b)$ 表示这个曲线的参数方程. 在这一章里主要是考虑 Hilbert 随机函数，所以 Hilbert 一词常被省略. 设

$$a(x) = \mathbf{E}\zeta(x),$$

$$R(x, y) = \mathbf{E}(\zeta(x) - a(x))\overline{(\zeta(y) - a(y))}. \tag{1}$$

函数 $a(x)$ 称为 $\zeta(x)$ 的**平均值**，而 $R(x, y)$ 称为它的**相关函数**. 若令 $x = y$，则 $R(x, x) = \mathbf{E}|\zeta(x) - a(x)|^2 = \sigma^2(x)$ 给出了复随机变量 $\zeta(x)$ 的方差. 相关函数与前面引入的随机变量 $\zeta(x) - a(x)$ 的协方差相同.

利用相关函数代替协方差有时特别有用，因为相关函数有重要的概率解释，即它刻划了随机函数在两点的值之间的线性相关

的程度.

另一方面，在相关函数与协方差之间没有本质的差别. 相关函数是随机函数 $\zeta(x)-a(x)$ 的协方差,而协方差亦可考虑作为关于 $\zeta(x)e^{i\varphi}$ 的相关函数，其中 φ 是均匀分布于 $(-\pi,\pi)$ 的随机变量,并且不依赖于 $\{\zeta(x),x\in X\}$. 这表示相关函数与协方差函数类是一致的. 今后总是把相关函数看作如协方差函数一样.

随机函数 $\zeta(x)$ 的协方差 $B(x_1,x_2)=\mathbf{E}\zeta(x_1)\overline{\zeta(x_2)}$ 具有一个特有的性质,即正定性. 令 X 为任一集合.

定义 1 若复函数 $C(x_1,x_2),(x_1,x_2)\in X^2$, 对任意 $n(n=1,2,\cdots),x_k\in X$ 及复数 $z_k(k=1,2,\cdots,n)$

$$\sum_{k,r=1}^{n} C(x_k,x_r)z_k\bar{z}_r \geqslant 0 \tag{2}$$

则称它为 X^2 上的正定核.

协方差 $B(x_1,x_2)$ 是 X^2 上的正定核. 事实上,

$$\sum_{k,r=1}^{n} B(x_k,x_r)z_k\bar{z}_r = E\left|\sum_{k=1}^{n}\zeta(x_k)z_k\right|^2 \geqslant 0.$$

由定义容易得到下列关于正定核的性质:

1) $C(x,x)\geqslant 0$ (3)

2) $C(x_1,x_2)=\overline{C(x_2,x_1)}$ (4)

3) $|C(x_1,x_2)|^2\leqslant C(x_1,x_1)C(x_2,x_2)$ (5)

4) $|C(x_1,x_3)-C(x_2,x_3)|^2$

$$\leqslant C(x_3,x_3)[C(x_1,x_1)+C(x_2,x_2)-2\mathrm{Re}C(x_1,x_2)]. \tag{6}$$

对于协方差这些性质是不难直接验证的. 为了得到在一般情形下的不等式(3)—(6),首先在(2)中令 $n=1$. 我们得到 $C(x_1,x_1)\times|z_1|^2\geqslant 0$,由此得到(3). 其次令 $n=2$. 我们注意到 $C(x_1,x_2)z_1\bar{z}_2+C(x_2,x_1)\bar{z}_1z_2$ 是实的,从而得到(4). 不等式(5)是 Hermete 二次型

$$\sum_{k,r=1}^{n} C(x_k,x_r)z_k\bar{z}_r$$

正定性条件．为了得到(6)，我们在(2)中令 $n=3, z_1=z,\ z_2=-z$．则

$$[C(x_1,x_1)+C(x_2,x_2)-2\mathrm{Re}C(x_1,x_2)]|z|^2 + 2\mathrm{Re}[C(x_1,x_3)-C(x_2,x_3)]z\bar{z}_3+C(x_3,x_3)|z_3|^2\geqslant 0,$$

从而得到(6)．

若给定两个具有有限矩随机函数 $\zeta_1(x)$ 与 $\zeta_2(x)$，则我们引入互相关函数作为刻划它们之间的线性相关程度．

定义 2 令 $\zeta_1(x)$，$\zeta_2(x)$ 是 Hilbert 随机函数，$\mathbf{E}\zeta_i(x)=a_i(x)$．则

$$R_{\zeta_1\zeta_2}(x,y)=\mathbf{E}[\zeta_1(x)-a_1(x)]\overline{[\zeta_2(y)-a_2(y)]}$$

称为 $\zeta_1(x)$ 与 $\zeta_2(x)$ 的**互相关函数**．

为了描述各种可能的互相关函数类以及为了解决许多其它问题，方便的是把某一 Hilbert 随机函数序列 $\zeta^{(1)}(x),\zeta^{(2)}(x),\cdots,\zeta^{(m)}(x)$，$x\in X$，考虑作为取值 $\mathfrak{Z}^m$ 的随机向量函数 $\zeta(x)$ 的分量．像以前一样，这里 $\zeta(x)$ 表示列向量，而 $\zeta^*(x)$ 是具有分量为 $\zeta_k(x)=\overline{\zeta^{(k)}(x)}$ 的行向量，其中 $k=1,2,\cdots,m$．设

$$a(x)=\mathbf{E}\zeta(x)=\{\mathbf{E}\zeta^{(1)}(x),\mathbf{E}\zeta^{(2)}(x),\cdots,\mathbf{E}\zeta^{(m)}(x)\},$$

$$R(x,y)=|R_k^j(x,y)|=\mathbf{E}(\zeta(x)-a(x))(\zeta(y)-a(y))^*.$$

向量函数 $a(x)=(a^{(1)}(x),\cdots,a^{(m)}(x))$ 称为平均值，而 $R(x,y)$ 称为 $\zeta(x)$ 的矩阵相关函数．

我们注意，

$$R_k^j(x,y)=\mathbf{E}(\zeta^{(j)}(x)-a^{(j)}(x))\overline{(\zeta^{(k)}(y)-a^{(k)}(y))},\quad j,k=1,2,\cdots,m.$$

定义 3 矩阵函数 $C(x,y)=\|C_k^j(x,y)\|, j,k=1,2,\cdots,m$ 称为在 X^2 上的**矩阵正定核**，如果对任意 n，任一复向量 $z_k(z_k\in\mathfrak{Z}^m)$ 序列及任意点 $x_k(x_k\in X)$ 有

$$\sum_{j,k=1}^{n} z_j^* C(x_j,x_k)z_k\geqslant 0. \tag{7}$$

相关矩阵函数是矩阵正定核．事实上，

$$\sum_{j,k=1}^{n} z_j^* R(x_j, x_k) z_k$$

$$= \mathbf{E} \sum_{j,k=1}^{n} z_j^* (\zeta(x_j) - a(x_j))(\zeta(x_k) - a(x_k))^* z_k$$

$$= \mathbf{E} \left| \sum_{k=1}^{n} (\zeta(x_k) - a(x_k))^* z_k \right|^2 \geqslant 0.$$

我们指出矩阵正定核 $C(x,y)$ 的一些性质.

1. 矩阵 $C(x,x)$ 正定,即

$$z^* C(x,x) z = \sum_{j,k=1}^{n} C_k^j(x,x) \bar{z}^j z^p \geqslant 0. \tag{8}$$

2. $C^*(x,y) = C(y,x)$. (9)

3. $|C_k^j(x,y)| \leqslant C_j^j(x,x) C_k^k(y,y)$. (10)

性质 (8) 与 $n = 1$ 时的 (7) 式相一致. 由于对任意复向量 z_1 与 z_2($z_k \in \mathscr{Z}^m$), 矩阵 $z_1^* C(x, y) z_2 + z_2^* C(y, x) z_1$ 是实的, 所以有等式(9). 我们还注意到, 不等式(7)等价于要求对任意 n 及任意 $x_1, x_2, \cdots$,分块矩阵

$$\begin{Vmatrix} C(x_1,x_1) & C(x_1,x_2) & \cdots & C(x_1,x_n) \\ C(x_2,x_1) & C(x_2,x_2) & \cdots & C(x_2,x_n) \\ C(x_n,x_1) & C(x_n,x_2) & \cdots & C(x_n,x_n) \end{Vmatrix}$$

是正定的. 利用这一结论,当 $n = 2$ 时,我们得到不等式(10).

正定性是相关(矩阵)函数的一个特征.

定理 1 函数 $R(x_1,x_2)$, $x_i \in X$ 是相关函数的充分必要条件为它是正定核.

必要性由前面所述定义得到. 充分性是由于任给一正定核 $R(x_1, x_2)$ 可以构造一个复的 Gauss 随机函数 $\xi(x)$, 使得它的相关函数为 $R(x_1,x_2)$.

注. 类似地可以证明, 对于相关矩阵函数,定理1亦成立: 为使矩阵函数 $R(x_1, x_2)$ 是向量 $\zeta(x)$, $x \in X$ 的相关函数,必要充分条件为它是正定矩阵核.

令 $X=\mathscr{X}$ 是一具有距离 ρ 的距离空间.

定义 4 Hilbert 随机函数 $\{\zeta(x),\ x\in\mathscr{X}\}$ 称为依均方在 x_0 点连续 (简称 m.s 连续),如果当 $\rho(x,x_0)\to 0$ 时

$$\mathbf{E}|\zeta(x)-\zeta(x_0)|^2\to 0.$$

从第一章 § 1 引理 3 可得

定理 2 $\zeta(x)$ 在 x_0 点 m. s. 连续的必要充分条件为协方差 $B(x_1,x_2)=\mathbf{E}\zeta(x_1)\overline{\zeta(x_2)}$ 在点 (x_0,x_0) 连续.

注 1. 由 $\zeta(x)$ 在 x_0 点 m.s 连续可得 $\zeta(x)$ 在同样的点上随机连续. 事实上,由 Чебышев 不等式

$$P\{|\zeta(x)-\zeta(x_0)|>\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathbf{E}|\zeta(x)-\xi(x_0)|^2}{\varepsilon^2}$$

可立即得到所述结果.

注 2. 若 $\zeta(x)$ 在 $\mathscr{X}$ 上(即对每一点 x)m.s 连续, 它并不表示样本函数在 $\mathscr{X}$ 上以概率 1 连续. 事实上, 对于 Poisson 过程有 $\mathbf{E}|\zeta(t+h)-\zeta(t)|^2=\lambda h+(\lambda h)^2$, 但 $\zeta(x)$ 的样本函数以正的概率不连续.

广义平稳过程 若假设随机函数 $\zeta(x)$ 关于变量 x 具有某种不变性质,则相应的相关函数类同样也具有某种不变性,因而有可能对这一类更详细地加以描述. 在这一小段里考虑如上述那样限制的一类随机过程,而在下面将叙述相应的相关函数类.

我们从平稳随机过程概念的一个重要的推广开始.

令 $\zeta(t)=\{\zeta^1(t),\zeta^2(t),\cdots,\zeta^m(t)\},\ t\in(-\infty,\infty)$ 是取值于 $\mathscr{Z}^m$ 的平稳过程. 则

$$a(t)=\mathbf{E}\zeta(t),$$

$$R(t_0+t,\ t)=\mathbf{E}(\zeta(t_0+t)-a(t_0+t))\overline{(\zeta(t)-a(t))^*}.$$

不依赖 t,

$$a(t)=a=\text{const},\ R(t_1,t_2)=R(t_1-t_2,0)=R(t_1-t_2)\tag{11}$$

函数 $R(t)=R(t+t_0,t_0)$ 也称为平稳过程的(矩阵)相关函数.

当然,即使对于某一随机过程满足等式(11),也不能得出它是平稳过程. 然而,如果问题的解答仅仅是依赖于过程的前两阶矩的值,则平稳性的条件仅被利用到关系式(11)中表达的那种程度. 因此自然引入下面重要的一类过程,它是首先由 A. Я. Хинчин 考虑的.

定义5 取值于 $\mathfrak{X}^m$ 的 Hilbert 的 m.s 连续的随机过程 $\zeta(t)$, $-\infty < t < \infty$,如果

$$\mathbf{E}\zeta(t) = a = \text{const}, \quad \mathbf{E}(\zeta(t_1) - a)(\zeta(t_2) - a)^* = R(t_1 - t_2),$$

则称它为广义平稳过程(或称为 Хинчин 过程).

令 $\zeta(t)$ 是一维广义平稳过程. 因为相关函数 $R(t_1 - t_2)$ 是正定核,故对任意 $n, t_i \in (-\infty, \infty)$ 及复数 $z_j (j = 1, 2, \cdots n)$,

$$\sum_{j,k}^{n} R(t_j - t_k)\bar{z}_j z_k \geqslant 0.$$

在线性空间$\mathscr{X}$上依赖变数的差的正定核,在许多分析问题中扮演着重要的角色. 它们称为在 $\mathscr{X}$ 上的正定函数.

定义6 令$\mathscr{X}$是线性空间. 复值函数 $f(x), x \in \mathscr{X}$ 称为正定的,若对任意 $n, x_j \in \mathscr{X}$ 及复数 $z_j (j = 1, 2, \cdots, n)$,

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(x_j - x_k)\bar{z}_j z_k \geqslant 0.$$

正定函数具有下列的性质(参考(3)—(6)):

1) $f(0) \geqslant 0$, (12)

2) $\overline{f(x)} = f(-x)$, (13)

3) $|f(x)| \leqslant f(0)$, (14)

4) $|f(x_1) - f(x_2)|^2 \leqslant 2f(0)[f(0) - \mathrm{Re} f(x_2 - x_1)]$. (15)

特别,正定函数在$\mathscr{X}$上有界. 其次,如果在 $x = 0$ 点连续,则它在整个空间 $\mathscr{X}$ 上一致连续.

我们转向讨论取值于 $\mathfrak{X}^m$ 的广义平稳过程. 这样的过程的每一个分量是一维广义平稳过程,而过程的两个分量 $\zeta^j(t)$ 与 $\zeta^k(t)$ 的互相关函数仅依赖于自变量的差值;

$$R_{\zeta^j\zeta^k}(t_1,t_2) = \mathbf{E}(\zeta^j(t_1) - a^j)\overline{(\zeta^k(t_2) - a^k)} = R^j_k(t_1 - t_2).$$

定义 7 若 $\zeta(t)$ 与 $\eta(t)$ 是广义平稳随机过程，且复合的过程 $\xi(t) = \{\zeta(t), \eta(t)\}$ 同样也是广义平稳的，则过程 $\zeta(t)$ 与 $\eta(t)$ 称为平稳相关的(在广义意义下).

由定义得到，广义平稳过程的任一组分量(看作为随机过程)与这个过程的另一组分量是平稳相关的.

定义 8 令 $\mathscr{X}$ 是一线性空间. 矩阵函数 $C(x) = \|C^j_k(x)\|$, $x \in \mathscr{X}, j, k = 1, 2, \cdots, m$ 称为正定的. 如果对任意 n, x_j, z_j 有

$$\sum_{j,k=1}^{n} z_j^* C(x_j - x_k) z_k \geqslant 0,$$

其中 $x_j \in \mathscr{X}$, z_j 是 $\mathscr{Z}^m$ 中的复向量.

因为 $C(x_1 - x_2)$ 是矩阵正定核，所以 $C(x)$ 具有如下的性质(参见(8)—(10)):

1) $C(0)$ 是正定矩阵， (16)

2) $C^*(x) = C(-x)$, (17)

3) $|C^i_j(x)|^2 \leqslant C^i_i(0)C^j_j(0)$. (18)

从定义 5 得到，广义平稳过程的矩阵相关函数是矩阵正定函数. 特别，它具有性质(16)—(18).

广义平稳过程的定义可直接搬用到随机序列 $\{\zeta(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 上. 这时

$$E\zeta(n) = a = \text{const}, \mathbf{E}(\zeta(k+n) - a)(\zeta(k) - a)^* = R(n).$$

在这种情形，矩阵相关函数是一矩阵序列.

我们现在举一些广义平稳序列的相关函数的例子.

例 1 满足条件

$a = \mathbf{E}\zeta(n) = 0, R(0) = 1$, 对于 $n \neq 0$, $R(n) = 0$ 的随机向量序列称为标准不相关序列. 其中 I 为单位矩阵.

例 2 Марков 平稳 Gauss 序列. 我们限于考虑具有实分量，零均值且非退化矩阵 $R(0) = \mathbf{E}\zeta(n)\zeta^*(n)$ 的向量序列. 由后一假设得到，$\zeta(n)$的分布不集中在 $\zeta(n)$ 的值空间的正规子空间内.

因为若 $A=R(1)\times R^{-1}(0)$,则 $\mathbf{E}(\zeta(n+1)-A\zeta(n))\zeta^*(n)=0$,故由过程的 Gauss 性得到, $\zeta(n)$ 与 $\eta(n)=\zeta(n+1)-A\zeta(n)$ 独立. 因此

$$\mathbf{E}\{\zeta(n+1)/\zeta(n)\}=\mathbf{E}\{A\zeta(n)+\eta(n)/\zeta(n)\}=A\zeta(n).$$

设 $\mathfrak{F}_n$ 是由随机变量 $\zeta(s), s\leqslant n$ 产生的 σ 代数. 由于过程的 Марков 性, $\mathbf{E}\{\zeta(s+n)/\mathfrak{F}_n\}=\mathbf{E}\{\zeta(s+n)/\zeta(n)\}$. 因此

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{\zeta(s+n)/\zeta(s)\}&=\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\zeta(s+n)/\mathfrak{F}_{s+n-1}\}/\zeta(s)\}\\&=\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\zeta(s+n)/\zeta(s+n-1)\}/\zeta(s)\}\\&=\mathbf{E}\{A\zeta(s+n-1)/\zeta(s)\}\\&=A^n\zeta(s).\end{aligned}$$

最后,当 $n\geqslant 0$ 时

$$\begin{aligned}R(n)&=\mathbf{E}\{\zeta(s+n)\zeta^*(s)\}=\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\zeta(s+n)|\zeta(s)\}\zeta^*(s)\}\\&=A^nR(0).\end{aligned}$$

因此,平稳 Марков Gauss 序列的相关函数有如下形式,

$$R(n)=A^nR(0)\ (n\geqslant 0). \tag{19}$$

例如,在一维情形,当 $|a|\leqslant 1$ 时

$$R(n)=\sigma^2a^n \qquad (n\geqslant 0). \tag{20}$$

例 3 滑动和过程. 令 $\{\xi(n), n=0,\pm 1,\cdots\}$ 是取值于 $\mathfrak{X}^m$ 的标准不相关随机向量序列. 设

$$\zeta(n)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\xi(n-k), \tag{21}$$

其中 $A_k, k=0,1,2,\cdots$是由 $\mathfrak{X}^m$ 映射到本身的某一矩阵(算子)序列. 在最后的等式右边中的级数代表 $\mathfrak{X}_2^m\{\Omega,\mathfrak{C},\mathbf{P}\}$ 中的正交向量的和,为使它收敛,只须

$$\mathbf{E}\sum_{k=0}^{\infty}|A_k\xi(n-k)|^2\leqslant\mathbf{E}\sum_{k=0}^{\infty}|A_k|^2|\xi(n-k)|^2=\sum_{k=0}^{\infty}|A_k|^2<\infty.$$

这里 $|A|$ 表示矩阵 A 的模,

$$|A|=\sqrt{\mathrm{Sp}(AA^*)}=\sqrt{\sum_{j,k=1}^{m}|a_{jk}|^2}.$$

对于矩阵相关函数，在 $n \geqslant 0$ 时有表达式

$$R(n)=\sum_{k=0}^{\infty} A_{n+k} A_k^{*}. \tag{22}$$

例 4　自回归过程. 令 $\xi(n)$ 是一维标准不相关序列，为了定义序列 $\zeta(n)$，我们考虑有限差分方程:

$$\begin{aligned} &\zeta(n)+b_1\zeta(n-1)+\cdots+b_s\zeta(n-s) \\ &\quad=a_0\xi(n)+a_1\xi(n-1)+\cdots+a_s\xi(n-s). \end{aligned} \tag{23}$$

许多实际问题导出形如(23)的方程，并称它为自回归方程. 显然，如果给定 $\zeta(0), \zeta(1), \cdots, \zeta(s-1)$，则由方程(23)可以通过《初值》$\zeta(0), \cdots, \zeta(s-1)$ 及值 $\xi(0), \xi(1), \cdots$ 依次地表示 $\zeta(s)$，$\zeta(s+1), \cdots$. 我们现在考虑关于在方程(23)中的 $\zeta(n)$ 通过 $\xi(m), m \leqslant n$ 来表示的平稳解的存在性这一问题. 为此目的，我们在形如滑动和过程

$$\zeta(n)=\sum_{k=0}^{\infty} C_k \xi(n-k) \tag{24}$$

中寻求方程(23)的解. 在这一情形下，方程(23)化为一组方程

$$\left.\begin{aligned} &c_0=a_0, c_1+b_1 c_0=a_1, \cdots, \\ &c_s+b_1 c_{s-1}+\cdots+b_s c_0=a_s, \\ &c_p+b_1 c_{p-1}+\cdots+b_s c_{p-s}=0, \quad \text{当 } p>s \text{ 时} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

我们引入序列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$，的母函数 $A(z), B(z), C(z)$:

$$A(z)=\sum_{n=0}^{s} a_n z^n, \quad B(z)=\sum_{n=0}^{s} b_n z^n, \quad C(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

这里 $b_0=1$. 以 $1, z, z^2, \cdots$ 乘等式(25)并将它们相加，得 $C(z)B(z)=A(z)$，或

$$C(z)=\frac{A(z)}{B(z)}=a_0+\frac{zA_1(z)}{B(z)},$$

其中 $A_1(z)$ 是幂次不高于 $s-1$ 的多项式. 我们假定多项式 $B(z)$ 的全部根是单根. 则存在着形如下式的简单分式展开式:

$$\frac{A_1(z)}{B(z)}=\frac{A_1}{z_1-z}+\frac{A_2}{z_2-z}+\cdots+\frac{A_s}{z_s-z},$$

因此

$$C(z)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_1}{z_1^n}+\frac{A_2}{z_2^n}+\cdots+\frac{A_s}{z_s^n}\right)z^n$$

且

$$c_n=\sum_{k=1}^{s}A_k z_k^{-n},\quad n\geqslant 1.\tag{26}$$

在这情形下，如果多项式 $B(z)$ 的根位于圆 $|z|\leqslant 1$ 以外，则级数(24)是 m.s. 收敛的．容易看出，当 $B(z)$ 有重根时，这结果仍然成立．因此，证明了

定理 3 若多项式 $B(z)$ 的全部根位于圆 $|z|\leqslant 1$ 以外，则自回归方程(23)有平稳解(24)，(26)． 这个过程的相关函数 $R(n)$ 满足差分方程

$$R(n)+b_1R(n-1)+\cdots+b_sR(n-s)=0,\ n>s,$$

$$R(n)+b_1R(n-1)+\cdots+b_sR(n-s)$$

$$=a_n\bar{c}_0+a_{n-1}\bar{c}_1+\cdots+a_s\bar{c}_{s-n},\text{当}0\leqslant n\leqslant s.$$

我们引入一些具有连续时间的广义平稳过程相关函数的例子．

作为一个简单的例子似乎是值得注意的．考虑过程 $\zeta(t)$，使得

$$\mathbf{E}\zeta(t)=0,\mathbf{E}|\zeta(t)|^2=1,\ \mathbf{E}\zeta(t)\overline{\zeta(s)}=0,\text{当}\ t\neq s.$$

这个过程的相关函数是间断的，因此它不 m.s. 连续且不属于在这节研究的一类过程．可以证明，这个过程不(随机地)等价于具有可测样本函数的过程．另一方面，类似于这个例子及具有更不规则性质的过程将在一般随机过程理论中研究．

例 5．随机振动． 在许多物理和技术问题中常考虑振动过程：它的复数形式是由形如

$$\zeta(t)=\sum_k \nu_k e^{iU_k t}\tag{27}$$

的函数来描述的．组成这个和式的每一项描述具有频率为 $\frac{u_k}{2\pi}$ 且具有能量为 $|\gamma_k|^2$ 的简谐振动． $\{u_k\}$ 称为过程 $\zeta(t)$ 的谱（或称频谱）．假定 γ_k 是互相正交的随机变量：

$$\mathbf{E}\gamma_k = 0,\ \mathbf{E}|\gamma_k|^2 = c_k^2,\ \mathbf{E}\gamma_k\bar{\gamma}_j = 0,\ 当\ k \neq j\ 时，$$

则过程 $\zeta(t)$ 的相关函数等于

$$R(t_1,t_2) = \mathbf{E}\zeta(t_1)\overline{\zeta(t_2)} = \mathbf{E}\sum_{k,j}\gamma_k\bar{\gamma}_j e^{i(u_k t_1 - u_j t_2)}$$

$$= \sum_k c_k^2 e^{iu_k(t_1-t_2)},$$

即，$\zeta(t)$ 是一广义平稳过程．它的相关函数完全被对应于包含在过程 $\zeta(t)$ 中的每一个简谐振动的频谱和能量的度量的平均值（数学期望）所决定．连系于能量的表示，我们引入平稳过程的谱函数这一重要的特征．

过程(27)的谱函数定义为

$$F(u) = \sum_{k, u_k < u} c_k^2.$$

这意味着 $F(u)$ 等于频率小于给定值 u 的过程的调和分量获得的平均能量． 函数 $F(u)$ 完全刻划过程的每一调和分量的平均能量以及频率位于任一区间的过程的调和分量的平均能量之和．事实上

$$c_k^2 = F(u_k + 0) - F(u_k),\ \sum_{u_1 \leqslant u_k \leqslant u_2} c_k^2 = F(u_2) - F(u_1).$$

借助于谱函数，过程的相关函数可以写为

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} dF(u) \tag{28}$$

从数学观点看，谱函数是非负、不减、左连续函数，除有限个点外均为常数，而在这些点上的跃度为 c_k^2． 谱函数的概念对于任意广义平稳过程也可以引入．这一问题如同对于任意平稳过程的表示式(28)的推广问题一样，我们将在下一节考虑．

§ 2. 相关函数的谱表示

平稳序列 我们首先考虑广义平稳复随机变量序列 $\{\zeta(n), n=\cdots,-1,0,1,\cdots\}$. 对于 $\zeta(n)$,

$$\mathbf{E}\zeta(n)=0, \mathbf{E}\zeta(k+n)\overline{\zeta(k)}=R(n).$$

数列 $R(n)$ 是正定的,即对任意 n 及任意复数 $z_k, k=0,1,2,\cdots,n$,

$$\sum_{j,k=0}^{n} R(j-k)\bar{z}_j z_k \geqslant 0.$$

定理 1 函数 $\{R(n), n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是广义平稳随机序列的相关函数,当且仅当它可以表示为

$$R(n)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{inu}F(du). \tag{1}$$

其中 $F(\cdot)$ 是在 $[-\pi,\pi]$ 上的某一有限测度. 在区间 $[-\pi,\pi]$ 中的 Borel 集上测度 F 被唯一确定.

证. 充分性. 序列(1)是正定的,这是因为,

$$\sum_{j,k=0}^{n} R(j-k)\bar{z}_j z_k=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{j=0}^{n} e^{iju}\bar{z}_j\right)\overline{\left(\sum_{k=0}^{n} e^{iku}\bar{z}_k\right)}F(du)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{j=0}^{n} e^{iju}\bar{z}_j\right|^2 F(du)\geqslant 0.$$

因此它是某一广义平稳序列的相关函数.

必要性. 令 $R(n)$ 是某一广义平稳序列的相关函数. 设

$$f(u,\rho)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} e^{-i(n-m)u}R(n-m)\rho^{n+m},\quad 0<\rho<1. \tag{2}$$

等式(2)右边的级数绝对收敛,这是因为

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\left|e^{-i(n-m)u}R(n-m)\rho^{n+m}\right|\leqslant R(0)\left|\sum_{n=0}^{N}\rho^n\right|^2$$

$$\leqslant \frac{R(0)}{(1-\rho)^2}.$$

由 $R(n)$ 的正定性得 $f(u,\rho) \geqslant 0$. 在(2)中改变求和的次序，得到

$$f(u,\rho) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-iku} R(k) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{|k|+2j} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho^{|k|}}{1-\rho^2} R(k) e^{-iku}.$$

所得到的关系式表明，$\frac{\rho^{|k|}}{1-\rho^2} R(-k)$ 是正定函数 $f(u,\rho)$ 的 Fourier 系数. 因此

$$\frac{\rho^{|n|}}{1-\rho^2} R(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inu} f(u,\rho) du,$$

或

$$\rho^{|n|} R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inu} F_\rho(du), \tag{3}$$

其中

$$F_\rho(A) = \frac{1-\rho^2}{2\pi} \int_A f(u,\rho) du,$$

并且 $F_\rho[-\pi,\pi] = R(0) < \infty$. 测度族 $F_\rho(\cdot)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上弱紧. 因此可以找到这样的序列 $\rho_k \uparrow 1$，使得 $F_{\rho_k}(\cdot)$ 弱收敛于某个测度 $F(\cdot)$. 在(3)中当 $\rho = \rho_k \to 1$ 时求极限，便得到式(1).

我们现在证明测度 F 的唯一性. 设存在定义在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的 Borel 集上的测度 F_1 与 F_2，使得 $R(n)$ 可以按(1)表示. 用 K 表示在 $[-\pi,\pi]$ 满足

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(u) F_1(du) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u) F_2(du)$$

的 Borel 函数 $f(u)$ 的类. 则类 K 是线性的并且关于一致性的极限及有界单调函数序列极限的运算是封闭的. 因为类 K 包含形如 $e^{inu}(n = 0, \pm 1, \cdots)$ 的函数，故由关于连续函数逼近法的 Weierstrass 定理知，类 K 包含全体连续函数，因而也包含全部有界 Borel 函数. 令 $f(u) = \chi_A(u)$，其中 A 是在 $[-\pi,\pi]$ 上的任一 Borel 集，我们得到 $F_1(u) = F_2(u)$. 定理证毕.

测度 F 称为平稳序列的**谱测度**，而对应的分布函数 $F(u) =$

$F(-\infty,u)$ 称为谱函数. 如果 $F(du)=f(u)du$，即如果测度 F 关于 Lebesgue 测度绝对连续，则 $f(u)$ 称为序列 $\zeta(n)$ 的谱密度.

我们指出，条件

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|R(n)|<\infty$$

保证谱密度存在. 事实上，此时 Fourier 级数

$$2\pi f(u)=\sum_{-\infty}^{\infty}R(n)e^{-inu} \tag{4}$$

一致且绝对收敛. 因此

$$R(u)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{inu}f(u)du.$$

齐次随机场 在具有连续参数的广义平稳场的情形下，我们推广定理 1.

定义 1 若随机函数 $\{\zeta(x),x\in\mathscr{R}^m\}$ 有

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{E}\zeta(x)=a=\text{const},\\&R(x_1,x_2)=\mathbf{E}[\zeta(x_1)-a]\overline{[\zeta(x_2)-a]}=R(x_1-x_2)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

则称它为在 $\mathscr{R}^m$ 中的齐次场. 这样一来，齐次随机场的相关函数 $R(x_1,x_2)$ 仅依赖于连结点 x_1 和点 x_2 的向量. 在等式(5)右边的函数 $R(x)$ 亦称为齐次场的相关函数. 相关函数的正定性条件有形式

$$\sum_{j,k=1}^{n}R(x_j-x_k)\bar{z}_jz_k\geqslant 0.$$

从关系式

$$\mathbf{E}|\zeta(x+h)-\zeta(x)|^2=2[R(0)-\mathrm{Re}R(h)]$$

得到，如果函数 $R(x)$ 在点 $x=0$ 连续，则场 $\zeta(x)$ 在每一点 $x\in\mathscr{R}^m$ 均方连续.

定理 2 为使函数 $R(x)$ $(x\in\mathscr{R}^m)$ 是齐次 m.s 连续随机场 $\{\zeta(x),\ x\in\mathscr{R}^m\}$ 的相关函数，必要充分条件为它可以表为

$$R(x)=\int_{\mathscr{R}^m}e^{i(x,u)}F(du), \tag{6}$$

其中 F 是 $\mathscr{R}^m$ 的 Borel 集上的有限测度，而且测度 F 在 $\mathfrak{B}^m$ 上唯一确定。

充分性．由公式(6)定义的函数 $R(x)$ 连续且正定:

$$\sum_{j,k=1}^{n} R(x_j - x_k)\bar{z}_j z_k = \int_{\mathscr{R}^m}\left(\sum_{j,k=1}^{n} e^{i(x_j-x_k,u)}\bar{z}_j z_k\right)F(du)$$

$$= \int_{\mathscr{R}^m}\left|\sum_{k=1}^{n} e^{-i(x_k,u)}z_k\right|^2 F(du) \geqslant 0.$$

因此它是某个 m.s 连续的复 Gauss 场(参阅第三章 § 1)的相关函数．其实，我们可以构造一个很简单的齐次场的例子，它的相关函数由式(6)给出．为此，我们在 $\mathscr{R}^m$ 中引入随机向量 ξ，它具有如下的分布：对于任一 Borel 集 $A\subset\mathscr{R}^m$,

$$P\{\xi\in A\} = \frac{1}{F_0}F(A),\quad F_0 = F(\mathscr{R}^m).$$

令

$$\zeta(x) = \sqrt{F_0}\, e^{i[(\xi,x)+\varphi]},$$

其中 φ 是在 $(-\pi,\pi)$ 上均匀分布的随机变量，φ 与 ξ 相互独立．则

$$\mathbf{E}\zeta(x) = 0, R(x,y) = \mathbf{E}\zeta(x)\overline{\zeta(y)} = F_0\mathbf{E}e^{i(\xi,x-y)}$$
$$= \int_{\mathscr{R}^m} e^{i(x-y,u)}F(du).$$

必要性．我们现在证明，任一连续的正定函数可以表示为式(6)．由正定性条件推得，对任一在 $\mathscr{R}^m$ 中的可积函数 $g(x)$ 成立不等式

$$\int_{\mathscr{R}^m}\int_{\mathscr{R}^m} R(x-y)\overline{g(x)}g(y)dxdy \geqslant 0.$$

我们令 $g(x) = \exp\left\{-\frac{|x|^2}{2N} + i(x,z)\right\}$，其中 $N>0, z\in\mathscr{R}^m$．则

$$\int_{\mathscr{R}^m}\int_{\mathscr{R}^m} R(x-y)\exp\left\{-\frac{|x|^2+|y|^2}{2N} - i(x-y,z)\right\}dxdy \geqslant 0.$$

在空间 $\mathscr{R}^m\times\mathscr{R}^m$ 中引进下面的坐标正交变换，

$$x - y = \sqrt{2}u, \quad x + y = \sqrt{2}v,$$

我们得到

$$0 \leqslant \int_{\mathscr{R}^m}\int_{\mathscr{R}^m} R(u)\exp\left\{-\frac{|u|^2 + |v|^2}{2N} - i(u,z)\right\}dudv$$

$$= (2\pi N)^{m/2}\int_{\mathscr{R}^m} R(u)\exp\left\{-\frac{|u|^2}{2N} - i(u,z)\right\}du.$$

所以，函数

$$\widetilde{R}_N(z) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\int_{\mathscr{R}^m} R(u)e^{-\frac{|u|^2}{2N}}e^{-i(u,z)}du$$

非负．此外，它是可积的连续函数 $R(u)e^{-|u|^2/2N}$ 的 Fourier 变换，而且是可微的． 我们现在证明，$\widetilde{R}_N(z)$ 是可积的．因为 $\widetilde{R}_N(z)$ 与 $e^{-\varepsilon|z|^2/2}(\varepsilon > 0)$ 是相应的函数

$$R(u)e^{-|u|^2/2N} \text{ 与 } \varepsilon^{-m/2}e^{-|u|^2/2\varepsilon}$$

的 Fourier 变换．根据 Parseval 等式，则

$$\int_{\mathscr{R}^m} \widetilde{R}_N(z)e^{-\frac{\varepsilon|z|^2}{2}}dz = \int_{\mathscr{R}^m} R(u)e^{-\frac{|u|^2}{2N}}\frac{1}{\varepsilon^{m/2}}e^{-\frac{|u|^2}{2\varepsilon}}du$$

$$\leqslant R(0)\int_{\mathscr{R}^m}\frac{1}{\varepsilon^{m/2}}e^{-\frac{|u|^2}{2\varepsilon}}du = (2\pi)^{\frac{m}{2}}R(0),$$

令 $\varepsilon \to 0$．应用 Fatou 引理得

$$\int_{\mathscr{R}^m} \widetilde{R}_N(z)dz \leqslant (2\pi)^{\frac{m}{2}}R(0).$$

由 $\widetilde{R}_N(z)$ 的可积性得，对它可应用 Fourier 变换的反演公式

$$R(u)e^{-\frac{|u|^2}{2N}} = \int_{\mathscr{R}^m} e^{i(u,z)}\frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\widetilde{R}_N(z)dz$$

$$= \int_{\mathscr{R}^m} e^{i(u,z)}F_N(dz), \tag{7}$$

其中

$$F_N(A) = \int_A \frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\widetilde{R}_N(z)dz.$$

所以，函数 $\dfrac{R(u)}{R(0)}e^{-|u|^2/2N}$ 是 $\mathscr{R}^m$ 中的某个分布的特征函数，且当

$N \to \infty$ 时，它收敛于一个连续函数。因此(第一章 § 1 定理 3) $R(u)/R(0)$ 也是一个特征函数。根据具有给定的特征函数的分布的唯一性定理得到（第一章 § 1 定理 2）表示式(6)中的测度 F 的唯一性。定理证毕。

如像在序列的情形一样，表示式(6)中的测度 $F(\cdot)$ 称为**谱测度**，而对应的分布函数 $F(u)=F(I_u)$ 称为**谱函数**，其中 $I_u=\{x;x<u,x\in\mathscr{R}^m\}$。如果谱测度绝对连续：

$$F(A)=\int_A f(u)du.$$

则 $f(u)$ 称为随机场的**谱密度**。如果谱密度存在，则相关函数的谱表示变为

$$R(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x,u)}f(u)du.$$

我们指出下面的谱密度存在准则：如果 $R(x)$ 是绝对可积函数 $(x\in\mathscr{R}^m)$，则谱密度是存在的。为证明这个准则，我们利用在证明前面的定理时所得到的关系式和记号。由 Fourier 积分的 Parseval 等式有

$$\begin{aligned}\int_K \tilde{R}_N(z)dz&=\int_{\mathscr{R}^m}\tilde{R}_N(z)\chi_K(z)dz\\&=\int_{\mathscr{R}^m}R(u)e^{-\frac{|u|^2}{2N}}\frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\Pi\frac{e^{i(x^k+h^k)u^k}-e^{i(x^k-h^k)u^k}}{iu^k}du,\end{aligned}$$

其中 $K=\{z;x^k-h^k<z^k<x^k+h^k\}$。从而得到

$$\int_K\tilde{R}_N(z)dz\leqslant\frac{V(K)}{(2\pi)^{m/2}}\int_{\mathscr{R}^m}|R(u)|du,$$

其中 $V(K)$ 是平行六面体 K 的体积。因此，测度 $F(\cdot)$ 关于 Lebesgue 测度是绝对连续的。

推论 1 函数 $R(t),t\in(-\infty,\infty)$ 是广义平稳过程的相关函数的充分必要条件为

$$R(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}F(du),$$

其中 $F(\cdot)$ 是 $\mathfrak{B}^1$ 上的有限测度。

推论 2 函数 $J(u)$, $u\in\mathscr{R}^m$, $J(0)=1$ 是 $\mathscr{R}^m$ 中某一分布的特征函数的必要充分条件为它是连续且正定的.

齐次迷向场 设随机场具有附加的性质，则式(6)可以得到更特殊的形式. 重要且相当一般的性质是随机场的迷向性. 随机场称为是迷向的，如果相关函数 $R(x_1,x_2)$ 仅依赖于 x_2 及点 x_1 与点 x_2 间的距离. 如果它还是齐次的，则

$$R(x_1,x_2)=R(\rho),$$

其中 ρ 是 x_1 与 x_2 间的距离，$\rho=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(x_1^j-x_2^j)^2}$.

我们现在寻找 m. s. 连续的齐次且迷向随机场的相关函数的表达式. 因为它是齐次的，它的相关函数必然有形式(6). 这公式的两边按照半径为 ρ 的球面求积分，我们得到

$$R(\rho)=\frac{\Gamma(m/2)}{2\pi^{m/2}\rho^{m-1}}\int_{\mathscr{R}^m}\left\{\int_{S_\rho}e^{i(x,u)}s(dx)\right\}F(du),$$

其中在括号内的积分中的 $s(dx)$ 是表示按球面 S_ρ 的积分. 我们指出，如果 V_ρ 表示中心在坐标原点且半径为 ρ 的球，则

$$\int_{S_\rho}f(x)s(dx)=\frac{d}{d\rho}\int_{V_\rho}f(x)dx.$$

另一方面，

$$\int_{V_\rho}e^{i(x,u)}dx=\left(\frac{2\pi\rho}{|u|}\right)^{m/2}I_{m/2}(\rho|u|),$$

其中 $I_\nu(x)$ 是第一类 Bessel 函数. 从而得到

$$\int_{S_\rho}e^{i(x,u)}s(dx)=\left(\frac{2\pi\rho}{|u|}\right)^{m/2}|u|I_{(m-2)/2}(\rho|u|). \tag{8}$$

我们在半轴 $[0,\infty)$ 上引入测度 g, 设 $g([a,b))=F\{V_b-V_a\}$, $0\leqslant a\leqslant b$，其中 V_ρ 表示半径为 ρ 的开球. 则

$$R(\rho)=2^{(m-2)/2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\int_0^\infty\frac{I_{(m-2)/2}(\lambda_\rho)}{(\lambda_\rho)^{(m-2)/2}}g(d\lambda), \tag{9}$$

且 $g([0,\infty))=F(\mathscr{R}^m)=R(0)$.

这样一来，证明了下述的定理.

定理 3 为使 $R(\rho),(0\leqslant\rho<\infty)$ 是齐次迷向的 m.s 连续 m 维随机场的相关函数，必须且只须使得它满足表达式(9)，这里 g 是 $[0,\infty)$ 上的有限测度.

当 $n=2$ 时，公式 (9) 变为下面的形式:

$$R(\rho)=\int_0^\infty I_0(\lambda\rho)g(d\lambda), \tag{10}$$

而当 $n=3$ 时

$$R(\rho)=2\int_0^\infty\frac{\sin\lambda\rho}{\lambda\rho}\,g(d\lambda). \tag{11}$$

同理可证，为使 m.s 连续随机场 $\xi(t,x),-\infty<t<\infty,x\in\mathscr{R}^m$ 依变数 (t,x) 是齐次的，并且依《空间》变数 x 是迷向的，即相关函数仅依赖以 t 及 ρ:

$$\mathbf{E}\xi(t+s,x)\overline{\xi(s,y)}=R(t,\rho),$$

其中 ρ 是 x 与 y 之间的距离，其充分必要条件为 $\xi(t,x)$ 的相关函数具有如下形式:

$$R(t,\rho)=\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty e^{itv}\Omega_m(\rho\lambda)g(dv\times d\lambda), \tag{12}$$

其中

$$\Omega_m(x)=\left(\frac{2}{x}\right)^{(m-2)/2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)I_{(m-2)/2}(x), \tag{13}$$

且 g 是在半平面 $(\lambda,v),\lambda\in[0,\infty),v\in(-\infty,\infty)$ 上的测度.

我们现在得到在 Hilbert 空间中的 m.s. 连续齐次迷向场的相关函数的一般形式. 如果 $R(\rho)$ 是这样的相关函数，则对任意 m，函数 $R(\rho)$，$\rho^2=\sum_{k=1}^m(x_k)^2$，是 $\mathscr{R}^m$ 中的 m.s 连续齐次场的相关函数. 我们指出，对任意 λ，函数 $e^{-\frac{\lambda^2\rho^2}{2}}$ 具有这一性质. 事实上，对任意 m

$$e^{-\frac{(x_1^2+\cdots+x_m^2)\lambda^2}{2}}$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\lambda)^m}\int_{-\infty}^\infty\cdots\int e^{i\sum_1^m x_ky_k}e^{-\frac{1}{2\lambda^2}\sum_1^m y_k^2}dy_1\cdots dy_m,$$

即函数 $e^{-\frac{\lambda^2\rho^2}{2}}$，$\rho^2=\sum_{k=1}^{m}x_k^2$ 是正定函数的 Fourier 变换，因此是正定的. 从而得到函数$\left(若\ \rho^2=\sum_{k=1}^{m}x_k^2\right)$

$$R(\rho)=\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda^2\rho^2}{2}}g(d\lambda) \tag{14}$$

对任一 $[0,\infty)$ 上的有限测度 g 以及对任意 m 是正定的. 我们现在证明，公式 (14) 是针对所有在 Hilbert 空间中仅依赖以 ρ 的正定连续函数的.

定理 4 为使函数 $R(\rho)$ 是 Hilbert 空间中的 m.s 连续、齐次迷向随机场的相关函数，其必要充分条件为它具有形式(14).

充分性由前面所述得到. 为证明必要性，我们注意到，根据前述及定理 3，对每一 m，有

$$R(\rho)=\int_0^\infty \Omega_m(\lambda\rho)g_m(d\lambda),\ \ g_m[0,\infty)=R(0),$$

$$\begin{aligned}\Omega_m(x)&=\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{m-2}{2}}I_{\frac{m-2}{2}}(x)\\&=1-\frac{x^2}{2m}+\frac{x^4}{2\cdot 4\cdot m(m+2)}\\&\quad-\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6m(m+2)(m+4)}+\cdots.\end{aligned}$$

此外，在每一有限区间 $|x|\leqslant N$ 上，当 $m\to\infty$ 时，一致地有 $\Omega_m(x\sqrt{m})\to e^{-x^2/2}$. 因此，只需证明，当 $x\in[0,\infty)$时函数族 $\Omega_m(x)$ 一致有界且分布函数族 $g_m(\sqrt{m}u)$弱紧即可. 为此目的，我们注意到，由(8)得到等式

$$\Omega_{m+1}(\rho)=\frac{\int_{S_\rho}e^{i(u,z)}s(du)}{V(S_\rho)}.$$

其中 S_ρ 是空间 $\mathscr{R}^m$ 的球 $|u|=\rho$，$V(S_\rho)$ 是它的曲面面积且 $|z|$

$=1$. 因此

$$|\Omega_m(x)|\leqslant 1.$$

为了证明分布函数序列 $\bar{g}_m(u)=g_m(\sqrt{m}u)$的弱紧性，我们以 ρ 乘关系式

$$R(0)-R(\rho)=\int_0^\infty(1-\Omega_m(\rho u\sqrt{m}))\bar{g}_m(du)$$
$$\geqslant\int_{2/a}^\infty(1-\Omega_m(\rho u\sqrt{m}))\bar{g}_m(du)$$

并且由 0 到 a 积分. 我们得到

$$\frac{2}{a^2}\int_0^a[R(0)-R(\rho)]\rho d\rho$$
$$\geqslant\int_{2/a}^\infty\left(1-\frac{2}{a^2}\int_0^a\Omega_m(\rho u\sqrt{m})\rho d\rho\right)\bar{g}_m(du).$$

由公式

$$\frac{d}{dz}\Omega_m(z)=-\frac{1}{m}z\Omega_{m+2}(z)$$

得到$\left(m\geqslant 3,\ u\geqslant\frac{2}{a}\right)$,

$$\frac{2}{a^2}\int_0^a\Omega_m(\rho u\sqrt{m})\rho d\rho=\frac{2(m-2)}{a^2u^2m}[1-\Omega_{m-2}(au\sqrt{m})]\leqslant\frac{1}{2},$$

从而

$$\frac{2}{a^2}\int_0^a[R(0)-R(\rho)]\rho d\rho\geqslant\frac{1}{2}\bar{g}_m\left(\left[\frac{2}{a},\ \infty\right)\right).$$

由于最后的不等式左边当 $a\to\infty$ 时趋于 0 推出，测度 $\bar{g}_m$ 是紧的(第一章 § 1 定理 1). 定理证毕.

向量值的齐次场 令 $\{\zeta(x);\ x\in\mathscr{R}^m\}$ 是取值于 $\mathscr{Z}^s$ 中的向量值随机场，如果 $\mathbf{E}\zeta(x)=a=\text{const}$ (下面均假定 $a=0$), 且

$$R(x_1,x_2)=\mathbf{E}\zeta(x_1)\zeta(x_2)^*=R(x_1-x_2),$$

则称这个场是齐次的. 矩阵可数可加集函数 $F(A)=\{F_{k,j}(A)\}$, $k,j=1,2,\cdots,s$, $A\in\mathfrak{B}^m$ 称为是正定的，如果对任意 $A\in\mathfrak{B}^m$, 矩阵 $F(A)$ 是正定的，即如果对任意 $c\in\mathscr{Z}^s$, 集函数 $\mu_c(A)=$

$c^*F(A)c$为 $\mathfrak{B}^m$ 上的有限测度。应用定理 2 可以得到下面的结果。

定理 5 为使 $R(x)$ 是 m. s. 连续齐次向量场的矩阵相关函数，必要充分条件为

$$R(x) = \int_{\mathscr{R}^m} e^{i(x,u)} F(du), \tag{15}$$

其中 F 是 $\{\mathscr{R}^m, \mathfrak{B}^m\}$ 上的正定矩阵可数可加集函数。

证．设 $R(x)$ 是 m. s. 连续齐次场的矩阵相关函数． 对任意 $c \in \mathscr{Z}^s$ 我们引进纯量场 $\zeta_c(x) = (\zeta(x), c)$。显然，它是 m. s. 连续并且是齐次的，

$$\mathbf{E}\zeta_c(x) = 0, R_c(x) = \mathbf{E}\zeta_c(x + x_0)\overline{\zeta_c(x_0)} = c^*R(x)c. \tag{16}$$

由定理 2，相关函数 $R_c(x)$ 可以表为

$$R_c(x) = \int_{\mathscr{R}^m} e^{i(x,u)} F_c(du), \tag{17}$$

其中 F_c 是 $\{\mathscr{R}^m, \mathfrak{B}^m\}$ 上的有限测度．设 $e_k \in \mathscr{Z}^s, e_k^j = \delta_k^j, R(x) = \{R_k^j(x)\}, k, j = 1, 2, \cdots, s$． 则 $R_{e_k}(x) = R_k^k(x)$。假定 $e_{kj} = e_k + e_j, \tilde{e}_{kj} = ie_k + e_j$。容易得到，$2R_k^j(x) = [R_{e_{kj}}(x) - R_{e_k}(x) - R_{e_j}(x)] - i[R_{\tilde{e}_{kj}}(x) - R_{e_k}(x) - R_{e_j}(x)]$.

如果假定

$$F_k^k(A) = F_{e_k}(A), F_k^j(A) = [F_{e_{kj}}(A) - F_{kk}(A) - F_{jj}(A)] - i[F_{\tilde{e}_{kj}}(A) - F_{kk}(A) - F_{jj}(A)],$$

则由(16)有

$$R_k^j(x) = \int_{\mathscr{R}^m} e^{i(x,u)} F_k^j(du),$$

并且 $F_k^j(A)$ 是 $\{\mathscr{R}^m, \mathfrak{B}^m\}$ 上的可数可加(复值)有限集函数．由于表示式(17)的唯一性，有 $c^*F(A)c = F_c(A)$，可得矩阵 $F(A) = \{F_k^j(A)\}, k, j = 1, \cdots, s$ 是正定的．必要性证毕．

为了证明充分性，必须证明，由公式(15)定义的函数 $R(x)$(其中 F 满足定理条件)是连续正定的矩阵函数． 它的连续性是显然的．其次，对任意 $z_p \in \mathscr{Z}^s$

$$\sum_{p,q=1}^{n} z_p^* R(x_p - x_q) z_q = \int_{\mathscr{R}^m} w^* F(du) w = F_w(\mathscr{R}^m) \geqslant 0,$$

其中 $w=\sum_{p=1}^{n} e^{-i(x_p,u)}z_p$. 定理证毕.

类似地推广定理 1.

定理 6 矩阵序列 $R(n)=\{R_k^j(n)\}$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 是广义平稳向量值序列 $\{\zeta(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 的矩阵相关函数的必要充分条件为它可表为

$$R(n)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{inu}F(du),$$

其中 $F(A)$ 是定义在区间 $[-\pi,\pi]$ 的 Borel 集上的矩阵正定可数可加集函数.

§ 3. Hilbert 随机函数的分析基础

Hilbert 随机函数的研究，形式上是研究在通常意义下取值于 Hilbert 空间的函数问题. 然而，因为当分析 Hilbert 随机函数的时候,我们利用协方差的概念和其它特殊的概率论概念,以及考虑各种形式的收敛. 因此在处理随机函数问题时具有某种特殊性.

积分 令 $\{\mathscr{X},\mathfrak{A},m\}$ 是具有 σ 有限完备测度的完备可分距离空间,$\{\zeta(x);x\in\mathscr{X}\}$ 是 Hilbert 随机函数. 设 $\zeta(x)=\zeta(x,\omega)$ 是可测且可分的随机函数. 由前面(第三章 § 2)知道,如果协方差 $B(x,y)$ 几乎处处(关于 m)对所有 x, 在点 (x,x) 连续，则对任一 $\zeta(x)$ 存在随机等价的可测且可分的随机函数. 从这里可以看到，上述的假设究竟作了怎样的限制. 由定理 4(第三章 § 2)立即得到

定理 1 如果

$$\int_{\mathscr{X}} B(x,x)m(dx)<\infty, \tag{1}$$

则以概率 1 有

$$\int_{\mathscr{X}} |\zeta(x)|^2 m(dx)<\infty$$

且

$$\mathbf{E}\int_{\mathscr{X}} |\zeta(x)|^2 m(dx)=\int_{\mathscr{X}} B(x,x)m(dx). \tag{2}$$

推论 设 $f_i(x)$, $i=1,2$ 是 $\mathscr{L}_2(\mathscr{X},\mathfrak{A},m)$ 中满足条件(1)的函数．则以概率1存在积分

$$\eta_i=\int_{\mathscr{X}} f_i(x)\zeta(x)m(dx),$$

并且根据 Fubini 定理有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\eta_1\bar{\eta}_2&=\mathbf{E}\int_{\mathscr{X}}\int_{\mathscr{X}} f_1(x)\overline{f_2(y)}\zeta(x)\overline{\zeta(y)}m(dx)m(dy)\\&=\int_{\mathscr{X}}\int_{\mathscr{X}} f_1(x)B(x,y)\overline{f_2(y)}m(dx)m(dy).\end{aligned}$$

下面我们对随机函数的积分定义作一些评注．

注1．设条件(1)满足，且 $m(\mathscr{X})<\infty$．则积分

$$\int_{\mathscr{X}}\zeta(x)m(dx) \tag{3}$$

对可测随机函数 $\zeta(x)$ 有定义，且对每一 $\zeta(x)$ 的现实以概率1有限． 然而在(3)式的积分定义中可以按几种不同的方式来作为它的定义．首先，积分(3)可以定义为对于 $\zeta(x)$ 的 Lebesgue 积分和的 m. s. 极限．容易验证，这个定义与通常的积分定义相一致．为此只须证明对于非负随机变数的情形就够了． 按定义积分(3)是当 $n\to\infty$ 时积分

$$\int_{\mathscr{X}}\zeta_n(x)m(dx)$$

的极限，其中 $\zeta_n(x)$ 单调非负，取有限个值且以概率1有 $\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n(x)=\zeta(x)$ 的随机函数序列．由于 $|\zeta(x)-\zeta_n(x)|\leqslant|\zeta(x)|$，则由 Lebesgue 控制收敛定理，当 $n\to\infty$ 时

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left|\int_{\mathscr{X}}\zeta(x)m(dx)-\int_{\mathscr{X}}\zeta_n(x)m(dx)\right|^2\\&\quad\leqslant\mathbf{E}\int_{\mathscr{X}}|\zeta(x)-\zeta_n(x)|^2m(dx)m(\mathscr{X})\to 0,\end{aligned}$$

因此

$$\int\zeta(x)m(dx)=\text{l.i.m.}\int_{\mathscr{X}}\zeta_n(x)m(dx).$$

注2．考虑随机过程 $\{\zeta(t),t\in[a,b]\}$．积分

$$\int_a^b \zeta(t)dt$$

常常定义为积分和

$$\sum_{k=1}^{n} \zeta(t_{nk})\Delta t_{nk},$$

$$\Delta t_{nk} = t_{nk} - t_{nk-1}, \quad a = t_{n0} < t_{n1} < \cdots < t_{nn} = b.$$

的 m.s. 极限。

根据引理3(第 1 章，§ 1)，为使这和的 m.s. 极限存在，其充分必要条件为当 $n, m \to \infty$ 时

$$\mathbf{E} \sum_{k=1}^{n} \zeta(t_{nk})\Delta t_{nk} \sum_{k=1}^{m} \overline{\zeta(t_{mk})}\Delta t_{mk}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{m} B(t_{nk}, t_{mr})\Delta t_{nk}\Delta t_{mr}$$

的极限存在，即函数 $B(t,s)(a \leqslant t, s \leqslant b)$ 按 Riemann 意义下可积. 这样一来，这里所给的定义较之以前的定义更窄，但它不依赖于过程的可测性的概念. 容易证明，当符合后面的积分定义时，则同样也符合原来的定义 (mod**P**).

事实上，

$$\mathbf{E}\left|\int_a^b \zeta(t)dt - \sum_{k=1}^{n} \zeta(t_{nk})\Delta t_{nk}\right|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \int_{t_{nk-1}}^{t_{nk}} \int_{t_{nr-1}}^{t_{nr}} [B(t,s) - B(t, t_{nr}) - B(t_{nk}, s)$$

$$+ B(t_{nk}, t_{nr})]dtds \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \Omega_{nkr} \to 0,$$

其中 Ω_{nkr} 是函数 $B(t,s)$ 在矩形 $t_{nk-1} \leqslant t \leqslant t_{nk}, t_{nr-1} \leqslant s \leqslant t_{nr}$ 中的振幅.

注 3. 广义 m.s. 积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(t)dt \quad \left(\text{或} \int_a^{\infty} \zeta(t)dt\right) \tag{4}$$

定义为极限

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_{-N}^{N}\zeta(t)dt\quad\left(\text{或 }\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_{a}^{N}\zeta(t)dt\right).$$

根据引理 3(第一章,§ 1),这些积分存在的充分必要条件为极限

$$\lim_{N,N'\to\infty}\int_{-N}^{N}\int_{-N'}^{N'}B(t,s)dtds,\left(\text{或}\lim_{N,N'\to\infty}\int_{a}^{N}\int_{a}^{N'}B(t,s)dtds\right)$$

存在. 在某些情形,这个广义积分定义,比将积分(4)理解为当固定 ω 时对于函数 $\zeta(t)$ 的 Lebesgue 积分更为广泛.

大数定律 设 $\{\zeta(t),\ t\geqslant 0\}$ 是在每一有限区间上具有可积协方差的可测 Hilbert 过程. 如果在某种意义下,当 $T\to\infty$ 时

$$\frac{1}{T}\int_0^T\zeta(t)dt\to c,$$

则称 $\{\zeta(t),t\geqslant 0\}$ 满足**大数定律**.

从引理 3(第一章,§ 1)得到,

$$\underset{T\to\infty}{\text{l.i.m.}}\frac{1}{T}\int_0^T\zeta(t)dt$$

存在的必要充分条件为极限

$$\lim_{T,T'\to\infty}\mathbf{E}\frac{1}{T}\int_0^T\zeta(t)dt\frac{1}{T'}\int_0^{T'}\overline{\zeta(t)}dt$$

$$=\lim_{T,T'\to\infty}\frac{1}{TT'}\int_0^T\int_0^{T'}B(t,s)dtds$$

存在. 其次,等式

$$\underset{T\to\infty}{\text{l.i.m.}}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T\zeta(t)dt-\frac{1}{T}\int_0^T\mathbf{E}\zeta(t)dt\right\}=0$$

成立的充分必要条件为关系式

$$\lim_{T,T'\to\infty}\frac{1}{TT'}\int_0^T\int_0^{T'}R(t,s)dtds=0\tag{5}$$

成立,其中 $R(t,s)$ 是过程的相关函数.

容易看出

$$\left|\int_0^T\int_0^{T'}R(t,s)dtds\right|^2\leqslant\int_0^T\int_0^T R(t,s)dtds\int_0^{T'}\int_0^{T'}R(t,s)dtds.$$

因此等式(5)成立的充分必要条件为

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R(t,s)\,dt\,ds=0. \tag{6}$$

对于广义平稳过程，$R(t,s)=R(t-s)$. 因为

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R(t-s)\,dt\,ds=\frac{1}{T}\int_{-T}^T R(t)\left(1-\frac{|t|}{T}\right)dt,$$

故我们得到下面的结果.

定理 2 若 $\zeta(t)$ 是广义平稳过程，则成立等式

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\zeta(t)\,dt=\mathbf{E}\zeta(t) \tag{7}$$

的必要充分条件为使得

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^T R(t)\left(1-\frac{|t|}{T}\right)dt=0. \tag{8}$$

特别，如果相关函数的平均值等于 0:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^T R(s)\,ds=0,$$

则定理的条件(8)是满足的.

我们用过程的谱函数来表示条件(8). 我们有

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^T R(t)\left(1-\frac{|t|}{T}\right)dt=\int_{-\infty}^{\infty}F(du)\,\frac{1}{T}\int_{-T}^T e^{itu}\left(1-\frac{|t|}{T}\right)dt,$$

从而

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^T R(t)\left(1-\frac{|t|}{T}\right)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2(1-\cos Tu)}{T^2u^2}F(du)$$

$$=F(\{0\})+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2(1-\cos Tu)}{T^2u^2}\tilde{F}(du),$$

其中 $\tilde{F}(A)=F(A\backslash\{0\})$, $\{0\}$ 是由包含一个点 $u=0$ 组成的集合. 容易看出，当 $T\to\infty$ 时，最后的积分趋于 0. 因此

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^T R(t)\left(1-\frac{|t|}{T}\right)dt=F(\{0\}). \tag{9}$$

这样一来，我们有

定理 3 为使广义平稳过程对于等式(7)成立的充分必要条件为它的谱函数在 $u=0$ 点连续.

微分 设 $\{\zeta(t), t\in(a,b)\}, -\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$是 Hilbert 随机过程.

定义 1 如果存在

$$\zeta'(t_0)=\underset{h\to 0}{\text{l.i.m.}}\frac{\zeta(t_0+h)-\zeta(t_0)}{h},\quad t_0,\ t_0+h\in(a,b),$$

则说随机过程 $\zeta(t), t\in(a,b)$ 在 t_0 点 m. s. 可微(在均方意义下可微),随机变量 $\zeta'(t_0)$ 称为随机过程在 t_0 点的 m. s. (均方)导数.

容易得到随机过程 m. s. 可微的充分必要条件. 由于

$$\mathbf{E}\frac{\zeta(t_0+h)-\zeta(t_0)}{h}\cdot\overline{\frac{\zeta(t_0+h_1)-\zeta(t_0)}{h_1}}$$

$$=\frac{1}{hh_1}\{B(t_0+h,t_0+h_1)-B(t_0,t_0+h_1)$$

$$-B(t_0+h,t_0)+B(t_0,t_0)\}\tag{10}$$

故由引理 3(第一章§ 1)可得,为使随机过程 $\zeta(t)$ 在 t_0 点 m. s 可微的充分必要条件为广义混合导数

$$\left.\frac{\partial^2 B(t,t')}{\partial t\partial t'}\right|_{t=t'=t_0}=$$

$$\lim_{h,h_1\to 0}\frac{B(t_0+h,t_0+h_1)-B(t_0,t_0+h_1)-B(t_0+h,t_0)+B(t_0,t_0)}{hh_1}$$

存在.

由过程在 t 点 m. s 可微及不等式

$$\left|\mathbf{E}\left(\zeta'(t)-\frac{\zeta(t+h)-\zeta(t)}{h}\right)\right|\leqslant\left\{\mathbf{E}\left|\zeta'(t)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\zeta(t+h)-\zeta(t)}{h}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

得到

$$\mathbf{E}\zeta'(t)=\frac{d}{dt}\mathbf{E}\zeta(t),\tag{11}$$

并且右边导数存在.

如果在区间 (a,b) 的每一点上过程 $\zeta(t)$ m. s 可微，则导数 $\zeta'(t)$ 为 (a,b) 上的一个 Hilbert 随机过程.

定理 4 设 $\{\zeta(t), t\in(a,b)\}$ 是 Hilbert 随机过程且对每一值 $t\in(a,b)$ 广义导数

$$\left.\frac{\partial^2 B(t,t')}{\partial t\partial t'}\right|_{t=t'}$$

存在. 则过程 $\zeta(t)$ 在(a,b)上 m. s 可微且

$$B_{\zeta'\zeta'}(t,t')=\frac{\partial^2 B(t,t')}{\partial t\partial t'}, \tag{12}$$

$$B_{\zeta'\zeta}(t,t')=\frac{\partial B(t,t')}{\partial t}, \tag{13}$$

其中 $B_{\zeta'\zeta'}(t,t')=\mathbf{E}\zeta'(t)\overline{\zeta'(t')}$ 是过程 $\zeta'(t)$ 的协方差,而 $B_{\zeta'\zeta}(t,t')=\mathbf{E}\zeta'(t)\overline{\zeta(t')}$ 是过程 $\zeta'(t)$ 与 $\zeta(t)$ 的互协方差.

在证明时只须证明公式(12)和(13). 我们有

$$\begin{aligned}B_{\zeta'\zeta}(t,t')&=\mathbf{E}\zeta'(t)\overline{\zeta(t')}\\&=\lim_{h\to 0}\mathbf{E}\left(\frac{\zeta(t+h)-\zeta(t)}{h}\right)\overline{\zeta(t')}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{B(t+h,t')-B(t,t')}{h}.\end{aligned}$$

因此,导数 $\dfrac{\partial B(t,t')}{\partial t}$ 存在且过程 $\zeta'(t)$ 与 $\zeta(t)$ 的互协方差由公式(13)给出. 其次

$$B_{\zeta'\zeta'}(t,t')=\lim_{h,h'\to 0}\mathbf{E}\frac{\zeta(t+h)-\zeta(t)}{h}\overline{\frac{\zeta(t'+h')-\zeta(t')}{h'}}$$

$$=\lim_{h,h'\to 0}\frac{B(t+h,t'+h')-B(t,t'+h')-B(t+h,t')+B(t,t')}{hh'}.$$

从而广义二阶导数

$$\frac{\partial^2 B(t,t')}{\partial t\partial t'}$$

存在(在定理的条件中只假定在 $t=t'$ 这个导数存在)且公式(12)成立。

如果过程 $\zeta(t)$ 广义平稳,则 $B(t,t')=B(t-t')$, 且由定理 4 得到,

推论 1 为使广义平稳过程 $\zeta(t)$ $(t\in T)$ m.s. 可微,必要充分条件为它的相关函数 $R(t)$ 在 $t=0$ 时的广义二阶导数存在. 如果这一条件满足,则存在广义导数 $\frac{d^2R(t)}{\partial t^2}$ 且

$$R_{\zeta'\zeta'}(t_0,t_0+t)=-\frac{d^2R(t)}{dt^2},$$

$$R_{\zeta'\zeta}(t_0+t,\ t_0)=R_{\zeta'\zeta}(t)=\frac{dR(t)}{dt}.$$

对于更高阶的 m.s. 导数,类似结果成立.

推论 2 如果 $\zeta(t)$ 是广义平稳过程, $t\in(-\infty,\infty)$,且

$$\int_{-\infty}^{\infty}u^2F(du)<\infty,$$

其中 F 是过程的谱测度,则过程 m.s. 可微, 过程 $(\zeta'(t),\zeta(t))$ 为广义平稳且它的矩阵相关函数 $R(t)$ 有如下形式:

$$\left\|\begin{matrix}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}u^2F(du) & \int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}iuF(du)\\ -\int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}iuF(du) & \int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}F(du)\end{matrix}\right\|$$

随机过程的正交级数展开 设 $\{\zeta(t),t\in[a,b]\}$是可测 m.s. 连续的 Hilbert 过程. 它的协方差 $B(t_1,t_2)$ 在正方形 $[a,b]\times[a,b]$ 中是连续非负定核. 根据积分方程的理论, $B(t_1,t_2)$ 可以分解成关于特征函数 $\varphi_n(t)$ 的一致收敛级数:

$$B(t_1,t_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n(t_1)\overline{\varphi_n(t_2)},$$

其中

$$\lambda_n\varphi_n(t)=\int_a^b B(t,\tau)\varphi_n(\tau)d\tau,\quad \int_a^b \varphi_n(t)\,\overline{\varphi_m(t)}\,dt=\delta_{nm},$$

并且特征数 λ_n 为正。

假定

$$\zeta_n=\int_a^b \zeta(t)\,\overline{\varphi_n(t)}\,dt.$$

这个积分存在(定理 1),并且由定理 1 的推论,有

$$\mathbf{E}\xi_n\bar{\xi}_m=\int_a^b\int_a^b B(t,\tau)\overline{\varphi_n(t)}\,\varphi_m(\tau)\,dt\,d\tau=\lambda_n\delta_{nm},$$

即随机变量序列 $\xi_n(n=1,2,\cdots)$ 是正交的. 其次

$$\mathbf{E}\zeta(t)\bar{\xi}_n=\int_a^b B(t,\tau)\varphi_n(t)d\tau=\lambda_n\varphi_n(t).$$

故由 Dini 定理得到,当 $n\to\infty$ 时关于 t 一致地

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left|\zeta(t)-\sum_{k=1}^n\xi_k\varphi_k(t)\right|^2\\&=B(t,t)-2\sum_{k=1}^n\overline{\varphi_R(t)}\,\mathbf{E}\zeta(t)\bar{\xi}_k+\sum_{k=1}^n\lambda_k|\varphi_k(t)|^2\\&=B(t,t)-\sum_{k=1}^n\lambda_k|\varphi_k(t)|^2\to 0.\end{aligned}$$

定理 5 可测 m. s. 连续的 Hilbert 过程 $\zeta(t),t\in[a,b]$ 对每一 $t\in[a,b]$ 可分解为依 $\mathscr{L}_2$ 收敛的级数

$$\zeta(t)=\sum_{k=1}^\infty\xi_k\varphi_k(t).\tag{14}$$

在这个分解中,ζ_k 是一正交的随机变量序列,$\mathbf{E}|\xi_k|^2=\lambda_k$,$\lambda_k$ 是特征数,$\varphi_k(t)$ 是过程的协方差特征函数.

注 1. 如果过程 $\zeta(t)$ 是 Gauss 过程, 则它的 m. s. 导数和形如$\int_a^b f(t)\zeta(t)dt$ 的积分是 Gauss 随机变量. 因此, 如果 $\zeta(t)$ 是实的 Gauss 过程且 $\mathbf{E}\zeta(t)=0$, 则级数 (14) 的系数 ξ_k 是独立的 Gauss 变量且级数(14)对每个 t 以概率 1 收敛.

事实上,ξ_k 的独立性由它的正交性和 Gauss 性得到. 为了证

明级数(14)以概率 1 收敛只须证明级数$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}(\xi_k\varphi_k(t))^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \times |\varphi_k(t)|^2$ 收敛即可. 然而正如已经提到过的，这个级数是收敛的(且它的和为 $B(t,t)$).

定理 6 如果

$$\mathbf{E}|\zeta(t)-\zeta(t+h)|^2 \leqslant \frac{L|h|}{|\lg|h||^{3+r}}, r>0, \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{15}$$

则对任意 $\varepsilon>0$,当 $n\to\infty$ 时

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\zeta(t)-\sum_1^n \xi_k\varphi_k(t)\right|>\varepsilon\right\}\to 0.$$

这一定理的证明是根据第三章 § 5 引理 1. 设

$$\zeta_n(t)=\sum_{k=1}^n \xi_k\varphi_k(t), \zeta(t)-\zeta_n(t)=\zeta_n'(t), \gamma_n=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|\zeta(t)-\zeta_n(t)|.$$

从而

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\gamma_n>\varepsilon\} &\leqslant P\left\{|\zeta_n(0)|>\frac{\varepsilon}{2}\right\} \\ &\quad + P\left\{\sup_{a\leqslant t\leqslant b} |\zeta_n'(t)-\zeta_n'(0)|>\frac{\varepsilon}{2}\right\} \\ &\leqslant \frac{4\mathbf{E}|\zeta_n'(0)|^2}{\varepsilon^2}+Q\left(n,\frac{\varepsilon}{4G}\right),\end{aligned}$$

其中 $Q(n,c)$ 及 G 是在前面提到的引理中所定义的. 我们有

$$\mathbf{P}\{|\zeta_n'(t+h)-\zeta_n'(t)|>Cg(h)\}\leqslant\frac{\sigma_n^2(t,h)}{C^2g^2(h)},$$

其中

$$\begin{aligned}\sigma_n^2(t,h) &= \mathbf{E}|\zeta_n'(t+h)-\zeta_n'(t)|^2 \\ &= \mathbf{E}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\xi_k[\varphi_k(t+h)-\varphi_k(t)]\right|^2 \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k|\varphi_k(t+h)-\varphi_k(t)|^2.\end{aligned}$$

考虑到(15),我们看到，函数 $|\lg|h||^{3+r'}\sigma_n^2(t,h)(L|h|)^{-1}$ $(0<r'<r)$ 对 $t\in[a,b]$, $h\in[0,h_0]$ 连续并且当 n 增加时单调减少，而当 $n\to\infty$ 时趋于 0. 由 Dini 定理这个收敛性是一致的. 因此,当 $n\to\infty$ 时

$$\max\left\{\frac{|\lg|h||^{3+r'}\sigma_n^2(t,h)}{L|h|};\ t\in[a,b],\ h\in[0,h_0]\right\}=\delta_n\to 0.$$

令(参考第三章§5) $g(h)=|\lg|h||^{-(1+r'')}$, $0<r''<\frac{r'}{2}$,

$$q_n(C,h)=\frac{L\delta_n|h|}{C^2g^2(h)|\lg|h||^{3+r'}},$$

我们得到

$$G<\infty,\ Q(n,C)\leqslant\frac{K\delta_n}{C^2},$$

其中 K 是某一不依赖于 n 的常数. 所以,当 $n\to\infty$ 时,

$$Q\left(n,\frac{\varepsilon}{4G}\right)\to 0.$$

此外,当 $n\to\infty$ 时,$\mathbf{E}|\zeta_n'(0)|^2\to 0$. 定理证毕.

作为一个例子，考虑在区间[0,1]上的 Brown 运动过程的正交级数分解. 此时 $\zeta(0)=0$, $\mathbf{E}\zeta(t)=0$, $D\zeta(t)=t$, $B(t,s)=\mathbf{E}\zeta(t)\zeta(s)=\min(t,s)$, 核 $B(t,s)$ 的特征数与特征函数容易被找到. 由方程

$$\lambda_n\varphi_n(t)=\int_0^1\min(t,s)\varphi_n(s)ds=\int_0^t s\varphi_n(s)ds+\int_t^1 t\varphi_n(s)ds,$$

首先我们有 $\varphi_n(0)=0$. 对 t 求微分我们得到

$$\lambda_n\varphi_n'(t)=\int_t^1\varphi_n(s)ds,$$

从而 $\varphi_n'(1)=0$. 再一次求微分，我们得到方程 $\lambda_n\varphi_n''(t)=-\varphi_n(t)$. 满足边界条件 $\varphi_n(0)=0$, $\varphi_n'(1)=0$ 的最后的方程的解是

$$\varphi_n(t)=\sqrt{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t,\quad \lambda_n^{-1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2,$$

$$n = 1, 2, \cdots.$$

因此，

$$\zeta(t) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi t}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}, \tag{16}$$

其中 ξ_n 为具有参数(0,1)的独立 Gauss 随机变量．对固定的 t，这一级数以概率 1 收敛．因为 $\zeta(t)$ 是 Gauss 过程且 $\mathbf{E}|\zeta(t+h) - \zeta(t)|^2 = h$，故依概率

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left| \zeta(t) - \sqrt{2} \sum_{k=0}^{n} \xi_n \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi t}{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi} \right| \to 0.$$

Brown 运动过程的另一种分解可以由下面的方法得到．设 $\xi(t) = \zeta(t) - t\zeta(1)$．则 $\xi(t)$是具有协方差为 $B_1(t,s) = \min(t,s) - ts$ 且 $\mathbf{E}\xi(t) = 0$ 的 Gauss 过程． 核 $B_1(t,s)$ 的特征数和特征函数可用与前面的情形一样的方法得到．我们又一次得到具有边界条件 $\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0$ 的方程 $\lambda_n \varphi_n''(t) = -\varphi_n(t)$ 的解为

$$\varphi_n(t) = \sqrt{2} \sin n\pi t, \lambda_n^{-1} = n^2\pi^2, n = 1, 2, \cdots.$$

这样一来，

$$\xi(t) = \zeta(t) - t\zeta(1) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \frac{\sin n\pi t}{n\pi},$$

其中 $\xi_n (n = 1, 2, \cdots)$ 是独立的 Gauss 随机变量标准序列，并且

$$\xi_n = \sqrt{2} \int_0^1 \xi(t) \sin n\pi t \, dt.$$

因为 $\mathbf{E}\zeta(1) = 1$，$\mathbf{E}\zeta^2(1) = 1$，$\mathbf{E}\xi_n\zeta(1) = \sqrt{2}\int_0^1 \mathbf{E}(\zeta(t) - t\zeta(1)) \times \zeta(1) \sin n\pi t \, dt = 0$，令 $\xi_0 = \zeta(1)$，则我们得到．

$$\zeta(t) = t\xi_0 + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \frac{\sin n\pi t}{n\pi}, \tag{17}$$

其中 $\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots$ 独立且具有参数为(0,1)的正态分布。级数(17)的收敛性质与级数(16)相同。

§4. 随机测度与积分

形如

$$\int_a^b f(t)d\zeta(t) \tag{1}$$

的积分在许多问题中起着重要的作用。其中 $f(t)$ 是给定的(非随机的)函数,而 $\zeta(t)$ 是随机过程. 一般地说,过程 $\zeta(t)$ 的现实不是有界变差函数,因而积分(1)不能了解为几乎对一切 $\zeta(t)$ 的现实存在的 Stieltjes 或 Lebesgue-Stieltjes 积分. 然而,即使对于这种情形,积分(1)仍然可以用这样一种方法定义,使得它具有通常积分所具有的性质.

在这一节里给出关于随机测度的积分定义,并且研究这种积分的积分性质. 这样的积分称为随机积分.

令 $\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$ 是一概率空间,$\mathscr{L}_2=\mathscr{L}_2(\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P})$,$E$ 是某一集合且 $\mathfrak{M}$ 是 E 的子集组成的半环. 设对每一 $\Delta\in\mathfrak{M}$. 有相应的一个满足下述条件的复随机变量 $\zeta(\Delta)$:

1) $\zeta(\Delta)\in\mathscr{L}_2$. $\zeta(\phi)=0$;

2) 如果 $\Delta_1\cap\Delta_2=\phi$,则 $\zeta(\Delta_1\cup\Delta_2)=\zeta(\Delta_1)+\zeta(\Delta_2)$ $(\mathrm{mod}\mathbf{P})$;

3) $\mathbf{E}\zeta(\Delta_1)\overline{\zeta(\Delta_2)}=m(\Delta_1\cap\Delta_2)$,

其中 $m(\Delta)$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的某一集函数.

定义 1 满足条件1)—3)的随机变量族 $\{\zeta(\Delta),\ \Delta\in\mathfrak{M}\}$ 称为基本正交随机测度,而 $m(\Delta)$ 是它的构成函数.

随机测度的正交性是由条件3)所表示:如果 $\Delta_1\cap\Delta_2=\phi$,则 $\zeta(\Delta_1)$ 与 $\zeta(\Delta_2)$ 正交.

由 $m(\Delta)$ 的定义得到它是非负的:

$$m(\Delta)=\mathbf{E}|\zeta(\Delta)|^2\geqslant 0,\quad m(\phi)=0,$$

而且它是可加的：如果 $\Delta_1\cap\Delta_2=\phi$，则

$$\begin{aligned}m(\Delta_1\cup\Delta_2)&=\mathbf{E}|\zeta(\Delta_1)+\zeta(\Delta_2)|^2\\&=m(\Delta_1)+m(\Delta_2)+2m(\Delta_1\cap\Delta_2)\\&=m(\Delta_1)+m(\Delta_2).\end{aligned}$$

因此，$m(\Delta)$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的**基本测度**[1].

用 $\mathscr{L}_0\{\mathfrak{M}\}$ 表示全体简单函数 $f(x)$ 所成的类：

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\chi_{\Delta_k}(x),\Delta_k\in\mathfrak{M},k=1,2,\cdots,n, \tag{2}$$

其中 n 是任一数且 $\chi_A(x)$ 是集 A 的示性函数.

用公式

$$\eta=\int f(x)\zeta(dx)=\sum_{k=1}^{n}c_k\zeta(\Delta_k) \tag{3}$$

定义关于函数 $f(x)\in\mathscr{L}_0\{\mathfrak{M}\}$ 对于基本随机测度 ζ 的随机积分.

由于 $\mathfrak{M}$ 是半环，故在 $\mathscr{L}_0\{\mathfrak{M}\}$ 中的任意二个函数均可表为在 $\mathfrak{M}$ 中的相同集合的示性函数的线性组合．因此，如果 f，$g\in\mathscr{L}_0\{\mathfrak{M}\}$，则假定 $f(x)$ 由式(2)给定且 $g(x)=\sum_{k=1}^{n}d_k\chi_{\Delta_k}(x)$，并且当 $k\neq r$ 时 $\Delta_k\cap\Delta_r=\phi$.

由 ζ 的正交性得到

$$\mathbf{E}\left(\int f(x)\zeta(dx)\int\overline{g(x)\zeta(dx)}\right)=\sum_{k=1}^{n}c_k\bar{d}_km(\Delta_k). \tag{4}$$

假定基本测度 m 满足半可加性条件，因此可以扩张为完备测度 $\{E,\mathfrak{L},m\}$．这时 $\mathscr{L}_0\{\mathfrak{M}\}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{L}_2\{\mathfrak{M}\}=\mathscr{L}_2\{E,\mathfrak{L},m\}$ 的线性子集，而 $\mathscr{L}_2\{\mathfrak{M}\}$ 是由内积

$$(f,g)=\int f(x)\overline{g(x)}m(dx) \tag{5}$$

产生的拓扑下 $\mathscr{L}_0\{\mathfrak{M}\}$ 的闭包.

---

1) 定义在半环上的非负可加集函数称为基本测度.

这时，(4) 式可以写为如下的形式：对于 $\mathscr{L}_2\{\mathfrak{M}\}$ 中的任意一对函数 $f(x), g(x)$

$$\mathbf{E}\int f(x)\zeta(dx)\overline{\int g(x)\zeta(dx)} = \int f(x)\overline{g(x)}m(dx). \tag{6}$$

现在我们引入随机变量族 $\{\zeta(\Delta), \Delta\in\mathfrak{M}\}$ 的线性包络 $\mathscr{L}_0\{\zeta\}$，即表为形式(3)的随机变量集，又引入空间 $\mathscr{L}_2\{\zeta\}$，它是在随机变量的 Hilbert 空间 $\mathscr{L}_2\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$ 中 $\mathscr{L}_0\{\zeta\}$ 的闭包. 我们指出，关系式(3)建立了在 $\mathscr{L}_0\{\mathfrak{M}\}$ 与 $\mathscr{L}_0\{\zeta\}$ 之间的一个保距对应 $\eta=\psi(f)$. 这个对应可以扩张为在 $\mathscr{L}_2\{\mathfrak{M}\}$ 与 $\mathscr{L}_2(\zeta)$ 之间的保距对应 ψ. 如果 $\eta=\psi(f), f\in\mathscr{L}_2\{\mathfrak{M}\}$，则根据定义令

$$\eta=\psi(f)=\int f(x)\zeta(dx) \tag{7}$$

且称随机变量 η 为函数 $f(x)$ 关于测度 ζ 的随机积分. 从而得到

定理 1 a) 对于简单函数(2)，随机积分的值由式(3)给定;

b) 对于 $\mathscr{L}_2\{E,\mathfrak{L},m\}$ 中的任意 $f(x)$ 与 $g(x)$ 等式(6)成立;

c) $\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]\zeta(dx)=\alpha\int f(x)\zeta(dx)+\beta\int g(x)\zeta(dx)$;

d) 对任意函数序列 $f^{(n)}(x)\in\mathscr{L}_2\{E,\mathfrak{L},m\}$

使得

$$\int|f(x)-f^{(n)}(x)|^2m(dx)\to 0,\quad n\to\infty, \tag{8}$$

下面的关系式成立

$$\int f(x)\zeta(dx)=\lim\int f^{(n)}(x)\zeta(dx).$$

注. 特别，如果 $f^{(n)}(x)$ 是简单函数，

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=1}^{m_n}c_k^{(n)}\chi_{\Delta_k^{(n)}}(x), \Delta_k^{(n)}\in\mathfrak{M},\ n=1,2,\cdots,$$

且(8)式满足，则

$$\int f(x)\zeta(dx)=\lim\sum_{k=1}^{m_n}c_k^{(n)}\zeta(\Delta_k^{(n)}).$$

由测度论的一般理论得到，存在逼近任意函数 $f(x)\in\mathscr{L}_2\{E,$

$\mathfrak{L}, m\}$ 的简单函数序列. 因此，随机积分可以考虑作为相应的积分和的 m. s. 极限.

用符号 L_0 表示所有满足 $m(A)<\infty$ 的集合 $A\in\mathfrak{L}$ 所组成的类. 我们定义随机集合函数 $\xi(A)$:

$$\xi(A)=\int\chi_A(x)\zeta(dx)=\int_A\zeta(dx). \tag{9}$$

它具有如下性质:

a) $\xi(A)$ 定义在集合类 L_0 上;

b) 如 $A_n\in L_0,\ n=1,2,\cdots,A_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, 当 $k\neq r,k>0$, $r>0,A_k\cap A_r=\phi$,则在 m. s. 收敛意义下

$$\xi(A_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi(A_n);$$

c) $\mathbf{E}\xi(A)\xi(B)=m(A\cap B),A,B\in L_0$;

d) 当 $\Delta\in\mathfrak{M}$ 时 $\xi(\Delta)=\zeta(\Delta)$.

定义 2 满足条件 a),b),c) 的随机集函数 ξ 称为随机正交测度.

性质 d) 表示 ξ 是基本随机测度 ζ 的扩张. 因此，有如下定理.

定理 2 如果基本随机测度 ζ 的构成函数为半可加的，则 ζ 可以扩张为随机测度 ξ.

注. 因为 $\mathscr{L}_2\{\zeta\}=\mathscr{L}_2\{\xi\}$,故

$$\int f(x)\zeta(dx)=\int f(x)\xi(dx).$$

根据这个等式，在以后我们约定，把根据基本正交测度 ζ (它的构成函数是半可加的)定义的随机积分与按关系式(9)定义的随机测度 ξ 的随机积分视为相同的.

我们作一些关于在直线上的某一部分上的随机积分的注释. 令 $\xi(t)$ $(a\leqslant t<b)$ 是一具有正交增量的随机过程,即对任意 $t_i\in[a,b),t_1<t_2<t_3<t_4$,

$$\mathbf{E}(\xi(t_2)-\xi(t_1))\overline{(\xi(t_4)-\xi(t_3))}=0.$$

$\xi(t)$ 为均方左连续：对于 $s\uparrow t$,

$$\mathbf{E}|\xi(t)-\xi(s)|^2\to 0.$$

设

$$F(t)=\mathbf{E}|\xi(t)-\xi(a)|^2.$$

由过程 $\xi(t)$ 的增量的正交性得到，当 $t_2>t_1$ 时

$$F(t_2)=\mathbf{E}|\xi(t_2)-\xi(t_1)+\xi(t_1)-\xi(a)|^2$$
$$=F(t_1)+\mathbf{E}|\xi(t_2)-\xi(t_1)|^2.$$

从而 $F(t_2)\geqslant F(t_1)$ 且 $F(t)=\lim\limits_{s\uparrow t}F(s)$. 因此 $F(t)$ 是单调不减的左连续函数．令 $\mathfrak{M}$ 是全体半开闭区间 $\Delta=[t_1,t_2)$, $a\leqslant t_1<t_2\leqslant b$, 所成的类，$\zeta([t_1,t_2))=\xi(t_2)-\xi(t_1)$, $m([t_1,t_2))=F(t_2)-F(t_1)$, 则 $\mathfrak{M}$ 是半环(集合的)，

$$\mathbf{E}\zeta(\Delta_1)\overline{\zeta(\Delta_2)}=m(\Delta_1\cap\Delta_2),$$

$\zeta(\Delta)$ 是基本正交随机测度，它具有构成函数，因而可以扩张为一测度．这样一来，可以借助于等式

$$\int_a^b f(t)d\xi(t)=\int_a^b f(t)\zeta(dt)$$

定义随机 Stieltjes 积分，其中 $\xi(t)$ 是具有正交增量的随机过程．对任意 Borel 函数 $f(t)$, $t\in[a,b)$,

$$\int_a^b |f(t)|^2F(dt)<\infty,$$

它的随机 Stieltjes 积分是存在的，其中 $F(A)$ 是对应于单调函数 $F(t)$ 的测度．类似地定义关于整个直线$(-\infty,\infty)$的随机积分．

我们现在证明关于随机积分的一些命题．

设 ζ 是具有构成函数 m (它是 $\{E,\mathfrak{L}\}$ 上的完备测度)的正交随机测度，$g(x)\in\mathscr{L}_2\{\mathfrak{M}\}$. 令

$$\lambda(A)=\int\chi_A(x)g(x)\zeta(dx),\quad A\in\mathfrak{L},$$

则

$$\mathbf{E}\lambda(A)\overline{\lambda(B)}=\int\chi_A(x)\chi_B(x)|g(x)|^2m(dx)$$

$$= \int_{A \cap B} |g(x)|^2 m(dx).$$

如果在 $\mathfrak{L}$ 上引入新的测度

$$l(A) = \int_A |g(x)|^2 m(dx),$$

则我们看到，$\lambda(A)$ 是具有构成函数 $l(A)$，$A \in \mathfrak{L}$ 的正交随机测度。

引理 1 若 $f(x) \in \mathscr{L}_2\{l\}$，则 $f(x)g(x) \in \mathscr{L}_2\{m\}$ 并且

$$\int f(x)\lambda(dx) = \int f(x)g(x)\zeta(dx).$$

证．对于简单函数 $f(x)$，$f(x) = \sum_k c_k \chi_{A_k}(x)$，$A_k \in \mathfrak{L}$，引理的断言是显然的． 其次，如果 $f_k(x)$ 是 $\mathscr{L}_2\{l\}$ 中的简单函数基本列，则

$$\left|\int f_n(x)\lambda(dx) - \int f_{n+m}(x)\lambda(dx)\right|^2$$

$$= \int |f_n(x) - f_{n+m}(x)|^2 l(dx)$$

$$= \int |f_n(x) - f_{n+m}(x)|^2 |g(x)|^2 m(dx),$$

即 $f_n(x)g(x)$ 在 $\mathscr{L}_2\{m\}$ 中是基本的．在等式

$$\int f_n(x)\lambda(dx) = \int f_n(x)g(x)\zeta(dx)$$

中当 $n \to \infty$ 时取极限，我们得到在一般情形时引理的断言．

引理 2 若 $A \in L_0$，则

$$\zeta(A) = \int \frac{\chi_A(x)}{g(x)} \lambda(dx).$$

首先我们注意到在 l 测度为 0 的集合上 $g(x) = 0$；因此，$\frac{1}{g(x)} \neq \infty (\bmod l)$．其次

$$\int \frac{\chi_A(x)}{|g(x)|^2} l(dx) = \int_A \frac{1}{|g(x)|^2} |g(x)|^2 m(dx) = m(A) < \infty.$$

因此，可以应用引理 1：

$$\int \frac{1}{g(x)} \chi_A(x)\lambda(dx) = \int \frac{1}{g(x)} \chi_A(x) g(x)\zeta(dx) = \zeta(A).$$

引理证毕.

令 T 是直线上有穷或无穷区间, $\mathfrak{B}$ 是 T 的 Lebesgue 可测子集组成的 σ 代数, l 是 Lebesgue 测度.

设函数 $g(t,x)$ 是 $\mathfrak{B} \times \mathfrak{L}$ 可测, $g(t, x) \in \mathscr{L}_2\{l \times m\}$ 且对任意 $t \in T$, $g(t,x) \in \mathscr{L}_2\{m\}$. 考虑随机积分

$$\xi(t) = \int g(t,x)\zeta(dx). \tag{10}$$

对每一 t, 它以概率为 1 有定义.

引理 3 随机积分(10)可以定义为 t 的函数, 使得过程 $\xi(t)$ 是可测的.

证. 若

$$g(t,x) = \Sigma c_k \chi_{B_k}(t)\chi_{A_k}(x), \tag{11}$$

$B_k \in \mathfrak{B}$, $A_k \in \mathfrak{L}$, 则 $\xi(t) = \Sigma c_k \chi_{B_k}(t)\zeta(A_k)$ 是变数 (t,ω), $t \in T$, $\omega \in \Omega$ 的 $\mathfrak{B} \times \mathfrak{S}$ 可测函数. 在一般情形下, 可以构造形如(11)的简单函数序列 $g_n(t,x)$, 使当 $n \to \infty$ 时

$$\iint |g(t,x) - g_n(t,x)|^2 m(dx)dt \to 0.$$

设 $\xi_n(t)$ 是按式(10)当 $g = g_n$ 时建立的过程序列, 则存在这样的一个过程 $\bar{\xi}(t)$, 使得当 $n \to \infty$ 时

$$\int \mathbf{E}|\bar{\xi}(t) - \xi_n(t)|^2 dt \to 0$$

且 $\bar{\xi}(t)$ 是关于 (t,ω) 的 $\mathfrak{B} \times \mathfrak{S}$ 可测函数. 另一方面,

$$\int \mathbf{E}|\xi(t) - \xi_n(t)|^2 dt = \iint |g(t,x) - g_n(t,x)|^2 m(dx)dt \to 0,$$

从而对几乎所有 t, $\mathbf{E}|\xi(t) - \bar{\xi}(t)|^2 = 0$.

设

$$\xi'(t) = \begin{cases} \bar{\xi}(t), & \text{如果 } P\{\xi(t) \neq \bar{\xi}(t)\} = 0, \\ \xi(t), & \text{如果 } P\{\xi(t) \neq \bar{\xi}(t)\} > 0. \end{cases}$$

则过程 $\xi'(t)$ 可测(因为在测度为 0 的集合上 $\xi'(t)$ 与 $\mathfrak{B} \times \mathfrak{L}$ 可测

函数 $\tilde{\xi}(t)$ 不同)且随机等价于 $\xi(t)$. 引理证毕.

今后,我们考虑由随机积分形式(10)定义的过程时,将假定它们是可测的.

引理 4 若 $g(t,s)$ 与 $h(t)$ 是 Borel 函数,

$$\int_a^b\int_{-\infty}^{\infty}|g(t,s)|^2 dt\, m(ds) < \infty,\quad \int_a^b |h(t)|^2 dt < \infty, \tag{12}$$

ζ 是在 $\{R^1, \mathfrak{B}^1\}$ 上的正交随机测度,则

$$\int_a^b h(t)\int_{-\infty}^{\infty} g(t,s)\zeta(ds)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(s)\zeta(ds), \tag{13}$$

其中

$$g_1(s) = \int_a^b h(t)g(t,s)dt.$$

证. 在等式(13)左边积分的模的平方的数学期望等于

$$\int_a^b\int_a^b h(t_1)\overline{h(t_2)}\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t_1,s)\overline{g(t_2,s)}\, m(ds)\right)dt_1 dt_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_a^b h(t)g(t,s)dt\right|^2 m(ds)$$

$$\leqslant \int_a^b |h(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty}\int_a^b |g(t,s)|^2 dt\, m(ds).$$

在等式(13)右边积分的模的平方的数学期望具有在最后的关系式的第二行所指出的不等式. 因此, 等式(13)的右边和左边关于在 $\mathscr{L}_2\{\Phi\}$ 中收敛的序列 $g_n(t,s)$ 的极限过程是连续的, 其中 Φ 是 Lebesgue 测度与在带形 $[a,b]\times(-\infty,\infty)$ 中的测度 m 的直积. 其次, 使得(13)式成立的函数 $g(t,s)$ 的集合是线性的且包含形如 $\Sigma c_k \chi_{A_k}(t)\chi_{B_k}(\tau)$ 的函数. 因此, 它包含所有 $\mathscr{L}_2\{\Phi\}$ 中的函数.

注. 如果对每一有限区间 (a, b) 引理 4 的条件满足且在 $\mathscr{L}_2\{m\}$ 收敛意义下存在积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)g(t,s)dt = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b h(t)g(t,s)dt,$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\int_{-\infty}^{\infty} g(t,s)\zeta(ds)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s)\zeta(ds), \qquad (14)$$

其中

$$f_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)g(t,s)dt.$$

由于等式(14)的左边是等式(13)左边的均方极限且由于式(13)的右边关于随机积分号下取极限的可能性立即得到所要证的结果.

现在我们考虑把前述结果推广到向量值随机测度情形. 在这里我们仅限于纯量函数的积分这一简单情形, 它与数值随机测度的积分多少有一点差别.

令 $\mathfrak{Z}^p$ 表示某一维数为 p 的复向量空间. 为简便起见, 我们假定在这个空间里的基底是固定的. 我们假定, 每一 $\Delta\in\mathfrak{M}$ 规定对应一个取值于 $\mathfrak{Z}^p$ 的向量随机变量 $\zeta(\Delta)$, $\zeta(\Delta)=\{\zeta^1(\Delta), \zeta^2(\Delta),\cdots,\zeta^p(\Delta)\}$. 用 $|\zeta(\Delta)|$ 表示向量 $\zeta(\Delta)$ 的模,

$$|\zeta(\Delta)|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\zeta^k(\Delta)|^2.$$

我们假定

1) $\mathbf{E}|\zeta(\Delta)|^2<\infty$, $\zeta(\phi)=0$;

2) 如果 $\Delta_1\cap\Delta_2=\phi, \zeta(\Delta_1\cup\Delta_2)=\zeta(\Delta_1)+\zeta(\Delta_2)(\text{mod}\mathbf{P})$;

3) $\mathbf{E}\zeta^k(\Delta_1)\overline{\zeta^j(\Delta_2)}=m_j^k(\Delta_1\cap\Delta_2), \Delta_i\in\mathfrak{M}, i=1,2; k,j=1,2,\cdots,p$.

随机向量族 $\{\zeta(\Delta), \Delta\in\mathfrak{M}\}$ 称为**基本向量值随机(正交)测度**, 而矩阵 $m(\Delta)=\{m_j^k(\Delta)\}=\mathbf{E}\zeta(\Delta)\zeta^*(\Delta)$ 称为**构成矩阵**.

我们指出, 考虑作为 Δ_1 与 Δ_2 的函数的矩阵 $m(\Delta_1\cap\Delta_2)$ 具有向量随机函数相关矩阵的性质(参阅§1). 此外, 如果 $\Delta_1\cap\Delta_2=\phi$, 则

$$m(\Delta_1\cup\Delta_2)=m(\Delta_1)+m(\Delta_2).$$

从而得到, 矩阵 $m(\Delta)$ 的对角线元素是基本测度. 此外, 由不等式

$$|m_j^k(\Delta)| \leqslant \sqrt{m_k^k(\Delta) m_j^j(\Delta)} \tag{15}$$

得到

$$\sum_r |m_j^k(\Delta_r)| \leqslant \left\{\sum_r m_k^k(\Delta_r) \sum_r m_j^j(\Delta_r)\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{16}$$

因此，集函数 $m_j^k(k, j=1, \cdots, p)$ 在Δ上是有界变差的.

设 $m_0(\Delta) = \mathrm{Sp}m(\Delta) = \sum_{k=1}^{p} m_k^k(\Delta)$. 由(16)式得到，如果当 $N \to \infty$ 时 $\sum_{r=1}^{m_N} m_0(\Delta_r^N) \to 0$，则也有 $\sum_{r=1}^{m_N} |m_j^k(\Delta_r^N)| \to 0$. 所以我们得到，如果函数 $m_0(\Delta)$ 在$\mathfrak{M}$上半可加，则函数 $m_j^k(\Delta)$ 可以扩张为在 $\mathfrak{B}$ 上的可数可加集函数.

往后我们把借助于基本正交随机测度的构成函数扩张的方法得到的矩阵函数称之为**正定矩阵测度**.

上面我们用 $\mathscr{L}$ 表示关于由基本测度 $m_0(\Delta)$ 扩张的 $\sigma\{\mathfrak{M}\}$ 的完备化. 为了简单起见，对于函数 m_j^k，m_0 和矩阵 m 在 $\mathfrak{B}$ 上的扩张，我们将保留原来的记号. 并且在往后总认为 $m_0(\Delta)$ 在$\mathfrak{M}$上是半可加的.

应用下式

$$\eta = \int f(x)\zeta(dx) = \sum_{k=1}^{n} c_k \zeta(\Delta_k), \tag{17}$$

在$\mathscr{L}_0\{\mathfrak{M}\}$ 上我们定义随机积分，其中 $f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{\Delta_k}(x)$，$\Delta_k \in \mathfrak{M}(k=1, \cdots, n)$. 这个积分的值是取值于 $\mathscr{Z}^p$ 中的随机向量(行向量). 以 $\mathscr{L}_0^p(\zeta)$ 表示所有形如(17)的随机向量 η 的全体. 如果 $g(x) = \sum_{k=1}^{n} d_k \chi_{\Delta_k}(x)$，则

$$\mathbf{E}\left(\int f(x)\zeta(dx)\left(\int g(x)\zeta(dx)\right)^*\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k \bar{d}_k m(\Delta_k),$$

它可以写为如下的形式:

$$\mathbf{E}\left(\int f(x)\zeta(dx)\left(\int g(x)\zeta(dx)\right)^*\right)=\int f(x)\overline{g(x)}m(dx). \quad (18)$$

从而得到等式

$$\mathbf{E}\left|\int f(x)\zeta(dx)\right|^2=\int |f(x)|^2 m(dx). \quad (19)$$

我们在 $\mathscr{L}_0\{\mathfrak{M}\}$ 中引进内积

$$(f,g)=\int f(x)\overline{g(x)}m_0(dx).$$

如果在 $\mathscr{L}_0^p\{\zeta\}$ 中，元素 η_1 与 η_2 的内积定义为 $\mathbf{E}\eta_2^*\eta_1$，则式(17)建立了空间 $\mathscr{L}_0\{m\}$ 到 $\mathscr{L}_0^p\{\zeta\}$ 的保距变换 $\eta=\phi(f)$. 随机向量的空间 $\mathscr{L}_0^p\{\zeta\}$ 的闭包，我们用 $\mathscr{L}_2^p\{\zeta\}$ 表示，而 $\mathscr{L}_0\{\mathfrak{M}\}$ 的完备化用 $\mathscr{L}_2\{\mathfrak{M}\}$ 表示.

类似不等式(16)，导出不等式

$$\int |f(x)||m_j^k|(dx)\leqslant\left\{\int |f(x)|m_k^k(dx)\int |f(x)|m_j^j(dx)\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (20)$$

这里 $|m_j^k|(A)$ 是函数 m_j^k 的绝对变差，首先对于简单函数上式成立，然后应用极限过程对于任意 $\mathfrak{B}$ 可测函数亦成立. 由不等式(20)得到作为在 $\mathscr{L}_2\{m_0\}$ 中的 f 和 g 的泛函的积分

$$\int f(x)\bar{g}(x)m_j^k(dx)$$

的存在性和连续性.

由此，空间 $\mathscr{L}_0(\mathfrak{M})$ 至 $\mathscr{L}_0^p(\zeta)$ 上的保距变换可以扩张到空间 $\mathscr{L}_2\{\mathfrak{M}\}$ 至 $\mathscr{L}_2^p\{\zeta\}$ 上的保距变换. 此时，随机向量 η 称为**随机积分**且表示

$$\eta=\int f(x)\zeta(dx),$$

其中 $f(x)\in\mathscr{L}_2(m_0)$.

类似在纯量情形的随机测度概念，可以定义向量值的随机测度 $\bar{\zeta}(A)$.

§5. 随机函数的积分表示

利用前一节的结果，可以得到用随机积分表示随机函数的各种表示式.

我们首先假定 p 维向量随机函数 $\xi(x)$，$x\in\mathscr{X}$ 可表为形式

$$\xi(x)=\int g(x,u)\zeta(du), \tag{1}$$

其中 ζ 为定义在可测空间 $\{\mathscr{U},\mathfrak{B}\}$ 上取值于 $\mathfrak{Z}^p$ 且构成矩阵为 $m(A)$ 的随机测度(这里我们用前一节的记号)，$g(x,u)$ 是纯量函数且对每一 $x\in\mathscr{X}$

$$g(x,u)\in\mathscr{L}_2\{m_0\}=\mathscr{L}_2\{\mathscr{U},\mathfrak{B},m_0\},\ m_0(A)=\mathrm{Sp}\,m(A).$$

由 § 4 式(18)随机函数 $\xi(x)$ 的协方差矩阵有如下形式:

$$B(x_1,x_2)=\mathbf{E}\xi(x_1)\xi^*(x_2)=\int g(x_1,u)\overline{g(x_2,u)}\,m(du), \tag{2}$$

而由 § 4(19)得到

$$\mathbf{E}\xi^*(x_2)\xi(x_1)=\int g(x_1,u)\overline{g(x_2,u)}\,m_0(du). \tag{3}$$

我们回想起 $\{\mathscr{U},\mathfrak{B},m_0\}$ 是具有完备测度的空间，$\mathscr{L}_2\{m_0\}$是平方 m_0 可积的 $\mathfrak{B}$ 可测复值函数的 Hilbert 空间.

用 $\mathscr{L}_2\{g\}$ 表示在$\mathscr{L}_2\{m_0\}$ 中由函数组 $\{g(x,u),\ x\in\mathscr{X}\}$ 产生的线性包络的闭包. 则 $\mathscr{L}_2\{g\}$ 是 $\mathscr{L}_2\{m_0\}$ 的线性闭子空间. 若 $\mathscr{L}_2\{g\}=\mathscr{L}_2\{m_0\}$，则函数组 $\{g(x,u),\ x\in\mathscr{X}\}$ 称为在 $\mathscr{L}_2\{m_0\}$ 中是完备的.

令 $\{\xi(x),\ x\in\mathscr{X}\}$ 是取值于 $\mathfrak{Z}^p$ 中的 Hilbert 随机函数，$\mathscr{L}_0\{\xi\}$ 是所有随机向量

$$\eta=\sum_{k=1}^{n}c_k\xi(x_k),\ n=1,2,\cdots,\ x_k\in\mathscr{X}, \tag{4}$$

组成的集合，其中 c_k 是任意复数，$\mathscr{L}_2\{\xi\}$ 是随机向量在均方收敛意义下 $\mathscr{L}_0\{\xi\}$ 的闭包.

定义 1 随机向量的总体 $\{\eta_\alpha,\alpha\in A\}$，$\eta_\alpha\in\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$，称为随

机函数 $\{\xi(x), x \in \mathscr{X}\}$ 的从属，如果 $\eta_\alpha \in \mathscr{L}_2\{\xi\}, \alpha \in A$.

定理 1 设随机函数 $\{\xi(x), x \in \mathscr{X}\}$ 的协方差矩阵满足式(2)，其中 m 是 $\{\mathscr{U}, \mathfrak{B}\}$ 上的正定矩阵测度，$g(x, u) \in \mathscr{L}_2\{m_0\}$, $x \in \mathscr{X}$，且族 $\{g(x,u), x \in \mathscr{X}\}$ 在 $\mathscr{L}_2\{\mathscr{U}, \mathfrak{B}, m_0\}$ 中是完备的. 则 $\xi(x)$ 可以用式(1)表示，其中 $\{\zeta(B), B \in \mathfrak{B}\}$ 是某一随机正交向量测度，从属于具有构成函数 $m(\cdot)$ 的随机函数 $\xi(x)$ 且对每一 x 以概率 1 成立等式(1).

证. 对每一线性组合

$$f(u) = \sum_{k=1}^{n} c_k g(x_k, u), \quad x_k \in \mathscr{X}, \tag{5}$$

借助于式(4)对应随机向量 $\eta, \eta = \psi(f)$. 用 $\mathscr{L}_0\{g\}$ 表示全体形如(5)的函数的集合. 在 $\mathscr{L}_0\{g\}$ 中借助于关系式

$$(f_1, f_2) = \int f_1(u)\overline{f_2(u)} m_0(du) \tag{6}$$

定义内积. 对应关系 $\eta = \psi(f)$ 是 $\mathscr{L}_0\{g\}$ 到 $\mathscr{L}_0\{\xi\}$ 的保距映象. 因此它可以扩张为 $\mathscr{L}_2\{g\}$ 到 $\mathscr{L}_2\{\xi\}$ 上的保距映象. 由于函数族 $\{g(x,u), x \in \mathscr{X}\}$ 的完备性，如果 $B \in \mathfrak{B}$，则 $\chi_B(x) \in \mathscr{L}_2\{m_0\} = \mathscr{L}_2\{g\}$. 设 $\zeta(A) = \psi(\chi_A)$. 则 $\zeta(A)$ 是向量值随机测度且它的构成函数与 m 相一致:

$$\mathbf{E}\zeta(A_1)\zeta^*(A_2) = \int \chi_{A_1}(x)\overline{\chi_{A_2}(x)}\, m(dx) = m(A_1 \cap A_2).$$

现在借助于随机积分

$$\tilde{\xi}(x) = \int g(x,u)\zeta(du)$$

我们定义随机函数 $\tilde{\xi}(x)$. 因为

$$\mathbf{E}\xi(x)\zeta^*(A) = \int g(x,u)\chi_A(x) m(du),$$

故从对应 $\eta = \psi(f)$ 的保距性得到等式:

$$\mathbf{E}\xi(x)\tilde{\xi}^*(x) = \int g(x,u)\overline{g(x,u)}\, m(du).$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}|\xi(x)-\tilde{\xi}(x)|^2\\&\quad=\mathbf{E}\xi^*(x)\xi(x)-\mathbf{E}\tilde{\xi}^*(x)\xi(x)-\mathbf{E}\xi^*(x)\tilde{\xi}(x)\\&\qquad+\mathbf{E}\tilde{\xi}^*(x)\tilde{\xi}(x)=0,\end{aligned}$$

从而证明了定理.

我们列举一些刚刚已被证明的定理的应用. 为了简化起见，我们在这一节的余下部分用《平稳过程》代替《广义平稳过程》一词.

根据第四章§2定理2，平稳且 m.s. 连续的过程的相关矩阵可以表为

$$R(t_1,\ t_2)=R(t_1-t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iu(t_1-t_2)}F(du),\qquad(7)$$

其中 $F(\cdot)$ 是非负定矩阵测度(过程的谱矩阵). 式(7)是式(2)的特殊情况. 在那里的函数 $g(x,u)$ 相应于 e^{iut}, $x\longleftrightarrow t$，并且函数集合 $\{e^{iut},-\infty<u<\infty\}$ 在 $\mathscr{L}_2\{m_0\}$ 中是完备的，其中 m_0 是直线上任一有限测度. 因此，我们可应用定理1，而且得到下面的结果.

定理 2 向量平稳 m.s. 连续的随机过程 $\xi(t)(-\infty<t<\infty)$, $\mathbf{E}\xi(t)=0$，可表为下式，

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}\zeta(du),\qquad(8)$$

其中 $\zeta(A)$ 是在 $\mathfrak{B}$ 上从属 $\xi(t)$ 的向量值正交随机测度. 在 $\mathscr{L}_2\{\xi\}$ 与 $\mathscr{L}_2\{F_0\}$ 之间存在保距关系，其中 $F_0(\cdot)=\mathrm{Sp}F(\cdot)$，使得

a) $\xi(t)\longleftrightarrow e^{itu}$, $\zeta(A)\longleftrightarrow\chi_A(u)$;

b) 若 $\eta_i\longleftrightarrow g_i(u)(i=1,2)$，则

$$\eta_i=\int g_i(u)\zeta(du)$$

且

$$\mathbf{E}\eta_1\eta_2^*=\int g_1(u)\overline{g_2(u)}F(du).$$

(8)式称为平稳过程的谱分解(或谱表示)，且称 $\zeta(A)$ 为过程的随机谱测度. 从定理2得到

$$\mathbf{E}\zeta(A_1)\zeta^*(A_2) = \int_{A_1\cap A_2} F(du) = F(A_1\cap A_2), \qquad (9)$$

即 $F(\cdot)$ 是向量随机测度 $\zeta(\cdot)$ 的构成函数.

注 1. 对任意 $\eta\in\mathscr{L}_2\{\xi\}$ 有 $\mathbf{E}\eta=0$. 特别对任意 $A\in\mathfrak{B}$, $\mathbf{E}\zeta(A)=0$.

注 2. 若 $\mathbf{E}\xi(t)=a\neq 0$, 则上述定理对于过程 $\xi-a$ 成立. 另一方面,如果我们对 $\zeta(A)$ 加上集中于点 $u=0$ 的测度值 a, 表示式(8)在一般情形下还是成立的.

作为定理 2 应用的一个例子, 我们导出一个一维的谱测度集中在有限区间 $[-B,B]$ 上的随机过程的 Котельников-Shannon 公式. 在区间 $[-B,B]$ 上我们将函数 e^{iut} 展成 Fourier 级数, 我们有

$$e^{iut} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(Bt-\pi n)}{Bt-\pi n}e^{i\frac{\pi n}{B}u}.$$

上式右端的级数对任意区间 $[-B', B]$, $B'<B$,关于 u 一致收敛且它的部分和是有界的. 因此级数在 $\mathscr{L}_2\{m_0\}$ 也是收敛的. 由于空间 $\mathscr{L}_2\{m_0\}$ 与 $\mathscr{L}_2\{\xi\}$ 同构,我们有(在 m.s. 意义下收敛)

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(Bt-\pi n)}{Bt-\pi n}\xi\left(\frac{\pi n}{B}\right). \qquad (10)$$

因此, 在任一时刻 t 随机函数 $\xi(t)$ 的值根据它在等距离的时刻 $\frac{\pi n}{B}$, $n=0$, ±1, ±2,$\cdots$的值唯一地被得到.

对于平稳向量序列 ξ_n, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$可以建立完全类似于定理 2 的定理. 区别只是在于序列的谱测度集中在半开闭区间 $[-\pi,\pi)$ 上, 而不是像在具有连续时间的过程这一情形集中在整个实轴上(参看 § 2 定理 1).

由 § 2 定理 1 和定理 2 得到下面的关于齐次 m.s. 连续场的谱分解的定理 2 的推广.

定理 3 向量值的齐次 m.s. 连续场 $\xi(x)$, $x\in\mathscr{R}^m$ 可以表为

形式

$$\xi(x) = a + \int_{\mathscr{R}^m} e^{i(x,u)}\zeta(du), \quad a = \mathbf{E}\xi(x),$$

其中 ζ 是 $\mathfrak{B}^m$ 上从属于场 $\xi(t)$ 的向量正交测度. 在 $\mathscr{L}_2\{\xi\}$ 与 $\mathscr{L}_2\{F_0\}, F_0(\cdot) = \mathrm{Sp}F(\cdot)$ 之间存在保距对应关系,使得

a) $\zeta(x) \longleftrightarrow e^{i(x,u)}$;

b) 如果 $\eta_i \longleftrightarrow g_i(u)$, $\eta_i \in \mathscr{L}_2\{\xi\}$, $g_i(u) \in \mathscr{L}_2\{F_0\}$, $i = 1, 2$,则

$$\eta_i = \int_{\mathscr{R}^m} g_i(u)\zeta(du),$$

$$\mathbf{E}\eta_1\eta_2^* = \int_{\mathscr{R}^m} g_1(u)\,\overline{g_2(u)}\,F(du).$$

推论 如果齐次场 $\xi(x)$(纯量的)($\mathbf{E}\xi(x) = 0$)具有有限谱,即

$$R(x) = \int_{-B_1}^{B_1}\cdots\int_{-B_m}^{B_m} e^{i(x,u)}F(du),$$

则这个场根据它在格子点$\left\{x_n = \left(\frac{\pi n^1}{B_1}, \frac{\pi n^2}{B_2}, \cdots \frac{\pi n^m}{B_m}\right), n^k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right\}$的值按公式

$$\xi(x) = \sum_{n=(n^1,\cdots,n^m)} \prod_{k=1}^{m} \frac{\sin(B_k x^k - \pi n^k)}{B_k x^k - \pi n^k} \times \xi\left(\frac{\pi n^1}{B_1}, \frac{\pi n^2}{B_2}, \cdots \frac{\pi n^m}{B_m}\right) \tag{11}$$

唯一地确定. 在这一公式中和号是按一切可能的整数向量 n 来求和的,并且公式右边的级数对每一 x 是均方收敛的.

我们还考虑 m. s. 连续的迷向二维随机场的谱分解. 根据 § 2 式(10),场的相关函数具有如下形式:

$$R(x_1, x_2) = R(\rho) = \int_0^\infty J_0(u\rho)g(du), \tag{12}$$

其中 x_1 与 x_2 是平面上的点, ρ 是它们之间的距离. 如果 (r_i, θ_i)

是点 $x_i(i=1,2)$ 的极坐标，则

$$\rho=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}.$$

对于函数 J_0 应用加法公式，

$$J_0(u\rho)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(ur_1)J_k(ur_2)e^{ik(\theta_1-\theta_2)},$$

我们重写式(12)为如下形式：

$$R(\rho)=\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty J_\nu(ur_1)e^{i\nu\theta_1}J_\nu(ur_2)e^{i\nu\theta_2}g(du)\varepsilon(d\nu),$$

其中 $\varepsilon(d\nu)$ 是集中在点 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 且 $\varepsilon(\{k\})=1$ 的测度．根据定理 1，平面的迷向齐次且 m. s. 连续场 $\xi(x), x=re^{i\theta}$，$(\mathbf{E}\xi(x)=0)$ 满足形如

$$\xi(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ik\theta}\int_0^\infty J_k(ur)\zeta_k(du) \tag{13}$$

的表达式．其中 ζ_k 是在 $[0,\infty)$ 上相互正交的随机测度序列．

§6. 线 性 变 换

把系统 Σ(仪器或机器)设想为对依赖于时间 t 的信号(函数) $x(t)$ 进行变换的装置． 被变换的函数称为在系统输入端的函数，经变换后的函数称为关于输入函数的输出或反应函数．数学上任一系统由一在输入端的《可容许》函数类 D 及如下形式的关系

$$z(t)=T(x|t)$$

所给定，其中 $x=x(s)$ $(-\infty<s<\infty)$ 是在输入端的函数，$x(s)\in D$，而 $z(t)$ 是输出端函数在瞬时 t 的值．

系统 Σ 称为是**线性的**，如果：a) 可容许函数类 D 是线性的，b) 算子 T 满足加法法则

$$T(\alpha x_1+\beta x_2|t)=\alpha T(x_1|t)+\beta T(x_2|t).$$

借助于关系式

$$x_\tau(t)=S_\tau(x|t)=x(t+\tau),$$

我们引入时移算子 $S_\tau(-\infty<\tau<\infty)$.

这个算子定义在所有以变数 $t(-\infty<t<\infty)$ 的函数集合上并且是线性的. 系统 Σ 称为关于时间是**齐次的**(或简称为齐次的),如果可容许函数类 D 关于时移算子 S_τ 是不变的, $S_\tau D=D$, 且

$$T(x_\tau|t)=T(x|t+\tau)$$

或

$$T(S_\tau x|t)=S_\tau T(x|t),$$

即如果变换 T 与时移算子 $S_\tau(-\infty<\tau<\infty)$ 可以置换.

形如

$$z(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t,s)x(s)ds \tag{1}$$

的变换可以作为线性变换的最简单的例子，这里的可容许函数类 D 依赖于函数 $h(t,s)$ 的性质. 设在系统的输入端输入函数 δ_{x-s}, 其中 δ_x 是 δ 函数. 则在 $t>s$ 时, $z(t)=h(t,s)$ 且在 $t<s$ 时, $z(t)=0$. 因此，函数 $h(t,s)$ 将解释为在瞬时 s 系统对 δ 函数的反应. 据此, $h(t,s)$称为系统的**脉冲转移函数**. 如果系统 Σ 对时间是齐次的,则形式上

$$\begin{aligned}h(t,a-c)&=T(\delta_{a-c}|t)=T(S_c\delta_a|t)=S_cT(\delta_a|t)\\&=h(t+c,a),\end{aligned}$$

或者,以 c 代 a 且以 $t-c$ 代 t,我们有

$$h(t-c,0)=h(t,c).$$

函数 $h(t)=h(t+c,c)$ 称为齐次系统的**脉冲转移函数**.

这样一来,对于齐次系统,方程(1)变为

$$z(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-s)x(s)ds, \tag{2}$$

式(2)右边的运算称为函数 $h(t)$ 与 $x(t)$ 的卷积.

如果系统输入端的函数不同于输出端的函数而仅仅差一个纯量因子(变换 T 不改变信号的形式)

$$T(f|t)=\lambda f(t)\qquad(-\infty<t<\infty),$$

则 $f(t)$ 称为**特征函数**,而 λ 称为变换 T 的**特征值**. 对于关于时间是齐次的具有可积的脉冲转移函数的系统，函数 e^{itu}(u 是任一实

数)是特征函数. 事实上,所有有界可测函数是可容许函数且

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)e^{ius}ds = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{iu(t-s)}ds = H(iu)e^{iut},$$

其中

$$H(iu) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{-isu}ds \tag{3}$$

是脉冲转移函数的 Fourier 变换,它是变换的特征值.

因此,简单调和函数 e^{iut} 的系统反应与这个函数之比

$$H(iu) = \frac{T(e^{isu}|t)}{e^{iut}}.$$

不依赖于时间 t. 函数 $H(iu)$ 称为系统的频率特性式传递系数.

考虑另一可容许函数类,我们可以给出系统(2)的频率特性的稍许不同的解释. 设 $x(t)$可积,根据 Fubini 定理

$$\int_{-\infty}^{\infty}|z(t)|dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|h(t-s)||x(s)|dsdt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}|x(s)|ds\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt < \infty,$$

即函数 $z(t)$ 同样是可积的. 考虑函数 $z(t)$ 的 Fourier 变换. 应用 Fubini 定理,我们得到

$$\tilde{z}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}z(t)dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu(t-s)}h(t-s)e^{-ius}x(s)dsdt$$
$$= H(iu)\tilde{x}(u),$$

其中

$$\tilde{x}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ius}x(s)ds.$$

因此,输出端函数的 Fourier 变换与输入端函数的 Fourier 变换的比不依赖于系统输入端的函数且等于系统的频率特性

$$H(iu) = \frac{\tilde{z}(u)}{\tilde{x}(u)}.$$

在式(1)中对瞬时 t，系统的反应依赖输入端函数在瞬时 $s<t$ 以及 $s>t$ 的值．然而，在物理装置中是不可能预测未来的．因此，当 $t<s$ 时

$$h(t, s)=0. \tag{4}$$

式(4)称为系统的物理可实现性条件． 对于满足条件(4)的系统，式(1)变为

$$z(t)=\int_{-\infty}^{t} h(t,s)x(s)ds. \tag{5}$$

且如果系统是齐次的，则

$$z(t)=\int_{-\infty}^{t} h(t-s)x(s)ds=\int_{0}^{\infty} h(s)x(t-s)ds. \tag{6}$$

如果在系统的输入端给予一个从时刻为0开始的函数(当 $s<0$ 时 $x(s)=0$)，则

$$z(t)=\int_{0}^{t} h(t-s)x(s)ds. \tag{7}$$

研究这样的系统时，利用 Laplace 变换

$$\tilde{z}(p)=\int_{0}^{\infty} e^{-pt}z(t)dt \tag{8}$$

代替 Fourier 变换更为方便．

从式(7)得到，如果函数 $e^{-dt}h(t)$ 与 $e^{-dt}x(t)$ 绝对可积，则当 $\mathrm{Re}p \geqslant \alpha$，有

$$\tilde{z}(p)=H(p)\tilde{x}(p), \quad \tilde{x}(p)=\int_{0}^{\infty} e^{-pt}x(t)dt, \tag{9}$$

我们转入这一节的基本主题——关于随机过程的线性变换．我们基本上考虑对时间是齐次的平稳过程的变换．关于更一般的情形我们仅作简单的附注．

设 $\xi(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ 是具有协方差为 $B(t, s)$ 的可测 Hilbert 过程，并且 $B(t,t)$ 在每一有限区间内关于 t 可积，同时函数 $|h(t,s)|^2$ 对固定 t 也是可积的，则对任意 a 与 b，积分

$$\zeta(t)=\int_{a}^{b} h(t,s)\xi(s)ds$$

以概率 1 存在．

我们定义从 $-\infty$ 到 ∞ 的广义积分为在有限区间上的积分的 m.s 极限:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t,s)\xi(s)ds = \underset{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}{\text{l.i.m.}}\int_a^b h(t,s)\xi(s)ds.$$

如使这一极限存在,必须且只须在平面上的广义 Cauchy 积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t,s_1)B(s_1,s_2)h(t,s_2)ds_1ds_2$$

存在. 如果对 $t\in T$ 这个积分存在,则 $\zeta(t)$ 是 T 上的 Hilbert 随机过程且具有协方差

$$B_\zeta(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t_1,s_1)B(s_1,s_2)\overline{h(t_2,s_2)}ds_1ds_2. \tag{10}$$

现假定 $\xi(t)$ 是具有谱测度为 $F(du)$ 且 $E\xi(t)=0$ 的广义平稳过程. 这个假定将保存到这一节结束. 积分

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)\xi(s)ds \tag{11}$$

存在(在先前定义的意义下)的充分必要条件为积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t-s_1)R(s_1-s_2)\overline{h(t-s_2)}ds_1ds_2$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(s_1)R(s_2-s_1)\overline{h(s_2)}\,ds_1ds_2$$

存在, 其中 $R(t)$ 是过程的相关函数. 为此, 也只须函数 $h(t)$ 在 $(-\infty,\infty)$上绝对可积即可. 在这一情形, 利用相关函数 $R(t)$ 的谱表示式,我们得到下面关于过程 $\eta(t)$ 的相关函数 $R_\eta(t_1,t_2)$的表示式:

$$\begin{aligned}R_\eta(t_1,t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t_1-s_1)R(s_1-s_2)\,\overline{h(t_2-s_2)}ds_1ds_2\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t_1-s_1)e^{iu(s_1-s_2)}\,\overline{h(t_2-s_2)}\,ds_1ds_2F(du)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_1-t_2)u}|H(iu)|^2F(du) = R_\eta(t_1-t_2).\end{aligned}$$

因此,过程 $\eta(t)$ 同样也是广义平稳的.

定义 1 对于过程 $\xi(t)$,变换 T 称为可容许滤过(或简称为滤过),如果它由式(11)确定,其中 $h(t)$是$(-\infty,\infty)$上绝对可积函数

且在任意有限区间上平方可积，或者如果T是具有此性质的变换（在$\mathscr{L}_2\{\xi\}$中）序列的 m. s 极限.

下面的关系式给出具有脉冲转移函数$h_n(t)$及频率特性$H_n(iu)$的变换(11)序列$\eta_n(t)=T_n(\xi/t)$的收敛性条件：当$n,m\to\infty$时，

$$\mathbf{E}|\eta_n(t)-\eta_m(t)|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|H_n(iu)-H_m(iu)|^2F(du)\to 0, \tag{12}$$

这表示序列$H_n(iu)$在$\mathscr{L}_2\{F\}$是基本的. 而当极限$H(iu)=\text{l.i.m.}H_n(iu)$（在$\mathscr{L}_2\{F\}$中）存在时，则称它为**极限的滤过频率特性**，并且如果$\eta(t)=\text{l.i.m.}\eta_n(t)$，则

$$R_\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}|H(iu)|^2F(du). \tag{13}$$

反之，任一函数$H(iu)\in\mathscr{L}_2\{F\}$，可以借助于绝对可积函数的 Fourier 变换函数在$\mathscr{L}_2\{F\}$中的收敛意义下来逼近. 因此，借助于频率特性很方便决定滤过.

定理 1 为使函数$H(iu)$为具有谱测度F的过程的可容许滤过的频率特性，必要与充分条件为$H(iu)\in\mathscr{L}_2\{F\}$. 在具有频率特性为$H(iu)$的滤过的输出端，过程的相关函数由式(13)确定.

如果回想起谱函数的能量解释，则由式(13)得到，$|H(iu)|^2$表示当通过滤过时过程具有频率在区间$(u, u+du)$的简谐分量的能量增大多少倍.

定理 2 如果具有频率特性为$H(iu)$的滤过的输入端过程$\xi(t)$有谱表示式

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}\zeta(du), \tag{14}$$

则在滤过的输出端的过程$\eta(t)$有形式

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}H(iu)\zeta(du). \tag{15}$$

事实上，如果滤过有绝对可积的脉冲转移函数，则

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-s)\xi(s)ds=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}H(iu)\zeta(du).$$

关于一般情形的证明，借助于在 $\mathscr{L}_2\{F\}$ 中收敛于 $H(iu)$ 的序列 $H_n(iu)$ 的极限过程得到。

设 $\eta_k(t)$ 为具有频率特性 $H_k(iu)$ 的滤过输出端的过程，且 $\mathbf{E}\eta_k(t)=0(k=1,2)$. 我们寻找过程 $\eta_1(t)$ 与 $\eta_2(t)$ 的互相关函数. 根据空间 $\mathscr{L}_2\{\zeta\}$ 与 $\mathscr{L}_2\{F\}$ 同构，立即得到

$$R_{12}(t)=\mathbf{E}\eta_1(t+s)\overline{\eta_2(s)}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}H_1(iu)\overline{H_2(iu)}F(du). \quad (16)$$

我们下面引入几个滤过及它的频率特性的例子.

1. 带通滤过器仅允许(不改变它们)频率在给定的区间 (a,b) 上的过程的调和分量通过. 滤过的频率特性等于 $H(iu)=\chi_{(a,b)}(u)$，且允许对任意过程进行滤过. 脉冲转移函数根据 Fourier 公式得到

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{itu}du=\frac{e^{ibt}-e^{iat}}{2\pi it}.$$

2. 高频滤过器是压制低频而不改变高频的. 它的频率特性 $H(iu)=\chi_{(|u|>a)}(u)$，而脉冲转移函数不存在.

3. 考虑 m. s. 可微广义平稳过程的运算. 为了过程的 m.s. 导数的存在性只须 $R''(0)$ 存在(§ 3 推论 1). 这条件等价地要求(第一章 § 1 定理 4)

$$\int_{-\infty}^{\infty}u^2F(du)<\infty. \quad (17)$$

另一方面，如这条件满足，则当 $h\to 0$ 时

$$\frac{e^{ihu}-1}{h}\to iu \quad (在\mathscr{L}_2\{F\})$$

且根据关系式

$$\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}\,\frac{e^{ihu}-1}{h}\,\zeta(du).$$

当 $h\to 0$ 时可以在随机积分号下取极限. 因此

$$\xi'(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}iu\zeta(du). \quad (18)$$

所以，一个微分算子对应一个具有频率特性为 iu 的滤过，这个滤

过对于满足条件(17)的平稳过程是可容许的. 脉冲转移函数不存在,但这一滤过可以考虑作为具有脉冲转移函数为

$$h_\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & \text{当 } |t|\geqslant\varepsilon,\\ -\dfrac{\operatorname{sgn}t}{\varepsilon^2}, & \text{当 } |t|<\varepsilon\end{cases}$$

的滤过的极限 $(\varepsilon\to 0)$,这时,$h_\varepsilon(t)$ 对应的频率特性为

$$-\frac{4\sin^2\dfrac{u\varepsilon}{2}}{iu\varepsilon^2}.$$

4. 时移运算. 因为

$$\xi(t+s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}e^{ius}\zeta(du),$$

故得频率特性 $H(iu)=e^{ius}$ 对应时移运算 T_s,$T_s(\xi|t)=T(t+s)$. 脉冲转移函数不存在.

5. 微分方程. 考虑具有常系数线性微分方程

$$L\eta=M\xi. \tag{19}$$

所确定的滤过,其中

$$L=a_0\frac{d^n}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n,$$

$$M=b_0\frac{d^m}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}+\cdots+b_m.$$

方程(19)仅当过程 m 次 m.s. 可微时有意义. 那时我们寻求 n 次 m.s. 可微的满足(19)的平稳过程 $\eta(t)$. 设(19)有平稳解. 它可以表为

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}H(iu)\zeta(du).$$

对过程 $\xi(t)$ 与 $\eta(t)$ 分别应用运算 M 与 L,我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}L(iu)H(iu)\zeta(du)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}M(iu)\zeta(du),$$

其中 $L(iu)=\sum_{k=0}^{h}a_k(iu)^{n-k}$, $M(iu)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(iu)^{m-k}$, 因此,如

果 $L(iu)$ 没有实根，则

$$H(iu)=\frac{M(iu)}{L(iu)}. \tag{20}$$

反之，如果过程 $\xi(t)m$ 次 m. s. 可微，$M(iu)\in\mathscr{L}_2\{F\}$，$L(iu)\neq 0(-\infty<u<\infty)$，则过程

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}\frac{M(iu)}{L(iu)}\zeta(du)$$

n 次 m. s 可微且满足方程(19)．这样，在条件 $M(iu)\in\mathscr{L}_2\{F\}$ 以及 $L(iu)\neq 0$ 下，存在唯一的对应于微分方程(19)的滤过．然而我们看到，方程(19)的解在更一般情形可以被确定．设多项式 $L(iu)$ 没有实根．甚至不须要 $M(iu)\in\mathscr{L}_2\{F\}$，具有频率特性为 $\frac{M(iu)}{L(iu)}$ 的滤过亦存在，它仅须要 $\frac{M(iu)}{L(iu)}\in\mathscr{L}_2\{F\}$ 就可以了．当多项式的幂次 n 不小于 m 时，后一条件总能满足．因此，当 $n\geqslant m$ 时，具有对实数 u，分母不为零的频率特性(20)的滤过在输入端对任意过程是可容许的，并且在滤过的输出端的过程与方程(19)的平稳解相同．如前，我们仅限于考虑那些微分方程，其多项式 $L(x)$ 没有纯虚数根，我们从有理函数 $\frac{M(x)}{L(x)}$ 求得它的整式部分 $P(x)$（若 $m\geqslant n$，则它异于零）及展开余式为简单的分式．故我们得到

$$\frac{M(iu)}{L(iu)}=P(iu)+\sum_{k=1}^{n'}\sum_{s=1}^{l'_k}\frac{C'_{ks}}{(iu-p'_k)^s}+\sum_{k=1}^{n''}\sum_{s=1}^{l''_k}\frac{C''_{ks}}{(iu-p''_k)^s},$$

其中 $P(iu)=\sum_{k=0}^{m-n}a_k(iu)^k\ (m\geqslant n)$ 且 $P(iu)=0(m<n)$，$\mathrm{Re}\,p'_k<0$ 且 $\mathrm{Re}\,p''_k>0$，p'_k 与 p''_k 是多项式 $L(x)=0$ 的根．因为

$$\frac{1}{(iu-p)^s}=\frac{1}{(s-1)!}\frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}}\int_0^{\infty}e^{pt}e^{-iut}dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} e^{pt} e^{-iut} dt \quad (\operatorname{Re} p < 0)$$

且

$$\frac{1}{(iu-p)^s} = -\int_{-\infty}^0 \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} e^{pt} e^{-iut} dt \qquad (\operatorname{Re} p > 0),$$

故在滤过的输出端,过程可表为如下形式:

$$\eta(t) = \sum_{k=0}^{m-n} a_k \xi^{(k)}(t) + \int_0^\infty \xi(t-\tau) G_1(\tau) d\tau$$

$$+ \int_0^\infty \xi(t+\tau) G_2(-\tau) d\tau,$$

其中

$$G_1(t) = \sum_{k=1}^{n'} \left(\sum_{s=1}^{l'_k} \frac{C'_{ks} t^s}{(s-1)!} \right) e^{p'_k t} \quad (t > 0),$$

$$G_2(t) = -\sum_{k=1}^{n''} \left(\sum_{s=1}^{l''_k} \frac{C''_{ks} t^s}{(s-1)!} \right) e^{p''_k t} \quad (t < 0).$$

我们指出,如果多项式 $L(x)$ 有正的实部根,则对应的滤过物理上是不存在的.

§7. 物理上可实现的滤过

在这一节里,我们考虑如下的一个问题:在物理可实现的滤过输出端可以得到怎样的谱函数?这里在滤过的输入端考虑的是在某种意义下的最简单的随机过程.

在这一节里,我们考虑的过程总假定是一维的且是广义平稳的.因此,有时把"平稳"一词省去,而常把"广义"一词省去.

首先考虑平稳序列.对于序列,我们将不再重述对于连续时间的过程所给出的全部定义及启发性的想法,然而我们将利用相应的术语.考虑这样一个系统,它在输入端及输出端的状态仅在

整数时间 $t=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 上被记录.

设在系统的输入端于时刻 0 作用一个单位脉冲，在这脉冲作用下在时刻 t 系统的反应用 a_t 表示. 如果系统不预测未来，则当 $t<0$ 时 $a_t=0$. 如果系统对时间是齐次的，则在时刻 s 作用于系统一个单位脉冲的反应等于 a_{t-s}. 线性的，齐次且物理上可实现的系统在时刻 t 对于脉冲序列 $\xi(n)$ $(-\infty<n<\infty)$ 的反应是

$$\eta(t)=\sum_{n=-\infty}^{t} a_{t-n}\xi(n)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\xi(t-n), \tag{1}$$

即是滑动和过程.

设 $\xi(n)$ 是标准不相关序列

$$\mathbf{E}\xi(n)=0,\ \mathbf{E}\xi(n)\overline{\xi(m)}=\delta_{nm}(-\infty<n,m<\infty).$$

这序列的谱密度是常数.

为使级数(1)m.s. 收敛，必须且只须

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty. \tag{2}$$

如果这一条件满足，则过程 $\eta(t)$ 同样也是广义平稳的，并且

$$\mathbf{E}\eta(t)=0,\ R_\eta(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+t}\bar{a}_n. \tag{3}$$

怎样的一类序列可以用这样一种方法得到呢?

引理 1 为使平稳序列 $\eta(n)$ 是物理上可实现的滤过对于不相关序列的反应，必须且只须序列 $\eta(n)$ 有绝对连续谱测度，且它的谱密度 $f(u)$ 满足表示式:

$$f(u)=|g(e^{iu})|^2,\ g(e^{iu})=\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{iun},\quad \sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^2<\infty. \tag{4}$$

证. 必要性. 假设序列表为形式(1). 令

$$g(e^{iu})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\bar{a}_n e^{inu}. \tag{5}$$

根据 Parseval 公式

$$R_\eta(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+t}\bar{a}_n=\int_{-\pi}^{\pi}e^{itu}|g(e^{iu})|^2du,$$

即序列 $\eta(n)$ 有密度为 $f(u)=|g(e^{iu})|^2$ 的绝对连续谱.

充分性. 设 $\eta(n)$ 是具有相关函数为

$$R_\eta(t)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{itu}f(u)du$$

且 $f(u)=|g(e^{iu})|^2$ 的序列，其中 $g(e^{iu})$ 由式(4)定义. 序列 $\eta(n)$ 有谱表示式

$$\eta(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{inu}\zeta(du).$$

在区间 $[-\pi,\pi)$ 的 Borel 集的 σ 代数上构造随机测度

$$\xi(A)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,g(e^{iu})}\chi_A(u)\zeta(du).$$

则

$$\mathbf{E}\xi(A)\overline{\xi(B)}=\int_{-\pi}^{\pi}\chi_A(u)\chi_B(u)\frac{1}{2\pi|g(e^{iu})|^2}f(u)du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{A\cap B}du,$$

即 $\xi(A)$ 为具有构成函数 $l(A\cap B)$ 的正交测度，其中 l 是 Lebesgue 测度. 应用 §4 引理 2 及引理 1，我们得到

$$\eta(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{inu}\zeta(du)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{inu}\sqrt{2\pi}\,\overline{g(e^{iu})}\xi(du)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{2\pi}\,\bar{b}_k\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-k)u}\xi(du)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\xi(n-k),$$

其中 $a_n=\sqrt{2\pi}\,\bar{b}_n$, $\xi(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{inu}\xi(du)$ 且

$$\mathbf{E}\xi(n)\overline{\xi(m)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-m)u}du=\delta_{nm}.$$

这样一来，$\xi(n)$ 是标准不相关序列.

上面证明的引理给了我们关于前面所提出的问题的一个简单的回答．然而这个回答在一般情况下不是充分有效的，因为当谱密度能被表示为式(4)这一事实依然是模糊的．

我们现在寻找满足式(4)的条件．用 H_2 表示全体在圆 $D=\{z:|z|<1\}$ 内解析且

$$\|f(z)\|^2=\lim_{r\uparrow 1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^2d\theta<\infty$$

的函数的集合． 如果 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，则 $f(re^{i\theta})=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^ne^{in\theta}$，即 a_nr^n 是函数 $f(re^{i\theta})$ 的 Fourier 系数．由 Parseval 等式

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^2d\theta=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}.$$

因此，显然当且仅当

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty$$

时，$f(z)\in H_2$．所以，对每一函数 $f(z)\in H_2$，可以定义一个在 $\mathscr{L}_2(l)$ 中收敛的级数 $f(e^{i\theta})=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{in\theta}$，其中 l 是 $[-\pi,\pi)$ 上的 Lebesgue 测度．函数 $f(z)(|z|<1)$ 可以通过函数 $f(e^{i\theta})$ 根据 Poisson 公式

$$f(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{i\theta})P(r,\theta,u)du \tag{6}$$

来确定，其中

$$P(r,\theta,u)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-u)+r^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{in(\theta-u)}.$$

这一结果的证明可直接由 Parseval 等式得出．

在复变函数理论中证明了(见 Привалов[46])，如果在式(6)中的函数 $f(e^{i\theta})$ 是 Lebesgue 可积，则几乎对所有 θ 存在

$$\lim_{r\uparrow 1}f(re^{i\theta})=f(e^{i\theta}).$$

函数 $f(e^{i\theta})$ 称为 $f(z)$ ($|z|<1$) 的边界值.

定理 1 设 $f(u)$ 为 $[-\pi,\pi)$ 上的非负且按 Lebesgue 意义下可积的函数. 为了存在函数 $g(z)\in H_2$,使得

$$f(u)=|g(e^{iu})|^2, \tag{7}$$

必要且充分条件为

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\ln f(u)|du<\infty. \tag{8}$$

证. 必要性. 设 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in H_2$ 且(7)式成立. 可设 $g(0)\neq 0$, (否则可考虑 $z^{-m}g(z)$ 代替 $g(z)$, 其中 m 是函数 $g(z)$ 当 $z=0$ 时零点的阶)且假设 $g(0)=1$. 令 $0<r<1$ 且 $A=\{u:|g(re^{iu})\leqslant 1\}$, $B=\{u:|g(re^{iu})|>1\}$. 则

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}|\ln|g(re^{iu})||du&=\int_B\ln|g(re^{iu})|du-\int_A\ln|g(re^{iu})|du\\&=2\int_B\ln|g(re^{iu})|du\\&\quad-\int_{-\pi}^{\pi}\ln|g(re^{iu})|du.\end{aligned}$$

由 Jensen 公式得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{iu})|du=\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{r}{|z_k|}\geqslant 0,$$

其中 z_k 是函数 $f(z)$ 在圆内 $|z|<r$ 的零点且 $|f(0)|=1$. 因此,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}|\ln|g(re^{iu})||du&\leqslant 2\int_B\ln|g(re^{iu})|du\leqslant\int_B|g(re^{iu})|^2du\\&\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|g(re^{iu})|^2du\leqslant 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2.\end{aligned}$$

应用 Fatou 引理,我们得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\ln|g(e^{iu})||du=\int_{-\pi}^{\pi}\lim_{r\uparrow 1}|\ln|g(re^{iu})||du$$

$$\leqslant \varliminf_{r\uparrow 1}\int_{-\pi}^{\pi} |\ln|g(re^{iu})||du \leqslant 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2,$$

因而证明了条件(8)的必要性.

充分性. 设条件(8)满足,函数

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln f(u)P(r,\theta,u)du$$

在圆 $D=\{z:|z|<1\}$ 内是一调和函数. 我们注意到由 Jensen 不等式得到

$$u(r,\theta)\leqslant \ln\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)P(r,\theta,u)du\right\}.$$

我们用 $\varphi(z)$ 表示在D中具有实部为 $u(r,\theta)$ 的解析函数. 设

$$g(z)=e^{(1/2)\varphi(z)}.$$

则

$$|g(re^{i\theta})|^2=e^{\mathrm{Re}\varphi(z)}=e^{u(r,\theta)}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)P(r,\theta,u)du$$

且

$$\int_{-\pi}^{\pi}|g(re^{i\theta})|^2d\theta\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(u)|du<\infty.$$

因而 $g(z)\in H_2$ 且几乎处处 $\lim_{r\uparrow 1}|g(re^{i\theta})|^2=e^{\lim_{r\uparrow 1}u(r,\theta)}=f(\theta)$. 定理证毕.

注 1. 从定理的证明得到,函数 $g(z)$ 可以用这样的方法来选择: 当 $\tau=0$ 时它是正的,并且在D中没有零点.

注 2. 在定理 1 中建立了函数 $g(z)$ 的存在性,但它不是唯一确定的. 然而,如果 $g(z)$ 满足条件

a) 当 $z\in D$ 时,$g(z)\neq 0$, b) $g(0)>0$,

则它是唯一的,因此与我们在定理中找到的相同.

事实上,如果 $g_i(z)(i=1,2)$ 是两个这样的函数,则 $\phi(z)=\frac{g_1(z)}{g_2(z)}$ 在D中解析且不为零以及在边界D上的模等于1. 函数 $\ln\phi(z)$在D中解析且在D的边界上,它的实部为零.因此, $\ln\phi(z)$

$=ik$，其中 k 是实的．因为 $\ln\phi(0)$ 是实的，故 $\ln\psi(z)=0$。

对照引理 1 和定理 1，我们得到下面的断言：

定理 2 为使序列 $\eta(t)$ 表为形式

$$\eta(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\xi(t-n),\quad \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty,$$

其中 $\xi(n)$ 是不相关序列，必须且只须 $\eta(t)$ 具有绝对连续谱测度，且它的谱密度 $f(u)$ 满足条件

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln f(u)du>-\infty.$$

令 $\zeta_1(x),\zeta_2(x),x\in\mathscr{X}$ 是两个 Hilbert 随机函数．用 $\mathscr{L}_2\{\zeta_i\}$ 表示在 $\mathscr{L}_2$ 中的随机变量组 $\{\zeta_i(x),x\in\mathscr{X}\}$ 的闭线性包络．

定义 1 如果 $\mathscr{L}_2(\zeta_1)\subset\mathscr{L}_2(\zeta_2)$，则随机函数 $\zeta_1(x)$ 称为从属 $\zeta_2(x)$．如果 $\mathscr{L}_2(\zeta_1)=\mathscr{L}_2(\zeta_2)$，则 $\zeta_1(x)$ 与 $\zeta_1(x)$ 称为等价．

注 1. 从引理 1 的证明得到，序列 $\xi(n)$ 与 $\eta(n)$ 是等价的．

我们证明，可以通过序列 $\eta(t)$ 的谱密度 $f(u)$ 的滑动和的运算来表示系数 a_n。

在定理 1 的证明中引入的函数 $\varphi(z)$ 是 D 中的解析函数，它的实部有边界值 $\ln f(u)$．因此，用 Schwarz 公式

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln f(u)\frac{e^{iu}+z}{e^{iu}-z}du. \tag{9}$$

展开函数 $g(z)=\exp\left\{\frac{1}{2}\varphi(z)\right\}$为幂级数 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$，我们得到下面关于系数 a_n 的值：

$$a_n=\sqrt{2\pi}\,\bar{b}_n.$$

另一方面，对于 $g(z)$ 的表示式可以用下面的方法进行变换．因为

$$\frac{e^{iu}+z}{e^{iu}-z}=1+\frac{2ze^{-iu}}{1-ze^{-iu}}=1+2\sum_{k=1}^{\infty}z^ke^{-iku},$$

故

$$g(z) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(u)du + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} d_k \bar{z}^k\right\},$$

其中

$$d_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iku} \ln f(u)du.$$

令

$$P = e^{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(u)du}, \quad e^{\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} d_k z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \ (c_0 = 1)$$

我们得到

$$\overline{g(z)} = P\sum_{k=0}^{\infty} c_k \bar{z}^k.$$

这样一来，

$$a_n = \sqrt{2\pi}\,Pc_n. \tag{10}$$

我们现在转向讨论具有连续时间的过程. 对应于随机过程 $\xi(t)$，过程 $\eta(t)$ 按照公式

$$\eta(t) = \int_0^{\infty} a(s)d\xi(t-s) \tag{11}$$

决定的运算可以作为对于连续时间的随机过程的滑动和运算的推广.

具有正交增量的过程 $\xi(t)$ 称为**标准的**，如果

$$E\xi(t) = 0, \qquad E|\xi(t+h) - \xi(t)|^2 = h.$$

根据 § 4 关于 Stieltjes 随机积分所述，过程 $\xi(t)$ 对应某一在 Lebesgue 可测集的 σ 代数上的随机正交测度 $\xi(A)$. 这个测度同样称为**标准随机测度**. 积分 (11) 存在的必要充分条件为 $a(t)$ 是 Lebesgue 可测的且

$$\int_0^{\infty} |a(t)|^2 dt < \infty.$$

注意，标准过程 $\xi(t)$ 不是 m. s. 可微. 但比值

$$\xi'_\Delta(t_k) = \frac{\xi(t_k + \Delta) - \xi(t_k)}{\Delta}, \quad \Delta = t_{k+1} - t_k,$$

对所有 t_k 及任意小的Δ是正交的. 因此，假导数 $\xi'(t)$ 考虑作为在任意二个时刻它的值是正交的、而它的方差是无穷的一个过程. 这个假过程常常在论证中被引用且被称为"白噪声". 白噪声的精确定义在广义随机过程理论中给出(Гельфанд 与 Веленкен[10]). 形式上公式(11)可写为

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{t}a(t-s)\xi'(s)ds,$$

且 $\eta(t)$ 可解释为对于白噪声的物理可实现滤过的反应. 这个滤过的脉冲转移函数当 $t<0$ 时等于零，并且当 $t>0$ 时等于 $a(t)$. 我们指出，对于过程 $\xi'(t)$，所有可容许的物理上可实现滤过都是由公式(11)给出. 事实上，任一容许的物理可实现滤过按定义或者有形如式(11)，或者是这样形式的滤过的极限. 具有脉冲转移函数 $a_n(t)$ 形如(11)的滤过的 m. s. 收敛的条件如下：当 $n, n'\to\infty$ 时

$$\int_0^\infty |a_n(s)-a_{n'}(s)|^2ds\to 0,$$

然而，如果这一条件满足的话，则存在 $\text{l.i.m.}\,a_n(t)=a(t)$ (关于 $(0,\infty)$ 上 Lebesgue 测度)且

$$\text{l.i.m.}\,\eta_n(t)=\text{l.i.m}\int_0^\infty a_n(s)d\xi(t-s)=\int_0^\infty a(s)d\xi(t-s).$$

所以，形如(11)的滤过中取极限过程并没有扩大滤过的类.

式(11)可以重新写为下面的形式:

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}a(t-s)d\xi(s),\ \text{当}\ t<0\ \text{时},\ a(t)=0.$$

因此，过程 $\eta(t)$ 的相关函数等于

$$R(t)=\int_{-\infty}^{\infty}a(t+s-u)\overline{a(s-u)}du$$

或

$$R(t)=\int_0^\infty a(t+s)\overline{a(s)}ds. \qquad (12)$$

引理 2 为使平稳(广义)过程 $\eta(t)$ 是物理上可实现滤过对于从属于这一过程的白噪声的反应，必需且只需过程 $\eta(t)$ 具有绝对

连续谱测度，且它的谱密度 $f(u)$ 满足表示式

$$f(u) = |h(iu)|^2, \tag{13}$$

其中

$$h(iu) = \int_0^\infty b(s)e^{-ius}ds, \quad \int_0^\infty |b(s)|^2 ds < \infty, \tag{14}$$

证．必要性．设过程满足式(11)，令

$$h(iu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty a(s)e^{-isu}ds.$$

根据 Parseval 等式

$$R(t) = \int_0^\infty a(t+s)\,\overline{a(s)}\,ds = \int_{-\infty}^\infty e^{iut}|h(iu)|^2 du,$$

即过程的谱是绝对连续的且谱密度具有形式(13)，(14)．

充分性．设引理条件满足．我们考虑过程 $\eta(t)$ 的谱表示：

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{iut}\zeta(du),$$

及随机测度

$$\mu(A) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\chi_A(u)}{h(iu)}\zeta(du). \tag{15}$$

随机积分(15)对任意有界 Borel 集 A 有意义，这是因为

$$\frac{\chi_A(u)}{h(iu)} \in \mathscr{L}_2\{F\},$$

其中 F 是过程的谱测度，

$$F(A) = \int_A |h(iu)|^2 du.$$

容易看出，$\mu(A)$ 是正交测度，并且

$$\mathbf{E}\mu(A)\,\overline{\mu(B)} = \int_{A\cap B} du.$$

令

$$\xi(t_2) - \xi(t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-iut_2} - e^{-iut_1}}{-iu}\mu(du). \tag{16}$$

显然，随机积分(16)存在． 区间随机函数 $\xi(\Delta) = \xi(t_2) - \xi(t_1)$，$\Delta = [t_1, t_2)$ 是对应于标准过程的基本测度．事实上，$\mathbf{E}\xi(\Delta) =$

0。其次，对于 Fourier 积分利用 Parseval 等式，我们得到

$$\mathbf{E}\xi(\Delta_1)\overline{\xi(\Delta_2)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iut_2} - e^{-iut_1}}{-iu} \frac{e^{iut_4} - e^{iut_3}}{iu} du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\Delta_1}(t)\chi_{\Delta_2}(t)dt = l(\Delta_1 \cap \Delta_2),$$

其中 $\Delta_1 = [t_1, t_2)$，$\Delta_2 = [t_3, t_4)$，l 是实数轴上的 Lebesgue 测度. 根据 § 4 引理 1 及(15)式，我们得到

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}h(iu)\mu(du). \tag{17}$$

现在，我们注意到，如果

$$h(iu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} a(s)e^{ius}ds, \quad 其中 \int_{-\infty}^{\infty} |a(s)|^2 ds < \infty, \tag{18}$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(iu)\mu(du) = \int_{-\infty}^{\infty} a(-s)\xi(ds).$$

事实上，由于空间 $\mathscr{L}_2\{\mu\}$ 与 $\mathscr{L}_2\{\xi\}$ 同构于空间 $\mathscr{L}_2\{l\}$，其中 l 是直线 $(-\infty, \infty)$ 上的 Lebesgue 测度，并且 Fourier 变换不改变 $\mathscr{L}_2\{l\}$ 中的内积，故式(18)只须验证对简单函数成立就足够了. 令 $a(t) = \Sigma c_k \chi_{\Delta_k}(t)$，其中 Δ_k 是区间(或半开闭区间) (a_k, b_k). 这时

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(-s)\xi(ds) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \sum_k c_k \frac{e^{iub_k} - e^{iua_k}}{iu} \mu(du),$$

它是式(18)的特殊情形. 于是，式(18)成立，从(18)得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}h(iu)\mu(du) = \int_{-\infty}^{\infty} a(s)d\xi(t-s), \tag{19}$$

因为，根据(16)式测度 ξ 乘以 e^{iut} 导致函数 ξ 的变元平移 t. 由式(17)与(19)，我们得到

$$\eta(t) = \int_0^{\infty} a(s)d\xi(t-s), \quad 其中 a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(iu)e^{-iut}du.$$

引理证毕.

设过程 $\eta(t)$ 的谱密度 $f(u)$ 是给定的. 发生下面的问题：什么

时候谱密度可以表示为式(13)，(14)(或者说可以因子分解)？根据函数 $f(u)$ 如何找出函数 $h(iu)$(从而找出 $a(t)$)？这些函数论问题的解答，可以把它们变为早已解决的对于在圆上函数的因子分解的情形得到．我们引入变换 $w=\frac{1+z}{1-z}$，它把圆 $D=\{z:|z|<1\}$ 映射到右半平面 $\Pi^+=\{w:\mathrm{Re}w>0\}$ 中．在对应的区域($w=iu$, $z=e^{i\theta}$) 的边界上，这个变换具有形式 $u=\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}$．设 $f(u)$有因子分解(13)，(14)．令

$$\left.\begin{aligned} g(z) &= (1+w)h(w)=\frac{2}{1-z}h\left(\frac{1+z}{1-z}\right),\\ \tilde{f}(\theta) &= f(u)(1+u^2). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

函数 $\tilde{f}(\theta)$ 假定有因子分解 $|\tilde{f}(\theta)|=|g(e^{i\theta})|^2$，其中 $g(z)$ 在D内解析并且在 $(-\pi,\pi)$ 内可积，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(\theta)d\theta=2\int_{-\infty}^{\infty}f(u)du<\infty,$$

即 $g(z)\in H_2$．根据定理 1

$$-\infty<\int_{-\pi}^{\pi}\ln\tilde{f}(\theta)d\theta=2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln f(u)+\ln(1+u^2)}{1+u^2}du,$$

因此，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln f(u)}{1+u^2}du>-\infty. \tag{21}$$

反之，假设 $f(u)$ 非负、可积且满足式(21)． 借助于式(20)定义 $\tilde{f}(\theta)$．则 $\tilde{f}(\theta)$ 可积且

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln\tilde{f}(\theta)d\theta>-\infty.$$

由定理 1 得到 $\tilde{f}(\theta)$ 有因子分解

$$\tilde{f}(\theta)=|g(e^{i\theta})|^2,$$

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\qquad \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty.$$

设

$$h(w)=\frac{1}{1+w}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{1-w}{1+w}\right)^n.$$

则函数 $h(w)$ 在右半平面解析且 $f(u)=|h(iu)|^2$,

$$h(iu)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{(1-iu)^n}{(1+iu)^{n+1}}. \tag{22}$$

注意到函数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\theta}$ 在 $\mathscr{L}_2(-\pi,\pi)$ 中构成一完备正交规范序列，容易看出序列 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(1-iu)^n}{(1+iu)^{n+1}}$ 在$\mathscr{L}_2(-\infty,\infty)$中是关于 Lebesgue 测度的完备正交规范序列．因此，对于 $h(iu)$ 写成上式(22)的级数是均方收敛的．现在我们注意到

$$\frac{(1-iu)^n}{(1+iu)^{n+1}}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{A_k}{(1+iu)^k}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{A_k}{(k-1)!}\int_0^{\infty}e^{-(1+iu)t}t^{k-1}dt$$

$$=\int_0^{\infty}e^{iut}B_n(t)dt,$$

因此

$$h(iu)=\int_0^{\infty}e^{-iut}b(t)dt,\quad 其中\ b(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nB_n(t).$$

同时应当记住级数(22)的部分和是如下的一个函数的 Fourier 变换(乘一个因子)：当 $t\geqslant 0$ 时它等于 $\sum_{n=1}^{N}a_nB_n$，而当 $t<0$ 时它等于零．因为 Fourier 变换不改变在 $\mathscr{L}_2\{-\infty,\infty\}$ 中的函数的模，故由级数(22)的 m. s. 收敛性得到对于 $b(t)$ 的级数收敛且

$$\int_0^{\infty}|b(t)|^2dt<\infty.$$

就函数 $f(x)$ 得到的因子分解唯一性而论，其情况类似于在圆上函数的因子分解．关于 $h(w)$ 的表示式，可以由公式(9)用 w 代 z 且由相应的改变积分号下的变数得到：

$$h(w)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln f(u)}{1+u^2}\frac{i+uw}{u+iw}du\right\}. \tag{23}$$

定理 3 为使非负可积函数 $f(u)(-\infty<u<\infty)$ 能够有因子分解式(13),(14),其必要充分条件为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln f(u)}{1+u^2}du>-\infty. \tag{24}$$

在附加条件 $h(w)\neq 0$ $(\mathrm{Re}w>0)$ 及 $h(1)>0$ 下，函数 $h(w)$ 是唯一的且由式(23)确定.

定理 4 为使平稳过程 $\eta(t)(-\infty<t<\infty)$ 能够有式(11)，其必要充分条件为它具有绝对连续谱，并且它的谱密度满足条件(24).

§8. 平稳过程的预测与滤过

在有许多实际应用的随机过程理论中，其重要的问题之一如下：观察某一随机变量集合 $\{\xi_\alpha:\alpha\in A\}$，要求一个最优的方法去估计随机变量 ζ 的值. 因此,要求寻找一个关于变量 ξ_α, $\alpha\in A$ 的函数 $f(\xi_\alpha|\alpha\in A)$,使得满足具有最小可能误差的近似等式

$$\zeta\approx\hat{\zeta}=f(\xi_\alpha|\alpha\in A). \tag{1}$$

这个问题的一个例子是随机过程的预测(或外推). 这时，需要根据随机过程在 t^* 以前某一时间集上的值，估计随机过程在时间 t^* 的值.

另一例子是随机过程的滤过问题. 这问题如下: 在时刻 $t'\in T'\subset T$, 观察到过程 $\xi(t)=\eta(t)+\zeta(t)$，它是"有用的"信号 $\zeta(t)$ 和"噪声" $\eta(t)$ 的和. 需要把噪声从信号中分离开来,也就是说对某一 $t^*\in T$,要求得到形如

$$\zeta(t^*)\approx\hat{\zeta}=(\xi(t')|t'\in T'),$$

对于 $\zeta(t)$ 的最好的近似值. 问题的提法暂时还不完全，因为没有指出"最好的近似"是指什么意思. 诚然，最佳准则依赖所考虑的问题的实际性质. 至于数学理论，则所提问题的常见的主要解答

方法是把均方偏差作为近似等式(1)精确度的度量。

量

$$\delta = \{\mathbf{E}[\zeta - f(\xi_\alpha|\alpha\in A)]^2\}^{1/2} \tag{2}$$

称为近似公式(1)的均方误差。问题是确定函数 f,使得(2)取最小值。当 A 为有穷集时,$f(\xi_\alpha|\alpha\in A)$ 表示为变元 $\xi_\alpha(\alpha\in A)$ 的 Borei 可测函数。但如果 A 是无穷的，则这个符号表示关于随机变量集 $\{\xi_\alpha, \alpha\in A\}$ 产生的 σ 代数 $\mathfrak{F}=\sigma\{\xi_\alpha, \alpha\in A\}$ 为可测的随机变量。

今后假定 ζ 与 $f\{\xi_\alpha|\alpha\in A\}$ 具有二阶矩。

令

$$\gamma = E(\zeta|\mathfrak{F}). \tag{3}$$

则

$$\begin{aligned}\delta^2 &= \mathbf{E}\{\zeta - f(\xi_\alpha|\alpha\in A)\}^2\\ &= \mathbf{E}(\zeta-\gamma)^2 + 2\mathbf{E}(\zeta-\gamma)(\gamma - f(\xi_\alpha|\alpha\in A))\\ &\quad + \mathbf{E}(\gamma - f(\xi_\alpha|\alpha\in A))^2.\end{aligned}$$

因为 $\gamma - f(\xi_\alpha|\alpha\in A)$ 是 $\mathfrak{F}$ 可测的,故

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(\zeta-\gamma)(\gamma - f(\xi_\alpha|\alpha\in A))\\ &= \mathbf{E}\mathbf{E}\{(\zeta-\gamma)(\gamma - f(\xi_\alpha|\alpha\in A))|\mathfrak{F}\}\\ &= \mathbf{E}(\gamma - f(\xi_\alpha|\alpha\in A))\mathbf{E}\{(\zeta-\gamma)|\mathfrak{F}\} = 0,\end{aligned}$$

因此

$$\delta^2 = \mathbf{E}(\zeta-\gamma)^2 + \mathbf{E}(\gamma - f(\xi_\alpha|\alpha\in A))^2.$$

从而得到

定理 1 有限二阶矩随机变量 ζ 的近似值(用 $\mathfrak{F}=\sigma\{\xi_\alpha, \alpha\in A\}$-可测随机变量，具有最小均方误差)是唯一的 (mod**P**) 且由

$$\gamma = \mathbf{E}\{\zeta|\mathfrak{F}\}.$$

给定。

注。随机变量 ζ 的估计 $\hat{\zeta}=\gamma$ 是无偏的,即

$$E\gamma = EE\{\zeta|\mathfrak{F}\} = E\zeta,$$

并且对任意 $\alpha\in A$,$\zeta-\gamma$ 与 ξ_α 不相关;

$$\mathbf{E}(\zeta-\gamma)\xi_\alpha=\mathbf{E}\mathbf{E}\{(\zeta-\gamma)\xi_\alpha|\mathfrak{F}\}$$
$$=\mathbf{E}\xi_\alpha E\{(\zeta-\gamma)|\mathfrak{F}\}=0.$$

可惜，对于有效的近似式的获得，定理 1 的实际应用有很大的困难．然而，对于 Gauss 随机变量的情形是可以应用的，这点在下面讨论．首先注意，一个较简单的问题是不在给定的随机变量的所有可测函数类，而是在较窄的线性函数类中去找最优近似，而它在许多时候使得可以完全且解析地获得解答． 更精确地表示如下：令 $\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$ 是基本概率空间，设 ξ_α 与 ζ 具有有限二阶矩．我们引入 Hilbert 空间 $\mathscr{L}_2\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$ 的子空间 $\mathscr{L}_2\{\xi_\alpha,\alpha\in\mathbf{A}\}$，它是常数与 $\xi_\alpha,\alpha\in A$ 的闭线性包络． 子空间 $\mathscr{L}_2\{\xi_\alpha,\alpha\in A\}$ 可以考虑作为具有有限方差的 ξ_α 的全体线性(非齐次)函数的集合． 随机变量 ζ 最优的线性近似 $\hat{\zeta}$ 是 $\mathscr{L}_2\{\xi_\alpha,\alpha\in A\}$ 中与 ζ 有最短距离的元素．即对任意 $\zeta'\in\mathscr{L}_2\{\xi_\alpha,\alpha\in A\}$，有

$$\delta^2=\mathbf{E}|\hat{\zeta}-\zeta|^2\leqslant\mathbf{E}|\zeta'-\zeta|^2.$$

由 Hilbert 空间理论知道，在子空间 H_0 中寻找元素 $\hat{\zeta}$ 使之与给定的元素 ζ 有最短距离的问题总是有唯一的解． 即 $\hat{\zeta}$ 是 ζ 在 H_0 上的投影． 元素 $\hat{\zeta}$ 常常可以被确定且唯一地由方程组 $(\zeta-\hat{\zeta},\zeta'')=0$ (对任一 $\zeta''\in\mathscr{L}_2\{\xi_\alpha,\alpha\in A\}$) 确定．在我们的情形，这一方程组化为

$$\mathbf{E}(\hat{\zeta}\xi_\alpha)=\mathbf{E}(\zeta\xi_\alpha),\tag{4}$$

由于在 $\mathscr{L}_2\{\xi_\alpha,\alpha\in A\}$ 中包含了么元素．故

$$\mathbf{E}\hat{\zeta}=\mathbf{E}\zeta,$$

因此，最佳线性估计 $\hat{\zeta}$ 必是无偏的． 我们可以假定，对任意 α，$\mathbf{E}\xi_\alpha=0$．因此在以后，我们仅限于考虑 $\mathscr{L}_2\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$ 中的具有数学期望为 0 的随机变量的子空间．

当然，没有理由认为 ζ 的线性估计永远是可以接受的．例如，如果 $\xi(n)=e^{i(\nu n+\varphi)}$，其中 ν 为$(-\pi,\pi)$上均匀分布，则 $E\{\xi(n)\times\xi(m)\}=0(n\neq m)$ 且根据所有的 $\xi(n)(n\neq m)$ 的值，$\xi(m)$ 的最优线性估计为 $\hat{\xi}(m)=0$，即没有充分利用 $\xi(n)$ 的值． 这时，任意一对观察值 $\xi(k)$ 与 $\xi(k+1)$ 就足以精确地确定所有序列

$\xi(n)$，即$\xi(n)=\left(\frac{\xi(k+1)}{\xi(k)}\right)^{n-k}\xi(k)$.

我们现在假定，$\{\zeta,\xi_\alpha,\ \alpha\in A\}$ 的所有有限维分布是正态的且 $\mathbf{E}\xi_\alpha=0$，$\mathbf{E}\zeta=0$. 在这一情形，由 $\zeta-\hat{\zeta}$ 与 ξ_α 的不相关性得到，它们是独立的，因此 $\zeta-\hat{\zeta}$ 不依赖 σ 代数 $\mathfrak{F}$，并且

$$\mathbf{E}\{\zeta|\mathfrak{F}\}=\mathbf{E}\{\zeta-\hat{\zeta}+\hat{\zeta}|\mathfrak{F}\}=\mathbf{E}(\zeta-\hat{\zeta})+\hat{\zeta}=\hat{\zeta}.$$

定理 2 对于 Gauss 随机变量组 $\{\zeta,\xi_\alpha,\ \alpha\in A\}$，借助于 $\sigma\{\xi_\alpha,\alpha\in A\}$ 可测函数的 ζ 的最优（在均方误差意义下）估计与在 $\mathscr{L}_2\{\xi_\alpha,\alpha\in A\}$ 中的最优线性估计是相同的.

下面考虑若干最优线性估计构造的特殊问题.

A）随机变量 ξ_α 的数目是有限的（$\alpha=1,2,\cdots,n$）. 从线性代数学中已经知道，此问题有简单的解决方法. 设 ξ_α 线性独立，则可以借助于公式

$$\hat{\zeta}=\frac{1}{\Gamma}\begin{vmatrix}(\xi_1,\xi_1)\cdots(\xi_n,\xi_1) & \xi_1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ (\xi_n,\xi_1)\cdots(\xi_n,\xi_n) & \xi_n\\ (\zeta,\xi_1)\cdots(\zeta,\xi_n) & 0\end{vmatrix}$$

表示 ζ 在 $\xi_\alpha(\alpha=1,\cdots,n)$ 张成的有限维空间 H_0 上的投影 $\hat{\zeta}$，其中 $\Gamma=\Gamma(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是向量系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的 Gram 矩阵行列式：

$$\Gamma(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\begin{vmatrix}(\xi_1,\xi_1)\cdots(\xi_1,\xi_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (\xi_n,\xi_1)\cdots(\xi_n,\xi_n)\end{vmatrix}$$

且 $(\xi,\eta)=\mathbf{E}(\xi\bar{\eta})$. 近似等式 $\zeta\approx\hat{\zeta}$ 的均方误差 δ 等于向量 ζ 的末端在空间 H_0 上所作垂线的长度，并且由下式给出：

$$\delta^2=\frac{\Gamma(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\zeta)}{\Gamma(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}.$$

B）根据在有限的时间区间 $T=[a,b]$ 上对 m.s 连续随机过程 $\xi(t)$ 的观察结果，我们考虑关于随机变量 ζ 的估计问题. 令 $R(t,s)$ 是过程 $\xi(t)$ 的相关函数. 由 § 3 定理 5，过程 $\xi(t)$ 可以展

为级数

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\,\varphi_k(t)\xi_k,$$

其中 $\varphi_k(t)$ 是规范正交特征函数序列，λ_k 是 (a,b) 上相关函数的特征值：

$$\lambda_k\varphi_k(t)=\int_a^b R(t,s)\varphi_k(s)ds,$$

ξ_k 是标准的不相关序列

$$\mathbf{E}\xi_k\xi_r=\delta_{kr}.$$

显然，$\{\xi_k\}$ $k=1,2,\cdots$ 构成一个在 $\mathscr{L}_2\{\xi(t),\ t\in(a,b)\}$ 中的基底. 因此

$$\hat{\zeta}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\xi_n,$$

其中 $\xi_n=\int_a^b\xi(t)\overline{\varphi_n(t)}\,dt,n=1,2,\cdots$

$$c_n=\mathbf{E}\zeta\xi_n=\int_a^b R_{\zeta\xi}(t)\varphi_n(t)dt,\ R_{\zeta\xi}(t)=\mathbf{E}\zeta\xi(t).$$

估计的均方误差 δ 可以根据公式

$$\delta^2=\mathbf{E}|\zeta|^2-\mathbf{E}|\hat{\zeta}|^2=\mathbf{E}|\zeta|^2-\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_a^b R_{\zeta\xi}(t)\varphi_n(t)dt\right|^2$$

求得. 由于核 $R(t,s)$ 的特征函数与特征值的计算的复杂性，这个方法的实际应用是很困难的.

Wiener 方法 设 $\xi(t)$ 与 $\zeta(t)$, $t\in T$ 是两个 Hilbert 随机函数. 假定过程 $\xi(t)$ 在变数 t 值的某个集 T^* 上被观察. 根据观察值 $\xi(t)$, $t\in T^*$ 作关于确定 $\zeta(t_0)$, $t_0\in T$ 的最优估计问题. 如果我们假定要找的估计具有形式

$$\hat{\zeta}(t_0)=\int_{T^*}c(s)\xi(s)m(ds),\tag{5}$$

其中 m 是 T^* 上的某一测度，并且假设使这积分有意义的条件被满足，则方程(4)变为

$$\int_{T^*} c(s)R_{\xi\xi}(s,t)m(ds) = R_{\zeta\xi}(t_0,t),\quad t\in T^* \tag{6}$$

其中 $R_{\xi\xi}$ 是 $\xi(t)$ 的相关函数，$R_{\zeta\xi}$ 是 $\zeta(t)$ 与 $\xi(t)$ 的互相关函数．方程(6)是具有对称 (Hermitian) 核的第一类 Fredholm 积分方程．这一方程未必恒有解．然而，如果

$$\int_T \mathbf{E}|\xi(t)|^2 m(dt) < \infty,$$

则积分方程(6)有解 $c(s)\in \mathscr{L}_2\{m\}$ 的充分必要条件为 $\zeta(t)$ 的最优线性估计 $\hat{\zeta}(t_0)$ 具有式(5)．

设 T 是实轴，$T^*=(a,b)$，过程 $\xi(t)$ 与 $\zeta(t)$ 平稳且平稳相关（广义），并且测度 m 取作 Lebesgue 测度．则方程(6)变为

$$\int_a^b c(s)R_{\xi\xi}(s-t)ds = R_{\zeta\xi}(t_0-t),\quad t\in(a,b). \tag{7}$$

如果 $\zeta(t)=\xi(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ 且 $t_0>b$，即如果根据 $\xi(t)$ 的过去的值来估计 $\xi(t_0)$，则这个问题称为纯预测问题．

我们详细叙述如下问题：根据在时刻 t 以前过程 $\xi(s)$，$s\leqslant t$ 的观察结果预测 $\zeta(t+q)$．在这一情形，我们将假定过程 $\xi(t)$ 与 $\zeta(t)$ 是平稳且平稳相关（广义）的．当 q 固定时，我们将把预测量 $\hat{\zeta}(t)$ 考虑作为 t 的函数．容易看出，由方程(7)确定的量 $\hat{\zeta}(t)$ 是一个平稳过程．事实上，方程(7)具有形式：

$$\int_{-\infty}^t c_t(s)R_{\xi\xi}(s-u)ds = R_{\zeta\xi}(t+q-u),\ u\leqslant t.$$

经变数代换 $t-u=v$，$t-s=\tau$，上述方程变为

$$\int_0^\infty c_t(t-\tau)R_{\xi\xi}(v-\tau)d\tau = R_{\zeta\xi}(q+v),\quad v\geqslant 0. \tag{8}$$

从而我们看到，函数 $c_t(t-\tau)$不依赖于 t．设 $c(\tau)=c_t(t-\tau)$．现在可把方程(8)写为

$$\int_0^\infty c(s)R_{\xi\xi}(t-s)ds = R_{\zeta\xi}(q+t),\quad t\geqslant 0, \tag{9}$$

对于预测函数，式(5)具有如下形式

$$\hat{\zeta}(t) = \int_{-\infty}^t c(t-s)\xi(s)ds = \int_0^\infty c(s)\xi(t-s)ds. \tag{10}$$

因此，过程 $\hat{\xi}(t)=\hat{\zeta}_q(t)$ 是平稳的。从式(10)得到 $c(t)$ 是物理可实现滤过的脉冲转移函数。这个滤过将被观察到的过程变换为 $\zeta(t+q)$ 的最优估计。

容易给出预测函数 $\hat{\xi}(t)$ 的均方误差表示式。因为 δ^2 是向量 $\zeta(t+q)$ 的末端投影在 $\mathscr{L}_2\{\xi(s);s\leqslant t\}$ 上的垂线长度的平方。故

$$\delta^2=\mathbf{E}|\zeta(t+q)|^2-\mathbf{E}|\hat{\zeta}(t)|^2$$
$$=R_{\zeta\zeta}(0)-\int_0^\infty\int_0^\infty\overline{c(t)}R_{\xi\xi}(t-s)c(s)ds. \qquad (11)$$

假设 $R_{\zeta\zeta}(0)=\sigma_\zeta^2$ 以及改用相关函数 $R_{\xi\xi}$ 的谱表示。我们得到

$$\delta^2=\sigma_\zeta^2-\int_{-\infty}^\infty|c(iu)|^2dF_{\xi\xi}(u), \qquad (12)$$

其中 $F_{\xi\xi}(u)$ 是过程 $\xi(t)$ 的谱函数且

$$c(iu)=\int_0^\infty c(t)e^{-iut}dt.$$

我们简单地叙述由 N. Viener 提出的方程(9)的解的方法。设过程的谱绝对连续且谱密度 $f_{\xi\xi}(u)$ 可以因子分解(参阅 § 7 定理 3):

$$f_{\xi\xi}(u)=|h(iu)|^2,\ h(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty a(t)e^{-zt}dt,\ \mathrm{Re}z\geqslant 0.$$

由关于 Fourier 变换的 Parseval 等式得

$$R_{\xi\xi}(t)=\int_{-\infty}^\infty e^{itu}|h(iu)|^2du=\int_0^\infty a(t+s)\overline{a(s)}\,ds.$$

还假定过程 $\zeta(t)$ 与 $\xi(t)$ 的互谱函数绝对连续且它的密度 $f_{\zeta\xi}(u)$ 满足条件

$$\frac{f_{\zeta\xi}(u)}{h(iu)}=k(iu)\in\mathscr{L}_2, \qquad (13)$$

则

$$R_{\zeta\xi}(t)=\int_{-\infty}^\infty e^{itu}f_{\zeta\xi}(u)du=\int_{-\infty}^\infty e^{itu}k(iu)\overline{h(iu)}du$$
$$=\int_0^\infty b(t+s)\overline{a(s)}ds,$$

其中

$$b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} k(iu)e^{itu}du.$$

借助于所获得的公式，方程(9)可以改写为下面的形式:

$$\int_0^{\infty}\left[b(q+\tau+s) - \int_0^{\infty} c(\tau)a(t-\tau+s)d\tau \right]\overline{a(s)}ds = 0, t > 0. \tag{14}$$

为使式(14)成立，只须函数 $c(t)$ 满足方程

$$b(q+x) = \int_0^{\infty} c(\tau)a(x-\tau)d\tau,\ x > 0. \tag{15}$$

方程(15)与方程 (9) 有相同的形式，而仅仅在于当 t 为负值时函数 $a(t)$ 为零这一点不同. (15)写为

$$b(q+x) = \int_0^{x} c(\tau)a(x-\tau)d\tau,\ x > 0. \tag{16}$$

借助于 Laplace 变换，我们可以立即解这个方程. 以 e^{-zx} 乘等式(16)两边，并且从 0 到∞积分得

$$B_q(z) = C(z)h(z),$$

其中

$$B_q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} b(q+x)e^{-zx}dx,$$

$$C(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} c(t)e^{-zt}dt.$$

这样一来

$$C(z) = \frac{B_q(z)}{h(z)},\ c(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\frac{B_q(iu)}{h(iu)}du, \tag{17}$$

并且对于 $B_q(z)$, $\mathrm{Re}(z) > 0$ 的表达式可以写为形式

$$B_q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iqu}\frac{f_{\zeta\xi}(u)}{h(iu)}\frac{du}{z-iu}. \tag{18}$$

在推导公式(17), (18)中所陈述的假设是非常麻烦的. 在解决具体问题时，直接验证所假定的变换(它使问题获得解决)的合理性是较简单的.

Яглом 方法 Яглом 方法与 Wiener 方法不同，不必找最优

滤过的转移函数(它可以不存在)，而去找频率特性．不给出所提问题的解的一般公式，而仅只提出选择满足条件的未知函数的方法．在很多重要的情形，这个选择法相当容易实现．

设二维平稳过程 $(\xi(t),\zeta(t))$ 可以谱表示:

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}\nu_1(du),\zeta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}\nu_2(du),$$

它具有谱密度

$$\begin{pmatrix}f_{\xi\xi}(u) & f_{\xi\zeta}(u)\\ f_{\zeta\xi}(u) & f_{\zeta\zeta}(u)\end{pmatrix}$$

仿前，根据过程 $\xi(s)$, $s\leqslant t$ 的值，考虑 $\zeta(t+q)$ 的最优估计问题．预测过程 $\tilde{\zeta}(t)$ 从属于 $\xi(t)$．因此

$$\tilde{\zeta}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}c(iu)\nu_1(du),\quad \int_{-\infty}^{\infty}|c(iu)|^2f_{\xi\xi}(u)du<\infty. \tag{19}$$

决定过程 $\tilde{\zeta}(t)$ 的方程

$$\mathbf{E}\zeta(t+q)\overline{\xi(s)}=\mathbf{E}\tilde{\zeta}(t)\overline{\xi(s)},\quad s\leqslant t$$

变为如下形式:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{ius}\{e^{iuq}f_{\zeta\xi}(u)-c(iu)f_{\xi\xi}(u)\}du=0,\ s>0. \tag{20}$$

除了条件(19)及(20)外，我们还要求 $c(iu)$ 是物理可实现滤过的频率特性．这些条件是能满足的，如果:

a) 函数 $f_{\xi\xi}(u)$ 有界;

b) $c(iu)$ 是函数 $c(z)\in\mathscr{H}_2^+$ 的边界值;

c) $\psi(iu)=e^{iuq}f_{\zeta\xi}(u)-c(iu)f_{\xi\xi}(u)$ 是在 $\mathscr{H}_2^-$ 中函数 $\psi(z)$ 的边界值．

这里 $\mathscr{H}_2^+(\mathscr{H}_2^-)$ 表示在右(左)半平面解析的、积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(x+iu)|^2du$$

对 $x>0(x<0)$ 一致有界的函数 $h(z)$ 的空间．

事实上，由 b)得到 $\int_{-\infty}^{\infty}|c(iu)|^2du<\infty$，而这个连同 a)一起

保证条件(19)能满足．此外，从 b)得到 $c(iu)$ 是物理可实现滤过的频率特性．由条件 c)得到 $e^{iuq}f_{\zeta\xi}(u)-c(iu)f_{\xi\xi}(u)$ 是在正的变元值上为零的函数的 Fourier 变换，因此式(20)成立．

我们注意到，条件 b)使我们排除了在无穷远处频率特性可以不断增大的一切滤过．这样的频率特性对应一个与过程 $\xi(t)$ 的微分有关的运算，并且在建立最优滤过时常常碰到．因此，条件 b)希望用较少限制的条件代替．我们假定 $c(z)$ 是在右半平面解析的函数，并且当 $|z|\to\infty$ 时，$|c(z)|\to\infty$，但不比 z 的某一次幂(例如 r 次)快．函数

$$c_n(z)=\frac{c(z)}{\left(1+\frac{z}{n}\right)^{r+1}}\in\mathscr{H}_2^+.$$

因为 $|c_n(z)|\leqslant|c(z)|$，故如果条件(19)满足，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|c_n(iu)-c(iu)|^2f_{\xi\xi}(u)du=0,$$

这样一来，$c(iu)$ 是 $\mathscr{L}_2\{F_{\xi\xi}\}$ 中允许的物理可实现滤过的频率特性的极限，因而 $c(iu)$ 同样是这个滤过的频率特性．我们得到下面的结果．

定理 3 如果过程 $\xi(t)$ 的谱密度 $f_{\xi\xi}(u)$ 有界，则下面的条件唯一确定关于 $\zeta(t+q)$ 的估计的最优滤过的频率特性 $c(iu)$:

a) $\int_{-\infty}^{\infty}|c(iu)|^2f_{\xi\xi}(u)du<\infty$;

b) $c(iu)$ 是函数 $c(z)$ 的边界值，在右半平面解析，且当 $|z|\to\infty$ 时是不断上升的，但不快于 $|z|$ 的某一次幂；

c) $\phi(iu)=e^{iuq}f_{\zeta\xi}(u)-c(iu)f_{\xi\xi}(u)$ 是在 $\mathscr{H}_2^-$ 中函数 $\phi(z)$ 的边界值．

最优估计的均方误差 σ 等于

$$\begin{aligned}\delta&=\{\mathbf{E}|\zeta(t+q)|^2-\mathbf{E}|\hat{\zeta}(t)|^2\}^{1/2}\\&=\left\{\sigma_\zeta^2-\int_{-\infty}^{\infty}|c(iu)|^2f_{\xi\xi}(u)du\right\}^{1/2}.\end{aligned}\tag{21}$$

例 1．我们考虑具有相关函数 $R(t)=\sigma^2e^{-\alpha|t|}\ (\alpha>0)$ 的过

程 $\xi(t)(\xi(t)=\zeta(t))$ 的纯预测问题．容易找到谱密度为：$f_{\xi\xi}(u)=\frac{\sigma^2\alpha}{\pi}\frac{1}{u^2+\alpha^2}$．函数 $\phi(iu)$ 的解析开拓具有如下形式：

$$\phi(z)=\frac{c(z)-e^{zq}}{(z+\alpha)(z-\alpha)}\frac{\sigma^2\alpha}{\pi}.$$

函数 $\phi(z)$ 在左平面 $z=-\alpha$ 处有唯一的一个极点．借助于在右半平面解析的函数 $c(z)$，使得这一个极点为可去的，只须设 $c(z)=$ 常数 $=e^{-\alpha q}$．此时，定理 3 的条件 a)满足．因此

$$c(iu)=e^{-\alpha q},\ \tilde{\xi}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}e^{-\alpha q}\nu(du),$$

即，$\xi(t+q)$ 的最优预测的最好公式如下：

$$\xi(t+q)\approx e^{-\alpha q}\xi(t),$$

它仅依赖于最后观察时刻的值 $\xi(t)$，外推的均方误差等于

$$\delta=\sigma\sqrt{1-e^{-2\alpha q}}.$$

例 2．再次考虑过程 $\xi(t)$ 的纯预测问题．即根据观察值 $\xi(s)$，$s<t$ 去估计 $\xi(t+q)$．如果过程 $\xi(t)$ 的谱绝对连续且满足 §7 条件(24)，则过程的谱密度能因子分解：$f_{\xi\xi}(u)=|h(iu)|^2$，其中 $h(z)\in\mathscr{H}_2^+$ 且在右半平面没有零点．

我们考虑在实际问题中的一种重要情形，即当 $h(z)$ 是分式有理函数的情形：

$$h(z)=\frac{P(z)}{Q(z)},$$

其中 $P(z)$ 是 m 次多项式，$Q(z)$ 是 n 次多项式（$m<n$），还假定谱密度 $f_{\xi\xi}(u)$ 有界且不为零．这时多项式 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 的零点落在左半平面．令

$$P(z)=A\prod_{j=1}^{p}(z-z_j)^{\alpha_j},\quad Q(z)=B\prod_{j=1}^{r}(z-\tilde{z}_j)^{\beta_j},$$

$$\sum_{j=1}^{p}\alpha_j=m,\qquad\sum_{j=1}^{r}\beta_j=n.$$

设

$$P_1(z) = (-1)^m \bar{A} \prod_{j=1}^{n} (z + \tilde{z}_j)^{\alpha_j},$$

$$Q_1(z) = (-1)^n \bar{B} \prod_{j=1}^{r} (z + \bar{\bar{z}}_j)^{\beta_j}.$$

函数 $\phi(iu)$ 的解析开拓有下面的形式:

$$\phi(z) = (e^{zq} - c(z)) \frac{P(z)P_1(z)}{Q(z)Q_1(z)}.$$

函数 $c(z)$ 应是在右半平面解析，而 $\phi(z)$ 在左半平面解析. 因此 $c(z)$ 必在整个复平面解析且可能在多项式 $P(z)$ 的零点处有极点，并且极点的阶不超过 $P(z)$ 对应的零点的阶，因此

$$c(z) = \frac{M(z)}{P(z)},$$

其中 $M(z)$ 是在 z 平面上的解析函数且对有限 z 没有奇点. 因为 $c(z)$ 的增加至多是指数形的，$M(z)$ 是多项式. 根据函数

$$c(iu) \frac{P(iu)}{Q(iu)} = \frac{M(iu)}{Q(iu)}$$

的模的平方的可积性，多项式 $M(iu)$ 的幂 m_1 不超过 $n-1$，$m^1 \leqslant n-1$.

另一方面，如在上面给出的所选择的函数 $c(z)$ 保证定理 3 的条件 a)和 b)是满足的. 只须选取多项式 $M(z)$ 使得函数

$$\phi(z) = \frac{[e^{zq}P(z) - M(z)]}{Q(z)} \frac{P_1(z)}{Q_1(z)},$$

或等价地，函数

$$\phi_1(z) = \frac{e^{zq}P(z) - M(z)}{Q(z)}$$

在左半平面没有极点. 为此，必须且只须下面的等式满足:

$$\left.\frac{d^j M(z)}{dz^j}\right|_{z=z_k} = \left.\frac{d^j(e^{zq}P(z))}{dz^j}\right|_{z=z_k}, \tag{22}$$

$$j = 0, 1, \cdots, \beta_k - 1, \quad k = 1, 2, \cdots, r.$$

满足条件(22)的多项式 $M(z)$ 的构造问题是通常的内插理论问题，并且在幂次为 $n-1$ 的多项式类中常常有唯一的解。如果我们找到了多项式 $M(z)$，则我们因而找到了最优预测滤过的频率特性为

$$c(iu)=\frac{M(iu)}{P(iu)}.$$

还可以用下面的方法确定函数 $c(z)$. 展开函数 $P(z)\,Q^{-1}(z)$ 及 $M(z)Q^{-1}(z)$ 为部分分式. 令

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{\beta_k}\frac{c_{kj}}{(z-\tilde{z}_k)^j},\quad \frac{M(z)}{Q(z)}=\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{\beta_k}\frac{\gamma_{kj}}{(z-\tilde{z}_k)^j}.$$

为使函数 $\psi_1(z)$ 在点 $\tilde{z}_k, k=1,\cdots,r$ 没有极点,必须且只须使得

$$\frac{d^j}{dz^j}(z-\tilde{z}_k)^{\beta_k}\psi_1(z)\Big|_{z=\tilde{z}_k}=0,\ j=1,\cdots,\beta_k-1,$$

且

$$\psi_1(z)=\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{\beta_k}\frac{c_{kj}e^{zq}-\gamma_{kj}}{(z-\tilde{z}_k)^j}.$$

通过简单的计算证明

$$\gamma_{kj}=\Big[c_{kj}+\frac{q}{1!}c_{kj+1}+\frac{q^2}{2!}c_{kj+2}+\cdots$$
$$+\frac{q^{\beta_k-1}}{(\beta_k-j)!}c_{k\beta_k}\Big]e^{\tilde{z}_kq},\ k=1,\cdots,r.$$

如果知道了系数 γ_{kj},关于 $c(z)$ 我们可以写为如下的表示式:

$$c(iu)=\frac{1}{h(iu)}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{\beta_k}\frac{\gamma_{kj}}{(z-\tilde{z}_k)^j}$$
$$=\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{\beta_k}\frac{\gamma_{kj}}{(z-\tilde{z}_k)^j}\Big/\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{\beta_k}\frac{c_{kj}}{(z-\tilde{z}_k)^j}.$$

例 3. 设过程 $\zeta(s)$ $(s\leqslant t)$ 被观察，但观察 $\zeta(s)$ 的结果由于各种干扰而失真，因此观察值给出了一个异于 $\zeta(s)$ 的函数 $\xi(s)$, $s\leqslant t$. ,设干扰(或说噪声) $\eta(t)=\xi(t)-\zeta(t)$ 是具有均

值为 0 的平稳过程. 希望根据过程 $\xi(s)=\zeta(s)+\eta(s)$, $s\leqslant t$ 的观察结果去估计 $\zeta(t+q)$ 的值.

这样的问题称为滤过或平滑化问题(或说过程 $\xi(t)$ 须要过滤掉噪声 $\eta(t)$, 亦可以说过程 $\xi(t)$ 须要"平滑", 即除去不规则的噪声). 而且,当 $q>0$ 时, 这是一个带预测的滤过问题, 当 $q<0$ 时,这是一个具有滞后现象的滤过问题.

设噪声 $\eta(t)$ 与过程 $\zeta(t)$ 不相关,并且具有谱密度为 $f_{\eta\eta}(u)$ 与 $f_{\zeta\zeta}(u)$. 则

$$R_{\xi\xi}(t)=R_{\eta\eta}(t)+R_{\zeta\zeta}(t),\quad f_{\xi\xi}(u)=f_{\eta\eta}(u)+f_{\zeta\zeta}(u).$$

因为 $R_{\zeta\xi}(t)=R_{\zeta\zeta}(t)$,故存在过程 $\zeta(t)$ 与 $\xi(t)$ 的互谱密度,并且 $f_{\zeta\xi}(u)=f_{\zeta\zeta}(u)$.

设

$$f_{\zeta\zeta}(u)=\frac{c_1}{u^2+\alpha^2},\quad f_{\eta\eta}(u)=\frac{c_2}{u^2+\beta^2}.$$

则

$$f_{\xi\xi}(u)=\frac{c_3(u^2+\gamma^2)}{(u^2+\alpha^2)(u^2+\beta^2)},\quad c_3=c_1+c_2,$$

$$\gamma^2=\frac{c_2\alpha^2+c_1\beta^2}{c_1+c_2}.$$

对于函数 $\phi(z)$ 我们得到下面的表示式:

$$\phi(z)=\frac{-c_1e^{zq}(z^2-\beta^2)+c_3c(z)(z^2-\gamma^2)}{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}.$$

令 $q>0$. 函数 $\phi(z)$ 将必在左半平面解析且属于 $\mathscr{H}_2^-$. 为此必须使得在点 $z=-\alpha$ 与 $z=-\beta$ 处分子为零. 因而导出等式

$$c(-\beta)=0,\quad c(-\alpha)=\frac{c_1}{c_3}\frac{e^{-\alpha q}(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2-\gamma^2}. \tag{23}$$

此外, $c(z)$ 在左半平面解析(根据条件 b)在右半平面也解析),但要除去 $z=-\gamma$,因为在这一点 $z=-\gamma$, $c(z)$ 可能有简单极点, 这样一来

$$c(z)=\frac{\varphi(z)}{z+\gamma},$$

其中 $\varphi(z)$ 是整函数．由积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|c(iu)|^2 f_{\xi\xi}(u)du$$

有限这一条件得到，$\varphi(z)$ 是 z 的线性函数，$\varphi(z)=Az+B$.

由式(23)我们得到

$$c(z)=A\frac{z+\beta}{z+\gamma},\quad A=\frac{c_1}{c_3}\frac{\beta+\alpha}{\gamma+\alpha}e^{-\alpha q}.$$

因此具有预测的最优平滑化公式有如下形式：

$$\zeta_q(t)=A\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}\frac{iu+\beta}{iu+\gamma}\nu_1(du).$$

回想起 $(iu+\gamma)^{-1}$ 是具有脉冲转移函数为 $e^{-\gamma t}$ 的物理可实现滤过的频率特性．我们得到

$$\zeta_q(t)=\frac{c_1}{c_3}\frac{\beta+\alpha}{\gamma+\alpha}e^{-\alpha q}\left\{\xi(t)-(\beta-\gamma)\int_{-\infty}^{t}e^{-\gamma(t-s)}\xi(s)ds\right\}.\tag{24}$$

对于 $q<0$，公式(23)不正确．形式上这是因为此时函数 $\psi(z)$ 在左半平面无界．对于 $q<0$，函数 $\psi(z)$ 可以由下面的想法确定．令 $\psi_1(z)=-c_1e^{zq}(z^2-\beta^2)+c_3c(z)(z^2-\gamma^2)$，则 $c(z)$ 除去点 $z=-\gamma$ 及 $\psi_1(-\alpha)=\psi_1(-\beta)=0$ 外将必在左半平面解析．因为

$$c(z)=\frac{\psi_1(z)+c_1e^{zq}(z^2-\beta^2)}{c_3(z^2-\gamma^2)}$$

且 $c(z)$ 在右半平面解析，故 $\psi_1(z)$ 是一个整函数且

$$\psi_1(\gamma)=-c_1e^{\gamma q}(\gamma^2-\beta^2).\tag{25}$$

令

$$\psi_1(z)=A(z)(z+\alpha)(z+\beta).$$

函数 $A(z)$ 是整函数．由定理 3 的条件 a) 得到，$A(z)=$ 常数 $=A$，值 A 由式(25)确定：

$$A = c_1 e^{\gamma q} \frac{-\gamma + \beta}{\alpha + \gamma}.$$

因此

$$c(iu) = \frac{c_1}{c_3}$$

$$\times \frac{(\alpha+\gamma)(u^2+\beta^2)e^{iuq} - e^{\gamma q}(-\gamma+\beta)(iu+\alpha)(iu+\beta)}{(\alpha+\gamma)(u^2+\gamma^2)}. \tag{26}$$

对于平稳序列的预测和滤过，可以运用类似于具有连续参数的过程所叙述过的那种方法. 平稳序列预测问题的一般的解将在下一节中介绍. 这里我们仅举一个例子.

例 4 . 考虑一个平稳序列 $\xi(t)$,它满足最简单自回归方程

$$a_0\xi(t) + a_1\xi(t-1) + \cdots + a_p\xi(t-p) = \eta(t), \tag{27}$$

其中 $\eta(t)$ 是标准不相关序列,并且 $\xi(t)$ 从属于 $\eta(t)$. 设

$$\eta(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itu} d\zeta(u)$$

是序列 $\eta(t)$ 的谱表示，$\zeta(u)$ 是具有不相关增量及构成函数为 $\frac{1}{2\pi} l(A \cap B)$ 的过程,其中 l 是 Lebesgue 测度. $\xi(t)$ 的谱表示为如下形式:

$$\xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itu}\varphi(u)d\zeta(u), \quad 其中 \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(u)|^2 du < \infty. \tag{28}$$

将(28)代入(27)得

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{itu}\overline{P(e^{iu})}\varphi(u)\, d\zeta(u) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itu} d\zeta(u),$$

其中 $P(z) = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k z^k$. 因此

$$\varphi(u) = \frac{1}{\overline{P(e^{iu})}} (\mathrm{mod}\, l).$$

设函数 $P(z)$ 在闭圆 $|z| \leqslant 1$ 中没有零点. 则 $\frac{1}{P(z)} \in H_2$. 如果

$$\frac{1}{P(z)}=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{b}_k z^k \qquad \left(b_0=\frac{1}{a_0}\right),$$

则

$$\xi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\eta(t-n),$$

我们得到了对于不相关序列 $\eta(t)$ 的物理可实现滤过的反应形式的序列 $\xi(t)$ 的表示式. 因为

$$\xi(t)=-\frac{1}{a_0}[a_1\xi(t-1)+\cdots+a_p\xi(t-p)+\eta(t)],\tag{29}$$

故根据给定 $\xi(t-n)$ $(n=1,2,\cdots)$ 的 $\xi(t)$ 的最优预测为

$$\hat{\xi}(t)=-\frac{1}{a_0}[a_1\xi(t-1)+a_2\xi(t-2)+\cdots+a_p\zeta(t-p)].$$

预测的最小均方误差等于

$$\delta(t)=\left\{\mathbf{E}\frac{|\eta(t)|^2}{|a_0|^2}\right\}^{1/2}=\frac{1}{|a_0|}.$$

重复应用式(29),可以使我们得到关于后几步的最优预测.

§9. 平稳过程预测的一般理论

在这一节里，我们研究关于根据无穷的过去的平稳序列和平稳过程预测的一般理论. 和以前一样，平稳过程了解为具有数学期望为零的广义平稳过程.

平稳序列的预测 设 $\{\xi(t),\ t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是一平稳序列. 用 $\mathscr{H}_\xi$ 表示 $\mathscr{L}_2$ 中由所有 $\xi(t)$ 产生的闭线性包络，而用 $\mathscr{H}_\xi(t)$ 表示由 $\xi(n)$, $n\leqslant t$ 产生的闭线性包络. 显然 $\mathscr{H}_\xi(t)\subset\mathscr{H}_\xi(t+1)$ 且 $\mathscr{H}_\xi$ 是 $\bigcup\limits_{t=-\infty}^{\infty}\mathscr{H}_\xi(t)$ 的闭包. 在 $\mathscr{H}_\xi$ 中我们考虑时移算子 S. 这算子对于形如 $\eta=\sum c_k\xi(t_k)$ 的 $\mathscr{H}_\xi$ 的元素，由下面等式定义:

$$S\eta = \sum c_k \xi(t_k + 1).$$

算子 S 具有逆算子 S^{-1}:

$$S^{-1}\eta = \sum c_k \xi(t_k - 1)$$

且保内积:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}(S(\sum c_k \xi(t_k))\overline{S(\sum d_k \xi(\tau_k))}) \\
&= \sum_k \sum_r c_k \bar{d}_r \mathbf{E}(\xi(t_k + 1)\overline{\xi(\tau_r + 1)}) \\
&= \sum_k \sum_r c_k \bar{d}_r \mathbf{E}(\xi(t_k)\overline{\xi(\tau_r)}) \\
&= \mathbf{E}(\sum_k c_k \xi(t_k)\overline{\sum d_r \xi(\tau_r)}).
\end{aligned}$$

因此, S 可以根据连续性扩张到 $\mathscr{H}_\xi$ 上. 并且 S 成为 $\mathscr{H}_\xi$ 中的酉算子.

我们引入序列 $\xi(t)$ 的谱表示

$$\xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iut}\nu(du),$$

其中 ν 是具有构成函数 F 的谱随机测度. 今后我们将不区别测度 $F(A)$ 与产生这个测度 $F(A)$ 的序列的谱函数 $F(u) = F[-\pi, u)$.

我们回想起随机变量 η 属于 $\mathscr{H}_\xi$ 的充分必要条件为

$$\eta = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u)\nu(du), \quad \text{其中} \ \varphi \in \mathscr{L}_2\{F\}.$$

考虑随机变量序列

$$\eta(t) = S^t\eta \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

引理 1 序列 $\eta(t)$ 是平稳的且有谱表示

$$\eta(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itu}\varphi(u)\nu(du). \tag{1}$$

平稳性由 S 是酉算子推得:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\eta(t+s)\overline{\eta(s)} &= (\eta(t+s), \eta(s)) \\
&= (S^{t+s}\eta, S^s\eta)
\end{aligned}$$

$$= (S^t\eta, \eta) = \mathbf{E}\eta(t)\overline{\eta(0)}.$$

最后,容易验证,对于形如 $\eta = \sum a_k \xi(t_k)$ $(\varphi(u) = \sum a_k e^{iut_k})$ 的元素 η 的谱表示(1)是成立的. 至于对任意 η, 则可借助于极限过程得到(1)也是成立的.

我们还指出,算子 S 有下面的性质:

a) $S\mathscr{H}_\xi(t) = \mathscr{H}_\xi(t+1)$;

b) 如果 $\xi^{(p)}(t)$ 是 $\xi(t)$ 在 $\mathscr{H}_\xi(t-p)$ 上的投影,则

$$S\xi^{(1)}(t) = \xi^{(1)}(t+1); \quad S^q\xi^{(p)}(t) = \xi^{(p)}(t+q).$$

因为

$$\mathbf{E}|\xi^{(p)}(t+q)|^2 = \mathbf{E}|S^q\xi^{(p)}(t)|^2 = \mathbf{E}|\xi^{(p)}(t)|^2,$$

故 $\mathbf{E}|\xi^{(p)}(t)|^2$ 不依赖于 t. 因此,借助于 $\xi(n), n \leqslant t-p$, $\xi(t)$ 的预测的最小均方误差的平方等于

$$\delta^2(p) = \mathbf{E}|\xi(t) - \xi^{(p)}(t)|^2 = \mathbf{E}|\xi(t)|^2 - \mathbf{E}|\xi^{(p)}(t)|^2,$$

并且不依赖于 t. 显然

$$\delta^2(1) \leqslant \delta^2(2) \leqslant \cdots \leqslant \sigma^2 = \mathbf{E}|\xi(t)|^2.$$

等式 $\sigma^2(n) = \sigma^2$ 表示对任意的 t,$\xi(t)$ 与所有 ξ_k, $k \leqslant t-n$ 是不相关的,因此,这些 ξ_k, $k \leqslant t-n$ 的值对于 $\xi(t)$ 的预测完全没有提供什么信息. 如果 $\delta(1) = 0$, 则 $\xi(t) \in \mathscr{H}_\xi(t-1)$, 因此 $\mathscr{H}_\xi(t-1) = \mathscr{H}_\xi(t)$,并且一般地,对任意 t 及 $n < t$, $\mathscr{H}_\xi(n) = \mathscr{H}_\xi(t)$. 设 $\mathscr{H}_\xi^s = \bigcap_t \mathscr{H}_\xi(t)$. 在我们所考虑的情形,$\mathscr{H}_\xi^s = \mathscr{H}_\xi$. 这表示,如果我们知道了过程的值的序列 $\xi(n), n \leqslant t$,则序列的所有随后的项可以用观察值精确地(以概率 1) 线性表示. 在一定的意义下,相反的情形是 $\mathscr{H}_\xi^s = O$ (用 O 表示由一个元素 0 组成的 $\mathscr{H}_\xi$ 的平凡子空间). 在这一情形,由于 $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{E}|\xi^{(t)}(n)| = 0$ 且 $\lim\limits_{t\to\infty}\delta^2(t) = \sigma^2$, 当 t 大时,序列 $\xi(n)(n \leqslant s)$ 各项的知识不足以给出 $\xi(s+t)$ 的预测值.

定义 1 如果 $\mathscr{H}_\xi^s = \mathscr{H}_\xi$, 则过程 $\xi(t)$ 被称为是**奇异的**(或称**确定的**);如果 $\delta(1) > 0$, 则称过程 $\zeta(t)$ 为**非确定的**;如果 $\mathscr{H}_\xi^s$

$= O$，则称过程为正则的(或称为完全非确定的).

定义 2 设 $\xi_i(t)$ $i = 1,2$ 是 Hilbert 随机过程，$t \in T$，T 是任一实数集，$\mathscr{H}_\xi(t) = \mathscr{L}_2\{\xi(s),\ s \leqslant t,\ s \in T\}$. 如果对所有的 $t \in T$，$\mathscr{H}_{\xi_1}(t) \subset \mathscr{H}_{\xi_2}(t)$，则我们说 $\xi_1(t)$完全从属于过程 $\xi_2(t)$.

定理 1 任意一个平稳序列可表为

$$\xi(t) = \xi_s(t) + \eta(t), \tag{2}$$

其中 $\xi_s(t)$ 与 $\eta(t)$ 是不相关序列，完全从属于 $\xi(t)$，$\xi_s(t)$ 是奇异的，$\eta(t)$ 是正则的. 表示式(2)是唯一的.

证. 显然，$S\mathscr{H}_\xi^s = \mathscr{H}_\xi^s$. 因为 S 是酉算子，故 $\mathscr{H}_\xi^s$ 的正交余在 S 作用下是不变的，即 S 把子空间 $\mathscr{H}_\xi^r = \mathscr{H}_\xi \ominus \mathscr{H}_\xi^s$ 双方单值地映射到它自己上(这里 $\mathscr{H}_\xi^r$ 由所有在 $\mathscr{H}_\xi$ 中正交于 $\mathscr{H}_\xi^s$ 的每一个向量的向量组成).

设 $\xi_s(0)$ 是 $\xi(0)$ 在 $\mathscr{H}_\xi^s$ 上的投影，$\eta(0)$ 是 $\xi(0)$ 在 $\mathscr{H}_\xi^r$ 上的投影以及 $\xi_s(t) = S^t\xi_s(0)$，$\eta(t) = S^t\eta(0)$，$t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. 因为 $\xi(0) = \xi_s(0) + \eta(0)$，故 $\xi(t) = S^t\xi(0) = \xi_s(t) + \eta(t)$，其中序列 $\eta(t)$，$\xi_s(t)$ 平稳，互不相关且从属于 $\xi(t)$ (引理 1).

其次，因为在式(2)中 $\xi_s(t) \in \mathscr{H}_\xi^s$ 且 $\eta(t) \in \mathscr{H}_\xi^r$，故 $\mathscr{H}_\xi(t) \cap \mathscr{H}_\xi^s \subset \mathscr{H}_{\xi_s}(t)$. 因此 $\mathscr{H}_\xi^s \subset \mathscr{H}_{\xi_s}^s$. 另一方面，由 $\xi_s(t) \in \mathscr{H}_\xi^s$，我们有 $\mathscr{H}_{\xi_s}(t) \subset \mathscr{H}_\xi^s$，这样一来，对任意 t，$\mathscr{H}_{\xi_s}(t) = \mathscr{H}_\xi^s = \mathscr{H}_{\xi_s}^s$，即序列 $\xi_s(t)$ 是奇异的. 其次，由等式 $\eta(t) = \xi(t) - \xi_s(t)$ 得到 $\eta(t) \in \mathscr{H}_\xi(t)$. 因此 $\mathscr{H}_\eta^s = \cap \mathscr{H}_\eta(t) \subset \mathscr{H}_\xi^s$. 另一方面，根据定义 $\mathscr{H}_\eta(t)$ 正交于 $\mathscr{H}_\xi^s$. 因此 $\mathscr{H}_\eta^s = 0$，即过程 $\eta(t)$ 正则.

表示式(2)的唯一性是由于在定理条件下，$\eta(t)$ 在 $\mathscr{H}_\xi^s$ 上的投影等于零，$\mathscr{H}_\xi^s = \mathscr{H}_{\xi_s}^s = \mathscr{H}_{\xi_s}$，因此 $\xi_s(t)$ 是 $\xi(t)$ 在 $\mathscr{H}_\xi^s$ 的投影. 定理证毕.

序列 $\eta(t)$，$\xi_s(t)$ 分别称为过程 $\xi(t)$ 的正则和奇异分量.

定理 2 平稳序列的正则分量 $\eta(t)$ 可以表为如下形式：

$$\eta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)\zeta(t-n), \tag{3}$$

其中 $\zeta(t)(t = 0, \pm 1, \cdots)$ 是标准不相关序列，$\mathscr{H}_\zeta(t) = \mathscr{H}_\eta(t)$

并且$\sum_{n=0}^{\infty}|a(n)|^2<\infty$.

证. 我们引入子空间 $G(t)=\mathscr{H}_\eta(t)\ominus\mathscr{H}_\eta(t-1)$. 它是一维空间(如果是零维的,则 $\delta_\eta^2(1)=0$ 且 $\eta(t)$ 是奇异序列). 在 $G(0)$ 中选择一个单位向量 $\zeta(0)$. 则序列 $\zeta(t)=S^t\zeta(0)$ 是规范正交的 ($\zeta(t)\in\mathscr{H}_\eta(t)\ominus\mathscr{H}_\eta(t-1)$, 因此 $\zeta(t)$ 与 $\mathscr{H}_\eta(t-1)$ 正交,并且对于 $k<t$,$\zeta(k)\in\mathscr{H}_\eta(t-1)$).

$$\mathscr{H}_\zeta(t)\subset\mathscr{H}_\eta(t),\ \bigcap_t\mathscr{H}_\zeta(t)\subset\bigcap_t\mathscr{H}_\eta(t)=0.$$

这表示序列 $\zeta(t)$ 构成在 $\mathscr{H}_\zeta$ 中的一个基底. 根据这个基底展开 $\eta(0)$,我们得到

$$\eta(0)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)\zeta(-n),\ \text{其中}\sum_{n=0}^{\infty}|a(n)|^2=\mathbf{E}|\eta(0)|^2<\infty.$$

应用算子 S^t 于给出的 $\eta(0)$ 的展式,我们得到等式(3). 由式(3)直接得到 $\mathscr{H}_\eta(t)\subset\mathscr{H}_\zeta(t)$ 这一关系,而相反的包含关系则从 $\zeta(t)$ 的定义得到. 定理证毕.

注 1. 不失一般性,我们可以假定 $a(0)$ 是正的.

引理 2 设平稳过程 $\xi(t)$ 的谱函数 $F(u)$ 等于 $F_1(u)+F_2(u)$,其中 $F_i(u)$ 是非负单调不减函数,并且对应于函数 $F_i(u)$ 的测度 $F_i(A)$ 是奇异的. 则存在分解式 $\xi(t)=\xi_1(t)+\xi_2(t)$,其中 $\xi_i(t)$ 从属于 $\xi(t)$,正交且有谱函数 $F_i(u)$ $(i=1,2)$.

为了证明这一结论,我们将区间 $[-\pi,\pi]$ 表为使得 $F_2(P_1)=F_1(P_2)=0$ 的不相交的集合 P_1 与 P_2 之和. 设

$$\xi_1(t)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{itu}\chi_{P_1}(u)\nu(du),\ \xi_2(t)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{itu}\chi_{P_2}(u)\nu(du),$$

其中 ν 是过程 $\xi(t)$ 的随机谱测度,$\chi_{P_i}(u)$ 是集合 P_i 的示性函数. 故

$$\xi_1(t)+\xi_2(t)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{itu}\nu(du)=\xi(t),$$

$$\mathbf{E}\xi_1(t_1)\overline{\xi_2(t_2)}=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(t_1-t_2)u}\chi_{P_1}(u)\chi_{P_2}(u)dF(u)=0,$$

$$\mathbf{E}\xi_j(t_1)\overline{\xi_j(t_2)} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t_1-t_2)u}\chi_{P_j}(u)dF(u)$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t_1-t_2)u}dF_j(u), \quad j = 1,2,$$
这就证明了引理。

定理 3 为使序列 $\xi(t)$ 是非确定性的充分必要条件为

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(u)du > -\infty, \tag{4}$$

其中 $f(u)$为$F(A)$(关于 Lebesgue 测度)的绝对连续分量的导数.

证. 必要性. 设 $F_r(u), F_s(u)$ 是序列 $\eta(t), \xi_s(t)$ 的谱函数. 由 $\eta(t)$ 与 $\xi_s(t)$ 的不相关性可得

$$F(u) = F_r(u) + F_s(u).$$

根据定理 2 及 §7 定理 2, $F_r(u)$ 绝对连续且对于 $f_r(u) = F_r'(u)$ 满足条件$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f_r(u)du > -\infty$. 分解 $F(A)$ 和 $F_s(A)$ 为关于 Lebesgue 测度的绝对连续与奇异分量,我们得到

$$F(A) = \int_A f(u)du + F^*(A), \quad F_s(A) = \int_A f_s(u)du + F_s^*(A).$$

从而得

$$f(u) = f_r(u) + f_s(u)$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln f(u)du \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} \ln f_r(u)du > -\infty.$$

因此,如果过程是非确定性的,则(4)成立.

充分性. 设过程 $\xi(t)$ 奇异. 此时 $\xi(t)$ 分解为从属于 $\xi(t)$ 的二个不相关分量 $\xi_1(t)$与 $\xi_2(t)$,这分解对应于分解 $F(A) = F_s(A) = \int_A f_s(u)du + F_s^*(A)$ (参阅引理 2). 假设

$$\int \ln f(u)du = \int \ln f_s(u)du > -\infty,$$

则根据 §7 定理 2, $\xi_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a'(n)\xi'(t-n)$, 其中 ξ' 是不相关

序列. 因为

$$\mathscr{H}_{\xi}(t) \subset \mathscr{H}_{\xi_1}(t) \oplus \mathscr{H}_{\xi_2}(t) \text{ 且 } \bigcap \mathscr{H}_{\xi_1}(t) = 0,$$

故 $\bigcap\limits_{t} \mathscr{H}_{\xi}(t) \subset \bigcap\limits_{t} \mathscr{H}_{\xi_2}(t) \subset \mathscr{H}_{\xi_2}$, 这与关系式 $\mathscr{H}_{\xi} = \mathscr{H}_{\xi_1} \oplus \mathscr{H}_{\xi_2}$ 矛盾,因此过程 $\xi(t)$ 不可能是奇异的,故

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(u) du = -\infty.$$

定理证毕.

我们现在考虑关于非确定性过程的预测问题. 利用定理 1 和定理 2 ,我们有

$$\xi(t) = \xi_s(t) + \eta(t), \quad \eta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta(t-n).$$

因为 $\xi_s(t)$ 可根据过去精确地预测, 故只须考虑过程 $\xi(t)$ 的正则分量 $\eta(t)$ 的预测即可. 由定理 2 得到, $\eta(t)$ 在 $\mathscr{H}_{\eta}(t-q)$ 的投影与 $\eta(t)$ 在 $\mathscr{H}_{\zeta}(t-q)$ 上的投影相同. 因此,

$$\eta^{(q)}(t) = \sum_{n=q}^{\infty} a_n \zeta(t-n). \tag{5}$$

均方误差的大小由等式

$$\delta^2(q) = \sum_{n=0}^{q-1} |a_n|^2 \tag{6}$$

决定.

我们现在获得不含序列 $\zeta(n)$ 的最优预测公式. 因为 $\zeta(0) \in \mathscr{H}_{\eta}$, 故

$$\zeta(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u) \tilde{\nu}(du), \quad \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(u)|^2 dF_r(u) < \infty,$$

其中 $\tilde{\nu}$ 是过程 $\eta(t)$ 的随机谱测度, 且 $F_r'(u) = |g(e^{iu})|^2$, $g(e^{iu}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n e^{iun}$ (§ 7 引理 1).

因此(引理 1),

$$\zeta(t)=S^t\zeta(0)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{itu}\varphi(u)\tilde{\nu}(du).$$

为了找到函数 $\varphi(u)$，我们利用式(3). 我们有

$$\eta(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta(t-n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{itu}\varphi(u)\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{-inu}\tilde{\nu}(du),$$

比较上述等式与等式

$$\eta(t)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{itu}\tilde{\nu}(du),$$

我们得

$$\varphi(u)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{-inu}\right)^{-1}=(\sqrt{2\pi}\,\overline{g(e^{iu})})^{-1}.$$

现在，我们有

$$\eta^{(q)}(t)=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=q}^{\infty}a_n e^{-inu}\right)\varphi(u)e^{itu}\tilde{\nu}(du),$$

因此

$$\eta^{(q)}(t)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{itu}\left[1-\frac{\overline{g_q(e^{iu})}}{\overline{g(e^{iu})}}\right]\tilde{\nu}(du), \tag{7}$$

其中

$$g_q(e^{iu})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{q-1}\bar{a}_n e^{inu}. \tag{8}$$

我们现在介绍一种确定函数 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$ 的方法，其中 $b_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\bar{a}_n$. 从而我们将得到关于平稳序列预测问题的一般解答，同时亦得到一个计算预测均方误差的公式. 函数 $g(z)\in H_2$，$g(0)=\frac{a_0}{\sqrt{2\pi}}$ 是实的(参阅定理 2 后面的注 1). 并且借助于函数 $g(z)$，序列 $\eta(t)$ 的谱密度被因子分解，即有 $f_r(u)=|g(e^{iu})|^2$，根据 § 7 定理 1 后面的注 2，如果 $g(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内没有零点并

且 $g(0)>0$，则 $g(z)$ 唯一地由 $f_r(u)$ 确定．因此，如果按照 § 7 定理 1 构造的函数 $g(z)$ 当 $|z|<1$ 时不为零，则它与 § 7 定理 1 证明过程中所得的函数 $g(z)$ 是相同的．

引理 3 函数 $g(z)$ 当 $|z|<1$ 时异于零．

证．首先我们指出，如果 $f_\eta(u)=|h(e^{iu})|^2$，

$$h(u)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2<\infty,$$

则 $\delta^2(1)\geqslant 2\pi|c_0|^2$．事实上

$$\mathbf{E}\left|\eta(0)-\sum_{k=1}^{N}d_k\eta(-k)\right|^2$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\left(1-\sum_{k=1}^{N}d_k e^{-iku}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\bar{c}_k e^{-iku}\right)\right|^2 du\geqslant 2\pi|c_0|^2.$$

因为对任一 d_k 及 N，这个不等式均成立，故

$$\delta^2(1)\geqslant 2\pi|c_0|^2. \tag{9}$$

现在我们假定 $g(z_0)=0$，$|z_0|<1$．函数

$$g_1(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

在点 $\bar{z}_0$ 为零．设 $g_1(z)=(z-\bar{z}_0)\sum_{n=0}^{\infty}b_n' z^n$，其中 $b_0'=-\dfrac{a_0}{\sqrt{2\pi}\,\bar{z}_0}$．则

$$|g(e^{iu})|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}a_n e^{-inu}\right|=|g_1(e^{-iu})|$$

$$=\left|\frac{1-e^{-iu}z_0}{e^{-iu}-\bar{z}_0}\right||e^{-iu}-\bar{z}_0|\left|\sum_{n=0}^{\infty}b_n' e^{-inu}\right|$$

$$=\left|\sum_{n=0}^{\infty}b_n'' e^{-inu}\right|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\bar{b}_n'' e^{inu}\right|,$$

其中 $b_0''=b_0'=-\dfrac{a_0}{\sqrt{2\pi}\,\bar{z}_0}$．从(9)得到

$$\delta^2(1) \geqslant 2\pi |\bar{b}_0''|^2 = \left|\frac{a_0}{z_0}\right|^2,$$

根据(6),在 $|z_0| < 1$ 时是不可能的．引理证毕．

推论 在最优预测的公式(7)中,函数 $g(z) \in H_2$ 被唯一确定(假定 $g(0)$ 为正)且与§7定理1所得到的函数相同．

我们解决了关于非确定性序列的正则部分的预测问题．现在阐述下述问题：如何通过过程 $\xi(t)$ 的谱函数来表示序列 $\eta(t)$ 的谱密度？用 $\xi(t)$ 的特征数表示序列 $\xi(t)$ 的预测公式有怎样的形式？

引理4 设非确定性过程 $\xi(t)$ 表为 $\xi(t) = \eta(t) + \xi_s(t)$，其中 $\eta(t)$ 与 $\xi_s(t)$ 不相关，$\xi_s(t)$ 是奇异过程，$\eta(t)$ 是正则过程，$F(u), F_r(u), F_s(u)$ 是序列 $\xi(t), \eta(t), \xi_s(t)$ 的谱函数,则等式

$$F(u) = F_r(u) + F_s(u) \tag{10}$$

是函数 $F(u)$ 的一个分解．它把 $F(u)$ 分解为关于 Lebesgue 测度绝对连续分量 $F_r(u)$ 及奇异分量 $F_s(u)$．

证．由序列 $\eta(t)$ 和 $\xi_s(t)$ 不相关性得到(10)．我们引进由式(3)所表达的不相关序列 $\zeta(t)$ 的谱表示

$$\zeta(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itu}\zeta(du), \tag{11}$$

其中 $\zeta(A)$ 是具有构成函数 $\frac{1}{2\pi} l(A)$ 的随机测度，l 是 Lebesgue 测度．将(11)代入(3)得

$$\eta(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itu}\sqrt{2\pi}\,\overline{g(e^{iu})}\zeta(du).$$

设

$$\xi_s(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itu}\nu_s(du) \tag{12}$$

是序列 $\xi_s(t)$ 的谱表示．则

$$\xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itu}\nu(du) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itu}[\sqrt{2\pi}\,\overline{g(e^{iu})}\zeta(du) + \nu_s(du)].$$

从后一等式得到,对任一函数 $\varphi(u) \in \mathscr{L}_2\{F\}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u)\nu(du) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u)[\sqrt{2\pi}\,\overline{g(e^{iu})}\zeta(du) + \nu_s(du)] \quad (13)$$

对于 $\xi_s(t)$ 还可以写为另一谱表示式．因为 $\xi_s(0) \in \mathscr{H}_\xi$，故

$$\xi_s(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_s(u)\nu(du),$$

从而

$$\xi_s(t) = S^t\xi_s(0) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itu}\varphi_s(u)\nu(du).$$

考虑到式(13)，我们得到

$$\xi_s(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itu}\varphi_s(u)[\sqrt{2\pi}\,\overline{g(e^{iu})}\zeta(du) + \nu_s(du)]. \quad (14)$$

比较(14)与(12)，我们看出

$$-\int_{-\pi}^{\pi} e^{itu}(\varphi_s(u) - 1)\nu_s(du) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itu}\varphi_s(u)\sqrt{2\pi}\,\overline{g(e^{iu})}\zeta(du).$$

在所得到的等式的各部分出现的元素属于相互正交的子空间．因此它们等于零．所以

$$\varphi_s(u) = 1(\mathrm{mod} F_s), \quad \varphi_s(u)g(e^{iu}) = 0 \ (\mathrm{mod} l).$$

因为 $g(e^{iu})$ 仅在零测集(对 l) 上为零，故 $\varphi_s(u)$ 几乎处处等于零．设 S 是一个集合，在它上面 $\varphi_s(u) = 1$．故 $l(s) = 0$．因此

$$F_s(A) = \int_A |\varphi_s(u)|^2 dF(du) = F(A \cap S),$$

$$F_r(A) = \int_A 2\pi |g(e^{iu})|^2 du.$$

引理证毕．

引理 5 设 $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \varphi_3(u)$ 为使得

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(u)\nu(du), \quad \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_2(u)\tilde{\nu}(du), \quad \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_3(u)\nu_s(du)$$

分别是 $\xi(t), \eta(t), \xi_s(t)$ 在 $\mathscr{H}_\xi(t-q), \mathscr{H}_\eta(t-q), \mathscr{H}_{\xi_s}(t-q)$ 上的投影．则

$$\varphi_1(u) = \varphi_2(u) = \varphi_3(u) = e^{itu}\left(1 - \frac{\overline{g_q(e^{iu})}}{\overline{g(e^{iu})}}\right)(\mathrm{mod} F).$$

根据式(7)，只须证明 $\varphi_1(u) = \varphi_2(u) = \varphi_3(u)$ 就够了． 由等式

$$\xi(t) - \int_{-\pi}^{\pi}\varphi_1(u)\nu(du)$$

$$= \left[\eta(t) - \int_{-\pi}^{\pi}\varphi_1(u)\tilde{\nu}(du)\right] + \left[\xi_s(t) - \int_{-\pi}^{\pi}\varphi_1(u)\nu_s(du)\right] \quad (15)$$

以及(15)右边括号中的被加数的正交性，我们有

$$\delta_\xi^2(q) = \mathbf{E}\left|\eta(t) - \int_{-\pi}^{\pi}\varphi_1(u)\tilde{\nu}(du)\right|^2$$

$$+ \mathbf{E}\left|\xi_s(t) - \int_{-\pi}^{\pi}\varphi_1(u)\nu_s(du)\right|^2 \geqslant \delta_\eta^2(q),$$

并且等号成立的充分必要条件为

$$\varphi_1(u) = \varphi_2(u) \pmod{F_r}, \quad \varphi_1(u) = \varphi_3(u) \pmod{F_s},$$

$$\xi_s(t) = \int_{-\pi}^{\pi}\varphi_1(u)\nu_s(du).$$

另一方面，根据 $\xi_s(t)$ 的定义，$\delta_\xi^2(q) = \delta_\eta^2(q)$. 引理证毕.

得到的结果可以用下面的方式叙述.

定理 4 如果 $\xi(t)$ 是非确定性的平稳序列，则根据 $\xi(s), s \leqslant t-q$ 的观察结果，$\xi(t)$ 的最优预测 $\xi^{(q)}(t)$ 为

$$\xi^{(q)}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itu}\left[1 - \frac{g_q(e^{iu})}{g(e^{iu})}\right]\nu(du),$$

其中 ν 是序列 $\xi(t)$ 的随机谱测度，

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \qquad g_q(z) = \sum_{n=0}^{q-1} b_n z^n,$$

函数 $g(z) \in H_2$ 在圆 $|z| < 1$ 内没有零点，$g(0)$为正且 $|g(e^{iu})|^2 = f(u)$，$f(u)$ 是序列 $\xi(t)$ 的谱函数的绝对连续分量的导数. 预测的均方误差的平方等于

$$\delta^2(q) = 2\pi e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln f(u)du} \sum_{n=0}^{q-1} |c_n|^2,$$

其中 c_n 由下式决定:

$$\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{inu}\ln f(u)du\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

特别

$$\delta^2(1)=2\pi e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln f(u)du}. \tag{16}$$

可以直接从这一节的引理 4 及 5 和公式(7)，以及 § 7 的定理 1 和注 2 得到这一定理.

具有连续时间过程的预测 令 $\xi(t)(-\infty<t<\infty)$ 是平稳过程.

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}\nu(du),$$

其中 ν 是直线 $(-\infty<u<\infty)$ 上的正交测度.

$$\mathbf{E}\xi(t)=0, R(t)=\mathbf{E}\xi(t+s)\overline{\xi(s)}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}dF(u),$$

$$F(+\infty)=\sigma^2.$$

我们引进 Hilbert 空间

$$\mathscr{H}_\xi=\mathscr{H}\{\xi(t),\ -\infty<t<\infty\}$$

以及它的子空间 $\mathscr{H}_\xi(t)=\mathscr{H}\{\xi(s),\ -\infty<s\leqslant t\}$. 在 $\mathscr{H}_\xi$ 中我们定义时移算子群 $S^h(-\infty<h<\infty)$,令

$$S^h\left(\sum_k c_k\xi(t_k)\right)=\sum_k c_k\xi(t_k+h),$$

并且根据连续性把 S^h 的定义扩张到整个 $\mathscr{H}_\xi$ 上. 这时, S^h 构成一个 $\mathscr{H}_\xi$ 的酉变换群. 它与离散时间的变换群 S^h 具有相同的性质(有明显的修改). 随机过程 $\xi(t)$ 的最优线性预测问题是寻找一个随机变量 $\xi_T(t)\in\mathscr{H}_\xi(t-T)$, 使得对任一元素 $\eta\in\mathscr{H}_\xi(t-T)$,有

$$\mathbf{E}|\xi(t)-\xi_T(t)|^2\leqslant\mathbf{E}|\xi(t)-\eta|^2.$$

这个问题有唯一解: $\xi_T(t)$ 是 $\xi(t)$ 在 $\mathscr{H}_\xi(t-T)$ 上的投影. 令

$$\delta_\xi(T)=\delta(T)=\sqrt{\mathbf{E}|\xi(t)-\xi_T(t)|^2}.$$

$\delta(T)$ 是预测的均方误差,它是 T 的单调非增函数且 $0\leqslant\delta(T)\leqslant\sigma$. 如果 $\lim\delta(T)=\sigma$,则过程称为正则的(完全非决定性的). 如果对某一 T_0, $\delta(T_0)=0$,则对任意 t, $\mathscr{H}_\xi(t)\subset\mathscr{H}_\xi(t-T_0)$. 因

此，对任意 t

$$\mathscr{H}_\xi(t) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathscr{H}_\xi(t-kT_0)$$

且对所有 $T>0$ 有 $\delta(T)=0$. 在这种情形，过程称为奇异的(决定性的). 非奇异过程我们称为非决定性的.

定理 1 的证明方法可以直接运用到具有连续时间的过程上：任一平稳过程可有分解式

$$\xi(t)=\eta(t)+\xi_s(t),$$

其中 $\eta(t)$ 正则且 $\xi_s(t)$ 是奇异平稳过程，$\eta(t)$ 与 $\xi_s(t)$ 不相关且从属于 $\xi(t)$.

类似于定理 2 的是如下的

定理 5 为使平稳过程 $\eta(t)$ 是正则的，其必要充分条件为 $\eta(t)$ 可表为下面的形式.

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{t} a(t-s)\zeta(ds), \tag{17}$$

其中 $\zeta(s)$ 为具有正交增量的标准过程且

$$\mathscr{H}_\zeta(t)=\mathscr{H}_\eta(t), \quad \int_{-\infty}^{\infty}|a(t)|^2dt<\infty.$$

根据 § 7 定理 4，上述定理等价于下面的

定理 6 平稳过程为正则的必要充分条件为它具有谱密度 $f(u)$ 且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln f(u)}{1+u^2}du>-\infty. \tag{18}$$

我们首先证明，表为(17)的过程是正则的. 为此目的，我们引进随机变量 $\eta(t)$ 在 $\mathscr{H}_\eta(t-T)$ 上的投影 $\eta_T(t)$. 因为 $\mathscr{H}_\eta(t-T)=\mathscr{H}_\zeta(t-T)$，随机变量 $\eta_T(t)$ 可以写为如下形式：

$$\eta_T(t)=\int_{-\infty}^{t-T}\varphi(s)\zeta(ds).$$

另一方面，$\eta(t)-\eta_t(t)$ 必定正交于任一 $\varphi\in\mathscr{H}_\zeta(t-T)$，并且特别正交于 $\psi=\zeta(A)$，其中 A 是任一包含在 $(-\infty,t-T)$ 中的

可测集. 由于

$$\mathbf{E}(\eta(t)-\eta_T(t))\overline{\zeta(A)}=\int_{-\infty}^{t}a(t-s)\chi_A(s)ds$$

$$-\int_{-\infty}^{t-T}\varphi(s)\chi_A(s)ds=\int_A[a(t-s)-\varphi(s)]ds,$$

故 $\varphi(s)=a(t-s)$, $s\leqslant t-T$. 因此,

$$\eta_T(t)=\int_{-\infty}^{t-T}a(t-s)\zeta(ds)$$

且

$$\|\eta_T(t)\|^2=\mathbf{E}|\eta_T(t)|^2=\int_{-\infty}^{t-T}|a(t-s)|^2ds$$

$$=\int_T^{\infty}|a(s)|^2ds.$$

这样一来, 当 $T\to\infty$ 时 $\|\eta_T(t)\|\to 0$, 它表示过程 $\eta(t)$ 是正则的. 反命题更为深刻: 每一正则过程可以表为(17), 或者, 等价地,每一正则过程具有满足条件(18)的谱密度 $f(u)$.

为了证明这一结果, 我们将利用类似于对于具有离散时间的过程所得到的结果.

设 $\xi(t)$ 是任一平稳过程且

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}\nu(du)$$

是 $\xi(t)$ 的谱表示. 借助于变换 $u=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, 测度 ν 从整个数轴 $(-\infty,\infty)$变为在区间$(-\pi,\pi)$上,用 $\tilde{\nu}$ 表示被变换后的测度. 我们规定过程 $\xi(t)$ 对应于平稳序列 $\tilde{\xi}(\cdot)=K(\xi)$,其中

$$\tilde{\xi}(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\theta}\tilde{\nu}(d\theta).$$

现在我们利用如下的事实(将在以后证明): 过程 $\xi(t)$ 正则的充分必要条件为过程 $\tilde{\xi}(n)$ 是正则的(引理 7). 因此,如果 $\eta(t)$ 是正则过程,则 $\tilde{\eta}(\cdot)=K(\eta)$ 是正则序列. 如果 $\tilde{f}(\theta)$ 是它的谱密度,则由 § 7 定理 2

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln\tilde{f}(\theta)d\theta>-\infty. \tag{19}$$

而那时过程 $\eta(t)$ 同样具有谱密度 $f(u)$，并且 $(1+u^2)f(u)=2\tilde{f}(\theta)$，$\theta=2\operatorname{arc}\ \operatorname{tg} u$. 因此从(19)推得(18). 定理证毕.

现在证明在定理证明中应用过的结论.

设 $\xi(t)$ 是任一平稳过程，且 $\tilde{\xi}(n)$ 为上面所述的借助于对应关系 K 所定义的序列.

引理 6 成立等式 $\mathscr{H}_{\xi}(0)=\mathscr{H}_{\tilde{\xi}}(0)$.

证. 我们证明 $\tilde{\xi}(-n)\in\mathscr{H}_{\xi}(0)$，$n>0$ (对于 $n=0$ 是显然的). 注意到 $e^{i\theta}=\dfrac{1+iu}{1-iu}$. 因此

$$\tilde{\xi}(-n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-in\theta}\tilde{\nu}(d\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1-iu}{1+iu}\right)^n\nu(du).$$

另一方面

$$\frac{1-iu}{1+iu}=-1+\frac{2}{1+iu}=-1+2\int_{-\infty}^{0}e^{ius}e^{s}ds,$$

因此，函数 $\left(\dfrac{1-iu}{1+iu}\right)^n$ 可以由形如 $\sum_k a_k e^{ius_k}$，$s_k<0$，在任一有限区间 $(-A,A)$ 上一致收敛的有界函数序列逼近. 从而得到 $\tilde{\xi}(-n)\in\mathscr{H}_{\xi}(0)$. 我们现在证明，对 $t<0$，$\xi(t)\in\mathscr{H}_{\tilde{\xi}}(0)$.

由于在下面的积分中的最后一个积分的被积函数在 $0<\rho<1$ 以及 $t<0$ 时一致有界，我们有

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}\nu(du)=\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{t\,\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}\right\}\tilde{\nu}(d\theta)$$

$$=\lim_{\rho\uparrow 1}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{t\,\frac{1-\rho e^{-i\theta}}{1+\rho e^{-i\theta}}\right\}\tilde{\nu}(d\theta).$$

另一方面，由等式

$$\frac{1-\rho e^{-i\theta}}{1+\rho e^{-i\theta}}=(1-\rho e^{-i\theta})\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\rho^n e^{-in\theta}$$

得到，前述的被积函数可以用形如 $\sum_{k=0}^{N}c_k e^{-ik\theta}$ 的函数一致逼近 (ρ

是固定的）．因此，对于 $t<0$，$\xi(t)\in\mathscr{H}_{\tilde{\xi}}(0)$．引理证毕．

引理 7 如果 $\xi(t)=\xi_s(t)+\eta(t)$ 是过程 $\xi(t)$ 的一个分解，把 $\xi(t)$ 分解为奇异和正则分量，则等式 $\tilde{\xi}(\cdot)=K(\xi_s)+K(\eta)$ 是 $\tilde{\xi}(n)$ 的一个分解，把 $\tilde{\xi}(n)$ 分解成同样的分量．

证．注意到，$\mathscr{H}_{\xi_1}(t)\subset\mathscr{H}_{\xi_2}(t)$，$t\in(-\infty,\infty)$ 的充分必要条件为 $\mathscr{H}_{\tilde{\xi}_1}(n)\subset\mathscr{H}_{\tilde{\xi}_2}(n)$，$n=0,\pm1,\cdots$．事实上，如果 $\mathscr{H}_{\xi_1}(0)\subset\mathscr{H}_{\xi_2}(0)$，则 $\mathscr{H}_{\tilde{\xi}_1}(0)=\mathscr{H}_{\xi_1}(0)\subset\mathscr{H}_{\xi_2}(0)=\mathscr{H}_{\tilde{\xi}_2}(0)$，因此，$\mathscr{H}_{\tilde{\xi}_1}(t)=S^t\mathscr{H}_{\tilde{\xi}_1}(0)\subset S^t\mathscr{H}_{\tilde{\xi}_2}(0)=\mathscr{H}_{\tilde{\xi}_2}(t)$，并且在这些关系式中，过程 $(\xi_1(t),\ \xi_2(t))$ 与 $(\tilde{\xi}_1(n),\ \tilde{\xi}_2(n))$ 的地位可以交换．还注意到，由于测度 ν 从属于过程 $\{\xi(t),-\infty<t<\infty\}$，故 $\mathscr{H}_\xi=\mathscr{H}_{\tilde{\xi}}$．其次，设 $\xi(t)$ 是一奇异过程．则 $\mathscr{H}_{\tilde{\xi}}=\mathscr{H}_\xi=\mathscr{H}_\xi(0)=\mathscr{H}_{\tilde{\xi}}(0)$．这意味着 $\tilde{\xi}(n)$ 是奇异过程．类似地，我们得到 $\tilde{\xi}(n)$ 的奇异性蕴含了 $\xi(t)$ 的奇异性．设 $\xi(t)$ 是正则的．如果 $\tilde{\xi}(n)$ 不是正则，则我们有等式 $\tilde{\xi}(n)=\tilde{\xi}_1(n)+\tilde{\eta}_1(n)$，其中序列 $\tilde{\xi}_1(n)$ 是奇异的且完全从属于 $\tilde{\xi}(n)$．这一分解对应于分解 $\xi(t)=\xi_1(t)+\eta_1(t)$，其中，正如前所证，$\xi_1(t)$ 是一个奇异过程且完全从属于 $\xi(t)$．然而，这时 $\bigcap\limits_t\mathscr{H}_\xi(t)\supset\mathscr{H}_{\xi_1}(t)=\mathscr{H}_{\xi_1}(0)$ $\neq0$，这与过程 $\xi(t)$ 的正则性矛盾．因此，如果 $\xi(t)$ 是正则的，则必 $\tilde{\xi}(n)$ 也是正则的．类似地，可以证明逆命题．从而得到引理的断言．

对于平稳序列的预测所得到的结果，现在可以搬到具有连续时间的过程上，只须在公式的叙述和证明过程作某些修改就行了．在这一情形需要用到具有连续时间的平稳过程谱表示以及援引引理 2 和 § 7 的定理 3 与定理 4 的结果．

例如：引理 4 的叙述逐字逐句搬到关于具有连续时间的过程上，而仅需在证明中作平凡的修改．类似引理 4，有下面的

定理 7 为使过程 $\xi(t)$ 是非决定性的必要充分条件为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln f(u)du}{1+u^2}>-\infty,$$

其中 $f(u)$ 是过程 $\xi(t)$ 的谱测度 F 的绝过连续分量的导数.

若 $\xi(t)=\eta(t)+\xi_s(t)$ 是过程 $\xi(t)$ 分解为正则和奇异分量的一个分解,并且根据定理 5

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{t}a(t-s)\zeta(ds),$$

则

$$\xi_T(t)=\int_{-\infty}^{t-T}a(t-s)\zeta(ds)+\xi_s(t),$$

而且最优预测的均方误差由式

$$\delta^2(T)=\int_0^T|a(s)|^2ds$$

确定. 对于最优预测的另一表示式有如下形式:

$$\xi_T(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}\left[1-\frac{h_T(iu)}{h(iu)}\right]\nu(du),$$

其中 ν 是过程 $\xi(t)$ 的随机谱测度, $h(iu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}a(s)e^{-ius}ds$, $h_T(iu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^T a(s)e^{-ius}ds$. 函数 $h(iu)$ 由谱密度 $f(u)$ 根据 §7 式(23)决定.

第五章　函数空间上的概率测度

§1. 对应于随机过程的测度

关于由取值于距离空间 $\mathscr{X}$ 中的随机过程的有限维分布构造概率空间的 Колмогоров 定理特别指出，如何在可测空间$(\mathscr{F},\mathfrak{B})$上构造测度 μ，使得对任一柱形集 C，值 $\mu(C)$ 与随机过程的样本函数属于 C 的概率相同，其中 $\mathscr{F}$ 是所有取值于 $\mathscr{X}$ 的函数组成的空间，而 $\mathfrak{B}$ 是包含所有 $\mathscr{F}$ 中的柱形集的最小 σ 代数．这个测度 μ 称为对应于随机过程 $\xi(t)$ 的测度．并且不论随机过程 $\xi(t)$ 定义在怎样的概率空间上，这个测度恒能构造．如果过程 $\xi(t,\omega)$ 定义在概率空间 $\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$ 上，T 是由对应关系 $\omega\xrightarrow{T}\xi(\cdot,\omega)$ 所定义的从 Ω 到 $\mathscr{F}$ 中的一个映象，而 $\mathfrak{S}_0$ 是由形如 $T^{-1}C$ 的集所产生的 $\mathfrak{S}$ 的子代数，其中 $C\in\mathfrak{B}$，则测度 μ 是在映象 T 作用下测度 $\tilde{\mathbf{P}}$ 的象，$\tilde{\mathbf{P}}$ 是测度 $\mathbf{P}$ 在 $\mathfrak{S}_0$ 上的收缩，即

$$\mu(C)=P(T^{-1}C).\tag{1}$$

可测空间$(\mathscr{F},\mathfrak{B})$和定义在它上面的测度 μ 很方便地用来研究只给了有限维分布的随机过程．借助于这些特性，可以研究具有给定的有限维分布的过程存在性，具有给定的正则条件的样本函数，以及研究过程样本函数的各种泛函，随机过程的变换等等．

现在考虑随机过程的样本函数的可测泛函．我们称任一定义在概率空间$(\mathscr{F},\mathfrak{B},\mu)$上的随机变量为随机过程 $\xi(t)$ 的**泛函**．有时考虑稍广些的一类随机变量是方便的：即随机变量定义在$(\mathscr{F},\bar{\mathfrak{B}},\bar{\mu})$上，其中$(\bar{\mathfrak{B}},\bar{\mu})$是测度$(\mathfrak{B},\mu)$的完备化．因为对于任一定义在$\{\mathscr{F},\bar{\mathfrak{B}},\bar{\mu}\}$上的随机变量 $\bar{\xi}$，可以找到这样一个在$\{\mathscr{F},\mathfrak{B},\mu\}$上的随机变量 ξ，使得 $\bar{\xi}=\xi(\mathrm{mod}\ \bar{\mu})$，因而原则上是没有区别的．然而，当我们构造各种各样的具体泛函时，我们也可以

获得 $\mathfrak{B}$ 可测泛函. 显然,这可以用较精细的构造予以避免,但我们不这样做.

过程的样本函数的每一个泛函都是被过程的值所决定. 我们证明,上面引入的一类泛函就是这样的. 如果在 $\mathscr{X}^m$ 中存在这样一个 Borel 函数 $f_m(x_1,\cdots,x_m)$ 及点 $t_1,\cdots,t_m$,使得 $f(x(\cdot))=f_m(x(t_1),\cdots,x(t_m))$,我们称泛函 $f(x(\cdot))$ 为柱形的. 如果 f_m 连续,则柱形函数亦称为连续的. 显然,任一柱形泛函是 $\mathfrak{B}$ 可测的. 且因此在 $\{\mathscr{F},\mathfrak{B},\mu\}$ 上也就确定了一个随机变量. 此外,泛函的值被过程的样本函数决定:

$$f(\xi(\cdot))=f_m(\xi(t_1),\cdots,\xi(t_m)).$$

$f_m(\xi(t_1),\cdots,\xi(t_m))$ 的分布与 $\{\mathscr{F},\mathfrak{B},\mu\}$ 上的随机变量 $f(x(\cdot))$ 的分布相同. 自然认为,过程 $\xi(t)$ 的样本函数的泛函是这样一个随机变量 η,对于它,可找到一柱形泛函序列 $f^{(m)}(x(\cdot))$,使当 $m\to\infty$ 时依概率有 $f^{(m)}(\xi(\cdot))\to\eta$. 我们指出,在这一情形,泛函序列 $f^{(m)}(x(\cdot))$ 依测度 μ 收敛于某一 $\bar{\mathfrak{B}}$ 可测泛函. 这由关系式

$$\mu(\{x(\cdot):|f^{(m)}(x(\cdot))-f^{(n)}(x(\cdot))|>\varepsilon\})$$
$$=\mathbf{P}\{|f^{(m)}(\xi(\cdot))-f^{(n)}(\xi(\cdot))|>\varepsilon\},$$

(这等式是式 (1) 的特殊情形) 以及 $f^{(m)}(\xi(\cdot))$ 依概率收敛性得到. 我们现在证明,对每一 $\bar{\mathfrak{B}}$ 可测泛函 f,存在柱形泛函序列 $f^{(k)}$ 依测度 $\bar{\mu}$ 收敛于 f. 为此,只须证明,对每一可测集 A,存在一柱形集序列 C_n,使得 $\chi_{C_n}(x)\xrightarrow{\mu}\chi_A(x)$. 如果 $\mathfrak{B}_0$ 是满足上述性质的集合的全体,则: 1) $\mathfrak{B}_0$ 是一个代数; 2)它是单调类; 3)它包含全体柱形集,这意味着 $\mathfrak{B}_0$ 是 σ 代数,并且与 $\mathfrak{B}$ 相同.

注意,如果过程 $\xi(t)$ 是被定义在概率空间 $\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$ 上,而 $\mathfrak{S}_0$ 是上面引入的 σ 代数,则所有 $\mathfrak{S}_0$ 可测随机变量是 $\xi(\cdot)$ 的泛函. 如果 $\eta(\omega)$ 是 $\mathfrak{S}_0$ 可测变量,则 $\eta(\omega)=f(T\omega)$,其中 f 是某一 $\mathfrak{B}$ 可测泛函. 我们将写为 $\eta(\omega)=f(\xi(\cdot,\omega))$.

由关于在积分中的测度变换公式得到,对每一泛函 f,关系式

$$\mathbf{E}f(\xi(\cdot,\omega)) = \int f(x)\mu(dx) \tag{2}$$

当上式右边积分有意义时成立.

现在我们考虑在比全体函数空间小的函数空间上构造测度的可能性问题. 显然, 可取任一 $\mathfrak{B}$ 可测集 $\mathscr{F}_0$, 使得 $\mu(\mathscr{F}_0) = 1$, 并且考虑 $\mathscr{F}_0$ 上的测度. 但所有有意义的函数集合不是 $\mathfrak{B}$ 可测集, 因为函数的任一 $\mathfrak{B}$ 可测集被至多在一可数点上的函数的性质所确定. 但这不能确定诸如连续性, 可微性, 没有第二类不连续点, 可测性等.

因此, 自然地用下面的方法处理在某一函数空间 $\mathscr{F}_0$ 上的测度构造. 设空间 $\mathscr{F}_0$ 是这样一个空间, 对 $\mathscr{F}_0$ 中每一柱形集 C, $C\cap\mathscr{F}_0$ 不空. 则在 $\mathscr{F}_0$ 中可以考虑包含全体形如 $C\cap\mathscr{F}_0$ 的集(我们将称它为 $\mathscr{F}_0$ 中的柱形集)的最小 σ 代数 $\mathfrak{B}_0$. 在 $\mathscr{F}_0$ 中的柱形集 C_0 上定义可加集函数 $\mu_0(C_0) = \mu(C)$, 其中 $C_0 = C\cap\mathscr{F}_0$. 我们指出, 这定义是唯一的: 如果 $C_0 = C\cap\mathscr{F}_0$ 且 $C_0 = C_1\cap\mathscr{F}_0$, 则交集 $[(C - C_1)\cup(C_1 - C)]\cap\mathscr{F}_0$ 是空集, 故 $C \neq C_1$ 是不可能的. 显然, μ_0 是可加非负集函数. 为使 μ_0 可以扩张为 $\mathfrak{B}_0$ 上的测度, 其必要充分条件为: 对 $\mathscr{F}_0$ 中任一柱形集合序列 C_0^n, 使得 $\bigcup_n C_0^n = \mathscr{F}_0$, 满足不等式 $\sum_n \mu_0(C_0^n) \geqslant \mu_0(\mathscr{F}_0) = 1$.

这一条件等价于: 对任一柱形集合序列 $C^n\subset\mathscr{F}$, 使得

$$\bigcup_n C^n \supset \mathscr{F}_0, \quad \text{有} \sum_n \mu(C^n) \geqslant 1.$$

借助于测度 μ 我们定义外测度 μ^* 如下: 对任一集 A

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_n \mu(C^n):\ \bigcup C^n \supset A\right\}.$$

则在 $\mathfrak{B}_0$ 上能构造测度 μ_0 必须有: $\mu^*(\mathscr{F}_0) = 1$. 此时, 对一切 $A\in\mathfrak{B}_0$ 有 $\mu_0(A) = \mu^*(A)$. 我们来证明这一点. 我们注意, 对任一 $\mathfrak{B}$ 可测集 S, $S\cap\mathscr{F}_0 = \phi$, 有 $\mu(S) = 0$. 事实上, 不然的话, $\mathscr{F} - S\supset\mathscr{F}_0$, 因此

$$\mu^*(\mathscr{F}_0) \leqslant \mu^*(\mathscr{F} - S) = \mu(\mathscr{F} - S) = 1 - \mu(S) < 1.$$

显然，σ 代数 $\mathfrak{B}_0$ 是形如 $A \cap \mathscr{F}_0$ 的集合组成，其中 A 是 $\mathfrak{B}$ 可测集。

令 $A_0 \in \mathfrak{B}_0$ 且 $A_0 = A \cap \mathscr{F}_0$。设 $\bar{\mu}_0(A_0) = \mu(A)$。这一定义是唯一的，因为，如果 $A_0 = A \cap \mathscr{F}_0 = A' \cap \mathscr{F}_0$，则 $(A - A') \cup (A' - A) \subset \mathscr{F} - \mathscr{F}_0$，因此 $\mu(A) = \mu(A')$。注意到 $\bar{\mu}_0$ 是在 $\mathfrak{B}_0$ 上的可数可加测度：如果 A_0^k 互不相交且 $A_0^k = A^k \cap \mathscr{F}_0$，则对 $k \neq i$，$A^k \cap A^i \subset \mathscr{F} - \mathscr{F}_0$ 且 $\mu(A^k \cap A^i) = 0$。因此

$$\bar{\mu}_0(\cup A_0^k) = \mu(\cup A^k) = \sum_k \mu(A^k) = \sum_k \bar{\mu}_0(A_0^k).$$

此外，对任一柱形集 C_0，$\bar{\mu}_0(C_0) = \mu_0(C_0)$。因此，$\bar{\mu}_0 = \mu_0$。另一方面，如果 $A_0 = A \cap \mathscr{F}_0$，

$$\mu^*(A_0) = \inf\{\mu(A'),\ A' \in \mathfrak{B}, A' \supset A_0\} = \mu(A).$$

所以，对应于随机过程的测度可以在具有外测度为 1 的任一函数集 $\mathscr{F}_0$ 上考虑，且在这一集合上，这个测度与外测度相同。

空间 $\{\mathscr{F}_0, \mathfrak{B}_0, \mu_0\}$ 上的可测泛函是怎样的呢？我们证明，对于任一 $\mathfrak{B}_0$ 可测泛函 $f_0(x)$，存在这样一个 $\mathfrak{B}$ 可测泛函 $f(x)$，使得对 $x \in \mathscr{F}_0$ 有 $f(x) = f_0(x)$。令 $E_0^{k,n}$ 是 $\mathfrak{B}_0$ 中由式

$$E_0^{k,n} = \left\{x;\ \frac{k}{2^n} \leqslant f_0(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\}, n > 0, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

所定义的一个集合。用 $E^{k,n}$ 表示使得 $E_0^{k,n} = E^{k,n} \cap \mathscr{F}_0$ 的 $\mathfrak{B}$ 可测集。常常可以选取集合 $E^{k,n}$ 满足如下条件：

1）对固定的 n，$E^{k,n}$ 互不相交 $\Big($ 否则，我们可以考虑用集合 $\tilde{E}^{k,n} = E^{k,n} - \bigcup_{i=-\infty}^{k-1} E^{i,n}$ 来代替 $\Big)$。

2）$E^{k,n} = E^{2k,n+1} \cup E^{2k+1,n+1}$（可按另一方式令 $\tilde{E}^{2k,n+1} = E^{k,n} \cap E^{2k,n+1}$，$\tilde{E}^{2k+1,n+1} = E^{k,n} - \tilde{E}^{2k,n+1}$）。现在定义函数 $f^{(n)}(x)$，它在集 $E^{k,n}$ 上等于 $\dfrac{k}{2^n}$，并且如果 $x \bar{\in} \bigcup_k E^{k,n}$，它等于例如 $+\infty$。这

时 $f^{(n)}(x) \leq f^{(n+1)}(x) \leq f^{(n)}(x) + \frac{1}{2^n}$，因此 $f^{(n)}(x)$ 一致收敛于某一可测函数 $f(x)$. 此外，如果 $x \in \mathscr{F}_0$，$|f^{(n)}(x) - f_0(x)| < \frac{1}{2^n}$. 因此，当 $x \in \mathscr{F}_0$ 时 $f^{(n)}(x) \to f_0(x)$. 因而当 $x \in \mathscr{F}_0$ 时 $f_0(x) = f(x)$. 设另外存在一个 $\mathfrak{B}$ 可测函数 $f'(x)$，它在 $\mathscr{F}_0$ 上与 $f_0(x)$ 相同. 则 $\mathfrak{B}$ 可测集 $\{x; f(x) \neq f'(x)\}$ 与 $\mathscr{F}_0$ 不相交，因此有 μ 测度为 0. 所以，每一 $\mathfrak{B}_0$ 可测函数可以唯一地 $(\mathrm{mod}\ \mu)$ 扩张为一个 $\mathfrak{B}$ 可测函数.

上面最后的叙述表明，把测度搬到较小的空间 $\mathscr{F}_0$ 上，这对于随机过程的泛函的研究不起本质的作用. 然而，定义在 $\mathscr{F}_0$ 上的泛函常常有更明显的意义. 例如，如果 $\mathscr{F}_0$ 是连续函数空间，则泛函

$$f_0(x) = \sup_t x(t)$$

是 $\mathscr{F}_0$ 上的可测泛函. 这个泛函可以按公式

$$f(x) = \sup_{t \in N} x(t)$$

扩张到 $\mathscr{F}$ 上，其中 N 是变元值的可数处处稠密集. 显然，第一个形式的泛函有更自然的形式.

下面的情形在研究测度和把它搬移到 $\mathscr{F}_0$ 上去的可能性时是很重要的：在许多时候可以找到变元值的可数集 N，使得 σ 代数 $\mathfrak{B}^N$ 的完备化与 $\bar{\mathfrak{B}}$ 相同，其中 $\mathfrak{B}^N$ 为由 $t \in N$ 时 $x(t)$ 确定的柱形集所产生的最小 σ 代数. 因此，如果过程是随机连续的，则变元值的任一处处稠密集都可以选择作为 N. 当过程是单边随机连续时的情形同样亦真. 可以引入这样一个集合存在性的简单的必要充分条件.

引理 为使这样的集合 N 存在，使得 $\bar{\mathfrak{B}}^N = \bar{\mathfrak{B}}$，必要充分条件是关于测度 μ 为平方可积的 $\mathfrak{B}$ 可测函数的 Hilbert 空间 $\mathscr{L}_2(\mu)$ 是可分的.

证. 如果这样的 N 存在，则由 $\mathscr{L}_2(\mu)$ 与 $\mathscr{L}_2(\mu^N)$(μ^N 是测度

μ 在 $\mathfrak{B}^N$ 上的收缩)相同这一事实得出，$\mathscr{L}_2(\mu)$ 是可分的($\mathscr{L}_2(\mu^N)$ 的可分性是由于这些事实得到，即有界柱形函数在它里面是稠密的，依次地，连续柱形函数在有界柱形函数集中是稠密的).

现在令 $\mathscr{L}_2(\mu)$ 可分且 $f_1, f_2, \cdots$ 是 $\mathscr{L}_2(\mu)$ 中的一个基．对每一 $\mathfrak{B}$ 可测函数 f_k 存在这样一个可数集 N_k，使得 f_k 对 $\mathfrak{B}^{N_k}$ 可测，这是由于柱形函数逼近 f_k 的可能性而得到的．这时可取 $\bigcup\limits_k N_k$ 作为 N.

注意，不应该把"存在 N 使得 $\bar{\mathfrak{B}}^N = \bar{\mathfrak{B}}$"与"存在 N 使得过程是 N 可分等价"混为一谈．可分等价的构造对应于测度 μ 向所有 N 可分函数集 $\mathscr{F}_0$ 上的搬移.

然而，为了检验过程的连续性，不论过程是 N 可分的或是 $\bar{\mathfrak{B}}^N = \bar{\mathfrak{B}}$，均只需考虑过程在集 N 上的值即可．第一种情形在第三章 § 5 已经考虑过．而在第二种情形，应当注意，对集合 $\mathscr{F}_0$ 的外测度计算只须利用 $\mathfrak{B}^N$ 中的柱形集.

在这一节的最后，我们叙述在集合 $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$ 以及 $\mathscr{D} \subset \mathscr{F}$ 上保证测度的构造的一般条件，其中 $\mathscr{C}$ 是连续函数集，而 $\mathscr{D}$ 是没有第二类不连续点的函数集．显然，在第一种情形，过程是随机连续的，而在第二种情形，过程的随机不连续点不多于可数个．在这两种情形容易找到这样的 N，使得 $\bar{\mathfrak{B}}^N = \bar{\mathfrak{B}}$($N$ 是变元值的可数处处稠密集)．我们将假定，过程本身在第一种情形是定义在某一紧集 K 上，而在第二种情形是定义在闭区间上．相应的集合外测度的计算由于可以找到包含集合 $\mathscr{C}$ 及 $\mathscr{D}$ 的最小 $\mathfrak{B}^N$ 可测集而简化.

在 $\mathscr{C}$ 上测度存在的条件 为使测度 μ 可以搬移到 $\mathscr{C}$ 上的必要充分条件为下式满足:

$$\mu\left(\bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{t \in N} \bigcap_{\substack{|t-s|<\frac{1}{l} \\ s \in N}} \left\{x(\cdot): |x(t) - x(s)| < \frac{1}{r}\right\}\right) = 1.$$

容易验证，测度 μ 的符号下圆括弧中所示集合是包含 $\mathscr{C}$ 的最小 $\mathfrak{B}^N$ 可测集 (为此只须考虑函数 $x(\cdot)$ 仅仅定义在 N 上就可以

了).

在 $\mathscr{D}$ 上测度存在的条件 为使测度 μ 可以搬移到 $\mathscr{D}$ 上的必要充分条件为

$$\mu\Big(\bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{\substack{u,s,t\in N\\ s<t<u<s+\frac{1}{l}}}\Big\{x(\cdot):\ |x(t)-x(s)|<\frac{1}{r}\Big\}$$

$$\cup\Big\{x(\cdot):\ |x(u)-x(t)|<\frac{1}{r}\Big\}\Big)=1.$$

由函数 $x(\cdot)$ 没有第二类不连续点这一事实得到,在测度 μ 符号下的圆括号中的集合是包含 $\mathscr{D}$ 的最小 $\mathfrak{B}^N$ 可测集(参阅第三章 §4).

§2. 距离空间中的测度

在前一节里,我们指出了对应于随机过程的测度 μ 从全体函数空间 $\mathscr{F}$ 搬移到某一较小的函数空间 $\mathscr{F}_0$ 上的可能性. 在这一节里,我们感兴趣的是当空间 $\mathscr{F}_0$ 为可分距离空间,而 σ 代数 $\mathfrak{B}_0$ 与 $\mathscr{F}_0$ 中的所有 Borel 集的 σ 代数相同时的情形. 为此,我们考虑 $\mathscr{F}_0$ 等于实连续函数空间 $\mathscr{C}$ 时的情形. 显然,$\mathscr{C}$ 是具有距离为 $\rho(x,y)=\sup\limits_t|x(t)-y(t)|$ 的距离空间. 如果我们考虑定义在紧集上的过程,则 $\mathscr{C}$ 是可分的. 我们证明,$\mathfrak{B}_0$ 与 Borel 集的 σ 代数相同. 首先我们注意到,柱形集 $\{x(\cdot):\ x(t)\in A\}\cap\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{C}$ 中的 Borel 集,其中 A 是 Borel 集. 因此,所有 $\mathfrak{B}_0$ 中的集合是 $\mathscr{C}$ 中的 Borel 集. 为了验证 $\mathscr{C}$ 中的所有 Borel 集属于 σ 代数 $\mathfrak{B}_0$,只须证明任一 $\mathscr{C}$ 中的闭球属于 $\mathfrak{B}_0$.

令

$$S=\{x(\cdot):\sup|x(t)-y(t)|\leqslant\rho\}$$

是中心为 $y(\cdot)\in\mathscr{C}$,半径为 ρ 的球. 则

$$S=\mathscr{C}\cap\Big[\bigcap_{t\in N}\{x(\cdot):\ |x(t)-y(t)|\leqslant\rho\}\Big],$$

其中N是在变元值的定义域中的任一可数处处稠密集．

正如我们在下面看到的，在没有第二类不连续点的函数空间$\mathscr{D}$中同样可以引入距离，使得$\mathfrak{B}_0$与$\mathscr{D}$中 Borel 集σ代数相同．今后所讨论的空间的具体形式是无关紧要的．我们将考虑某一具有元素 $x, y, \cdots$和距离为$\rho(x, y)$的抽象可分距离空间$\mathscr{X}$．用$\mathfrak{B}$表示$\mathscr{X}$中的 Borel 集σ代数，并且测度μ给定在$\mathfrak{B}$上．如果K是$\mathscr{X}$的某一子集，则用$\mathscr{C}_K$表示定义在K上的所有连续有界函数的空间．$\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$简写为$\mathscr{C}$．在$\mathscr{C}_K$中自然引入距离

$$\rho_K(f, g) = \sup_{x \in K} |f(x) - g(x)|.$$

在$\mathscr{X}$上的连续函数构成较简单但同时又是充分广泛的一类函数；从这些函数出发，借助于极限运算可以得到所有的$\mathfrak{B}$可测函数．因此测度μ完全由积分$\int f(x)\mu(dx)$ ($f \in \mathscr{C}$) 的值所决定：取序列 $f_n \in \mathscr{C}$，使得 $f_n \xrightarrow{\mu} \chi_A$，从而可以找到$\mu(A)$，其中$\chi_A$是$\mathfrak{B}$中的集$A$的示性函数．在许多时候，测度$\mu$是没有给定的，并且不知道它是否存在．而仅仅给定积分 $L(f) = \int f(x)\mu(dx)$ 的值．发生如下的一个问题：在什么条件下，定义在$\mathscr{C}$上的泛函 $L(f)$ 可以表示成为关于某一有限测度的积分形式？ 在完备的距离空间，这一情形的答案是由如下的定理给出．

定理 1 为使定义在给定的完备距离可分空间$\mathscr{X}$上的连续有界函数空间$\mathscr{C}$上的泛函 $L(f)$ 可以表为

$$L(f) = \int f(x)\mu(dx), \tag{1}$$

(其中μ为$\mathfrak{B}$上的有限测度) 的必要充分条件为满足如下的条件：

1) 对所有的 $f \geqslant 0$, $L(f) \geqslant 0$;

2) $L(C_1 f_1 + C_2 f_2) = C_1 L(f_1) + C_2 L(f_2)$;

3) 对任意 $\varepsilon > 0$，存在紧集 K_ε，使得对每一个函数 $f(x)$ (当 $x \in K_\varepsilon$ 时，$f(x) = 0$) 满足条件：

$$|L(f)| \leqslant \varepsilon \|f\|,$$

其中 $\|f\| = \sup_x |f(x)|$.

证. 必要性. 条件 1) 及 2)的必要性是显然的. 由于对满足条件 3)的 f,下面的不等式成立,

$$\left|\int f(x)\mu(dx)\right| = \left|\int_{\mathscr{X}-K_\varepsilon} f(x)\mu(dx)\right| \leqslant \|f\|\mu(\mathscr{X} - K_\varepsilon),$$

故为了证明条件 3) 的必要性,我们证明: 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在这样的一个紧集 K_ε, 使得 $\mu(\mathscr{X} - K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. 令 $\{x_k, k = 1, 2, \cdots\}$ 是一个在$\mathscr{X}$中处处稠密的序列,而 $S_r(x)$ 是中心在 x,半径为 r 的闭球. 对于每一个 r,可以找到这样一个 N_r,使得

$$\mu(\mathscr{X}) - \mu\left(\bigcup_{k=1}^{N_r} S_r(x_k)\right) < r\varepsilon.$$

设

$$K_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{N_{2^{-n}}} S_{2^{-n}}(x_k),$$

则 K_ε 是闭集且对每一个 n 有有限的 2^{-n} 网. 所以 K_ε 是紧集. 其次我们有

$$\mu(\mathscr{X} - K_\varepsilon) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\mathscr{X} - \bigcup_{k=1}^{N_{2^{-n}}} S_{2^{-n}}(x_k)\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-n} = \varepsilon.$$

定理的条件的必要性证毕.

充分性. 令 F 是某一集合. 假定 $\bar{\mu}(F) = \inf L(f)$, 这里的下确界是对所有 $f \geqslant 0$, 且使得当 $x \in F$ 时有 $f(x) \geqslant 1$ 的 f 而取的. 如果 $\bar{\mu}(F') = 0$ (这里 F' 是 F 的边界), 我们把 F 归作在类 $\mathfrak{B}_0$ 内. 我们证明, $\mathfrak{B}_0$ 构成集合代数且 $\bar{\mu}$ 是 $\mathfrak{B}_0$ 上的可加函数. 为此, 我们注意到, 从 $\bar{\mu}$ 的定义易得 $\bar{\mu}(A \cup B) \leqslant \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B)$ 且对于 $A \subset B$ 有 $\bar{\mu}(A) \leqslant \bar{\mu}(B)$, 其次 $\bar{\mu}((\mathscr{X} - F)') = \bar{\mu}(F')$, 而 $\bar{\mu}((F_1 \cup F_2)') \leqslant \bar{\mu}(F_1' \cup F_2') \leqslant \bar{\mu}(F_1') + \bar{\mu}(F_2')$. 因此, 使得 $\bar{\mu}(F') = 0$ 的集合 F 构成一个代数. 我们现在证明 $\bar{\mu}$ 在 $\mathfrak{B}_0$ 上的可加性. 令 F_1 和 F_2 是 $\mathfrak{B}_0$ 上的两个不相交集合. 我们证明

$$\bar{\mu}(F_1 \cup F_2) \geqslant \bar{\mu}(F_1) + \bar{\mu}(F_2).$$

取任意 $\varepsilon > 0$，可以找到这样的函数 f 及 φ，$f \geqslant 0$，$1 \geqslant \varphi \geqslant 0$，使得 $L(\varphi) \leqslant \varepsilon$，$L(f) \leqslant \bar{\mu}(F_1 + F_2) + \varepsilon$，当 $x \in [F_1] \cap [F_2]$*) 时 $\varphi(x) = 1$，而当 $x \in F_1 \cup F_2$ 时 $f(x) \geqslant 1$.

其次我们令

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [F_1], \\ \varphi(x), & x \in [F_2] \end{cases}$$

且由连续性，扩张 $f_1(x)$ 到整个空间 $\mathscr{X}$ 上，使得 $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f(x) + \varphi(x)$（如果 $g(x)$ 是任一连续非负扩张，则 $f_1(x) = \min[g(x), f(x) + \varphi(x)]$）.

令 $f_2(x) = f(x) + \varphi(x) - f_1(x)$，显然 f_2 是非负连续函数且当 $x \in F_2$ 时 $f_2(x) = f(x) \geqslant 1$. 因此

$$\bar{\mu}(F_1) + \bar{\mu}(F_2) \leqslant L(f_1) + L(f_2) = L(f) + L(\varphi)$$
$$\leqslant \bar{\mu}(F_1 \cup F_2) + 2\varepsilon,$$

由 ε 的任意性，有

$$\bar{\mu}(F_1) + \bar{\mu}(F_2) \leqslant \bar{\mu}(F_1 \cup F_2).$$

由这一关系式及 $\bar{\mu}$ 的半可加性可得，$\bar{\mu}$ 在 $\mathfrak{B}_0$ 上的可加性.

注意，在 $[F_1] \cap [F_2] = \phi$ 的情形，函数 $\varphi(x)$ 可取为 0，因此对于这样的集合，即使不属于 $\mathfrak{B}_0$，关系式

$$\bar{\mu}(F_1 \cup F_2) = \bar{\mu}(F_1) + \bar{\mu}(F_2)$$

亦满足.

现在证明，$\bar{\mu}$ 可以扩张为 $\sigma(\mathfrak{B}_0)$ 上的测度. 为此只须证明，对任一 $\mathfrak{B}_0$ 中的下降集合序列 $\mathscr{G}_n$，$\cap \mathscr{G}_n = \phi$，当 $n \to \infty$ 时 $\bar{\mu}(\mathscr{G}_n) \to 0$. 设这一结果不成立，则可找到这样一个在 $\mathfrak{B}_0$ 中的集合序列 $\mathscr{G}_n$，使得 $\bar{\mu}(\mathscr{G}_n) > \delta > 0$，而 $\cap \mathscr{G}_n = \phi$. 我们注意到，对任一 $\mathscr{G} \in \mathfrak{B}_0$ 及 $\varepsilon > 0$，存在这样的闭集 $F \in \mathfrak{B}_0$，使得 $F \subset \mathscr{G}$ 并且有 $\bar{\mu}(\mathscr{G}) \leqslant \bar{\mu}(F) + \varepsilon$.

事实上，令 $f(x)$ 是一连续函数且 $F_C = \{x : f(x) = C\}$. 则对

---

*) $[F]$ 表示 F 的闭包. ——译者注

一切 C（可能除去可数个），$\bar{\mu}(F_C)=0$，因为对不同的 $C_1,\cdots,C_l$，集合 $F_{C_1},\cdots,F_{C_l}$ 是闭的且互不相交，因此

$$\Sigma\bar{\mu}(F_{C_i})=\bar{\mu}\left(\bigcup_i F_{C_i}\right)\leqslant\bar{\mu}(\mathscr{X}).$$

用 $f(x)$ 表示如下的一个函数：当 $x\in[\mathscr{X}-\mathscr{G}]$ 时 $f(x)=1$，当 $x\bar{\in}[\mathscr{X}-\mathscr{G}]$ 时 $f(x)<1$，并且 $\bar{\mu}(\mathscr{X}-\mathscr{G})\geqslant L(f)-\frac{\varepsilon}{2}$.

设 $\lambda<1$ 是这样一个数，使得 $\bar{\mu}(F_\lambda)=0$. 用 S 表示集合 $\{x:f(x)>\lambda\}$. 则

$$\bar{\mu}(S)\leqslant L\left(\frac{1}{\lambda}f\right)=\frac{1}{\lambda}L(f)\leqslant\frac{1}{\lambda}\bar{\mu}(\mathscr{X}-\mathscr{G})+\frac{\varepsilon}{2\lambda}.$$

因为 $S\in\mathfrak{B}_0$，故 $\mathscr{X}-S=\{x:f(x)\leqslant\lambda\}$ 是 $\mathfrak{B}_0$ 中的一个闭集且

$$\bar{\mu}(\mathscr{X}-S)=\bar{\mu}(\mathscr{X})-\bar{\mu}(S)\geqslant\bar{\mu}(\mathscr{X})-\frac{1}{\lambda}\bar{\mu}(\mathscr{X}-\mathscr{G})$$

$$-\frac{\varepsilon}{2\lambda}=\bar{\mu}(\mathscr{G})-\frac{1-\lambda}{\lambda}\bar{\mu}(\mathscr{X}-\mathscr{G})-\frac{\varepsilon}{2\lambda}.$$

然后选取 λ 足够接近于 1，使得 $\frac{1-\lambda}{\lambda}\bar{\mu}(\mathscr{X}-\mathscr{G})+\frac{\varepsilon}{2\lambda}$ 小于 ε.

现在令 $\tilde{F}_k$ 是 $\mathfrak{B}_0$ 中的一个闭集，使得 $\tilde{F}_k\subset\mathscr{G}_k$ 且 $\bar{\mu}(\mathscr{G}_k)\leqslant\bar{\mu}(\tilde{F}_k)+\frac{\delta}{2^{k+1}}$. 令 $F_n=\bigcap_{k=1}^{n}\tilde{F}_k$，则

$$\bar{\mu}(F_n)\geqslant\bar{\mu}(\mathscr{G}_n)-\sum_{k=1}^{n}\bar{\mu}(\mathscr{G}_k-\tilde{F}_k)$$

$$\geqslant\delta-\sum_{k=1}^{n}\delta\frac{1}{2^{k+1}}>\frac{\delta}{2}.$$

因此，我们在 $\mathfrak{B}_0$ 中构造的下降闭集序列 F_n，有 $\bar{\mu}(F_n)\geqslant\frac{\delta}{2}$，并且

$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \phi$. 现在，利用条件 3)，我们选取这样一个紧集 K，使得对所有的 $f(x)$（当 $x \in K$ 时 $f(x) = 0$），均有 $L(f) \leqslant \frac{\delta}{4} \|f\|$. 我们证明，对所有的 n，集合 F_n 与 K 的交不空，事实上，如果 $F_n \cap K = \phi$，则可以构造连续函数 $g(x)$，使得 $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$，且当 $x \in F_n$ 时 $g(x) = 1$，当 $x \in K$ 时 $g(x) = 0$. 这时 $\bar{\mu}(F_n) \leqslant L(g) \leqslant \|g\| \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{4}$. 这与 F_n 的构造矛盾. 所以不空紧集序列 $K_n = F_n \cap K$ 满足 $K_n \supset K_{n+1}$ 且 $\bigcap K_n = \phi$ 是不可能的. 由所得到的矛盾推出 $\bar{\mu}$ 在 $\mathfrak{B}_0$ 上的可数可加性以及它在 $\sigma(\mathfrak{B}_0)$ 上扩张的可能性. 用 μ 表示在 $\sigma(\mathfrak{B}_0)$ 上所得到的测度. 现在我们注意到，正如已经指出的，对任意连续函数 f，对几乎所有的 C，集合 $\{x: f(x) < C\} \in \mathfrak{B}_0$. 因此，如果 $f \in \mathscr{C}$，则对一切 C，$\{x: f(x) < C\} \in \sigma(\mathfrak{B}_0)$，所以我们得到 $\sigma(\mathfrak{B}_0)$ 包含 $\mathfrak{B}$. 最后我们证明等式(1)成立. 令 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ 且 $C_0 < 0 < C_1 \cdots < C_{n-1} < 1 < C_n$，使得集合 $\{x: f(x) = C_i\} \in \mathfrak{B}_0$，则对任一 $\varepsilon > 0$ 可找到这样一个连续函数 $\varphi_k(x) \geqslant 0$，且当 $x \in E_k = \{x: C_k < f(x) < C_{k+1}\}$ 时 $\varphi_k(x) = 1$，$k = 0, \cdots, n-1$，使得 $L(\varphi_k) < \mu(E_k) + \frac{\varepsilon}{n}$. 因此

$$L(f) \leqslant L\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{k+1}\varphi_k\right) < \sum_{k=1}^{n-1} C_{k+1}\mu(E_k) + \varepsilon$$

$$\leqslant \int f(x)\mu(dx) + \varepsilon + \max_k (C_{k+1} - C_k).$$

因为 $\varepsilon + \max_k (C_{k+1} - C_k)$ 可以选取得任意小，故此

$$L(f) \leqslant \int f(x)\mu(dx).$$

类似地

$$L(1) - L(f) = L(1 - f) \leqslant \mu(\mathscr{X}) - \int f(x)\mu(dx).$$

因为 $L(1)=\mu(\mathscr{X})$，故$-L(f)\leqslant-\int f(x)\mu(dx)$．因而等式(1)及定理证毕．

注 1．由定理的条件 3)得到，对任一 $\mathfrak{B}$ 上的有限测度 μ 及任意 $\varepsilon>0$，可找到这样一个紧集 K，使得 $\mu(\mathscr{X}-K)<\varepsilon$．

注 2．不难看到，在证明定理条件的充分性时没有用到完备性．然而在证明必要性时则必须用到完备性．如果空间 $\mathscr{X}$ 是它的完备化 $\bar{\mathscr{X}}$ 中的 Borel 集，定理的条件同样也是必要的．故对任一 $\varepsilon>0$，在 $\bar{\mathscr{X}}$ 中可以构造这样一个紧集 K，使得 $\mathscr{X}\supset K$ 且 $\mu(\bar{\mathscr{X}}-K)<\varepsilon$．

另一方面，如果$\mathscr{X}$不是完备的，则如前面定理的条件 3) 必要性的证明蕴涵了满足条件 $\mu(\mathscr{X}-K)<\varepsilon$ 的$\bar{\mathscr{X}}$ 中的紧集 K（或者是$\mathscr{X}$中的完全有界集 K）的存在性．仅仅在那些能够根据连续性扩张到整个空间 $\bar{\mathscr{X}}$ 上的函数 φ 考虑泛函 $L(\varphi)$（这些函数在 $\mathscr{X}$ 中的每一完全有界集 K 上一致连续），我们可以在 $(\bar{\mathscr{X}},\bar{\mathfrak{B}})$ 上构造一个测度 $\bar{\mu}$，其中 $\bar{\mathfrak{B}}$ 是空间 $\bar{\mathscr{X}}$ 中的 Borel 集的 σ 代数．如果 $\mathscr{X}$ 作为 $\bar{\mathscr{X}}$ 的子集有与测度空间$\bar{\mathscr{X}}$（即与 $L(1)$）相一致的外测度，则如前一段指出的，测度 $\bar{\mu}$ 可以搬移到 $\mathscr{X}$ 上．为使空间 $\mathscr{X}$ 的外测度等于 $L(1)$，只须任一使得$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\geqslant 1$，$x\in\mathscr{X}$ 成立的非负连续函数序列 φ_n，满足不等式 $\sum_{n=1}^{\infty}L(\varphi_n)\geqslant L(1)$．后一断言是由于 $\bar{\mathscr{X}}$ 中的任一集合 A 的外测度可以定义为 $\inf\sum_n L(\varphi_n)$，其中下确界是对所有在 $\bar{\mathscr{X}}$ 上使得

$$\Sigma\varphi_n(x)\geqslant 1,\quad x\in A$$

成立的非负连续函数序列 φ_n 取的．

所述条件等价于：对$\mathscr{C}$中的任一单调非负连续函数序列 φ_n，使得当 $n\to\infty$，对所有的 x，$\varphi_n(x)\downarrow 0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}L(\varphi_n)=0$．由关于积分符号与极限交换次序的 Lebesgue 定理得到，这条件也是

必要的．因此，对非完备空间时的情形有

定理 2 为使定义在给定的距离可分空间 $\mathscr{X}$ 上的连续有界函数空间 $\mathscr{C}$ 的泛函 $L(f)$ 满足式(1)（其中 μ 是 $\mathscr{X}$ 上的有限测度），必须且只须满足如下条件：

1）对一切 $f \geqslant 0$，$L(f) \geqslant 0$；

2）对一切实数 C_1 与 C_2 以及 $\mathscr{C}$ 中的 f_1, f_2 有 $L(C_1 f_1 + C_2 f_2) = C_1 L(f_1) + C_2 L(f_2)$；

3）对任一下降的非负函数序列 $\varphi_n \in \mathscr{C}$，使得对一切 x，$\varphi_n(x) \to 0$，有 $L(\varphi_n) \to 0$；

4）对任一 $\varepsilon > 0$，可以找到这样一个完全有界集 K，使得对一切属于 $\mathscr{C}$ 且满足当 $x \in K$ 时 $f(x) = 0$ 的 f 有 $|L(f)| \leqslant \varepsilon \|f\|$.

在这一节的最后，我们考虑关于连续函数的积分定义，这时的 $\mathscr{X}$ 是具有距离为 $\rho(x, y) = \sup_t |x(t) - y(t)|$ 的连续于 $[a, b]$ 的函数空间，而测度 μ 是对应于某一随机过程的测度．我们假定已知这个随机过程的任一边沿分布 $F_{t_1, \cdots, t_k}(dx_1, \cdots, dx_k)$，它是过程在点 $t_1, \cdots, t_k$ 的值的联合分布．用 α 表示区间 $[a, b]$ 的某一分划 $\{a = t_0^{(\alpha)} < t_1^{(\alpha)} < \cdots < t_n^{(\alpha)} = b\}$，$|\alpha| = \max_k |t_{k+1}^{(\alpha)} - t_k^{(\alpha)}|$.

令 $x(\cdot) \in \mathscr{X}$．设对 $t_k^{(\alpha)} \leqslant t \leqslant t_{k+1}^{(\alpha)}$，

$$x_\alpha(t) = x(t_k^{(\alpha)}) + \frac{t - t_k^{(\alpha)}}{t_{k+1}^{(\alpha)} - t_k^{(\alpha)}} [x(t_{k+1}^{(\alpha)}) - x(t_k^{(\alpha)})].$$

显然，$x_\alpha(t)$ 是在分划 α 的分点上与 $x(t)$ 相同的逐段线性函数．如果 $x(\cdot) \in \mathscr{X}$，则当 $|\alpha| \to 0$ 时，有 $\rho(x(\cdot), x_\alpha(\cdot)) \to 0$．现设 f 为某一连续泛函．则对一切 $x \in \mathscr{X}$

$$f(x) = \lim_{|\alpha| \to 0} f(x_\alpha).$$

记 $f(x_\alpha) = f_\alpha(x)$．泛函 $f_\alpha(x)$ 是连续柱形泛函．如果 $\|f\| < \infty$，则 $\|f_\alpha\| \leqslant \|f\|$，并且根据 Lebesgue 控制收敛定理，有

$$\int f(x) \mu(dx) = \lim_{|\alpha| \to 0} \int f_\alpha(x) \mu(dx). \tag{2}$$

泛函 $f_\alpha(x)$ 具有形式 $\varphi_\alpha(x(t_0^{(\alpha)}), \cdots, x(t_n^{(\alpha)}))$．因此在(2)式右边

的积分可以借助于有限维分布来计算:

$$\int f_\alpha(x)\mu(dx)=\int\varphi_\alpha(x_0,\cdots,x_n)F_{t_0^{(\alpha)},\cdots,t_n^{(\alpha)}}(dx_0,\cdots,dx_n).\quad(3)$$

(2)式和(3)式提供我们关于连续泛函的积分定义的可能性。

§3. 线性空间上的测度。特征泛函。

设 $\mathscr{X}$ 是实直线. 则定义在某一集合 T 上而取值于 $\mathscr{X}$ 的所有函数 $x(t)$ 的空间 $\mathscr{F}$ 是一线性的实空间. 用 $\mathscr{L}$ 表示所有在 $\mathscr{F}$ 上有如下形状的线性泛函 l 所成的空间:

$$l(x)=\sum_{k=1}^{n}C_kx(t_k),\qquad(1)$$

其中 n 是任一正整数,$(t_1,\cdots,t_n)$ 是过程的定义域中的某一点集,C_k 是实数, 在 §1 所定义的 σ 代数 $\mathfrak{B}$ 与对所有在 $\mathscr{L}$ 中的泛函为可测的最小 σ 代数相同. 在 $\mathfrak{B}$ 上的测度 μ 完全被它在所有可能的 l,形如 $\{x;l(x)<\alpha\}$ 的集上的值所决定. 这是由于知道了测度 μ 在这些集上的值,可以计算积分

$$\int e^{il(x)}\mu(dx)=\mathbf{E}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}C_k\xi(t_k)\right\},\qquad(2)$$

其中 $\xi(t)$ 是对应测度 μ 的随机过程. 因此,我们可以计算随机变量 $\xi(t_1),\cdots,\xi(t_n)$ 的联合特征函数,使我们得到对于选取的一组变元值的 $\xi(t_1),\cdots,\xi(t_n)$ 的联合分布. 这样一来, 知道了积分(2)就可以决定过程 $\xi(t)$ 的有限维分布,因而完全决定了测度 μ.

当测度 μ 从 $\mathscr{F}$ 搬移到较小的空间 $\mathscr{F}_0$ 时,这个空间 $\mathscr{F}_0$ 常常也是线性空间. 在这空间上至少定义了形如(1)的线性泛函,并且在 $\mathscr{F}_0$ 中的 $\mathfrak{B}_0$ 可测集的 σ 代数也与对所有形如(1)的泛函是可测的最小 σ 代数相同. 综上所述,为了在这一情形定义测度 μ,只须知道在 $\mathscr{F}_0$ 上的所有线性泛函的分布就可以了. 当考虑各种不同的线性泛函空间上的测度时, 空间的具体形式往往是不重

要的．因此，从下面的一般图式出发是方便的．令$\mathscr{X}$是任一线性空间（在实数域上），$\mathscr{L}$ 是某一定义在 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函 $l(x)$ 所成的线性集．用 $\mathfrak{B}$ 表示对所有的泛函 $l(x)\in\mathscr{L}$ 是可测的最小 σ 代数．我们将考虑在 $\mathscr{X}$ 上的概率测度 μ． 测度 μ 完全由它的特征泛函

$$\chi(l)=\int e^{il(x)}\mu(dx) \tag{3}$$

所确定．现在我们证明这一结论．我们称形如$\{x:l_1(x)\in A_1,\cdots,l_n(x)\in A_n\}$的任一集合为 $\mathscr{X}$ 中的柱形集，其中 n 为某一自然数，$l_1,\cdots,l_n$ 是$\mathscr{L}$中的泛函，而 $A_1,\cdots,A_n$ 是直线上的 Borel 集．令 $\mathfrak{S}_0$ 是所有柱形集的代数． 显然，任一泛函 $l\in\mathscr{L}$，对于 $\mathfrak{S}_0$ 是可测的，于是 $\sigma(\mathfrak{S}_0)=\mathfrak{B}$． 因此只须在 $\mathfrak{S}_0$ 上定义测度 μ 即可．如果定义在 $\mathscr{X}$ 上的泛函 $\varphi(x)$有形式 $\varphi(x)=g(l_1(x),\cdots,l_n(x))$，其中 n 是某一自然数，$l_1,\cdots,l_n\in\mathscr{L}$，而 $g(s_1,\cdots,s_n)$ 是 n 个变元的 Borel 函数，则称 φ 为柱形函数，并且如果 φ 连续，则称 φ 为连续柱形函数．为了在 $\mathfrak{S}_0$ 上确定测度 μ，只须知道连续有界柱形函数 φ 的积分$\int\varphi(x)\mu(dx)$就可以了．但这些函数是形如

$$T(x)=\sum_{k=1}^{n}C_k\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}\lambda_{k_j}l_j(x)\right\} \tag{4}$$

的总体有界的三角多项式的处处收敛序列的极限．尚须注意，式(3)确定形式(4)的函数 $T(x)$ 的积分值

$$\int T(x)\mu(dx)=\sum_{k=1}^{n}C_k\chi\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{k_j}l_j\right)$$

我们考虑一下特征泛函 $\chi(l)$ 可以任意到什么程度．

1）特征泛函是正定的： 对任意 $\mathscr{L}$ 中的 $l_1,\cdots,l_n$ 及复数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$

$$\sum_{k,j=1}^{n}\chi(l_k-l_j)\alpha_k\bar{\alpha}_j\geqslant 0. \tag{5}$$

这是因为

$$\sum_{k,j=1}^{n} \chi(l_k - l_j)\alpha_k\bar{\alpha}_j = \int\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{il_k(x)}\right|^2 \mu(dx)$$

之故.

2) 泛函 $\chi(l)$ 在下面意义下是连续的：当 $l_n \to l$ 时，$\chi(l_n) \to \chi(l)$，其中 $l_n \to l$ 是指对一切 $x \in \mathscr{X}$，$l_n(x) \to l(x)$.

现设在 $\mathscr{L}$ 上给定一个在所述意义下连续且正定的泛函 $\chi(l)$. 是否这些性质足够保证存在一个测度 μ，使得式(3)被满足？我们注意到，对任意 $l_1, \cdots, l_n \in \mathscr{L}$，函数 $\varphi(s_1, \cdots, s_n) = \chi\left(\sum_{k=1}^{n} s_k l_k\right)$ 是变数 $s_1, \cdots, s_n$ 的特征函数，因此，在 n 维空间中存在一个分布 $F_{l_1,\cdots,l_n}(du_1, \cdots, du_n)$ 使得

$$\varphi(s_1, \cdots, s_n) = \int e^{i\Sigma s_k u_k} P_{l_1,\cdots,l_n}(du_1, \cdots, du_n).$$

我们用下面的关系式定义集函数，

$$\mu(\{x: l_1(x) \in A_1, \cdots, l_n(x) \in A_n\}) = \int_{A_1} \cdots \int_{A_n} P_{l_1,\cdots,l_n}(du_1, \cdots, du_n).$$

容易证明，当用几种不同的方法表示同一柱形集时，我们得到关于函数 μ 的同一个表示式．函数 μ 在 $\mathfrak{S}_0$ 上是可加的且可扩张到每个 σ 代数 $\mathfrak{S}_0^{l_1,\cdots,l_n}$ 上是可数可加的函数．这里 $\mathfrak{S}_0^{l_1,\cdots,l_n}$ 是表示使得泛函 $l_1, \cdots, l_n$ 为可测的最小 σ 代数．因此，对任一有界 Borel 函数 $g(u_1, \cdots, u_n)$ 及任意 $l_1, \cdots, l_n$ 可以定义积分

$$\int g(l_1(x), \cdots, l_n(x))\mu(dx).$$

特别

$$\int e^{il(x)}\mu(dx) = \chi(l).$$

因此，根据 $\chi(l)$ 常可构造一个使得满足式(3)的在每一 σ 代数 $\mathfrak{S}_0^{l_1,\cdots,l_n}$ 上可数可加的有限可加集函数 μ．存在简单的例子(在 § 6 中给出)说明 μ 在 $\mathfrak{S}_0$ 上不常是可数可加的，因此，它不是常可能扩张成给定的 $\mathfrak{B}$ 上的测度．然而，常常可以构造空间 $\mathscr{X}$ 的某一个扩张 $\tilde{\mathscr{X}}$，在它上面存在这样的一个测度 μ：同时 $\tilde{\mathscr{X}}$ 也是线性的

且在 $\mathscr{L}$ 中的泛函可以扩张到 $\tilde{\mathscr{X}}$ 上使得它在 $\tilde{\mathscr{X}}$ 上是线性的. 我们证明这是可以做到的.

设 $\mathscr{F}_{\mathscr{L}}$ 表示所有定义在 $\mathscr{L}$ 上的数值函数 $\varphi(l)$（这些函数可以取无穷值，但有确定的符号）. 在 $\mathscr{L}$ 上定义一个实随机函数 $\xi(l)$，使得对 $\mathscr{L}$ 中的任一组 $l_1,\cdots,l_n$，随机变量 $\xi(l_1),\cdots,\xi(l_n)$ 的联合分布由下面的特征函数给出，

$$\mathbf{E}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\xi(l_k)\right\}=\chi\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k l_k\right).$$

容易验证对应的分布的相容性，因此，从第 1 章 § 4 定理 2 得到随机函数 $\xi(l)$ 的存在性. 设 $\tilde{\mu}$ 是 $\mathscr{F}_{\mathscr{L}}$ 上对应于 $\xi(l)$ 的一个测度，我们把测度 $\tilde{\mu}$ 搬移到较小的空间上.

用符号 $A_{\mathscr{L}}$ 表示在 $\mathscr{L}$ 中使得对一切 $l_1, l_2\in\mathscr{L}$ 和一切实数 C_1, C_2 有

$$\lambda(C_1l_1+C_2l_2)=C_1\lambda(l_1)+C_2\lambda(l_2)$$

的所有线性函数 $\lambda(l)$ 所成的集合.

我们证明，集合 $A_{\mathscr{L}}$ 的外测度等于 1.

设 S_n 是在 $\mathscr{F}_{\mathscr{L}}$ 中的任一下降柱形集合序列，满足 $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\cap A_{\mathscr{L}}$ 为空集. 不失一般性，可设集 S_n 由函数 φ 在点 $l_1,\cdots,l_n$ 上的值所决定，其中 $\{l_k, k=1,2,\cdots\}$ 是某一泛函序列. 我们依次写出满足泛函.

$$\sum_{k=0}^{n}C_{nk}l_k=0$$

的所有线性关系式（如果 l_n 与 $l_1,\cdots,l_{n-1}$ 线性无关，则系数 $C_{nn}=0$，反之 $C_{nn}\neq 0$）.

设 $D_n=\{\varphi: \Sigma C_{nk}\varphi(l_k)=0\}$. 则

$$\phi=\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n\cap A_{\mathscr{L}}=\bigcap_{n=1}^{\infty}(S_n\cap D_1\cap\cdots\cap D_n).$$

因为 $S_n\cap D_1\cap\cdots\cap D_n$ 是下降的柱形集合序列. 故由关系式

$$\phi = \bigcap_{n=1}^{\infty} [S_n \cap D_1 \cap D_2 \cdots \cap D_n]$$

得：当 $n \to \infty$ 时 $S_n \cap D_1 \cap \cdots \cap D_n \to \phi$. 最后，我们注意到，对所有 n, $\tilde{\mu}(D_n) = 1$，因此 $\tilde{\mu}(S_n \cap D_1 \cap \cdots \cap D_n) = \tilde{\mu}(S_n) \to 0$. 这表示 $A_{\mathscr{L}}$ 的外测度等于 1. 因此，测度 $\tilde{\mu}$ 可以搬移到 $A_{\mathscr{L}}$ 上. 其次，设 X_0 是 $\mathscr{X}$ 中使得对所有 $x \in X_0, l \in \mathscr{L}$，满足 $l(x) = 0$ 的线性流形，而 X^1 是 $\mathscr{X}$ 对于 X_0 的商群. 每一个元素 $x^1 \in X^1$ 可以看作一个 $\mathscr{L}$ 上的线性泛函：$x^1(l) = l(x)$，其中 x 是 x^1 按 $\mathrm{mod} X_0$ 的剩余集的任一代表. 现在我们用 $\tilde{\mathscr{X}}$ 表示偶对 $\tilde{x} = (x; \lambda)$ 所成的集，这里 $x \in X_0$, $\lambda \in A_{\mathscr{L}}$. 令 P 是由 $\mathscr{X}$ 映射到 X_0 内的一个线性算子，使得对一切 $x \in X_0, Px = x$，并且 $x^1(x)$ 表示 X^1 中 x 所属的剩余集. 则存在 $\mathscr{X}$ 到 $\tilde{\mathscr{X}}$ 中的一个自然嵌入：

$$x \to (Px, x^1(x)).$$

现在 $\tilde{\mathscr{X}}$ 上定义一个形如

$$\tilde{\mathscr{G}} = \{\tilde{x} = (x; \lambda) : \lambda \in \mathscr{G}\}.$$

的集合的 σ 代数 $\tilde{\mathfrak{B}}$，其中 $\mathscr{G}$ 是 $\mathfrak{A}$ 中的任一子集，$\mathfrak{A}$ 是在 $A_{\mathscr{L}}$ 中的子集的 σ 代数，在它上面定义了一个测度 $\tilde{\mu}$. 下面我们令 $\mu(\tilde{\mathscr{G}}) = \tilde{\mu}(\mathscr{G})$，并且证明这就是我们要找的测度. 注意，泛函 l 可以根据公式

$$l(\tilde{x}) = l((x; \lambda)) = \lambda(l)$$

定义在 $\tilde{\mathscr{X}}$ 上. 这泛函是线性的且它在考虑作为 $\tilde{\mathscr{X}}$ 的子集的 $\mathscr{X}$ 上与 $l(x)$ 相同：$l(x) = l((Px; x^1(x)))$，因为 $x^1(x)$ 作为一个 $A_{\mathscr{L}}$ 的元素是被公式 $x^1(x)(l) = l(x)$ 决定的. 最后考虑积分 (3). 从测度 $\tilde{\mu}$ 的构造得到，在柱形集上

$$\int e^{il(\tilde{x})} \mu(d\tilde{x}) = \int e^{i\lambda(l)} \tilde{\mu}(d\lambda) = \mathbf{E} e^{i\xi(l)} = \chi(l).$$

所以 μ 就是所要求的测度.

当 X_0 是由一个元素{ 0 }构成的时候，构造 $\tilde{\mathscr{X}}$ 特别简单. 下面就是这样的情况：如果泛函集 $\mathscr{L}$ 是如此的理想，以致对 $\mathscr{X}$ 中的任意偶对 $x_1 \neq x_2$，可找到这样的泛函 l，使得 $l(x_1) \neq l(x_2)$. 这

时可选择空间 $A_{\mathscr{L}}$ 本身作为 $\tilde{\mathscr{X}}$，并且每一个元素 $x\in\mathscr{X}$，根据公式

$$x(l)=l(x)$$

决定 $A_{\mathscr{L}}$ 中的一个元素. 显然，在 $\tilde{\mathscr{X}}$ 上的任一个测度，在 $\mathscr{L}$ 上决定了一个特征泛函 $\chi(l)$，然而它不一定是在条件 2) 中所指出的那种意义下的连续. 为使条件 2)满足，必须且只须使得测度 $\tilde{\mu}$ 具有如下的性质：对任一序列 l_n，使得对于所有 $x\in\mathscr{X}$，$l_n(x)\to 0$，依测度 $\tilde{\mu}$ 有 $l_n(\tilde{x})\to 0$. 我们还注意到，如果 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{L}$ 用这样方法选择，即使得 $A_{\mathscr{L}}$ 与 $\mathscr{X}$ 相同，则我们构造的测度将是 $\mathscr{X}$ 上的测度.

现设 $\mathscr{X}$ 是一线性赋范完备可分空间. 则自然选择全体连续线性泛函的空间 $\mathscr{X}^*$（它的元素用符号 x^* 表示)作为 $\mathscr{L}$. 对所有泛函 $x^*(x)$ 是可测的最小 σ 代数与在 $\mathscr{X}$ 中所有 Borel 集的 σ 代数 $\mathfrak{B}$ 相同. 在 $\mathfrak{B}$ 上任一概率测度 μ 由它的特征泛函

$$\chi(x^*)=\int e^{ix^*(x)}\mu(dx)$$

所决定，这个特征泛函是正定的，且在 $\mathscr{X}^*$ 上弱连续的. 如果给定了具有这些性质的泛函 $\chi(x^*)$，则可以在所有柱形集的代数 $\mathfrak{S}_0$ 上构造一个有限可加测度 μ. 当 $\mathscr{X}^*$ 是可分空间时，我们可以找到必要充分条件，使得这个测度可以扩张到 $\mathfrak{B}$ 上是可数可加的. 为此要求对任一满足条件 $\bigcap_n S_n=\phi$ 且 $S_n\supset S_{n+1}$ 的柱形集合序列 S_n，有 $\mu(S_n)\to 0$. 设集合 S_n 形如 $\{x:(l_1(x),\cdots,l_n(x))\in A^n\}$，其中 A^n 是 $\mathscr{R}^n$ 中的 Borel 集. 如果 A^n 在 $\mathscr{R}^n$ 中是一闭集，则称 S_n 是闭的. 因为对任一 $\varepsilon_n>0$，可以找到这样一个闭集 $F^n\subset A^n$，使得

$$\mu(S_n)-\mu(\{x:(l_1(x),\cdots,l_n(x))\in F^n\})<\varepsilon_n,$$

因此只须验证，只要在闭集 S_n 上连续就行了. 利用这个结果，我们寻找在 $\mathfrak{B}$ 上具有给定特征泛函的测度 μ 存在的条件.

设 $\{x_k^*(x),k=1,2,\cdots\}$ 是在空间 $\mathscr{X}^*$ 的单位球上的一个

处处稠密集．因为 $|x| = \sup_k x_k^*(x)$，则在测度 μ 为可数可加的情形，满足关系式

$$0 = \lim_{N\to\infty} \mu(\{x:\ |x| > N\}) = \lim_{N\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mu(\{x: \sup_{k\leqslant n} x_k^*(x) > N\}).$$

因此，为了测度 μ 的可数可加性，必须满足条件

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mu(\{x: \sup_{k\leqslant n} x_k^*(x) > N\}) = 0 \tag{6}$$

我们证明这个条件也是充分的．令 μ 是根据 χ 构造的在柱形集上的可加测度．由(6)得，对任一 $\varepsilon > 0$，可以找到这样的 N，使得对所有 n

$$\mu(\{x: x_k^*(x) \leqslant N, k = 1, \cdots, n\}) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

设对某一闭柱形集列 $S_n = \{x: (\tilde{x}_1^*(x), \cdots, \tilde{x}_n^*(x)) \in F^n\}$，$S_n \supset S_{n+1}$，满足关系式 $\mu(S_n) \geqslant 2\varepsilon$，我们证明，这时 $\cap S_n$ 不空．令

$$K_N = \{x: |x| \leqslant N\}, K_N^n = \{x:\ x_k^*(x) \leqslant N, k = 1, \cdots, n\}.$$

交 $S_n \cap K_N$ 不空．事实上，如果 $S_n \cap K_N$ 为空集，则 $d = \inf_{x\in S_n} |x| > N$（因为可以得到这个下确界）．设

$$g(u_1, \cdots, u_n) = \inf\{|x|: \tilde{x}_1^*(x) = u_1, \cdots, \tilde{x}_n^*(x) = u_n\}.$$

所以集合 S_n 包含在集合 $\{x: g(\tilde{x}_1^*(x), \cdots, \tilde{x}_n^*(x)) \geqslant d\}$ 中．集合 $\{(u_1, \cdots, u_n): N < g(u_1, \cdots, u_n) < d\}$ 是 $\mathscr{R}^n$ 中的开集且是二个单连通区域的差．因此存在一个具有形如 $\{(u_1, \cdots, u_n): \sum_1^n r_{ij} u_i = b_j\}$，$j = 1, \cdots, m$，为边界面的多面体，使得集合 $\{(u_1, \cdots, u_n):\ g(u_1, \cdots, u_n) \leqslant N\}$ 在这个多面体里面，而集合 $\{(u_1, \cdots, u_n); g(u_1, \cdots, u_n) \geqslant d\}$ 在这个多面体的外面，这时集合 S_n 完全被包含在集合的并

$$\bigcup_{j=1}^m \left\{x:\ \sum_1^n r_{ij} \tilde{x}_i^*(x) > b_j\right\}$$

中，并且每一个被加项与 K_n 不相交．记

$$y_j^*(x) = \sum_1^n r_{ij} \tilde{x}_i^*(x).$$

当且仅当 $b_i > \|y_i^*\|N$ 时，集 $\{x: y_i^*(x) \geqslant b_i\}$ 与 K_N 不相交。

令 $\frac{y_j^*}{\|y_j^*\|} = z_j^*$，则 S_n 整个被包含在集 $\bigcup_{j=1}^{m}\{x: z_j^*(x) \geqslant N+\delta\}$

中，其中 $\delta = \inf_j \frac{1}{\|y_j^*\|} b_j - N > 0$.

由 $\chi(x^*)$ 的连续性得到，对几乎所有的 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$

$$\lim_{k\to\infty}\mu(\{x: z_{1,k}^*(x) < \alpha_1, \cdots, z_{m,k}^*(x) < \alpha_m\})$$
$$= \mu(\{z_1^*(x) < \alpha_1, \cdots, z_m^*(x) < \alpha_m\}),$$

不过得假定 $\|z_{j,k}^* - z_j^*\| \to 0$. 我们在集合 $\{x_k^*, k = 1, 2, \cdots\}$ 中选取序列 $x_{j,k}^*, j = 1, \cdots, m$，使得 $\|x_{j,k}^* - z_j^*\| \to 0$，则

$$\mu(S_n) \leqslant \mu\left(\bigcup_{j=1}^{m}\{x: z_j^*(x) \geqslant N+\delta\}\right)$$
$$= 1 - \mu(\{x: \sup_{j\leqslant m} z_j^*(x) < N+\delta\})$$
$$\leqslant 1 - \lim_{k\to\infty}\mu(\{x: \sup_{j\leqslant m} x_{j,k}^*(x) \leqslant N\}) \leqslant \varepsilon.$$

这与不等式 $\mu(S_n) \geqslant 2\varepsilon$ 矛盾．所以 $S_n \cap K_N$ 不空．因此嵌入的弱闭集序列 $S_n \cap K_N$ 属于弱紧集 K_N，且因此 $\bigcap_n \{S_n \cap K_N\}$ 不空，即 $\bigcap_n S_n$ 不空．所以，如果 S_n 是下降的柱形集列，使得

$$\bigcap_n S_n = \phi,$$

则 $\lim_{n\to\infty}\mu(S_n) = 0$，即 μ 可数可加．因此，证明了

定理　为使连续正定泛函 $\chi(x^*)$ 是一个 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 上的测度的特征泛函，必须且只须使得由泛函 $\chi(x^*)$ 产生的可数可加测度，对于某一在空间 $\mathscr{X}^*$ 中的单位球中处处稠密的集合 $\{x_k^*, k = 1, \cdots, n, \cdots\}$ 满足条件(6)，这里 $\mathscr{X}$ 是使得 $\mathscr{X}^*$ 为可分的 Banach 空间。

注．条件(6)可换成以下的条件：令 $h_n(x)$ 是连续的柱形函数序列，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x)=|x|$．则

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{n\to\infty}\mu(\{x:\ h_n(x)>N\})=0. \tag{7}$$

如果 $h_n(x)=\sup\limits_{k\leqslant n} x_k^*$，条件(7)变为条件(6)．此外，利用反演公式可以用 $\chi(x^*)$ 表示(6)．

§4. 在空间 $\mathscr{L}_p$ 中的测度

定义在 $[a,b]$ 上使得

$$\int_a^b |x(t)|^p dt<\infty$$

的实可测函数 $x(t)$ 的空间 $\mathscr{L}_p[a,b]$ 是很重要的一类线性赋范空间．我们将只考虑 $p\geqslant 1$ 时的情形．设某一概率空间 $\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$ 是固定的．我们将研究在什么条件下，定义在 $[a,b]$ 上的一个给定的数值过程 $\xi(t,\omega)$ 对应一个 $\mathscr{L}_p$ 中的一个测度．设 $\xi(t,\omega)$ 是可测过程．则根据 Fubini 定理，$\xi(t,\omega)$ 看作为 t 的函数是以概率为 1 可测的，因此以概率 1 积分

$$\int_a^b |\xi(t,\omega)|^p dt$$

被确定(它也可取无穷值)．而且积分亦为 ω 的可测函数．

设

$$\mathbf{P}\left\{\int_a^b |\xi(t,\omega)|^p dt<\infty\right\}=1. \tag{1}$$

我们证明在这一条件下，在空间 $\mathscr{L}_p$ 中可以构造一个对应于过程 $\xi(t,\omega)$ 的测度 μ，即这样的测度 μ，使得对空间 $\mathscr{L}_p$ 的每一 Borel 集 B 有

$$\mu(B)=\mathbf{P}(\{\omega:\xi(\cdot,\omega)\in B\}). \tag{2}$$

如果能够证明，对 $B\in\mathfrak{B}$，有 $\{\omega:\xi(\cdot,\omega)\in B\}\in\mathfrak{S}$ 则式(2)可以取作为测度 μ 的定义．为证此，我们考虑定义在 $\mathscr{L}_p$ 上形如

$$l(x)=\int_a^b l(t)x(t)dt$$

泛函类 L，其中 $l(t)$ 是有界可测函数．在 L 中的泛函是定义在 $\mathscr{L}_p$(对任意 $p\geqslant 1$)上，且对任意 p，L 在线性连续泛函空间中稠密．用 $\mathfrak{B}_0$ 表示在 $\mathfrak{B}$ 中，使得 $\{\omega: \xi(\cdot,\omega)\in B\}\in\mathfrak{S}$ 的那些 B 的全体．显然 $\mathfrak{B}_0$ 是 σ 代数．因为对任一 L 中的 l，$l(\xi(\cdot,\omega))$ 关于 $\mathfrak{S}$ 可测，所以对每一 $\mathscr{L}_p$ 上的连续线性泛函 l，$l(\xi(\cdot,\omega))$ 为 $\mathfrak{S}$ 可测．因此 $\mathfrak{B}_0$ 与使 $\mathscr{L}_p$ 上的所有连续线性泛函为可测的最小的 σ 代数相一致，而这个 σ 代数与 $\mathfrak{B}$ 相一致，所以，式(2)实际上确定了某一测度 μ．因为对任一 $\mathscr{L}_p$ 上的连续泛函 l，$l(\xi(\cdot))$ 对于 $\mathfrak{S}$ 可测．故可以借助于特征泛函

$$\chi(l)=\int e^{il(x)}\mu(dx)=\mathbf{E}e^{il(\xi(\cdot,\omega))} \tag{3}$$

给定测度 μ，这个特征泛函唯一地确定测度 μ．

发生如下一个问题：构造的测度 μ 与过程 $\xi(t,\omega)$ 的边沿分布有怎样的联系？是否能根据边沿分布构造测度 μ，或者根据测度 μ 决定边沿分布？现在证明，对于随机连续过程来说，关于这个问题的答案是肯定的．

设 $\xi(t,\omega)$ 是随机连续可测过程（由第三章 §3 定理 1 得到．对于随机连续过程恒存在等价的可测过程）．

令

$$\xi_N(t,\omega)=g_N(\xi(t,\omega));g_N(x)=\begin{cases}x, & |x|\leqslant N,\\ N\operatorname{sign}x, & |x|>N.\end{cases}$$

则，当 $N\to\infty$ 时，几乎对一切 ω 有

$$\int_a^b|\xi_N(t,\omega)|dt\to\int_a^b|\xi(t,\omega)|dt,$$

过程 $\xi_N(t,\omega)$ 同样也是随机连续的．

我们证明

$$\int_a^b\xi_N(t,\omega)dt=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\xi_N(t_k,\omega)\Delta t_k, \tag{4}$$

其中 $a=t_0<t_1\cdots<t_n=b$, $\Delta t_k=t_{k+1}-t_k$, $\lambda=\max_k\Delta t_k$;
而极限取为依概率收敛意义下的极限. 我们有,对任意 $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left|\int_a^b \xi_N(t,\omega)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\xi_N(t_k,\omega)\Delta t_k\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\mathbf{E}|\xi_N(t,\omega)-\xi_N(t_k,\omega)|dt \\
&\leqslant \varepsilon(b-a)+\sum_{k=0}^{n-1}2N\int_{t_k}^{t_{k+1}}P\{|\xi_N(t,\omega)-\xi_N(t_k,\omega)| \\
&>\varepsilon\}dt\leqslant\varepsilon(b-a)+2N(b-a)\sup[\mathbf{P}\{|\xi_N(t,\omega) \\
&\quad -\xi_N(s,\omega)|>\varepsilon\};|t-s|\leqslant\lambda],
\end{aligned}$$

当 $\lambda\to 0$ 时取极限,并且考虑到 $\xi_N(t)$ 的随机连续性(因此一致随机连续)以及 $\varepsilon>0$ 的任意性,确信等式(4)是正确的.

类似地有

$$\int_a^b|\xi(t,\omega)|^p dt=\lim_{N\to\infty}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}|\xi_N(t_k,\omega)|^p\Delta t_k, \tag{5}$$

因此,条件(1)的成立与否可以借助于过程 $\xi(t,\omega)$ 的边沿分布来验证. 如果条件(1)满足,则利用等式

$$\int_a^b l(t)\xi(t,\omega)dt=\lim_{N\to\infty}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}l(t_k)\xi_N(t_k,\omega)\Delta t_k, \tag{6}$$

(它对$[a,b]$上的任一连续函数 $l(t)$ 成立),对连续函数 $l(t)$,我们可以定义

$$\chi(l)=\lim_{N\to\infty}\lim_{\lambda\to 0}\mathbf{E}\exp\left\{i\sum_{k=0}^{n-1}l(t_k)\xi_N(t_k,\omega)\Delta t_k\right\}. \tag{7}$$

由于 $\chi(l)$ 的连续性,(7)式确定了所有具有连续函数 $l(t)$ 的泛函

$$l(x)=\int_a^b l(t)x(t)dt$$

的集 L 的闭包上 $\chi(l)$ 的值. 而因为 L 在 $\mathscr{L}_p$ 上的所有连续泛函所成的空间中处处稠密,则它表示 $\chi(l)$ 完全由式(7)确定.

现假设在 $[a, b]$ 上的可测随机连续过程 $\xi(t, \omega)$ 满足条件(1)，并且在 $\mathscr{L}_p$ 上给定测度 μ，或者等价地给定特征泛函 $\chi(l)$。设 $l(t)$ 是某一连续函数，$N > 0$，n 是自然数。

令

$$t_{nk} = a + \frac{k}{n}(b - a),$$

$$I_{n,N}(l) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} l(t_{nk}) g_N\left(\frac{1}{t_{nk+1} - t_{nk}}\int_{t_{nk}}^{t_{nk+1}} \xi(t, \omega)dt\right).$$

几乎对一切 ω

$$\lim_{n\to\infty} I_{n,N}(l) = \int_a^b l(t)\xi_N(t, \omega)dt.$$

因此，对于 $\mathscr{L}_p$ 中的过程 $\xi(t,\omega)$ 的特征泛函 $\chi_N(l)$ 和任一连续函数 $l(t)$，有

$$\chi_N(l) = \mathbf{E}\exp\left\{i\int_a^b l(t)\xi_N(t, \omega)dt\right\} = \lim_{n\to\infty}\int e^{iI_{n,N}(l,x)}\mu(dx),$$

其中

$$I_{n,N}(l,x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} l(t_{n,k}) g_N\left(\frac{n}{b-a}\int_{t_{nk}}^{t_{nk+1}} x(t)dt\right)$$

连续，因此是 $\mathscr{L}_p$ 上的 $\mathscr{B}$ 可测泛函. 根据连续性，泛函 $\chi_N(t)$ 可以扩张到整个 L 上. 现在证明，当 $h \to 0$ 时，依概率有

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \xi_N(t,\omega)dt \to \xi_N(t, \omega). \tag{8}$$

事实上

$$\mathbf{E}\left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} (\xi_N(s,\omega) - \xi_N(t,\omega))dt\right|$$
$$\leqslant \varepsilon + 2N\sup[\mathbf{P}\{|\xi_N(s, \omega) - \xi_N(t, \omega)| > \varepsilon\};$$
$$t < s < t + h].$$

最后的式子可适当地选择 $\varepsilon > 0$ 及 $h > 0$，使得它任意地小。

用 $l_{t_{k,h}}(x)$ 表示 $\mathscr{L}_p$ 上由等式

$$l_{t_{k,h}}(x) = \frac{1}{h}\int_{t_k}^{t_k+h} x(t)dt,$$

确定的泛函. 则由(8)式推得，对所有实数 u_k 及 $[a, b)$ 中之点 $t_1 < \cdots < t_n$

$$\mathbf{E}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}u_k\xi_N(t_k, \omega)\right\} = \lim_{h\to 0}\chi_N\left(\sum_{k=1}^{n}u_k l_{t_{k,h}}(\xi_N(\cdot))\right). \quad (9)$$

式(9)决定过程 $\xi_N(t, \omega)$ 的边沿分布. 通过当 $N\to\infty$时的极限，可找到这过程 $\xi_N(t, \omega)$ 的边沿分布. 由于必须用截尾过程 $\xi_N(t, \omega)$ 而不是原来的过程 $\xi(t, \omega)$，公式(5)和(7)是不方便的. 还有，最好是得到保证满足式(1)的条件不用随机变量本身的极限，而是随机变量的概率特征的术语来表示. 为得到更简单的关于过程的 p 次方可积性的叙述，我们必须要有下面的

引理 设 $\xi(t)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的可测随机连续非负过程，对区间 $[a,b]$ 的任一分划序列 $a = t_{n0} < \cdots < t_{nn} = b$，对应的 $\lambda_n = \max_t(t_{nk+1} - t_{nk}) \to 0$，并对每一独立于 $\xi(t)$ 的随机变量 τ_{nk} 分别在区间 $[t_{nk}, t_{nk+1}]$，$k = 0, 1, \cdots, n-1$，上均匀分布，则当 $n\to\infty$ 时依概率满足关系式

$$\sum_{k=0}^{n-1}\xi(\tau_{nk})\Delta t_{nk} \to \int_a^b \xi(t)\,dt$$

(右边的积分可取值$+\infty$).

证. 因过程 $\xi(t)$ 可以分别在集合

$$\left\{\omega: \int_a^b \xi(t)\,dt < \infty\right\} \text{ 与 } \left\{\omega: \int_a^b \xi(t)\,dt = +\infty\right\}$$

中的每一个集合上来考虑，所以，当这些条件之一以概率 1 被满足时，只须考虑这二种情形. 首先设

$$\mathbf{P}\left\{\int_a^b \xi(t)\,dt = +\infty\right\} = 1.$$

则由前面所证，依概率有

$$\sum_{k=0}^{n-1}\xi_N(\tau_{nk})\Delta t_{nk} \to \int_a^b \xi_N(t)\,dt$$

因此，对每一 $c > 0$ 满足关系式

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{P}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\xi_N(\tau_{nk})\Delta t_{nk}\geqslant c\right\}$$

$$\geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\ \mathbf{P}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\xi_N(\tau_{nk})\Delta t_{nk}\geqslant c\right\}\geqslant \mathbf{P}\left\{\int_a^b \xi_N(t)dt > c\right\}.$$

当 $N\to\infty$ 时取极限，我们得到 $\sum_{k=0}^{n-1}\xi(\tau_{nk})\Delta t_{nk}$ 依概率收敛于 $+\infty$.

现设

$$\mathbf{P}\left\{\int_a^b \xi(t)dt < \infty\right\} = 1.$$

令

$$\xi^m(t) = \xi(t),\quad a\leqslant t\leqslant b,\ \text{如果}\int_a^b \xi(t)dt\leqslant m,$$

$$\xi^m(t) = 0,\qquad a\leqslant t\leqslant b,\ \text{如果}\int_a^a \xi(t)dt > m.$$

则过程 $\xi^m(t)$ 非负随机连续且可测.

因为

$$\int_a^b \xi^m(t)dt\leqslant m,$$

则由 Fubini 定理，几乎对一切 t，$\mathbf{E}\xi^m(t)$ 存在，且 $\int_a^b \mathbf{E}\xi^m(t)dt\leqslant m$. 令 $\xi_N^m(t) = g_N(\xi^m(t))$. 则过程 $\xi_N^m(t)$ 随机连续且有数 N 为界. 因此，对任意 $\varepsilon > 0$ 可以找到这样一个 $h > 0$，使得当 $|t-s|\leqslant h$ 时

$$\mathbf{E}|\xi_N^m(t)-\xi_N^m(s)|\leqslant\varepsilon.$$

利用这一事实，我们得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{E}\left|\int_a^b \xi^m(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\xi^m(\tau_{nk})\Delta t_{nk}\right|$$

$$\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_{nk}}^{t_{nk+1}}\int_{t_{nk}}^{t_{nk+1}}\mathbf{E}|\xi^m(t)-\xi^m(s)|\frac{ds}{\Delta t_{nk}}$$

$$\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\Delta t_{nk}}\int_{t_{nk}}^{t_{nk+1}}\int_{t_{nk}}^{t_{nk+1}}[\mathbf{E}|\xi_N^m(t)-\xi_N^m(s)|$$

$$+ 2\mathbf{E}|\xi_N^m(t) - \xi^m(t)|\,]\,dt\,ds$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{|t-s|\leqslant\lambda_n} \mathbf{E}|\xi_N^m(t) - \xi_N^m(s)|(b-a)$$

$$+ 2\int_a^b \mathbf{E}|\xi_N^m(t) - \xi^m(t)|\,dt = 2\int_a^b \mathbf{E}|\xi_N^m(t) - \xi^m(t)|\,dt.$$

当 $N \to \infty$ 时最后的式子趋于零．最后

$$\mathbf{P}\left\{\left|\int_a^b \xi(t)\,dt - \sum_{k=0}^{n-1} \xi(\tau_{nk})\Delta t_{nk}\right| > \varepsilon\right\}$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{\int_a^b \xi(t)\,dt > m\right\} + \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}\left|\int_a^b \xi^m(t)\,dt\right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{n-1} \xi^m(\tau_{nk})\Delta t_{nk}\right|.$$

当 $n \to \infty$ 时取极限，然后当 $m \to \infty$ 时得到引理的证明．

推论　在引理的条件下，存在非随机点 $s_{nk} \in [t_{nk}, t_{nk+1}]$，使得当 $n \to \infty$ 时依概率有

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi(s_{nk})\Delta t_{nk} \to \int_a^b \xi(t)\,dt.$$

注．如果对形如引理中给出的关于区间 $[a,b]$ 的某一分划序列以及某一独立于 $\xi(t)$ 的选择的点

$$s_{nk} \in [t_{nk}, t_{nk+1}],\quad \sum_{k=0}^{n-1} \xi(s_{nk})\Delta t_{nk}\,(n \to \infty)$$

依概率有界，则

$$\mathbf{P}\left\{\int_a^b \xi(t)\,dt < \infty\right\} = 1.$$

事实上，对任一 $\varepsilon > 0$ 及 $c > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\int_a^b \xi_N(t)\,dt > c\right\} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{P}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\xi_N(s_{nk})\Delta t_{nk} > c - \varepsilon\right\}$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{P}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\xi(s_{nk})\Delta t_{nk} > c - \varepsilon\right\}.$$

因此

$$\mathbf{P}\left\{\int_a^b \xi(t)dt > c\right\} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sum_{k=0}^{n-1} \xi(s_{nk})\Delta t_{nk} > c - \varepsilon\right\}.$$

我们现在叙述以过程的特征泛函表示的$\int_a^b |\xi(t)|^\alpha dt$，$\alpha \in (0, 2)$，有限性的充要条件．因为现时我们不知道过程可以在怎样的空间中被考虑，所以我们将利用给定在 $[a,b]$ 任一阶梯函数 $g(t)$，由关系式

$$\chi_0(g) = \mathbf{E}\exp\left\{i\int_a^b \xi(t)dg(t)\right\}$$

定义的特征泛函 $\chi_0(g)$．显然，给定 $\chi_0(g)$ 等价于给定过程的边沿分布．

我们用下面的方法构造一个定义在 $[a, b]$ 上的随机函数 $\nu_n^\alpha(t)$．设 $t_{nk} = a + \frac{k}{n}(b-a)$，$k = 0, \cdots, n$，$\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_n, \cdots$是独立于 $\xi(t)$ 的随机变量，它们中的每一个在$[0, 1]$上均匀分布（否则 η_k 的联合分布可以是任意的）．最后，设变量 $\zeta_0, \zeta_1, \cdots$既不依赖于 $\xi(t)$ 也不依赖于 $\eta_0, \eta_1, \cdots$，而且它们相互独立同分布，并且 $\mathbf{E}e^{is\zeta_0} = e^{-|s|^\alpha}$，即 ζ_k 是一个具有指数 α 的对称稳定分布．令 $\nu_n^\alpha(a) = 0$，当 $(t-a)n \in [(j+\eta_j)(b-a), (j+1+\eta_{j+1})(b-a)]$ 时 $\nu_n^\alpha(t)$ 为常数并且

$$\nu_n^\alpha\left(a + \frac{j+\eta_j}{n}(b-a) + 0\right) - \nu_n^\alpha\left(a + \frac{j+\eta_j}{n}(b-a) - 0\right)$$
$$= \zeta_j / n^{1/\alpha}.$$

这些条件唯一地确定 $\nu_n^\alpha(t)$（除了在不连续点外）．在这情形下 $\nu_n^\alpha(t)$ 以概率 1 为阶梯函数，因此表示式 $\chi_0(\nu_n^\alpha)$ 以概率 1 确定．

定理 为使随机连续可测过程 $\xi(t)$ 的积分$\int_a^b |\xi(t)|^\alpha dt$（在某一 $\alpha \in (0,2]$）以概率 1 有限，必要充分条件为对于正数 λ，存在满足条件 $\psi(0+) = 1$ 的极限

$$\psi(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\chi_0(\lambda\nu_n^\alpha),$$

在这情形下

$$\phi(\lambda)=\mathbf{E}\exp\left\{-\frac{\lambda^{\alpha}}{b-a}\int_a^b|\xi(t)|^{\alpha}dt\right\}.$$

证. 用 $\mathfrak{A}$ 表示由变量 $\xi(t),t\in[a,b]$ 以及 $\eta_k,k=0,\cdots,$产生的 σ 代数,依定理条件,ζ_k 与这个 σ 代数独立. 因此

$$E(\chi_0(\lambda\nu_n^{\alpha})|\mathfrak{A})=\mathbf{E}\left(\exp\left\{\frac{i\lambda}{n^{1/\alpha}}\sum_{k=0}^{n-1}\zeta_k\xi\left(a+\frac{k+\eta_k}{n}(b-a)\right)\right\}\mathfrak{A}\right)$$

$$=\exp\left\{-\frac{|\lambda|^{\alpha}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\xi\left(a+\frac{k+\eta_k}{n}(b-a)\right)\right|^{\alpha}\right\}.$$

由引理得,依概率

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\xi\left(a+\frac{k+\eta_k}{n}(b-a)\right)\right|^{\alpha}\to\int_a^b|\xi(t)|^{\alpha}dt.$$

因而依概率.

$$\exp\left\{-\frac{|\lambda|^{\alpha}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\xi\left(a+\frac{k+\eta_k}{n}(b-a)\right)\right|^{\alpha}\right\}$$

$$\to\exp\left\{-\frac{|\lambda|^{\alpha}}{b-a}\int_a^b|\xi(t)|^{\alpha}dt\right\}$$

(我们假定 $e^{-\infty}=0$). 因为所考虑的变量不超过 1 ,所以

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\exp\left\{-\frac{|\lambda|^{\alpha}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\xi\left(a+\frac{k+\eta_k}{n}(b-a)\right)\right|^{\alpha}\right\}$$

$$=\mathbf{E}\exp\left\{-\frac{|\lambda|^{\alpha}}{b-a}\int_a^b|\xi(t)|^{\alpha}dt\right\}.$$

而因为

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\exp\left\{-\frac{|\lambda|^{\alpha}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\xi\left(a+\frac{k+\eta_k}{n}(b-a)\right)\right|^{\alpha}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}(\chi(\lambda\nu_n^{\alpha})|\mathfrak{A})=\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\chi(\lambda\nu_n^{\alpha}),$$

故

$$\phi(\lambda) = \mathbf{E}\exp\left\{-\frac{|\lambda|^\alpha}{b-a}\int_a^b |\xi(t)|^\alpha dt\right\}.$$

显然

$$\phi(0+) = \mathbf{P}\left\{\int_a^b |\xi(t)|^\alpha dt < \infty\right\}.$$

由最后的式子得到定理的证明.

§5. Hilbert 空间中的测度

在前几节里所考虑的 $\mathscr{L}_p$ 空间中最有意义的是 $\mathscr{L}_2$ 空间，它是可分的 Hilbert 空间，因为所有可分 Hilbert 空间彼此都是保距的，所以考虑抽象的可分 Hilbert 空间 $\mathscr{X}$ 更为方便. 对于这样的空间所得到的结论可以容易改用于各种具体的 Hilbert 空间，例如对于在任一具有测度的可测空间上的取值于可分 Banach 空间且按照模的平方可积的可测函数空间.

用 $\mathfrak{B}$ 表示 $\mathscr{X}$ 的 Borel 集的 σ 代数. $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 称为可测 Hilbert 空间. 定义在可测 Hilbert 空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 上的测度 μ 是这一节研究的主要对象. 如前一样，我们感兴趣的是概率测度，然而因为这一节的结果可适用于任一有限测度，所以不必加上 $\mu(\mathscr{X}) = 1$ 这一条件.

$\mathscr{X}$ 中的内积用 (x, y) 表示. 用 $|x|$ 表示 x 的模 $|x| = \sqrt{(x,x)}$. 像在任一线性空间一样，在 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 上的测度可借助于特征泛函来决定. 任一定义在 $\mathscr{X}$ 上的连续线性泛函，有形式 $l(x) = (x, z)$，其中 z 可以是 $\mathscr{X}$ 中的任一元素，对所有 $z \in \mathscr{X}$ 由等式

$$\varphi(z) = \int e^{i(z,x)}\mu(dx) \tag{1}$$

定义的函数 $\varphi(z)$ 称为 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 上的测度 μ 的**特征泛函**.

设 $\mathscr{L}$ 是空间 $\mathscr{X}$ 的某一有限维子空间，$\mathfrak{B}_{\mathscr{L}}$ 是 $\mathscr{L}$ 的 Borel 子集的 σ 代数，形如

$$P_{\mathscr{L}}^{-1}A_{\mathscr{L}} = \{x: P_{\mathscr{L}}x \in A_{\mathscr{L}}\}$$

的集合称为具有 $\mathscr{L}$ 中的基的柱形集. 其中 $A_{\mathscr{L}} \in \mathfrak{B}_{\mathscr{L}}$, $P_{\mathscr{L}}$ 是在 $\mathscr{L}$ 上的投影算子,所有具有 $\mathscr{L}$ 中的基的柱形集的全体 $\mathfrak{B}^{\mathscr{L}}$ 也是一个 σ 代数.对某一 $\mathscr{L}$,属于 $\mathfrak{B}^{\mathscr{L}}$ 的集称为柱形集,对于某一 $\mathscr{L}$,关于 $\mathfrak{B}^{\mathscr{L}}$ 为可测的函数称为柱形函数.

因为给定在 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 上的每一测度 μ 可以联系它的有限维投影(有限维分布)族 $\{\mu_{\mathscr{L}}\}$, $\mu_{\mathscr{L}}$ 用下面等式:

$$\mu_{\mathscr{L}}(A_{\mathscr{L}}) = \mu(P_{\mathscr{L}}^{-1}A_{\mathscr{L}}), \quad (A_{\mathscr{L}} \in \mathfrak{B}_{\mathscr{L}})$$

定义. 测度 $\mu_{\mathscr{L}}$ 足以计算柱形函数的积分: 对每一 $\mathfrak{B}_{\mathscr{L}}$ 可测有界函数 $h(x)$

$$\int h(x)\mu_{\mathscr{L}}(dx) = \int h(P_{\mathscr{L}}x)\mu(dx). \tag{2}$$

我们注意到,对某一 $\mathscr{L}$, 任一柱形函数有形式 $h(P_{\mathscr{L}}x)$, 其中 h 为 $\mathfrak{B}_{\mathscr{L}}$ 可测. 对于不同的 $\mathscr{L}$, 用下面的方法使测度 $\mu_{\mathscr{L}}$ 之间彼此相容;如果 $\mathscr{L} \subset \mathscr{L}'$,则

$$\mu_{\mathscr{L}}(A_{\mathscr{L}}) = \mu_{\mathscr{L}'}(\mathscr{L}' \cap P_{\mathscr{L}}^{-1}A_{\mathscr{L}}). \tag{3}$$

由(2)得到这一关系式,并且得到表示函数 $h(P_{\mathscr{L}}x)$为形式 $h'(P_{\mathscr{L}'}x)$ 的可能性,其中 h' 为 $\mathfrak{B}_{\mathscr{L}'}$ 可测. 以后称条件(3)为相容性条件. 在所有有限维子空间 $\mathscr{L}$ 上定义的满足条件(3)的测度族 $\{\mu_{\mathscr{L}}\}$ 称为有限维分布的相容族.

为了定义测度 μ,只须知道它的一维投影即可. 这由下式

$$\varphi(z) = \int e^{i(z,x)}\mu_{\mathscr{L}_z}(dx)$$

得到. 其中 $\mathscr{L}_z$ 是由向量 z 产生的一维子空间. 反之给定(知道)特征泛函 $\varphi(z)$,根据它们的特征泛函可以容易地确定所有的测度 $\mu_{\mathscr{L}}$: 对 $z \in \mathscr{L}$

$$\varphi_{\mathscr{L}}(z) = \int e^{i(z,x)}\mu_{\mathscr{L}}(dx), \quad z \in \mathscr{L}.$$

对每一有限维子空间 $\mathscr{L}$,满足式

$$\varphi(z) = \int e^{i(z,x)}\mu_{\mathscr{L}}(dx), \quad z \in \mathscr{L},$$

的函数 $\varphi(z)$ 的存在性是有限维分布族 $\{\mu_{\mathscr{L}}\}$ 相容性的充分必要条件. 我们证明这一点. 设族 $\{\mu_{\mathscr{L}}\}$ 满足(3), 令

$$\varphi_{\mathscr{L}}(z)=\int e^{i(z,x)}\mu_{\mathscr{L}}(dx),\quad z\in\mathscr{L}.$$

如果 $\mathscr{L}\subset\mathscr{L}'$ 且 $z\in\mathscr{L}$, 则由条件(3)

$$\varphi_{\mathscr{L}'}(z)=\int e^{i(z,x)}\mu_{\mathscr{L}'}(dx)=\int e^{i(P_{\mathscr{L}}z,x)}\mu_{\mathscr{L}'}(dx)$$

$$=\int e^{i(z,P_{\mathscr{L}}x)}\mu_{\mathscr{L}'}(dx)=\int e^{i(z,x)}\mu_{\mathscr{L}}(z)=\varphi_{\mathscr{L}}(z).$$

令 $\varphi(z)=\varphi_{\mathscr{L}_z}(z)$, 其中 $\mathscr{L}_z$ 是向量 z 产生的一维子空间. 因为对 $z\in\mathscr{L}$ 及 $\mathscr{L}_z\subset\mathscr{L}$, 我们有 $\varphi_{\mathscr{L}}(z)=\varphi_{\mathscr{L}_z}(z)=\varphi(z)$. 反之, 如果 $\varphi(z)$ 是这样一个函数, 使得对 $z\in\mathscr{L}$, $\varphi(z)=\varphi_{\mathscr{L}}(z)$, 则对 $\mathscr{L}\subset\mathscr{L}'$ 以及 $z\in\mathscr{L}$, 我们有关系式

$$\int e^{i(z,x)}\mu_{\mathscr{L}}(dx)=\int e^{i(z,x)}\mu_{\mathscr{L}'}(dx)$$

$$=\int e^{i(z,P_{\mathscr{L}}x)}\mu_{\mathscr{L}'}(dx)=\int e^{i(z,x)}\mu_{\mathscr{L}'}(P_{\mathscr{L}}^{-1}dx),$$

从而我们得到测度 $\mu_{\mathscr{L}}(dx)$ 与 $\mu_{\mathscr{L}'}(P_{\mathscr{L}}^{-1}dx)$ 相同 (由于它们的特征泛函相同), 所以条件(3)满足.

矩的形式 在 $(\mathscr{X},\mathfrak{B})$ 上测度 μ 的一个重要特性是这个测度的矩的形式, 在下式右边的积分对所有在 $\mathscr{X}$ 中选取的 $z_1,\cdots,z_k$ 是确定(且有限)的条件下, 测度 μ 的 k 次矩的形式由关系式

$$m_k(z_1,\cdots,z_k)=\int(x,z_1)\cdots(x,z_k)\mu(dx)$$

定义. 显然, k 次矩的形式存在的必要充分条件为对所有 z 满足

$$\int|(x,z)|^k\mu(dx)<\infty. \tag{4}$$

函数 $m_k(z_1,\cdots,z_k)$ 是它的变元的对称函数, 此外, 对于每一个变元, 它是连续的并且是齐次的. 我们证明, k 次矩形式(在它确定的条件下)是连续对称 k 线性形. 为此, 只须证

$$\sup_{|z|\leq 1}\int|(z,x)|^k\mu(dx)<\infty. \tag{5}$$

我们引入函数

$$m_n(z)=\int\frac{n|(x,z)|^k}{n+|x|^k}\mu(dx),\quad m(z)=\int|(x,z)|^k\mu(dx).$$

函数 $m_n(z)$ 关于 z 弱连续且对所有 z，当 $n\to\infty$ 时 $m_n(z)\uparrow m(z)$. 令

$$K_{n,l}=\{z:m_n(z)\geqslant l\}\cap\{z:|z|\leqslant 1\}.$$

集合 $K_{n,l}$ 弱闭且弱紧(因为它有界). 为证(5)；只须证明对某个 l $K^l=\bigcap_n K_{n,l}$ 是空集(则 $\sup_{|z|\leqslant 1} m(z)\leqslant l$). 集 K^l 同样是弱闭且弱紧. 如果所有 K^l 不空，则 $\bigcap_l K^l$ 同样不空. 但对 $z\in\bigcap_l K^l, m_n(z)\to\infty$ 是不可能的，这就证明了我们的断言*).

前两个矩的形式常常更为有用. 如果 $m_1(z)$ 是确定的，则它是 z 的连续线性泛函，因此，在 $\mathscr{X}$ 中存在这样的向量 a，使得

$$\int(x,z)\mu(dx)=m_1(z)=(a,z).$$

这个向量 a 称为测度 μ 的**平均值**. 如果 $m_2(z_1,z_2)$ 是确定的(此时 $m_1(z)$ 也是确定的)，则表示式

$$m_2(z_1,z_2)-m_1(z_1)m_1(z_2)$$

是连续对称双线性泛函. 因此，存在这样一个对称的有界线性算子 B，使得

---

* 本段中关于 $m(z)$ 有界性的证明在本书的英译本(1979年)第三卷的附录中作了如下改进：

因为 $m_n(z)\uparrow m(z)$ 并且 $m_n(z)$ 连续，因此 $m(z)$ 下连续. 此外，根据 Minkowski 不等式，

$$\begin{aligned}[m(z_1+z_2)]^{1/k}&=\left[\int|(x,z_1+z_2)|^k\mu(dx)\right]^{1/k}\\&\leqslant\left[\int|(x,z_1)|^k\mu(dx)\right]^{1/k}+\left[\int|(x,z_2)|^k\mu(dx)\right]^{1/k}\\&\leqslant[m(z_1)]^{1/k}+[m(z_2)]^{1/k}.\end{aligned}$$

所以 $[m(z)]^{1/k}$ 是半可加的下连续函数，因此根据 Гельфанд 定理(例如参见 Канторович, Л. В. и Акилов, Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959，第 233 页)存在常数 M 使得 $[m(z)]^{1/k}\leqslant M|z|$.——译者注

$$m_2(z_1, z_2) - m_1(z_1)m_1(z_2) = (Bz_1, z_2).$$

这个算子称为测度 μ 的**相关算子**，由式

$$0 \leqslant \int (x - a, z)^2 \mu(dx) = \int (x, z)^2 \mu(dx) - (a, z)^2$$
$$= m_2(z, z) - (m_1(z))^2 = (Bz, z)$$

得到，B 是非负算子.

我们指出相关算子的一个重要性质. 我们记得，对称非负算子 B 称为核算子，如果它是完全连续且它的特征值的级数 $\sum \lambda_k$ 收敛（在和式中的每一值出现的次数与它的重数相同）. 如果在空间 $\mathscr{H}$ 的某一规范正交基底 $\{e_k\}$ 中级数 $\sum(Be_k, e_k)$ 是收敛的，则对称非负算子 B 是核算子，这时，这个级数对于基底的任一选取是收敛的并且它的和不依赖于基底的选取. 这个和称为**算子的迹**并且用 $\mathrm{Sp}B$ 表示.

引理 测度 μ 的相关算子 B 是核算子的充分必要条件为满足下述条件：

$$\int |x|^2 \mu(dx) < \infty,$$

此时

$$\mathrm{Sp}B = \int |x|^2 \mu(dx) - |a|^2,$$

其中 a 是 μ 的平均值.

这引理的证明是从对任意选取 $e_1, \cdots, e_n$ 等式

$$\sum_{k=1}^{n} (Be_k, e_k) = \int \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)^2 \mu(dx) - \sum_{k=1}^{n} (a, e_k)^2,$$

成立这一事实得到. 从规范正交基底中取一向量并且当 $n \to \infty$ 求极限$\left(\text{由于序列} \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)^2 \text{关于} n \text{的单调性得到积分号下求极限的可能性}\right)$，我们得到引理的断言.

Минлос-Сазонов 定理 正如在前面叙述的，在可测 Hilbert 空间 $(\mathscr{H}, \mathfrak{B})$ 上的测度 μ 可由它的有限维投影或特征泛函确定.

此时表明这两个方法没有重大的区别.

设有相容的有限维分布族 $\{\mu_{\mathscr{L}}\}$. 在什么样的条件下存在一个 $(\mathscr{H},\mathfrak{B})$ 上的测度 μ, 使得 $\{\mu_{\mathscr{L}}\}$ 是它的投影? 因为 $\mu_{\mathscr{L}}$ 使我们能够构造一个泛函 $\varphi(z)$, 对 $z\in\mathscr{L}$, 它与测度 $\mu_{\mathscr{L}}$ 的特征泛函相同, 因而前面的问题化为如下一个问题: 在什么条件下 $\varphi(z)$ 是 $(\mathscr{H},\mathfrak{B})$ 上的某一测度 μ 的特征泛函. 关于后一问题的答案由 Минлос-Сазонов 定理给出.

定理 1 为使对 $z\in\mathscr{H}$ 定义的复值连续正定函数 $\varphi(z)$ 是 $(\mathscr{H},\mathfrak{B})$ 上的某一测度 μ 的特征泛函, 必须且只须对任一 $\varepsilon>0$, 找到这样一个核算子 A_ε, 使得当 $(A_\varepsilon z, z)\leqslant 1$ 时 $\mathrm{Re}(\varphi(0)-\varphi(z))<\varepsilon$.

证. 必要性. 设 $\varphi(z)$ 是测度 μ 的特征算子. 则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\varphi(0)-\varphi(z)) &= \int(1-\cos(z,x))\mu(dx)\\
&\leqslant \int_{|x|\leqslant c} 2\sin^2\frac{(x,z)}{2}\,\mu(dx)\\
&\quad + 2\int_{|x|>c}\mu(dx)\leqslant \frac{1}{2}\int_{|x|\leqslant c}(x,z)^2\mu(dx)\\
&\quad + 2\mu(\{x: |x|>c\}).
\end{aligned}
$$

对每一 c, $\int_{|x|\leqslant c}(x,z)^2\mu(dx)$ 是一个关于 z 的二次泛函, 且可以表为 $(B_c z, z)$, 其中的 B_c 因为

$$
\int_{|x|\leqslant c}|x|^2\mu(dx)\leqslant \mu(\mathscr{H})c^2,
$$

且根据已证明的引理知, 它是核算子. 选择 c 使得满足不等式 $\mu(\{x: |x|>c\})<\varepsilon/4$. 取 $A_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}B_c$, 则当 $(A_\varepsilon z, z)\leqslant 1$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\varphi(0)-\varphi(z)) &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2}(B_c z, z)\\
&= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}(A_\varepsilon z, z)\leqslant\varepsilon,
\end{aligned}
$$

定理条件的必要性证毕.

充分性. 设 $\{\mu_{\mathscr{L}}\}$ 是根据 $\varphi(z)$ 构造的相容的有限维分布族. 由 §3 的定理及这一定理的注得到，只须证明对任意 $\varepsilon>0$ 存在这样一个 N，使得对一切有限维子空间 $\mathscr{L}$ 满足不等式

$$\mu_{\mathscr{L}}(\{x:|x|>N\})<\varepsilon. \tag{6}$$

事实上，此时可取函数 $|P_{\mathscr{L}_n}x|$ 作为在 §3 中的注所出现的函数 $h_n(x)$，其中 $\mathscr{L}_n$ 是递增的有限维子空间序列，$\cup\mathscr{L}_n$ 在 $\mathscr{X}$ 中稠密，且 $P_{\mathscr{L}}$ 是 $\mathscr{L}_n$ 上的投影算子.

为证明式(6)，我们利用 Чебышев 不等式，据此有

$$\mu_{\mathscr{L}}(\{x:|x|>N\})\leqslant(1-e^{-\lambda N^2/2})^{-1}\int_{\mathscr{L}}(1-e^{-(\lambda/2)|x|^2})\mu_{\mathscr{L}}(dx)$$

$$=(1-e^{-\lambda N^2/2})^{-1}\int(2\pi\lambda)^{-r_{\mathscr{L}}/2}\int_{\mathscr{L}}(1-e^{i(x,z)})$$

$$\times e^{-(1/2\lambda)|z|^2}m_{\mathscr{L}}(dz)\mu(dx).$$

其中 $m_{\mathscr{L}}(dz)$ 是 $\mathscr{L}$ 上的 Lebesgue 测度，$r_{\mathscr{L}}$ 是 $\mathscr{L}$ 的维数，交换积分次序得

$$(1-e^{-\lambda N^2/2})\mu_{\mathscr{L}}(\{x:|x|>N\})$$

$$\leqslant(2\pi\lambda)^{-r_{\mathscr{L}}/2}\int_{\mathscr{L}}(\varphi(0)-\varphi(z))e^{-(1/2\lambda)|z|^2}m_{\mathscr{L}}(dz).$$

其次选取一个核算子 A 使得 $(Az,z)\leqslant1$ 时 $\mathrm{Re}(\varphi(0)-\varphi(z))\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. 故

$$(1-e^{-\lambda N^2/2})\mu_{\mathscr{L}}(\{x:|x|>N\})\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

$$+(2\pi\lambda)^{-r_{\mathscr{L}}/2}\int_{(Az,z)>1}2e^{-1/2\lambda|z|^2}m_{\mathscr{L}}(dz)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

$$+2(2\pi\lambda)^{-r_{\mathscr{L}}/2}\int(Az,z)e^{-(1/2\lambda)|z|^2}m_{\mathscr{L}}(dz)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+2\lambda s_pA,$$

因为

$$(2\pi\lambda)^{-r_{\mathscr{L}}/2}\int(Az,z)e^{-(1/2\lambda)|z|^2}m_{\mathscr{L}}(dz)$$

$$= \sum_{i,j}^{r_{\mathscr{X}}} (2\pi\lambda)^{-r_{\mathscr{X}}/2} \int (Ae_i, e_j)(z, e_i)(z, e_j) \prod_1^{r_{\mathscr{X}}} e^{-(z,e_i)^2/2\lambda} m_{\mathscr{X}}(dz)$$

$$= \sum_{i=1}^{r_{\mathscr{X}}} (Ae_i, e_i) \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \int t^2 e^{-t^2/2\lambda}\, dt = \lambda \sum_{i=1}^{r_{\mathscr{X}}} (Ae_i, e_i) \leqslant \lambda \mathrm{Sp} A,$$

所以

$$\mu_{\mathscr{X}}\{x: |x| > N\} \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2} + 2\lambda \mathrm{Sp} A\right)(1 - e^{-\lambda N^2/2})^{-1}. \qquad (7)$$

显然，可以选取 λ 及 N，使得(7)的右边小于 ε. 定理证毕.

Hilbert 空间中的广义测度 在 § 3 中叙述过，对给定在 $\mathscr{X}^*$（线性空间 $\mathscr{X}$ 的共轭空间）上的每一个正定函数 $\varphi(x^*)$ 可以构造一个空间 $\mathscr{X}$ 的扩张 $\tilde{\mathscr{X}}$ 及 $\tilde{\mathscr{X}}$ 上的测度 μ，使得 $\varphi(x^*)$ 成为这一测度的特征泛函. 令 $\varphi(z)$ 是某一给定在 Hilbert 空间 $\mathscr{X}$ 上的正定函数. 应用前述结果，可以构造空间 $\mathscr{X}$ 的扩张以及这个扩张上的测度，使得 $\varphi(z)$ 是这个测度的特征泛函. 然而，在 § 3 叙述过程中得到的是一个太广泛的空间 $\tilde{\mathscr{X}}$. 当 $\mathscr{X}$ 是 Hilbert 空间时，$\tilde{\mathscr{X}}$ 也可以构造为用某一依赖于 $\varphi(z)$ 连续性条件的内积使 $\mathscr{X}$ 完备化而获得的 Hilbert 空间. 我们现在将考虑这一由 Ю. Л. Далецкий 引入的构造方法.

设 B 是某一有界对称正线性算子，在 $\mathscr{X}$ 中我们引入新的内积:

$$(x,y)_- = (Bx,y), \quad |x|_-^2 = (Bx,x), \qquad (8)$$

一般说，空间 $\mathscr{X}$ 依这一内积产生的距离是不完备的. 用 $\mathscr{X}_-^B$ 表示依模 $|\cdot|_-$ 的 $\mathscr{X}$ 的完备化(它可以看作 $\mathscr{X}$ 的扩张). $\mathscr{X}$ 为 $\mathscr{X}_-^B$ 中的处处稠密集；如果 B^{-1} 是一有界算子，则 $\mathscr{X}_-^B$ 与 $\mathscr{X}$ 相一致. 用 $\mathscr{X}_+^B$ 表示由引入的内积为

$$(x,y)_+ = (B^{-1/2}x, B^{-1/2}y) = (B^{-1}x,y), \qquad (9)$$

的算子 $B^{-1/2}$（它在 $\mathscr{X}$ 中稠密）的定义域而得到的 Hilbert 空间. 式(9)的第二个等式须要作些解释. 我们注意到，对任一 $x \in \mathscr{X}_+^B$，在 $\mathscr{X}$ 上对 z 定义的内积 (x, z) 可以依 $\mathscr{X}_-^B$ 的距离的连续性扩

张到整个 $\mathscr{H}_-^B$ 上. 事实上,令 $x = B^{1/2}x_0$, $x_0 \in \mathscr{H}$. 则

$$\begin{aligned}|(x,z_n - z_m)| &= |(B^{1/2}x_0; z_n - z_m)| \\ &= |(x_0, B^{1/2}(z_n - z_m))| \\ &\leqslant |x_0|(B^{1/2}(z_n - z_m),\ B^{1/2}(z_n - z_m))^{1/2} \\ &= |x_0|\,|z_n - z_m|_-.\end{aligned}$$

因此在 $\mathscr{H}$ 上的线性泛函 (x, z) 依 $\mathscr{H}_-^B$ 中的距离是连续的，这就表示它可以依连续性 (对 z) 扩张到 $\mathscr{H}_-^B$ 上. 今后对 (x, z) $(x \in \mathscr{H}_+^B, z \in \mathscr{H}_-^B)$,我们都理解为这一扩张. 因为

$$\begin{aligned}|Bx|_- &= \sqrt{(Bx, Bx)_-} = \sqrt{(B^2x,\ Bx)} \\ &= \sqrt{(B^2B^{1/2}x,\ B^{1/2}x)} \leqslant \sqrt{\|B^2\|(B^{1/2}x, B^{1/2}x)} \\ &\leqslant \|B\|\,|x|_-,\end{aligned}$$

算子 B 同样可以依连续性扩张到 $\mathscr{H}_-^B$ 上. 下面我们将认为 B 是扩张到 $\mathscr{H}_-^B$ 上的,这时满足如下关系:

$$B^{1/2}\mathscr{H}_-^B = \mathscr{H},\ B^{1/2}\mathscr{H} = \mathscr{H}_+^B,\ B\mathscr{H}_-^B = \mathscr{H}_+^B.$$

第三个等式是前二个等式的推论，第二个等式可从 $\mathscr{H}_+^B$ 的定义得到. 现在我们证明第一个等式. 设 z 是 $\mathscr{H}_-^B$ 中的任一元素，$z_n \in \mathscr{H}$ 且 $|z_n - z|_- \to 0$，这意味着

$(B(z_n - z_m),\ z_n - z_m) = |B^{1/2}z_n - B^{1/2}z_m|^2 \to 0,\ (n, m \to \infty)$.

但 $B^{1/2}z_n \in \mathscr{H}$，因此亦有 $B^{1/2}z \in \mathscr{H}$. 我们回到式(9). 根据前面所述,对 $x \in \mathscr{H}_+^B$, $B^{-1}x$ 是被定义了的，且属于 $\mathscr{H}_-^B$; 因为 $y \in \mathscr{H}_+^B$,故 $(B^{-1}x, y)$ 也是确定的.

现设在 $\mathscr{H}_-^B$ 上定义了某一测度 μ. 根据这个测度，可以构造一个对 $z \in \mathscr{H}_-^B$ 定义的特征泛函 $\varphi_-(z) = \int e^{i(x,z)_-}\mu(dx)$. 因为 $(x,z)_- = (Bz, x)$ 且 $Bz \in \mathscr{H}_+^B$,故测度 μ 在 $\mathscr{H}_-^B$ 上也可以借助于特征泛函 $\varphi(z) = \int e^{i(z,x)}\mu(dx)$ 确定,其中 $z \in \mathscr{H}_+^B$. 我们注意到

$$\varphi_-(z) = \varphi(Bz),\quad \varphi(z) = \varphi_-(B^{-1}z).$$

从定理 1 得到，$\varphi(z)$ 是 $\mathscr{H}^B$ 上的测度的特征泛函的充分必要条

件为，对任一 $\varepsilon > 0$，在 $\mathscr{H}_{-}^{B}$ 上存在这样一个核算子 S，使得当 $(Sz,z)_{-} \leqslant 1$ 时，有 $\mathrm{Re}(\varphi_{-}(0) - \varphi_{-}(z)) \leqslant \varepsilon$. 利用这一结果，构造一个 $\mathscr{H}$ 的扩张，使得给定的正定函数 $\varphi(z)$ 是这一扩张下的特征泛函.

定理 2 设 $\varphi(z)$ 是一给定在 $\mathscr{H}$ 上的连续正定泛函，则对任一核算子 B，$\varphi(z)$ 是 $\mathscr{H}_{-}^{B}$ 上某一测度的特征函数.

证. 由 $\varphi(z)$ 的连续性得到，对任意 $\varepsilon > 0$，可以找到这样一个 $\delta > 0$ 使得如果 $(z,z) \leqslant \delta$ 时，$\mathrm{Re}(\varphi(0) - \varphi(z)) \leqslant \varepsilon$. 这时，对 $z \in \mathscr{H}_{-}^{B}$，如果 $(Bz,Bz) \leqslant \delta$ 时，$\mathrm{Re}(\varphi(0) - \varphi(Bz)) \leqslant \varepsilon$. 即如果$\left(\frac{1}{\delta} Bz, z\right) \leqslant 1$ 时，有 $\mathrm{Re}(\varphi_{-}(0) - \varphi_{-}(z)) \leqslant \varepsilon$.

我们证明，定义在 $\mathscr{H}_{-}^{B}$ 上的算子 $\frac{1}{\delta} B$ 是一核算子. 为此只须证明算子 B 是这样一个算子，但:

1) $(Bx,y)_{-} = (B^2x,y) = (Bx,By) = (x,By)_{-}$;

2) $(Bx,x)_{-} = (Bx,Bx) \geqslant 0$;

最后我们证明

$$3)\ \mathrm{Sp}_{-}B = \sum_{k=1}^{\infty} (Be_k, e_k)_{-} < \infty,$$

其中 $\{e_k\}$ 是 $\mathscr{H}_{-}^{B}$ 中某一规范正交基底，事实上，设 $e_k = f_k/\sqrt{\lambda_k}$，其中 $\{f_k\}$ 是由 $\mathscr{H}$ 中算子 B 的特征向量组成的基底，$\lambda_k = (Bf_k, f_k)$，$(f_k,f_k) = 1$. 则

$$\mathrm{Sp}_{-}(B) = \sum_{k=1}^{\infty}(B^2e_k, e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(B^2f_k,f_k)}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \mathrm{Sp}B.$$

定理证毕.

注 1. 设正定函数 $\varphi(z)$ 满足如下条件: 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在这样的 $\delta > 0$，使得当 $(Vz, z) < \delta$ 时 $\mathrm{Re}(\varphi(0) - \varphi(z)) < \varepsilon$. 其中 V 是有界对称的正算子，我们考虑空间 $\mathscr{H}_{-}^{S}$，其中 S 是某一与 V 可交换的对称正算子. 我们现在寻找在 $\mathscr{H}_{-}^{S}$ 中存在一个具有特征泛函 $\varphi(z)$ 的测度而须要加在 S 上的条件，因为当 $(VSz,$

$Sz) = (\tilde{V}Sz, z)_- < \delta$ 且 $\mathrm{Sp}_-\tilde{V}S = \mathrm{Sp}VS$ 时,

$$\mathrm{Re}(\varphi_-(0) - \varphi_-(z)) = \mathrm{Re}(\varphi(0) - \varphi(Sz)),$$

故如果 $\mathrm{Sp}VS < \infty$,则这样的测度存在. 这一结果对于 $\varphi(z)$ 定义在 $\mathscr{H}$ 中稠密的线性流形上且 V 是无界算子时也是正确的.

对某 S, 定义在 $\mathscr{H}_-^S$ 上的、其特征泛函依 $\mathscr{H}$ 中的内积是定义在 $\mathscr{H}$ 处处稠密集上的测度称为 $\mathscr{H}$ 上的广义测度. 定理 2 表明,根据定义在$\mathscr{H}$中的特征泛函构造的测度是不唯一的. 设 $\mathscr{H}'$ 与 $\mathscr{H}''$ 是空间$\mathscr{H}$的二个扩张, 在它们中定义了对应于用同一特征泛函 $\varphi(z)$ 的测度 μ' 与 μ'',则可以找到这样一个扩张 $\mathscr{H}'''$, 它包含在扩张 $\mathscr{H}'$ 与 $\mathscr{H}''$ 中的每一个内,并且 $\mu'(\mu' - \mathscr{H}''')=0$; $\mu''(\mathscr{H}'' - \mathscr{H}''') = 0$ 且在 $\mathscr{H}'''$ 上 μ' 与 μ'' 相同, 这个扩张 $\mathscr{H}'''$ 容易构造如下: 如果

$$\mathscr{H}' = \mathscr{H}_-^{S_1},\ \mathscr{H}'' = \mathscr{H}_-^{S_2},\ 则\ \mathscr{H}''' = \mathscr{H}^{S_1+S_2}.$$

因此,在一定的意义下构造的广义测度是唯一的.

用空间 $\mathscr{H}_-^B$ 能以更方便的形式表述定理 1 的条件.

注 2. 为满足定理 1 的条件, 必须且只须存在这样一个核算子 B,使得 $\varphi(z)$ 依 $\mathscr{H}_-^B$ 中的距离是连续的,因此可以扩张到$\mathscr{H}_-^B$上. 事实上,如果 $\varphi(z)$ 依 $\mathscr{H}_-^B$ 中距离是连续的,则对任一 $\varepsilon > 0$ 可找到这样的 $\delta > 0$, 使得当 $|z|_- \leqslant \delta$ 时, 即当 $\left(\frac{1}{\delta} Bz, z\right) \leqslant 1$ 时,$\mathrm{Re}(\varphi(0)-\varphi(z)) \leqslant \varepsilon$,其中 $\frac{1}{\delta}B$ 是核算子.

反之我们证明, 由定理 1 的条件得到算子 B 的存在. 我们取序列 $\varepsilon_n \downarrow 0$ 且设算子 A_n 对 $\varepsilon = \varepsilon_n$ 满足定理 1 的条件. 设 c_n 是这样一串序列 ($c_n \downarrow 0$),使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{sp} A_n < \infty.$$

则算子 $B = \sum_{n=1}^{\infty} c_n A_n$ 是所要求的核算子. 事实上, 对任一 $\varepsilon > 0$ 可以找到这样的 n,使得 $\varepsilon_n < \varepsilon$. 则当 $(Bz, z) < c_n$ 时有 $(A_n z,$

$z) < 1$，且因此

$$\mathrm{Re}(\varphi(0)-\varphi(z)) \leqslant \varepsilon_n < \varepsilon.$$

其次

$$|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)| \leqslant \int |e^{i(z_1,x)} - e^{i(z_2,x)}|\mu(dx)$$
$$\leqslant \left(\int |e^{i(z_1-z_2,x)} - 1|^2 \mu(dx)\right)^{1/2}$$
$$= \sqrt{2\mathrm{Re}(\varphi(0)-\varphi(z_1-z_2))}$$

从这个不等式得到，当 $(B(z_1-z_2),\ z_1-z_2) \to 0$ 时

$$|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)| \to 0.$$

特别由后一注释得出，连续且正定的函数 $e^{-|x|^2}$ 不是 $\mathscr{H}$ 上的测度的特征泛函，因为它不可能依连续性扩张到具有核算子 B 的 $\mathscr{H}_-^B$ 上。

§6. Hilbert 空间中的 Gauss 测度

令 μ 是可测 Hilbert 空间 $(\mathscr{H}, \mathfrak{B})$ 上的概率测度，则 $(\mathscr{H}, \mathfrak{B}, \mu)$ 是概率空间且任一 $\mathfrak{B}$ 可测函数 $g(x)$ 是一个在这空间上的随机变量．如果任一连续线性泛函 $l_z(x) = (z, x)$ 是一正态分布随机变量，则测度 μ 称为 Gauss 测度．令

$$\alpha_z = \mathbf{E}(z,x) = \int (z,\ x)\mu(dx),$$

$$\beta_z = \mathbf{E}(z,x)^2 - \alpha_z^2 = \int (z,\ x)^2 \mu(dx) - \alpha_z^2.$$

因为 (z, x) 的分布是正态的，故这些变量对每一 z 是确定的，因此如在 §5 中对多线性的矩形式的研究中建立的，存在一个向量 a 与有界对称非负线性算子 B，使得

$$\alpha_z = (a,\ z), \quad \beta_z = (Bz,\ z).$$

因为 $(z,\ x)$ 具有正态分布，故

$$\mathbf{E}e^{i(z,x)} = \int e^{i(z,x)}\mu(dx) = \exp\left\{i(a,\ z) - \frac{1}{2}(Bz, z)\right\}.$$

因此，对任一 Gauss 测度，存在均值 a 与相关算子 B，并且这个测度的特征泛函具有如下形式:

$$\varphi(z) = \exp\left\{i(a, z) - \frac{1}{2}(Bz, z)\right\}. \tag{1}$$

反之，如果测度 μ 的特征泛函具有形式(1)，则

$$\int e^{it(z,x)}\mu(dx) = \varphi(tz) = \exp\left\{it(a, z) - \frac{t^2}{2}(Bz, z)\right\},$$

并且因此变量 (z, x) 是一具有均值为 (a, z) 与方差为 (Bz, z) 的正态分布. 因此，测度 μ 是 Gauss 测度的充分必要条件为对于这个测度的特征泛函可以表示为(1)的形式.

由式(1)得到，对每一有限的向量集 $z_1, \cdots, z_n$，变量 $(z_1, x), \cdots, (z_n, x)$ 的联合分布也是 Gauss 的. 事实上，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\exp\{i\sum t_k(z_k, x)\} &= \varphi(\sum t_k z_k)\\ &= \exp\left\{i\sum t_k(a, z_k) - \frac{1}{2}\sum t_k t_j(Bz_k, z_j)\right\}.\end{aligned}$$

在式(1)中的 a 与 B 任意到什么程度呢? 如果 B 是正定算子，则由(1)定义的函数 $\varphi(z)$ 是正定的. 关于 a 与 B 的另一限制是由 Минлос-Сазонов 定理加上的. 设对给定的 $\varepsilon > 0$，A 是这样一个核算子，使得

$$\operatorname{Re}(1 - \varphi(z)) < \varepsilon, \quad 当\ (Az, z) < 1\ 时,$$

则当 $(Az, z) < 1$ 时成立不等式:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(Bz, z) &< \exp\left\{\frac{1}{2}(Bz, z)\right\} - 1\\ &< \left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}(Bz, z)\right\}\right]\\ &\quad\times\left[1 - \left(1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}(Bz, z)\right\}\right)\right]^{-1}\\ &< \left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}(Bz, z)\right\}\cos(a, z)\right]\\ &\quad\times\left[1 - \left(1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}(Bz, z)\right\}\cos(a, z)\right)\right]^{-1}\end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

(如果 $\varepsilon < 1$,则 $\cos(a,z) > 0$). 因此

$$(Bz,z) < \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}(Az,z)$$

且

$$\mathrm{Sp}B < \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\mathrm{Sp}A.$$

因此，使得式(1)能确定 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 上的测度的特征泛函，条件 $\mathrm{Sp}B < \infty$ 是必要的. 现在证明,这一条件也是充分的. 因为

$$|1-\varphi(z)| < \frac{1}{2}(Bz,z) + |(a,z)|,$$

所以，如果 $\frac{1}{\varepsilon}(Bz, z) + \frac{4}{\varepsilon^2}(a, z)^2 < 1$, 则 $|1-\varphi(z)| < \varepsilon$.

设

$$A_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}B + \frac{4}{\varepsilon^2}P_a, \text{ 其中 } P_a z = (a, z)a,$$

我们看到,因为

$$\mathrm{Sp}A_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Sp}B + \frac{4}{\varepsilon^2}|a|^2 < \infty,$$

因而满足 Минлос-Сазонов 定理的条件. 因此，得到如下结果.

定理 1 测度 μ 是 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 上的 Gauss 测度的充分必要条件为它的特征泛函 $\varphi(z)$ 可表为式(1),其中 a 是 $\mathscr{X}$ 中的任一向量,而 B 是核算子. 在这情形下 a 是测度 μ 的平均值,而 B 是它的相关算子.

从 § 5 引理得到,对任一 Gauss 测度 μ

$$\int |x|^2\mu(dx) < \infty.$$

令 $e_1, e_2, \cdots$ 是算子 B 的特征向量的正交规范基底. 由于 B 是完全连续的,因而它存在. 如果 λ_k 是对应于 e_k 的特征值,则

$$(Be_i, e_j) = \lambda_i\delta_{ij}.$$

因此随机变量 (x, e_k), $k=1,\cdots,n$, 具有联合特征函数。

$$\mathbf{E}e^{i\sum t_k(x,e_k)}=\exp\left\{i\sum t_k(a,e_k)-\frac{1}{2}\sum\lambda_k t_k^2\right\}.$$

最后的式子说明(x,e_k), $k=1,\cdots,n$,是相互独立的. 如果 $\lambda_k\neq 0$,则 $\dfrac{(x-a,\ e_k)}{\sqrt{\lambda_k}}=\xi_k$ 是具有平均值为0，方差为1的正态分布. 把 x 看作概率空间$(\mathscr{X},\mathfrak{B},\mu)$上的随机元,它可以写为

$$x=a+\sum\sqrt{\lambda_k}\,\xi_k e_k,\tag{2}$$

其中 ξ_k 为定义在$(\mathscr{X},\mathfrak{B},\mu)$上对所有 k,使得 $\lambda_k>0$, $\mathbf{E}\xi_k=0$, $D\xi_k=1$ 的独立同分布的 Gauss 随机变量. 表示式(2)可以应用于各种不同的计算. 我们考虑式(2)的应用的一个例子. 计算$|x|^2$的 Laplace 变换. 因为

$$|x|^2=\sum\lambda_k\xi_k^2+2\sum\sqrt{\lambda_k}\alpha_k\xi_k+|a|^2,\text{其中 }\alpha_k=(a,e_k),$$

故

$$\begin{aligned}\int e^{s|x|^2}\mu(dx)&=e^{s|\alpha|^2}\prod_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}\exp\{s\lambda_k\xi_k^2+2s\sqrt{\lambda_k}\,\alpha_k\xi_k\}\\&=e^{s|a|^2}\prod_{k=1}^{\infty}\int\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}t^2+s\lambda_k t^2+2s\sqrt{\lambda_k}\alpha_k t}dt\\&=e^{s|a|^2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\exp\left\{\dfrac{2\lambda_k\alpha_k^2 s^2}{1-2\lambda_k s}\right\}}{\sqrt{1-2s\lambda_k}}.\end{aligned}$$

由于级数 $\sum\lambda_k=\mathrm{Sp}B$ 收敛,故当 $\mathrm{Re}s<\dfrac{1}{2\|B\|}$ 时,最后一个无穷乘积收敛. 得到的无穷乘积可以借助于算子

$$R_s(B)=(1-2sB)^{-1}\tag{3}$$

简单地表示,而借助于算子 B 的预解式,它是容易表示的。

事实上,

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1-2s\lambda_k}}=\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1-2s\lambda_k)\right\}$$

$$= \exp\left\{\int_0^s \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k dt}{1 - 2t\lambda_k}\right\}$$

$$= \exp\left\{\int_0^s \mathrm{Sp} B R_t(B) dt\right\},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda_k \alpha_k^2}{1 - 2s\lambda_k} = 2(BR_s(B)a, a).$$

因此，对所有 $s < \frac{1}{2\|B\|}$ 下面的公式是正确的：

$$\int e^{s|x|^2}\mu(dx) = \exp\left\{2s^2(BR_s(B)a, a) + \int_0^s \mathrm{Sp} BR_t(B)dt + s|a|^2\right\}. \tag{4}$$

只要 V 是非负对称算子，这一公式也可以用来确定概率空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ 上 (Vx, x) 的 Laplace 变换。设 $V = U^2$，其中 U 也是非负算子。这时，$(Vx, x) = |Ux|^2$，其中 Ux 是在概率空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ 上取值于 $\mathscr{X}$ 的随机元。Ux 的特征泛函具有如下形式：

$$\int e^{i(Ux, z)}\mu(dx) = \int e^{i(x, Uz)}\mu(dx) = \exp\left\{i(Ua, z) - \frac{1}{2}(UBUz, z)\right\}.$$

因此，Ux 为具有均值 Ua 与相关算子 UBU 的 Gauss 分布。根据式(4)，因此有

$$\int e^{s(Vx, x)}\mu(dx) = \exp\left\{2s^2(UBUR_s(UBU)Ua, Ua) + \int_0^s \mathrm{Sp} UBUR_t(UBU)dt + s|Ua|^2\right\}. \tag{5}$$

线性与二次泛函　令 μ 是 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 上的 Gauss 测度。每一个可表为连续线性泛函序列依测度 μ 的极限的可测函数 $g(x)$：

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} (x, z_n)$$

称为关于测度 μ 的可测线性泛函。因为 (x, z_n)，$n = 1$，

2,···,具有联合 Gauss 分布,则由 (x,z_n) 依测度 μ 收敛于 $g(x)$ 得到,$g(x)$ 同样也是具有正态分布,并且 (x,z_n) 均方收敛于 $g(x)$ 因此

$$\lim_{n,m\to\infty}\int[(x,z_n)-(x,z_m)]^2\mu(dx)=\lim_{n,m\to 0}[(a,z_n-z_m)^2+(B(z_n-z_m),z_n-z_m)].$$

令 $A=B+P_a$,其中 $P_az=(a,z)a$. 则 A 是一核算子.我们引进内积 $(x,y)_-=(Ax,y)$.

设 $\mathscr{X}_-^A$ 是在这一内积下 $\mathscr{X}$ 的完备化空间. 如果

$$\int[(z_n,x)-(z_m,x)]^2\mu(dx)\to 0,\text{ 则}(z_n-z_m,z_n-z_m)_-\to 0,$$

即序列 z_n 是 $\mathscr{X}_-^A$ 中的基本列. 自然规定 z_n 收敛于 $\mathscr{X}_-^A$ 中的元素与序列 (x,z_n) 依测度 μ 收敛于函数 $g(x)$ 相对应. 如果 $\lim z_n=z^*$,则我们记 $g(x)=(x,z^*)$. 容易看出,在可测线性泛函与 $\mathscr{X}_-^A$ 之间的对应是互为单值的.下面我们把线性泛函空间与$\mathscr{X}_-^A$ 看成是一样的. 可测线性泛函空间是具有内积 $(x,y)_-$的 Hilbert 空间. 对每一组属于 $\mathscr{X}_-^A$ 的 $z_1^*,\cdots,z_n^*$, 泛函 $(x,z_1^*),\cdots,(x,z_n^*)$ 具有联合正态分布. 并且

$$\mathbf{E}\exp\{i\sum t_k(z_k^*,x)\}=\exp\left\{i\sum_k t_k(z_k^*,a)-\frac{1}{2}\sum_{k,j}t_kt_j(Bz_k^*,z_j^*)\right\},$$

其中 (z^*,a) 定义为极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n,a)$, $z_n\in\mathscr{X}$,在 $\mathscr{X}_-^A$ 中 $z_n\to z^*$, 而 (Bz_k^*,z_j^*) 定义作为极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(Bz_k^n,z_j^n)$, 在 $\mathscr{X}_-^A$ 中 $z_k^n\to z_k^*$, $z_j^n\to z_j^*$. 两个极限的存在性是由以下不等式得到

$$(z_n-z_m,a)^2\leqslant(z_n-z_m,z_n-z_m)_-,$$
$$(B(z_n-z_m),z_n-z_m)\leqslant(z_n-z_m,z_n-z_m)_-.$$

因为每一 $z^*\in\mathscr{X}_-^A$ 可以表为 $B^{-1/2}z$, $z\in\mathscr{X}$, 所以也可以用 $(z,B^{-1/2}x)$ 代替 (z^*,x),其中 $z\in\mathscr{X}$.

我们现在利用分解式(2)寻找可测线性泛函的表达式. 对任

意 z

$$(z,x)=(z,a)+\sum\xi_k\sqrt{\lambda_k}(e_k, z),$$

其中 ξ_k 是独立同分布且 $\mathbf{E}\xi_k=0$, $D\xi_k=1$ 的随机变量序列. 如果在均方意义下 $(z_n,x)\to(z^*,x)$,则 $(z_n,a)\to(z^*,a)$,且对那些使得 $\lambda_k>0$ 的 k,(z_n, e_k) 的极限存在,其极限自然用 (z^*, e_k) 表示. 故

$$(z^*, x)=(z^*, a)+\sum\xi_k\sqrt{\lambda_k}(z^*, e_k). \tag{6}$$

反之,对任一数序列 (z^*,e_k),使得级数

$$\sum\lambda_k(z^*, e_k)^2 \text{ 与 } \sum(z^*, e_k)(a, e_k)=(z^*,a)$$

收敛,则式(6)确定一个可测线性泛函.

现在研究具有均值为 0 的、对测度 μ 可测的二次泛函. 我们将可测二次泛函与可测二次中心泛函加以区别.

在概率空间 $(\mathfrak{X},\mathfrak{B},\mu)$ 上的随机变量 $g(x)$ 称为可测二次泛函,如果存在这样一个对称线性有界算子序列 A_n, 使得依测度 μ

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}(A_n x, x).$$

随机变量 $g(x)$ 称为可测二次中心泛函,如果存在这样一个对称线性有界算子序列 A_n 及常数序列 c_n,使得依测度 μ

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}[(A_nx,x)+c_n].$$

设算子 B 是非退化的(否则可考虑在算子 B 的值域的闭包上的测度). 其次,令 $\alpha_{ik}^n=(A_ne_i, e_k)$, 其中 e_k 是算子 B 的特征向量,利用分解式(2),我们可写

$$(A_nx, x)=\sum_{i,k}\sqrt{\lambda_i\lambda_k}\,\alpha_{ik}^n\xi_i\xi_k.$$

因为$\sqrt{\lambda_i\lambda_k}\,\alpha_{ik}^n=(B^{1/2}A_nB^{1/2}e_i, e_k)$,故形式上可把 (A_nx, x) 表为

$$(A_nx,x)=(B^{1/2}A_nB^{1/2}y,y),$$

其中 $y=\sum\xi_ke_k$ 是 $\mathscr{X}$ 中的某一广义随机元, 即随机元的分布是 $\mathscr{X}$ 中的一个广义测度(参考 §5). 注意,对任一 $z\in\mathscr{X}$, 内积

$$(z, y) = \sum \xi_k (z, c_k)$$

是确定的，这是因为 ξ_k 独立，$\mathbf{E}\xi_k = 0$ 以及

$$D(z, e_k)\xi_k = (z, e_k)^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} D(z, e_k)\xi_k = |z|^2.$$

因此，如果 v 是元 y 的分布的广义测度，则它的特征泛函 $\varphi_v(z)$ 等于

$$\varphi_v(z) = e^{-\frac{1}{2}|z|^2}.$$

设 $f_1, f_2, \cdots$ 是算子 $B^{1/2}A_nB^{1/2}$（它是完全连续的）的特征向量的规范正交基底. 则可设

$$y = \sum \eta_k f_k,$$

其中 $\eta_k = (y, f_k) = \sum_j (e_j, f_k)\xi_j$ 是概率空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ 上的随机变量序列，从关系式

$$e^{-\frac{1}{2}|z|^2} = \mathbf{E}\exp\{i\sum\eta_k(z, f_k)\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum(z, f_k)^2\right\}$$

得到 η_k 也是具有 $\mathbf{E}\eta_k = 0$，$D\eta_k = 1$ 的独立 Gauss 随机变量. 令 c_k^n 是算子 $B^{1/2}A_nB^{1/2}$ 对应于 f_k 的特征数，则

$$(A_n x, x) = \sum_k c_k^n \eta_k^2.$$

引理 设对每一 n，给定一个具有 $\mathbf{E}\eta_{nk} = 0$，$D\eta_{nk} = 1$ 的独立 Gauss 随机变量序列 η_{nk}. 如果存在常数 d_n，使得当 $n \to \infty$ 时，依概率 $\sum c_k^n \eta_{nk}^2 + d_n \to 0$，则

$$\sum_k c_k^n + d_n \to 0 \text{ 且 } \sum_k (c_k^n)^2 \to 0.$$

证. 首先注意，在引理假设下 $\sup|c_k^n| \to 0$，因为对每一 k

$$\mathbf{P}\left\{\left|\sum_j c_j^n \eta_{nj}^2 + d_n\right| \leqslant \varepsilon\right\} \leqslant \sup_t \mathbf{P}\{|c_k^n \eta_{nk}^2 + t| \leqslant \varepsilon\}$$

$$= \mathbf{P}\left\{|\eta_{nk}| \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{|c_k^n|}}\right\} \leqslant \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{|c_k^n|}},$$

因此对任一 $\varepsilon > 0$

$$\sup_k |c_k^n| \leqslant \frac{2}{\pi} \varepsilon \left(\mathbf{P} \left\{ \left| \sum_j c_j^n \eta_{nj}^2 + d_n \right| \leqslant \varepsilon \right\} \right)^{-2}.$$

现在如果对指标 n 的某一序列满足不等式 $\sum_k (c_k^n)^2 > \delta$，则由中心极限定理知，随机变量 $\sum_k c_k^n \eta_{nk}^2$ 渐近正态，且对任一 $\varepsilon > 0$，我们有

$$1 = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P} \left\{ \left| \sum_k c_k^n \eta_{nk}^2 + d_n \right| \leqslant \varepsilon \right\} \leqslant \lim_{n \to \infty} \sup_t \mathbf{P} \left\{ \left| \sum_k c_k^n \eta_{nk}^2 + t \right| \leqslant \varepsilon \right\} \leqslant \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2\pi\delta}}.$$

最后，利用关系式

$$\sum_j c_j^n \eta_{nj}^2 + d_n = \sum_j c_j^n (\eta_{nj}^2 - 1) + \sum_j c_j^n + d_n$$

以及

$$\mathbf{E} \left(\sum_j c_j^n (\eta_{nj}^2 - 1) \right)^2 = 2 \sum_j (c_j^n)^2 \to 0,$$

得到 $\sum_j c_j^n + d_n \to 0$. 引理证毕.

由引理得，$(A_n x, x) + d_n$ 依测度收敛到某一极限蕴涵了 $(A_n x, x) + d_n$ 依均方收敛到同一个极限. 容易计算

$$\begin{aligned} \int [(A_n x, x) + d_n]^2 \mu(dx) &= 2 \sum_j (c_j^n)^2 + \left(\sum_j c_j^n + d_n \right)^2 \\ &= 2\mathrm{Sp}(B^{1/2} A_n B A_n B^{1/2}) + (\mathrm{Sp}(B^{1/2} A_n B^{1/2}) + d_n)^2 \\ &= 2\mathrm{Sp}(A_n B)^2 + (\mathrm{Sp} A_n B + d_n)^2. \end{aligned} \tag{7}$$

因此下面推论是正确的.

推论 为使对某一选择的 d_n 表示式 $(A_n x, x) + d_n$ 依测度 μ 存在极限，必要充分条件为

$$\lim_{n, m \to \infty} \mathrm{Sp}([A_n - A_m] B)^2 = 0$$

并且可选择 d_n 等于 $-\mathrm{Sp} A_n B$. 如果 $\lim_{n \to \infty} \mathrm{Sp} A_n B$ 存在，则 d_n 可取为

0.

我们利用这些结果寻找二次泛函的一般形式。因为

$$(A_n x, x) = \sum_{k,j} \sqrt{\lambda_k} \alpha_{kj}^n \sqrt{\lambda_j} (\xi_k \xi_j - \delta_{kj}) + \sum_k \lambda_k \alpha_{kk}^n,$$

$$\mathrm{Sp}([A_n - A_m]B)^2 = \sum_{k,j} (\sqrt{\lambda_k} \alpha_{kj}^n \sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_k} \alpha_{kj}^m \sqrt{\lambda_j})^2,$$

则当极限 $\lim_{n\to\infty}(A_n x, x) + d_n$ 依测度 μ 存在时，存在极限

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\lambda_k} \alpha_{kj}^n \sqrt{\lambda_j} = \beta_{kj}, \quad \sum_{k,j} (\sqrt{\lambda_k} \alpha_{kj}^n \sqrt{\lambda_j} - \beta_{kj})^2 \to 0$$

并且

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k,j} \sqrt{\lambda_k} \alpha_{kj}^n \sqrt{\lambda_j} (\xi_k \xi_j - \delta_{kj}) = \sum_{k,j} \beta_{kj} (\xi_k \xi_j - \delta_{kj}).$$

以后把由极限

$$\lim_{n\to\infty} [(A_n x, x) - \mathrm{Sp} A_n B]$$

表示的泛函称为中心二次泛函。中心泛函的一般形式由公式

$$g(x) = \sum_{k,j} \beta_{kj} \left(\frac{(x, e_k)(x, e_j)}{\sqrt{\lambda_k \lambda_j}} - \delta_{kj} \right). \tag{8}$$

给出，其中 β_{kj} 是任意选择的数使得 $\sum_{k,j} \beta_{kj}^2 < \infty$. 如果对中心泛函增加任意常数，则得到可测二次泛函的一般形式。中心泛函由任一泛函减去数学期望而得到.

平稳 Gauss 过程的线性与二次泛函 设 $\xi(t)$ 是实平稳 Gauss 过程，它的均值为 0，相关函数为 $R(t)$ 与谱函数为 $F(\lambda)$:

$$R(t) = \int e^{it\lambda} dF(\lambda).$$

其次，假设 $y(\lambda)$ 为具有正交增量的复 Gauss 过程，

$$\xi(t) = \int e^{i\lambda t} dy(\lambda).$$

我们将在区间 $[-T, T]$ 上考虑 $\xi(t)$. 则它对应一个在 $[-T, T]$ 上具有平方可积的实函数的 Hilbert 空间 $\mathscr{L}_2[-T, T]$ 上的概率

测度．为了寻找过程 $\xi(t)$ 的线性和二次泛函，我们应用前述的结果．

表示作为

$$\eta_n=\int_{-T}^{T}\xi(t)x_n(t)dt.$$

的均方极限的任一随机变量 η 我们称为过程 $\xi(t)$ 的**线性泛函**．其中 $x_n(t)$ 是定义在 $[-T, T]$ 上的连续函数序列． 现在寻找过程 $\xi(t)$ 的线性泛函的一般形式．因为

$$\int_{-T}^{T}\int e^{i\lambda t}dy(\lambda)x_n(t)dt=\int\left[\int_{-T}^{T}e^{i\lambda t}x_n(t)dt\right]dy(\lambda),$$

故

$$\mathbf{E}\eta_n^2=\int|\varphi_n(\lambda)|^2dF(\lambda),$$

其中

$$\varphi_n(\lambda)=\int_{-T}^{T}e^{i\lambda t}x_n(t)dt. \tag{9}$$

用 $\mathscr{W}_T(F)$ 表示包含所有形如(9)的函数且依内积

$$(\varphi_1,\varphi_2)=\int\varphi_1(\lambda)\overline{\varphi_2(\lambda)}dF(\lambda),$$

完备化的 Hilbert 函数空间．则由 η_n 收敛于某一极限得到，由等式(9)确定的函数 $\varphi_n(\lambda)$ 收敛于某一属于 $\mathscr{W}_T(F)$ 的极限 φ，并且

$$\eta=\int\varphi(\lambda)dy(\lambda). \tag{10}$$

显然，当 $\varphi\in\mathscr{W}_T(F)$ 时，式(10)给出在 $[-T,T]$ 上过程 $\xi(t)$ 的一个泛函的一般形式． 关于过程 $\xi(t)$ 的中心二次泛函可以理解为变量

$$\zeta_n=\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}g_n(t,s)[\xi(t)\xi(s)-R(t-s)]dtds,$$

均方极限的任一随机变量 ζ，其中 $g_n(t, s)$ 是对一切 $t, s\in[-T, T]$ 都有定义的连续实对称函数序列．容易计算

$$\mathbf{E}|\zeta_n|^2$$
$$=\mathbf{E}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}g_n(t, s)g_n(u, v)\xi(t)\xi(s)\xi(u)\xi(v)dtds\,du\,dv$$

$$= \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} g_n(t,s)g_n(u,v)R(t-s)R(u-v)dtdsdudv$$

$$= 2\iint |\varphi_n(\lambda, \mu)|^2 dF(\lambda)dF(\mu),$$

其中

$$\varphi_n(\lambda, \mu) = \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} g_n(t, s)e^{i\lambda t - i\mu s}dtds. \tag{11}$$

用 $\mathscr{W}_T^2(F)$ 表示包含所有形如(11)的函数且对于内积

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \iint \varphi_1(\lambda, \mu)\overline{\varphi_2(\lambda, \mu)}dF(\lambda)dF(\mu)$$

是完备的 Hilbert 函数空间．这时如果变量 ζ_n 收敛于某一极限，则 φ_n 收敛于某一 $\mathscr{W}_T^2(F)$ 中的一个函数 φ. 为用 φ 表示变量 ζ，我们引入二重随机积分

$$\iint \varphi(\lambda, \mu)dy(\lambda)\overline{dy(\mu)}. \tag{12}$$

我们把这个积分定义为根据具有正交值的随机测度的积分（参考第四章 § 4）．设在 R^2 上测度 ν 在长方形上由关系式

$$\nu([\lambda_1, \lambda_2] \times [\mu_1, \mu_2])$$

$$= y([\lambda_1, \lambda_2])\overline{y([\mu_1,\mu_2])} - F([\lambda_1,\lambda_2] \cap [\mu_1,\mu_2]) \tag{13}$$

来确定，其中

$$y([\lambda_1,\lambda_2]) = y(\lambda_2) - y(\lambda_1), \quad F([\lambda_1,\lambda_2]) = F(\lambda_2) - F(\lambda_1).$$

测度 ν 是具有正交值的测度，使得

$$\mathbf{E}|\nu([\lambda_1, \lambda_2] \times [\mu_1,\mu_2])|^2 = F([\lambda_1, \lambda_2])F([\mu_1, \mu_2]).$$

因此对所有满足

$$\iint |\varphi(\lambda, \mu)|^2 dF(\lambda)dF(\mu) < \infty,$$

特别地对于 $\varphi \in \mathscr{W}_T^2(F)$ 的 φ，积分

$$\iint \varphi(\lambda, \mu)dy(\lambda)\overline{dy(\mu)} = \iint \varphi(\lambda, \mu)\nu(d\lambda \times d\mu)$$

是确定的．我们证明当 $\varphi \in \mathscr{W}_T^2(F)$ 时，积分(12)给出中心二次泛函的一般形式，为此只须验证

$$\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} g_n(t, s)[\xi(t)\xi(s) - R(t-s)]dtds$$

$$= \iint \varphi_n(\lambda,\mu)dy(\lambda)\overline{dy(\mu)}\ , \tag{14}$$

其中 φ_n 根据式(11)与 g_n 有关．设

$$g_n(t,s) = g(t)k(s),\ \tilde{g}(\lambda) = \int_{-T}^{T} e^{i\lambda t}g(t)dt \text{ 及 } \tilde{k}(\lambda)$$

$$= \int_{-T}^{T} e^{i\lambda t}k(t)dt.$$

则

$$\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} g(t)k(s)[\xi(t)\xi(s) - R(t-s)]dtds$$

$$= \int\tilde{g}(\lambda)dy(\lambda)\int\overline{\tilde{k}(\mu)dy(\mu)} - \int\tilde{g}(\lambda)\overline{\tilde{k}(\lambda)}dF(\lambda)$$

$$= \iint\tilde{g}(\lambda)\overline{\tilde{k}(\mu)}dy(\lambda)\overline{dy(\mu)}.$$

(最后等式的得到是由于对阶梯函数式(13)是成立的，因此，它对所有连续函数是正确的．)因此，(14)对形如

$$\sum_j g_j(t)k_j(s),$$

的线性组合也是正确的，因而对所有 $g_n(t,s)$ 也是正确的．

从证明中得到下面公式：如果 $\varphi(\lambda,\mu) = \sum_k c_k\varphi_k(\lambda)\overline{\varphi_k(\mu)}$，则

$$\iint\varphi(\lambda,\mu)dy(\lambda)\overline{dy(\mu)}$$

$$= \sum_k c_k\left(\left|\int\varphi_k(\lambda)dy(\lambda)\right|^2 - \int|\varphi_k(\lambda)|^2dF(\lambda)\right). \tag{15}$$

这个公式在以后将被用到．

第六章　关于随机过程的极限定理

§1. 距离空间中测度的弱收敛

设$\mathscr{X}$是以 $\rho(x, y)$ 为距离的距离空间，$\mathfrak{B}$ 是它的 Borel 子集组成的 σ 代数，$\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 是定义在$\mathscr{X}$上有范数

$$\|f\|_{\mathscr{X}} = \sup_{\mathscr{X}} |f(x)|$$

的全体有界连续函数的空间．定义在 $\mathfrak{B}$ 上的测度序列 μ_n 称为**弱收敛于测度** μ，如果对 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 中的每一个函数 f，满足

$$\lim_{n\to\infty}\int f(x)\,\mu_n(dx) = \int f(x)\,\mu(dx).$$

定义在 $\mathfrak{B}$ 上的测度 $\{\mu\}$ 的集合 M 称为**弱紧的**，如果 M 中的每一个序列 μ_n 均可选出弱收敛的子序列．

定理 1　设$\mathscr{X}$是完备可分距离空间．定义在 $\mathfrak{B}$ 上的测度集合 M 是弱紧的充分必要条件是

a) $\sup\{\mu(\mathscr{X}); \mu\in M\} < \infty$；

b) 对任意 $\varepsilon > 0$，存在紧集 K 使

$$\sup\{\mu(\mathscr{X}\setminus K); \mu\in M\} < \varepsilon.$$

证．必要性．从集合 M 的紧性得知，对每一有界连续函数 f，数集

$$\left\{\int f(x)\,\mu(dx);\ \mu\in M\right\}$$

是紧的，因而它是有界的．取 $f = 1$ 就得到条件 a) 的必要性．现证条件 b)的必要性．用 K_δ 表示满足 $\rho(x,K)<\delta$ 的 x 的集合，其中

$$\rho(x,K) = \inf_{y\in K}\rho(x,y).$$

我们证明，对任意 $\varepsilon > 0$ 及 $\delta > 0$ 可找到这样的紧集 K_δ，使

$$\mu(\mathscr{X}\setminus K_\delta)\leqslant \varepsilon$$

对所有 $\mu\in M$ 成立.

若不然，即对于给定的 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$，这样的紧集不存在. 任取一测度 $\mu_1\in M$，并设 $K^{(1)}$ 是使得 $\mu_1(\mathscr{X}\setminus K^{(1)})<\varepsilon$ 的紧集. 由于

$$\sup_{\mu}\mu(\mathscr{X}\setminus K_\delta^{(1)})>\varepsilon,$$

因此能找到测度 $\mu_2\in M$ 使得

$$\mu_2(\mathscr{X}\setminus K_\delta^{(1)})>\varepsilon.$$

所以能找到紧集 $K^{(2)}\subset\mathscr{X}\setminus K_\delta^{(1)}$ 使得 $\mu_2(K^{(2)})>\varepsilon$. 由上述所作的假设

$$\sup_{\mu}\ \mu(\mathscr{X}\setminus K_\delta^{(1)}\setminus K_\delta^{(2)})=\sup_{\mu}\ (\mathscr{X}\setminus[K^{(1)}\cup K^{(2)}]_\delta)>\varepsilon.$$

因此能找到测度 $\mu_3\in M$，使得

$$\mu_3(\mathscr{X}\setminus K_\delta^{(1)}\setminus K_\delta^{(2)})>\varepsilon,$$

以及紧集

$$K^{(3)}\subset\mathscr{X}\setminus K_\delta^{(1)}\setminus K_\delta^{(2)}\text{ 使 }\mu_3(K^{(3)})>\varepsilon.$$

继续这一程序，就构造了测度序列 μ_n 和紧集序列 $K^{(n)}$，使得

$$\mu_n(K^{(n)})>\varepsilon,\quad K^{(n)}\subset\mathscr{X}\setminus K_\delta^{(1)}\setminus\cdots\setminus K_\delta^{(n-1)}.$$

设

$$\chi_i(x)=\begin{cases}1-\dfrac{2}{\delta}\rho(x,K^{(i)}), & \text{当 } x\in K_{\delta/2}^{(i)},\\ 0 & \text{，当 } x\bar{\in}K_{\delta/2}^{(i)}.\end{cases}$$

由于每两个紧集 $K^{(n)}$ 和 $K^{(m)}$ 之间的距离大于 δ，所以

$$\chi_n(x)\chi_m(x)=0.$$

因此，对每一 $x\in\mathscr{X}$，级数

$$g_p(x)=\sum_{i=p}^{\infty}\chi_i(x)$$

是收敛的，而且函数 $g_p(x)$ 连续且以 1 为界. 由于可从序列 μ_n 中选出弱收敛的子序列，所以不失一般性，可以认为 μ_n 本身收敛于某一测度 μ. 于是有

$$\lim_{n\to\infty}\int g_p(x)\,\mu_n(dx)=\int g_p(x)\,\mu(dx).$$

因为当 $n > p$ 时

$$\int g_p(x)\,\mu_n(dx) \geqslant \int \chi_n(x)\,\mu_n(dx) \geqslant \varepsilon,$$

所以,对所有 p, 不等式

$$\int g_p(x)\,\mu(dx) \geqslant \varepsilon$$

成立. 但此不等式是不可能成立的,因为对所有 x, 当 $p \to \infty$ 时

$$g_p(x) \to 0, \qquad 0 \leqslant g_p(x) \leqslant 1,$$

所以根据 Lebesgue 定理

$$\lim_{p\to\infty}\int g_p(x)\,\mu(dx) = 0.$$

这就证明了,对每个 $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, 存在紧集 K 使

$$\mu(\mathscr{X}\backslash K_\delta) \leqslant \varepsilon$$

对一切 $\mu \in M$ 成立. 对任意取定的 $\varepsilon > 0$, 构造紧集 $K^{(r)}$, 使得

$$\sup_\mu \mu(\mathscr{X}\backslash K^{(r)}_{1/2^r}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^r},$$

则

$$K = \bigcap_{r=1}^{\infty} K^{(r)}_{1/2^r}$$

是紧的,且

$$\mu(\mathscr{X}\backslash K) \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} \mu(\mathscr{X}\backslash K^{(r)}_{1/2^r}) \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-r} = \varepsilon.$$

条件 b) 的必要性得证.

充分性. 设定理的条件被满足. 由条件 b) 知,可构造紧集序列 K^n, $K^n \subset K^{n+1}$, 使对一切 $\mu \in M$

$$\mu(\bigcup_n K^n) = 1$$

和

$$\mu(\mathscr{X}\backslash K^n) \leqslant \varepsilon_n,\ \varepsilon_n \downarrow 0.$$

设 F 是 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 中的函数 f_n 组成的可数集合,使对所有 m, 当 $\{f_n\}$ 限制在 K^m 上时,它是在 $\mathscr{C}_{K^m}$ 处处稠密的. 由空间 $\mathscr{C}_{K^m}$ 的可分性和 $\mathscr{C}_{K^m}$ 中任一函数可扩张成 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 中的函数可以得知,这样的

可数集合是存在的．设 μ_n 是 M 中任一测度序列．选取序列 n_k 使对所有 $f\in F$ 存在极限

$$\lim_{k\to\infty}\int f(x)\,\mu_{n_k}(dx)=L(f).$$

现来证明对一切 $\varphi\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 这个极限存在．事实上，对满足

$$\|\varphi\|_{\mathscr{X}}\leqslant 1$$

的任意 φ 及 $\varepsilon>0$，$\delta>0$，可找到函数 $f\in F$ 使

$$\sup\{|f(x)-\varphi(x)|;\ x\in K^m\}\leqslant\delta,$$
$$\mu(\mathscr{X}\backslash K^m)\leqslant\varepsilon \text{ 和 } \|f\|_{\mathscr{X}}\leqslant 1.$$

由于

$$\left|\int f(x)\,\mu_{n_k}(dx)-\int\varphi(x)\,\mu_{n_k}(dx)\right|\leqslant\delta\sup_{\mu}\mu(\mathscr{X})+2\varepsilon,$$

所以

$$\left|\overline{\lim_{k\to\infty}}\int\varphi(x)\,\mu_{n_k}(dx)-\underline{\lim_{k\to\infty}}\int\varphi(x)\,\mu_{n_k}(dx)\right|$$
$$\leqslant\phi\varepsilon+2\delta\sup_{\mu}\mu(\mathscr{X}).$$

由 $\varepsilon>0$，$\delta>0$ 的任意性，得

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\int\varphi(x)\,\mu_{n_k}(dx)=\underline{\lim_{k\to\infty}}\int\varphi(x)\,\mu_{n_k}(dx)$$
$$=\lim_{k\to\infty}\int\varphi(x)\,\mu_{n_k}(dx).$$

所以，对所有 $\varphi\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$，极限

$$\lim_{k\to\infty}\int\varphi(x)\,\mu_{n_k}(dx)$$

存在．

用 $L(\varphi)$ 来记这个极限．显然，$L(\varphi)$ 满足第五章 § 2 定理 1 的条件 1) 和 2)．其次，若当 $x\in K^m$ 时 $\varphi=0$，则

$$|L(\varphi)|=\left|\lim_{k\to\infty}\int\varphi(x)\,\mu_{n_k}(dx)\right|\leqslant\|\varphi\|_{\mathscr{X}}\varepsilon_m.$$

因此，该定理的条件 3) 也满足．所以存在测度 μ 使

$$L(\varphi)=\int\varphi(x)\mu(dx).$$

这就证明了定理条件的充分性。

注．如在第五章 § 2 定理 2 一样（参见该定理的注），在证明充分性时并没有用到空间$\mathscr{X}$的完备性．

推论 如果$\mathscr{X}$是完备可分距离空间，测度序列 μ_n 使得对一切 $\varphi\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$，存在极限

$$L(\varphi)=\lim_{n\to\infty}\int\varphi(x)\,\mu_n(dx),$$

则存在测度 μ 使

$$L(\varphi)=\int\varphi(x)\,\mu(dx),$$

即，测度序列 μ_n 一定是弱收敛的。

证．先证明集合 $\{\mu_n\}$ 是弱紧的．对于这集合来说，定理 1 的条件 a) 是满足的． 假设条件 b) 不满足． 和证明定理 1 条件 b) 的必要性一样，对某个 $\varepsilon>0$，可构造子序列 μ_{n_k} 和相互间距离不小于 δ 的紧集序列 $K^{(k)}$，使得 $\mu_{n_k}(K^{(k)})\geqslant\varepsilon$．如同定理 1 的证明一样定义函数 $\chi_i(x)$．对每一个素数 p，记

$$\psi_p(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\chi_{p^m}(x).$$

函数 $\psi_p(x)$ 满足

$$0\leqslant\psi_p(x)\leqslant 1$$

及当 $p\neq p'$ 时

$$\psi_p(x)\psi_{p'}(x)=0;$$

$\psi_p\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$，因此存在极限

$$L(\psi_p)=\lim_{k\to\infty}\int\psi_p(x)\,\mu_{n_k}(dx).$$

注意，当 $k=p^m$ 时

$$\int\psi_p(x)\,\mu_{n_k}(dx)\geqslant\int\chi_k(x)\,\mu_{n_k}(dx).$$

因此

$$L(\psi_p)=\lim_{m\to\infty}\int\psi_p(x)\,\mu_{n_{p^m}}(dx)\geqslant\varepsilon.$$

因为 $\varphi \leqslant f$ 时

$$L(\varphi) \leqslant L(f),$$

于是对每个 N

$$L(1) \geqslant L\left(\sum_{j=1}^{N} \phi_{p_j}\right) \geqslant N\varepsilon$$

(其中 $p_1, \cdots, p_N$ 是相异的素数). 这和 $L(1)$ 的有限性矛盾. 所以定理的条件 b) 满足. 设 μ_{n_k} 是弱收敛子序列且 μ 是它的极限, 那末

$$L(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \int \varphi(x)\, \mu_{n_k}(dx) = \int \varphi(x)\, \mu(dx).$$

这就证明了推论.

现在考虑测度弱收敛性与测度在某些特别的集合上的值的收敛性之间的关系.

定义 设 μ 是 $\mathfrak{B}$ 上的有限测度, 集合 $A \in \mathfrak{B}$ 称为测度 μ 的连续集, 如果 $\mu(A') = 0$, 此处 A' 是 A 的边界. 以后总是用 $[A]$ 表示 A 的闭包, 而用 $\mathrm{Int}A$ 表示 A 的内点组成的集合.

定理 2 测度序列 μ_n 弱收敛于测度 μ 的充分必要条件是, 对测度 μ 的每一连续集 A 满足

$$\mu_n(A) \to \mu(A), \text{ 当 } n \to \infty.$$

证. 先证必要性. 设 μ_n 弱收敛于 μ, 而 A 是 $\mathfrak{B}$ 中的任一集合. 令

$$g_m(x) = \exp\{-m\rho(x, A)\},$$

其中 $\rho(x, A)$ 是点 x 到集 A 的距离. 由于

$$g_m(x) = 1,$$

当 $x \in [A]$;

$$g_m(x) \to 0,$$

当 $x \bar{\in} [A]$, 所以

$$\lim_{m\to\infty} \int g_m(x)\, \mu(dx) = \mu([A]),$$

可见对每个 $\varepsilon > 0$ 能找到这样的 m, 使

$$\int g_m(x)\,\mu(dx) \leqslant \mu([A]) + \varepsilon.$$

因此，

$$\mu([A]) \geqslant \int g_m(x)\,\mu(dx) - \varepsilon$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int g_m(x)\,\mu_n(dx) - \varepsilon$$

$$\geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu_n(A) - \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性，得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu_n(A) \leqslant \mu([A]).$$

于是有

$$\mu([\mathscr{X}\setminus A]) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu_n(\mathscr{X}\setminus A) = \lim_{n\to\infty}\mu_n(\mathscr{X})$$

$$-\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu_n(A) = \mu(\mathscr{X}) - \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu_n(A).$$

顾及到

$$\mu([\mathscr{X}\setminus A]) = \mu(\mathscr{X}) - \mu(\mathrm{Int}A),$$

可得

$$\mu(\mathrm{Int}A) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu_n(A) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu_n(A) \leqslant \mu([A]), \qquad (1)$$

由于对测度 μ 的连续集有 $\mu(\mathrm{Int}A) = \mu([A])$，所以从 (1) 便得到定理条件的必要性.

为证明充分性，现从 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 中任取一函数 f. 集合 $\{x: a \leqslant f(x) < b\}$ 的边界属于集合 $\{x: f(x) = a\} \cup \{x: f(x) = b\}$. 集合 $A_c = \{x: f(x) = c\}$ 对于不同的 c 是不相交的，所以存在至多可数个 c，使得 $\mu(A_c) > 0$. 选取数列 a_k, $k = 1, \cdots, N$ 使得 $\mu(A_{a_k}) = 0$, $a_k < a_{k+1} < a_k + \varepsilon$, $a_1 < -\|f\|_{\mathscr{X}}$, $a_N > \|f\|_{\mathscr{X}}$. 令

$$E_k = \{x: a_k \leqslant f(x) < a_{k+1}\}.$$

集合 E_k 是测度 μ 的连续集，所以 $\mu_n(E_k) \to \mu(E_k)$. 于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int f(x)\,\mu_n(dx) - \int f(x)\,\mu(dx)\right|$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int f(x)\,\mu_n(dx) - \sum_{k=1}^{N-1} a_k\mu_n(E_k)\right|$$

$$+\left|\int f(x)\,\mu(dx) - \sum_{k=1}^{N-1} a_k\mu(E_k)\right|$$

$$\leqslant 2\varepsilon\sum_{k=1}^{N-1}\mu(E_k) = 2\varepsilon\mu(\mathscr{X}).$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性得证充分性. 定理证完.

现利用弱紧性的条件导出测度弱收敛的定理. 在所有这些定理中，用到了一个这样的事实：具有唯一极限点的弱紧序列是弱收敛的.

我们称序列 $f_n \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 弱收敛于 f，如果函数 f_n 是总体有界的，且对每个 $x \in \mathscr{X}$，$f_n(x)$ 趋于 $f(x)$. 利用这个概念，自然可以定义弱闭的函数集和函数集的弱闭包.

定理 3 序列 μ_n 弱收敛于某一测度 μ 的充分必要条件是，它是弱紧的，且对弱闭包就是 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 的某一函数集 $F_0 \subset \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$，与所有 $f \in F_0$ 满足关系式

$$\lim_{n\to\infty}\int f(x)\,\mu_n(dx) = \int f(x)\,\mu(dx).$$

证. 充分性. 现证明序列 μ_n 的所有弱收敛子序列收敛于测度 μ. 事实上，若对所有 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$,

$$\lim_{k\to\infty}\int f(x)\,\mu_{n_k}(dx) = \int f(x)\,\bar{\mu}(dx),$$

则对 $f \in F_0$ 满足等式

$$\int f(x)\,\bar{\mu}(dx) = \int f(x)\,\mu(dx).$$

但是从积分号下取极限的 Lebesgue 定理可知，在 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 中满足

$$\int f(x)\,\bar{\mu}(dx) = \int f(x)\,\mu(dx)$$

的 f 所组成的集合是弱闭的. 所以上一关系式对 F_0 的弱闭包中的所有函数成立，亦即对所有 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 成立. 这就证明了定理条件的充分性. 必要性是显然的.

当测度对应于随机过程时，应用假定了边沿分布收敛的定理是方便的. 现建立一个一般性的定理. 由该定理可推导出同类型的结果.

定理 4 设 μ_n 是弱紧序列，μ 是某一测度，$\mathfrak{A}_0$ 是某一开集类，它对其中每两个集合的并和交是封闭的，而且满足条件：1) $\mathfrak{A}_0$ 的 σ 闭包包含所有开集合，2) $\mathfrak{A}_0$ 中所有集合是测度 μ 的连续集. 那末，如果对一切 $A\in\mathfrak{A}_0$，

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(A)=\mu(A),$$

则 μ_n 弱收敛于 μ.

证. 设 μ_{n_k} 是某一弱收敛于测度 $\bar{\mu}$ 的序列. 从 (1) 可得，对一切 $A\in\mathfrak{A}_0$ 满足关系式

$$\bar{\mu}(A)=\bar{\mu}(\operatorname{Int}A)\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\mu_{n_k}(A)=\mu(A).$$

因此对所有 $A\in\mathfrak{A}_0$，不等式 $\bar{\mu}(A)\leqslant\mu(A)$ 成立. 显然，在一个包含 $\mathfrak{A}_0$ 的单调类上这不等式也成立. 所以对每一个开集，这不等式成立. 因为每一个闭集是一个下降开集序列的交，所以对每一个闭集 F 亦有 $\bar{\mu}(F)\leqslant\mu(F)$. 因此对所有集合 $A\in\mathfrak{A}_0$ 有

$$\bar{\mu}(A')\leqslant\mu(A')=0.$$

于是

$$\bar{\mu}(A)=\lim_{k\to\infty}\mu_{n_k}(A)=\mu(A).$$

由测度 μ 和 $\bar{\mu}$ 在 $\mathfrak{A}_0$ 上相等推得，它们在 $\mathfrak{B}$ 上也是相等的. 就是说序列 μ_n 的所有极限点都重合于 μ. 定理证完.

注. 在各种函数空间上的测度的情形里，通常把测度 μ 的所有连续开柱集族当作 $\mathfrak{A}_0$.

在测度弱收敛的情形也可以建立对某些不连续的函数的积分的收敛性. 此时我们将用到这样的一个事实：$\mathfrak{B}$ 可测函数的间断点的集合是 $\mathfrak{B}$ 可测集.

引理 如果 μ_n 弱收敛于 μ，则

$$\lim_{n\to\infty}\int f(x)\,\mu_n(dx)=\int f(x)\,\mu(dx),$$

对所有 $\mathfrak{B}$ 可测 μ 几乎处处连续的有界函数 $f(x)$ 均成立.

证. 设 Λ 是函数 $f(x)$ 的间断点的集合. 令 $\mathscr{G}_\alpha=\{x:f(x)<\alpha\}$, 设 $\mathscr{G}'_\alpha$ 是集 $\mathscr{G}_\alpha$ 的边界. 当 $\alpha<\beta$ 时, 集合 $\mathscr{G}'_\alpha\cap\mathscr{G}'_\beta$ 包含在交集 $[\mathscr{G}_\alpha]\cap[\mathscr{X}\setminus\mathscr{G}_\beta]$ 中, 所以对于 $x\in\mathscr{G}'_\alpha\cap\mathscr{G}'_\beta$, 不等式

$$\lim_{y\to x}\inf f(y)\leqslant\alpha,\quad \lim_{y\to x}\sup f(y)\geqslant\beta$$

成立. 于是 $\mathscr{G}'_\alpha\cap\mathscr{G}'_\beta\subset\Lambda$, 且对不同的 α, 集合 $\mathscr{G}'_\alpha\setminus\Lambda$ 不相交. 因此有不多于可数个的 α 使

$$\mu(\mathscr{G}'_\alpha)=\mu(\mathscr{G}'_\alpha\setminus\Lambda)>0,$$

即除去最多可数个外, 所有集合 $\mathscr{G}_\alpha$ 都是测度 μ 的连续集. 所以除去最多可数个外, 对所有 α 有

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(\{x:f(x)<\alpha\})=\mu(\{x:f(x)<\alpha\}). \tag{2}$$

由积分的变量替换公式可得

$$\int f(x)\mu_n(dx)=\int\alpha d_\alpha\mu_n(\{x:f(x)<\alpha\}), \tag{3}$$

$$\int f(x)\mu(dx)=\int\alpha d_\alpha\mu(\{x:f(x)<\alpha\}). \tag{4}$$

从等式 (2), (3) 和 (4) 就得到引理的结论.

最后, 考虑线性赋范空间上测度弱收敛的条件. 设 $\mathscr{X}$ 是可分 Banach 空间, L 是 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函的线性集合, 它使得所有 L 中的泛函 l 为可测的最小 σ 代数重合于空间 $\mathscr{X}$ 中的所有 Borel 集所成的 σ 代数 $\mathfrak{B}$. 我们用 $\chi_n(l)$ 和 $\chi(l)$ 分别表示测度 μ_n 和 μ 的特征泛函:

$$\chi_n(l)=\int e^{il(x)}\mu_n(dx),\quad \chi(l)=\int e^{il(x)}\mu(dx).$$

定理 5 测度序列 μ_n 弱收敛于测度 μ 的充分必要条件是, 序列 μ_n 是弱紧的且对所有 $l\in L$ 满足等式

$$\lim_{n\to\infty}\chi_n(l)=\chi(l). \tag{5}$$

证. 定理条件的必要性是很显然的. 为证明充分性只需证, 序列 μ_n 的每一个极限点重合于 μ. 设 $\bar{\mu}$ 是这样的极限点, 则对一

切 $l \in L$

$$\chi(l) = \bar{\chi}(l) = \int e^{il(x)}\bar{\mu}(dx),$$

从特征泛函相同得到测度相同，$\mu = \bar{\mu}$. 定理证完.

§2. Hilbert 空间中测度弱收敛的条件

在这一节里，$\mathscr{H}$ 是可分 Hilbert 空间，$\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{H}$ 中的 Borel 集的 σ 代数. 考虑在 $\mathfrak{B}$ 上的测度，并研究这些测度的弱紧性和弱收敛的条件. 如上节的结果所见，基本困难是在于找出测度族的弱紧性的条件. 对于 Hilbert 空间，可以用特征泛函的术语来给出测度族弱紧性的充分必要条件.

今后将用到在 $\mathscr{H}$ 中的某些线性算子的集合的如下记号: T_c 是表示全体非负对称全连续算子的集合，S 是全体核算子的集合，S_a 是 S 的子集，其中每一个的迹不超过 a.

首先，我们建立 $\mathscr{H}$ 中的集合是紧的一些准则，这对今后的应用是方便的.

引理 1 对任一 $A \in T_c$，集合 $\{x: |A^{-1}x| \leqslant 1\}$ 是紧集. 对于任一紧集 $K \subset \mathscr{H}$，可找到算子 $A \in T_c$，使得 $K \subset \{x: |A^{-1}x| \leqslant 1\}$.

证. 集合 $\{x: |A^{-1}x| \leqslant 1\}$ 是在映象 A 下单位球的原象且由于 A 是全连续算子，它是紧的. 设 K 是某一紧集，而 $\{e_k\}$ 是 $\mathscr{H}$ 中的任意规范正交基. 令 $x^k = (x, e_k)$. 由 K 的紧性得，存在序列 $c_n \downarrow 0$，使得对所有 $x \in K$ 有

$$\sum_{k>n}(x^k)^2 \leqslant c_n.$$

取数列 $d_n \downarrow 0$，并使关系式

$$\sum_n d_n = +\infty, \qquad \sum_n d_n c_n < \infty$$

成立. 那末

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x^k)^2\sum_{j=1}^{k}d_j=\sum_{k=1}^{\infty}d_k\sum_{j\geqslant k}(x^j)^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}d_kc_k<\infty.$$

定义以 e_k 为特征向量的算子 A，并满足

$$Ae_k=\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{\infty}d_jc_j}{\sum_{j=1}^{k}d_j}}e_k$$

那末，对所有 $x\in K$。

$$|A^{-1}x|^2=\sum_{k=1}^{\infty}(x^k)^2\frac{\sum_{j=1}^{k}d_j}{\sum_{j=1}^{\infty}d_jc_j}\leqslant 1.$$

由条件

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}d_jc_j\left(\sum_{j=1}^{k}d_j\right)^{-1}=0$$

得知，A 是全连续算子．引理证完．

定理 1　设M是某一测度族，$\chi_\mu(z)$，$z\in\mathscr{X}$，是测度$\mu\in M$的特征泛函．集合M是弱紧的充分必要条件是：a）当 $\mu\in M$ 时，$\chi_\mu(0)$是有界的；b）对任意 $\varepsilon>0$，存在算子B，$B\in T_c$，且对每一$\mu\in M$ 有算子 $A_\mu\in S_1$，只要 $(BA_\mu Bz,z)\leqslant 1$ 就有

$$\mathrm{Re}[\chi_\mu(0)-\chi_\mu(z)]\leqslant\varepsilon.$$

证．对弱紧集M § 1 定理 1 的条件 a）成立，由此可得条件 a）的必要性．现证明条件 b）的必要性．不失一般性，可认为

$$\chi_\mu(0)=1.$$

由于 § 1 定理 1，对弱紧集M可以找到紧集 $K\subset\mathscr{X}$，使得对一切$\mu\in M$ 不等式

$$\mu(\mathscr{X}-K)<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立．那末

$$\mathrm{Re}[\chi_\mu(0) - \chi_\mu(z)] = \int [1 - \cos(x,z)]\mu(dx)$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2}\int_k (z,x)^2 \mu(dx). \tag{1}$$

设 B 是 T_c 中的算子，使得 $K \subset \{x: |B^{-1}x| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\}$. 由引理 1 知，它是存在的. 设 A_μ 是非负对称算子，满足

$$(BA_\mu Bz, z) = \frac{1}{2}\int_{|B^{-1}x| \leqslant \sqrt{\varepsilon}} (x,z)^2 \mu(dx). \tag{2}$$

那末

$$(A_\mu z, z) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{|B^{-1}x| \leqslant \sqrt{\varepsilon}} (x, B^{-1}z)^2 \mu(dx)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_{|B^{-1}x| \leqslant \sqrt{\varepsilon}} (B^{-1}x, z)^2 \mu(dx),$$

且

$$\mathrm{Sp} A_\mu = \sum_k (A_\mu e_k, e_k) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{|B^{-1}x| \leqslant \sqrt{\varepsilon}} |B^{-1}x|^2 \mu(dx) \leqslant 1,$$

即，$A_\mu \in S_1$. 由 (1) 和 (2) 得不等式

$$\mathrm{Re}[\chi_\mu(0) - \chi_\mu(z)] \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}(BA_\mu Bz, z). \tag{3}$$

条件 b) 的必要性得证.

现来证明定理的条件的充分性. 由条件 a) 得 $\mu(\mathscr{X})$ 是有界的. 由 §1 定理 1 得知，只要证明对每个 $\varepsilon > 0$ 存在紧集 K，使对所有 $\mu \in M$，$\mu(\mathscr{X} - K) \leqslant \varepsilon$ 就够了. 设 $B \in T_c$ 是这样的算子，对所有 $\mu \in M$，当 $(BA_\mu Bz, z) \leqslant 1$，其中 $A_\mu \in S_1$，就有

$$\mathrm{Re}[\chi_\mu(0) - \chi_\mu(z)] \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

那末

$$\mathrm{Re}[\chi_\mu(0) - \chi_\mu(z)] \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2(BA_\mu Bz, z). \tag{4}$$

当 $\lambda > 0$ 时我们来估计积分

$$\int \left[1 - \exp\left\{-\frac{\lambda}{2}(B^{-2}x, x)\right\}\right] \mu(dx).$$

设 $e_1, e_2, \cdots$ 是算子 B 的完全规范正交特征向量序列，而 β_k 是对应于 e_k 的特征值. 那末

$$(B^{-2}x, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x^k)^2}{\beta_k^2},$$

其中 $x^k = (x, e_k)$. 注意到

$$\exp\left\{-\frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(x^k)^2}{\beta_k^2}\right\} = (2\pi\lambda)^{-\frac{n}{2}}\prod_{k=1}^{n}\beta_k\int\cdots\int\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}x^k z^k - \frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2(z^k)^2\right\}dz^1\cdots dz^n,$$

其中 $z^1, \cdots, z^n$ 是实变数. 因此

$$\begin{aligned}
&\int\left[1-\exp\left\{-\frac{\lambda}{2}(B^{-2}x, x)\right\}\right]\mu(dx)\\
&= \lim_{n\to\infty}\int(2\pi\lambda)^{-\frac{n}{2}}\prod_{k=1}^{n}\beta_k\int\cdots\int\left[1-e^{i\sum_{k=1}^{n}x^k z^k}\right]\\
&\times\exp\left\{-\frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2(z^k)^2\right\}dz^1\cdots dz^n\mu(dx)\\
&= \lim_{n\to\infty}(2\pi\lambda)^{-\frac{n}{2}}\prod_{k=1}^{n}\beta_k\int\cdots\int\mathrm{Re}\left[1-\chi_\mu\left(\sum_{k=1}^{n}z^k e_k\right)\right]\\
&\times\exp\left\{-\frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2(z^k)^2\right\}dz^1\cdots dz^n\\
&\leqslant \lim_{n\to\infty}(2\pi\lambda)^{-\frac{n}{2}}\prod_{k=1}^{n}\beta_k\int\cdots\int\left[\frac{\varepsilon}{2}\right.\\
&\left.+2\left(BA_\mu B\sum_{k=1}^{n}z^k e_k, \sum_{k=1}^{n}z^k e_k\right)\right]\\
&\times\exp\left\{-\frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2(z^k)^2\right\}dz^1\cdots dz^n\\
&= \frac{\varepsilon}{2}+2\lambda\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(A_\mu e_k, e_k)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + 2\lambda \mathrm{Sp} A_\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2\lambda.$$

于是

$$\left(1 - \exp\left\{-\frac{\lambda c}{2}\right\}\right)\int_{(B^{-2}x,x)>c} \mu(dx)$$

$$\leqslant \int_{(B^{-2}x,x)>c} \left[1 - \exp\left\{-\frac{\lambda}{2}(B^{-2}x, x)\right\}\right]\mu(dx) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2\lambda.$$

选取 $\lambda > 0$ 和 $c > 0$ 使

$$\frac{\varepsilon + 4\lambda}{2 - 2\exp\left\{-\frac{\lambda c}{2}\right\}} < \varepsilon.$$

这时对所有 $\mu \in M$，不等式 $\mu(\{x: |B^{-1}x| > c\}) < \varepsilon$ 成立，因此 $K = \{x: |B^{-1}x| \leqslant c\}$ 就是所要找的紧集．定理证完．

注 1．Ю.В.Прохоров 和 В.В.Сазонов 的简单例子表明，对测度的弱紧族来说，任给 $\varepsilon > 0$ 并不总是可以在 S 中找到算子 A（对所有测度 $\mu \in M$ 是相同的），使得当 $(Az,z) \leqslant 1$ 时，$\mathrm{Re}(\chi_\mu(0) - \chi_\mu(z)) \leqslant \varepsilon$．设 K 是形如 $K = \{x: |B^{-1}x| \leqslant 1\}$ 的紧集，其中 $B \in T_c$ 且 $\mathrm{Sp} B^2 = +\infty$．我们用等式

$$\mu(\{x\}) = \mu(\{-x\}) = \frac{1}{2},$$

$\mu(\mathscr{X} \backslash \{x\} \backslash \{-x\}) = 0$ 定义测度 μ_x（此处 $\{x\}$ 表由单点 x 组成的集合）．考虑测度族 $M = \{\mu_x, x \in K\}$．因为对所有 $\mu \in M$，$\mu(\mathscr{X} \backslash K) = 0$，所以 M 是弱紧集．其次，有

$$\mathrm{Re}(\chi_{\mu_x}(0) - \chi_{\mu_x}(z)) = 1 - \cos(x,z) = 2\sin^2\frac{(x,z)}{2},$$

$$\sup_{\mu_x \in M} \mathrm{Re}(\chi_{\mu_x}(0) - \chi_{\mu_x}(z)) = \sup_{|B^{-1}x| \leqslant 1} 2\sin^2\frac{(B^{-1}x, Bz)}{2}$$

$$= \sup_{|y| \leqslant 1} 2\sin^2\frac{(y, Bz)}{2} = \begin{cases} 2, & |Bz| \geqslant \pi; \\ 2\sin^2\frac{|Bz|}{2}, & |Bz| < \pi. \end{cases}$$

设 A 是使得当 $(Az, z) \leqslant 1$ 时，$\mathrm{Re}(\chi_\mu(0) - \chi_\mu(z)) \leqslant 1$ 的算子．则当 $(Az,z) \leqslant 1$ 时 $|Bz| < \pi$，这意味着，当 $|z| \leqslant 1$ 时

$|BA^{-1/2}z| < \pi$，即 $BA^{-1/2}$ 是有界算子．因此 $B = CA^{1/2}$，其中 C 是有界算子．因为

$$B = B^* = A^{1/2}C^*,$$

所以

$$B^2 = A^{1/2}C^*CA^{1/2}$$

且对算子 A 的特征向量的规范正交序列 $\{e_k\}$ 得

$$\sum_k (B^2 e_k, e_k) = \sum_k (C^*CA^{1/2}e_k, A^{1/2}e_k) \leq \|C^*C\| \sum_k (Ae_k, e_k).$$

因此，必须 $\mathrm{Sp}A = +\infty$.

定理的条件 b) 看来有点烦琐，现在我们导出此条件的某些变形．

引理 2 为使 S 中的算子族 C_μ 可表为 $C_\mu = BA_\mu B$，其中 $B \in T_c$，$A_\mu \in S_1$，其必要条件是，对每个规范正交基 $\{e_k\}$，级数

$$\mathrm{Sp}C_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (C_\mu e_k, e_k) \tag{5}$$

对 μ 一致收敛，而充分条件只要该级数对一个基一致收敛．

证．充分性．设 $\{e_k\}$ 是使级数 (5) 一致收敛的规范正交基．令

$$\rho_n = \sup_\mu \sum_{k=n}^{\infty} (C_\mu e_k, e_k),$$

并选取序列 $\alpha_n > 0$，使得 $\Sigma\alpha_n = +\infty$ 及 $\Sigma\alpha_n\rho_n < \infty$．那末

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (C_\mu e_n, e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sum_{n=k}^{\infty} (C_\mu e_n, e_n) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \rho_k.$$

其次，设 B 是对称算子使得 $Be_k = \lambda_k e_k$，其中

$$\lambda_k = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\rho_n \Big/ \sum_{n=1}^{k} \alpha_n\right)^{1/2};$$

因为 $\lambda_k \to 0$，$B \in T_c$．令 $A_\mu = B^{-1}C_\mu B^{-1}$．这时

$$\mathrm{Sp}A_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (B^{-1}C_\mu B^{-1}e_k, e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} (C_\mu e_k, e_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \alpha_n (C_\mu e_k, e_k) / \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \rho_n \leqslant 1.$$

引理条件的充分性得证.

必要性. 设 $C_\mu = BA_\mu B$, $B \in T_c$, $A_\mu \in S_1$; 而 $\{f_k\}$ 是任一规范正交基. 用 P_N 表示在向量 $f_N, f_{N+1}, \cdots$所张成的线性子空间上的投影算子, 且设 $B_N = BP_N$. 因为, 如果 $B \in S$, 则 $\mathrm{Sp}AB = \mathrm{Sp}B^*A^*$ 和 $\mathrm{Sp}AB \leqslant \mathrm{Sp}B\|A\|$. 所以

$$\sum_{k=N}^{\infty} (BA_\mu Bf_k, f_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (P_N BA_\mu BP_N f_k, f_k)$$

$$= \mathrm{Sp}(B_N^* A_\mu B_N) = \mathrm{Sp}(B_N^{*2} A_\mu) \leqslant \|B_N^{*2}\| \mathrm{Sp}A_\mu \leqslant \|B_N^*\|^2.$$

为完成证明, 我们注意到, 当 $N \to \infty$时, $\|B_N^*\| \to 0$. 事实上, 当 $|x| \leqslant 1$ 时, 形为 Bx 的向量集合 K 是紧的, 而函数 $|P_N y|$ 是连续且单调递减于 0, 所以当 $N \to \infty$ 时, 也有 $\sup\{|P_N y|, y \in K\} \to 0$. 但

$$\sup\{|P_N, y|, y \in K\} = \sup_{|x| \leqslant 1} |P_N Bx| = \|B_N^*\|.$$

引理证完.

用 S^* 表示满足如下条件的算子D的集合: 对所有规范正交基 $\{e_k\}$, 和

$$\sum_k |(De_k, e_k)|$$

是有限且有界的. 这个和的上确界记为 $\mathrm{Sp}|D|$. 用 S_ε^* 表示S^*中满足 $\mathrm{Sp}|D| \leqslant \varepsilon$ 的算子D的集合.

推论 设算子族 C_μ 对任意 $\varepsilon > 0$ 可表为

$$C_\mu = B^{(\varepsilon)} A_\mu^{(\varepsilon)} B^{(\varepsilon)} + D^{(\varepsilon)},$$

其中 $B^{(\varepsilon)} \in T_c$, $A_\mu^{(\varepsilon)} \in S_1$, $D^{(\varepsilon)} \in S_\varepsilon^*$. 那末存在算子 $B \in T_c$ 使得 $C_\mu = BA'_\mu B$ 且 $A'_\mu \in S_1$.

事实上, 如引理 2 所知, 只要证明对某个规范正交基 $\{e_n\}$, 级数

$$\sum_k (C_\mu e_k, e_k)$$

对 μ 一致收敛就够了. 对任意 $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k>N}(C_\mu e_k, e_k) \leqslant \sum_{k>N}(B^{(\varepsilon)}A_\mu^{(\varepsilon)}B^{(\varepsilon)}e_k, e_k) + \varepsilon,$$

且正如引理 2 所知，我们选取足够大的 N，和

$$\sum_{k>N}(B^{(\varepsilon)}A_\mu^{(\varepsilon)}B^{(\varepsilon)}e_k, e_k)$$

对所有 N 可以同时小于 ε.

用 $\mathscr{H}_{\mathscr{H}}$ 表示定义在 $\mathscr{H}$ 上的线性 Hilbert-Schmidt 算子(即满足 $\mathrm{Sp}CC^* < \infty$ 的算子 C)所成的 Hilbert 空间，它有内积

$$(A, B) = \mathrm{Sp}AB^*.$$

引理 3 1) 如果 $B \in T_c$, $A_\mu \in T_c$ 且 $A_\mu^2 \in S_1$, 那末算子 BA_μ 的集合在 $\mathscr{H}_{\mathscr{H}}$ 中是紧的.

2) 对由算子 C_μ 所组成的在 $\mathscr{H}_{\mathscr{H}}$ 中的任意紧集总能找到算子 $B \in T_c$, 使得 $B^{-1}C_\mu^2B^{-1} \in S_1$.

证. 1)*) 设 $\{e_k\}$ 是算子 B 的特征向量的基，又设 P_N 是在向量 $e_1, \cdots, e_N$ 所产生的子空间上的投影算子. 那末由于引理 2

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{N\to\infty}}\sup_\mu \mathrm{Sp}(B_\mu^{1/2} - P_N B_\mu^{1/2} P_N)^2 \\
&= \overline{\lim_{N\to\infty}}\sup_\mu [\mathrm{Sp}B_\mu - \mathrm{Sp}P_N B_\mu^{1/2}] \\
&= \overline{\lim_{N\to\infty}}\sup_\mu [\mathrm{Sp}(I - P_N)B_\mu + \mathrm{Sp}P_N B_\mu^{1/2}(I - P_N)B_\mu^{1/2}] \\
&\leqslant \overline{\lim_{N\to\infty}}\sup_\mu [\mathrm{Sp}(I - P_N)B_\mu + \mathrm{Sp}B_\mu^{1/2}(I - P_N)B_\mu^{1/2}] \\
&= 2\overline{\lim_{N\to\infty}}\sup_\mu \mathrm{Sp}(I - P_N)B_\mu \\
&= 2\overline{\lim_{N\to\infty}}\sup_\mu \sum_{k>N}(B_\mu e_k, e_k) = 0.
\end{aligned}$$

因此，对足够大的 N, 集合 $\{P_N B_\mu^{1/2} P_N\}$ 是集合$\{B_\mu^{1/2}\}$的 ε 网. 从集合 $\{P_N B_\mu^{1/2} P_N\}$ 是 N^2 维空间中的有界集得到 $\{P_N B_\mu^{1/2} P_N\}$ 的紧性.

---

*) 现引理 3 的 1) 的证明方法按本书英译本译出，比原著证法简单. ——译注

因此引理的论断 1) 得证.

2) 设 $C_1, C_2, \cdots, C_N$ 是集合 $\{C_\mu\}$ 的 ε 网. 在满足

$$\mathrm{Sp}(C_\mu - C_K)(C_\mu - C_K) \leqslant \varepsilon^2$$

的算子 C_K 中，下标K最小的算子用 C'_μ 表示. 那末 $C_\mu^2 = C_\mu'^2 + D_\mu$，其中

$$D_\mu = C'_\mu(C_\mu - C'_\mu) + (C_\mu - C'_\mu)C'_\mu + (C_\mu - C'_\mu)^2.$$

易见 $D_\mu \in S^*$ 以及

$$\mathrm{Sp}|D_\mu| \leqslant 2\sqrt{\mathrm{Sp}C_\mu'^2 \mathrm{Sp}(C_\mu - C'_\mu)^2} + \varepsilon^2 = O(\varepsilon).$$

现注意到对于不同的 μ，$C_\mu'^2$ 仅取有限个数的值，且对每个 μ，级数

$$\sum_k (C_\mu'^2 e_k, e_k)$$

对任意规范正交基 $\{e_k\}$ 收敛. 因此这收敛性关于 μ 是一致的. 余下只要利用引理 2 的推论. 引理证完.

已证明的引理使得有可能找到更有效的(和定理 1 比较)测度族的紧性的条件.

定理 2 设 $M = \{\mu\}$ 是 $\mathfrak{B}$ 上的有限测度族. 集合M是弱紧的充分必要条件是:

1) 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 c 使对所有 $\mu \in M$，$\mu\{x: |x| > c\} < \varepsilon$.

2) 对每个 c，由关系式

$$\int_{|x|\leqslant c} (z, x)^2 \mu(dx) = |B_\mu^c z|^2$$

所定义的算子族 B_μ^c 是 $\mathscr{X}_{\mathscr{X}}$ 中的紧集. 条件 2) 能用如下条件代替:

2′) 对某一基(从而对任一基)级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_\mu^c e_k|^2$$

对任意 $c > 0$ 对 μ 一致收敛.

证. 不失一般性，我们认为 $\mu(\mathscr{X}) = 1$.

因为当 c 足够大时，

$$\mathrm{Re}(1-\chi_\mu(z)) \leqslant \frac{1}{2}\int_{|x|\leqslant c}(x,z)^2\mu(dx)$$

$$+\mu(\{x: |x|>c\}) \leqslant \frac{1}{2}|B_\mu^c z|^2+\frac{\varepsilon}{2},$$

且根据引理 3 的论断 2)，$(B_\mu^c)^2 = BA_\mu^2 B$，其中 $B\in T_c$, $\mathrm{Sp}A_\mu^2 \leqslant 1$，所以由定理 1 得证充分性. 现证定理的条件的必要性. 设M是紧集且K是使对一切$\mu\in M$，有$\mu(\mathscr{X}-K)<\varepsilon$的紧集. 若$c$是使得当 $x\in K$ 时有 $|x|\leqslant c$，则 $\mu(\{x:|x|>c\}<\varepsilon$. 这就证明了条件 1)的必要性. 其次，令 $V_c=\{x:|x|\leqslant c\}$，可得

$$|B_\mu^c z|^2 = \int_{K\cap V_c}(z,x)^2\mu(dx)+\int_{V_c\setminus K}(z,x)^2\mu(dx).$$

设

$$K=\{x: |B^{-1}x|\leqslant 1\},$$

此处 $B\in T_c$. 那末

$$\int_{K\cap V_c}(z,x)^2\mu(dx) \leqslant \int_{|B^{-1}x|\leqslant 1}(B^{-1}x, Bz)^2\mu(dx) = |A_\mu Bz|^2,$$

其中算子 A_μ 由关系式

$$|A_\mu z|^2 = \int_{|B^{-1}x|\leqslant 1}(B^{-1}x,z)^2\mu(dx)$$

所定义. 因此

$$\mathrm{Sp}A_\mu^2 = \int_{|B^{-1}x|\leqslant 1}|B^{-1}x|^2\mu(dx)\leqslant 1.$$

所以，

$$\int_{K\cap V_c}(z,x)^2\mu(dx)\leqslant |A_\mu Bz|^2,$$

其中 $A_\mu^2\in S_1$，而 $B\in T_c$.

另一方面，若D由等式

$$\int_{V_c\setminus K}(z,x)^2\mu(dx)=(Dz,z)$$

定义，则

$$\mathrm{Sp}D=\int_{V_c\setminus K}|x|^2\mu(dx)\leqslant c^2\mu(\mathscr{X}\setminus K).$$

可通过选取紧集 K，使得这个值同时对所有 μ 任意小. 因此

由引理 2 的推论和引理 3 的论断 1，算子集合$\{B_\mu^c\}$在$\mathscr{X}_{\mathscr{X}}$中是紧的．条件 2）的必要性得证．条件 2′）的必要性由引理 2 可得．定理证完．

推论 1 设对所有测度 $\mu\in M$ 存在相关算子

$$(A_\mu z, z) = \int (z, x)^2 \mu(dx),$$

且 $A_\mu^{1/2}\in\mathscr{X}_{\mathscr{X}}$．那末测度族$M$是紧的充分条件是算子集合$\{A_\mu^{1/2}\}$在$\mathscr{X}_{\mathscr{X}}$中是紧的．若可找到 $c>0$ 使对所有 $\mu\in M$，有

$$\mu(\{x: |x|>c\}) = 0,$$

则上述条件还是必要的．

推论 2 设算子 $\tilde{A}_\mu$ 由等式

$$(\tilde{A}_\mu z, z) = \int \frac{(z, x)^2}{1+|x|^2}\mu(dx) \tag{6}$$

所定义．那末测度族M是紧的充分必要条件是：

1）算子集合$\{\tilde{A}_\mu^{1/2}\}$是$\mathscr{X}_{\mathscr{X}}$中的紧集，

2）$\lim\limits_{c\to\infty}\sup\limits_{\mu}\mu(\{x: |x|>c\}) = 0$．

我们给出测度弱收敛的一个方便的条件．

定理 3 测度序列 μ_n 弱收敛于测度μ的充分必要条件是：

1）对于所有 $z\in\mathscr{X}$，测度 μ_n 的特征泛函 $\chi_n(z)$ 收敛于测度μ的特征泛函$\chi(z)$；

2）由等式(6)定义的算子族$\{\tilde{A}_\mu^{1/2}\}$是$\mathscr{X}_{\mathscr{X}}$中的紧集．

证．由推论 2 得定理条件的必要性． 由于推论 2 和 § 1 定理 5，为证明充分性仅需证明

$$\lim_{c\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(\{x: |x|>c\}) = 0. \tag{7}$$

设

$$\nu_n(A) = \mu_n\left(\left\{x: \frac{x}{\sqrt{1+|x|^2}}\in A\right\}\right).$$

因为

$$\int (z,x)^2 \nu_n(dx) = \int \frac{(z,x)^2}{\sqrt{1+|x|^2}} \mu_n(dx) = (\tilde{A}_\mu z, z),$$

所以测度族 ν_n 是紧的。关系式 (7) 等价于：

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \nu_n(\{x: |x| > 1-\varepsilon\}) = 0. \tag{8}$$

假定 (8) 不成立，这时可找到弱收敛子序列 ν_{n_k}，使得它的极限 $\bar{\nu}$ 满足条件 $\bar{\nu}(\{x: |x| = 1\}) > 0$。 于是，对某一 z，$|z| = 1$ 和 $\delta > 0$ 有

$$\bar{\nu}(\{x: |x| = 1, |(x,z)| > \delta\}) > \delta.$$

那末对所有 $\varepsilon > 0$，当 n_k 足够大时

$$\nu_{n_k}(\{x: |x| > 1-\varepsilon; |(x,z)| > \delta\}) > \delta,$$

从而

$$\mu_{n_k}\left(\left\{x: \frac{|x|}{\sqrt{1+|x|^2}} > 1-\varepsilon;\ \frac{|(x,z)|}{\sqrt{1+|x|^2}} > \delta\right\}\right) > \delta.$$

因此对每一 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to 0} \mu_{n_k}\left(\left\{x: |(x,z)| > \frac{\delta}{2\varepsilon}\right\}\right) > \delta.$$

另一方面，对每一 z

$$\lim_{c\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \mu_n(\{x: |(x,z)| > c\})$$

$$\leqslant \lim_{c\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\pi}{\pi - 1} \int \left(1 - \frac{\sin \frac{\pi}{c}(x,z)}{\frac{\pi}{c}(x,z)}\right) \mu_n(dx)$$

$$= \lim_{c\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\pi}{\pi - 1} \frac{c}{2\pi} \int_{-\pi/c}^{\pi/c} (1 - \chi_n(t,z))\, dt$$

$$= \lim_{c\to\infty} \frac{c}{2\pi - 2} \int_{-\pi/c}^{\pi/c} (1 - \chi(t,z))\, dt = 0.$$

由所得的矛盾证明了定理。

注. 若测度序列 μ_n 弱收敛于测度 μ，则对任意 $c > 0$，当 $|z| \leqslant c$ 时一致地有 $\chi_n(z) \to \chi(z)$。设 B 是 T_c 中这样的算子：能

找到算子 $A_n\in S_1$ 使当 $(BA_nBz, z)<1$ 时 $\mathrm{Re}(1-\chi_n(z))<\varepsilon^2/8$. 若 $|Bz|<1$, 则更有 $(A_nBz,Bz)<1$. 因此只要 $|Bz_1-Bz_2|<1$ 就有

$$
\begin{aligned}
|\chi_n(z_1)-\chi_n(z_2)|^2 &\leqslant \int |1-e^{i(z_1-z_2,x)}|^2\mu_n(dx)\\
&= 2\int(1-\cos(z_1-z_2,x))\mu_n(dx) = 2\mathrm{Re}(1-\chi_n(z))\\
&< \frac{\varepsilon^2}{4}.
\end{aligned}
$$

因为集合 $\{Bz:|z|\leqslant c\}$ 是紧的，所以存在有限点集 $z_1,\cdots,z_m$，使对满足 $|z|\leqslant c$ 的所有 z 有

$$
\inf_k |Bz-Bz_k|<1.
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{|z|\leqslant c}|\chi_n(z)-\chi(z)| &\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_k|\chi_n(z_k)-\chi(z_k)|\\
&+ 2\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_k\sup\{|\chi_n(z)-\chi_n(z_k)|;|B(z-z_k)|\leqslant 1\}\\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}
$$

因此论断得证.

§3. 取值于 Hilbert 空间的独立随机变量和

在这一节里我们将考察不仅概率测度是在 Hilbert 空间上，而且随机变量也是取值于 Hilbert 空间且以这些测度为分布. 设 $\{\Omega,\mathfrak{A},\mathbf{P}\}$ 是某一概率空间，$\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 是带有 Borel 集的 σ 代数的 Hilbert 空间. 取值于 $\mathscr{X}$ 的随机变量是定义在 Ω 上取值于 $\mathscr{X}$ 的函数，使得对所有 $B\in\mathfrak{B}$，$\{\omega:\xi(\omega)\in B\}\in\mathfrak{A}$. 今后简记 $\xi(\omega)$ 为 ξ，随机变量 ξ 的分布是测度

$$
\mu_\xi(B)=\mathbf{P}\{\xi\in B\}=\mathbf{P}\{\omega:\xi(\omega)\in B\}.
$$

把每个随机变量 ξ 和 σ 代数 $\mathfrak{A}$ 的子 σ 代数 $\mathfrak{A}_\xi$ 联系在一起，$\mathfrak{A}_\xi$ 是由形为 $\{\omega:\xi(\omega)\in B\}$ 的事件所组成，其中 B 是 $\mathfrak{B}$ 中的任意集合，

随机变量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$ 称为独立的，如果事件的 σ 代数 $\mathfrak{A}_{\xi_1}, \mathfrak{A}_{\xi_2}, \cdots, \mathfrak{A}_{\xi_n}, \cdots$ 是独立的，即对任意事件 $A_i \in \mathfrak{A}_{\xi_i}$

$$\mathbf{P}\{\bigcap_i A_i\} = \prod_i \mathbf{P}\{A_i\}.$$

我们来考虑如何通过被加项的特征来表示独立随机变量和的特征. 函数

$$\chi_\xi(z) = \mathbf{E}e^{i(z,\xi)} = \int e^{i(z,x)}\mu_\xi(dx),$$

即变量 ξ 的分布的特征泛函称为随机变量 ξ 的**特征泛函**.

如果 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 独立且 $\chi_k(z)$ 是变量 ξ_k 的特征泛函，那末

$$\mathbf{E}\exp\left\{i\left(z, \sum_{k=1}^n \xi_k\right)\right\} = \prod_{k=1}^n \chi_k(z). \tag{1}$$

因此，当独立随机变量相加时特征泛函是连乘. 为找出独立随机变量和的分布的表示式，我们考虑有两个被加项的随机变量. 设 $\xi = \xi_1 + \xi_2$ 且 $\mu_\xi, \mu_{\xi_1}, \mu_{\xi_2}$ 分别是变量 ξ, ξ_1, ξ_2 的分布. 那末

$$\mu_\xi(B) = \mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 \in B\} = \mathbf{E}\mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 \in B | \mathfrak{A}_{\xi_1}\}$$
$$= \mathbf{E}\mathbf{P}\{\xi_2 \in B - \xi_1 | \mathfrak{A}_{\xi_1}\} = \mathbf{E}\mu_{\xi_2}(B - \xi_1),$$

其中 $B - x$ 是满足 $x + y \in B$ 的所有 y 的集合. 注意，$\mu_{\xi_2}(B - x)$ 是 $\mathfrak{B}$ 可测函数. 因此

$$\mathbf{E}\mu_{\xi_2}(B - \xi_1) = \int \mu_{\xi_2}(B - x)\mu_{\xi_1}(dx).$$

于是，有公式

$$\mu_\xi(B) = \int \mu_{\xi_2}(B - x)\mu_{\xi_1}(dx) = \int \mu_{\xi_1}(B - x)\mu_{\xi_2}(dx), \tag{2}$$

即两个独立随机变量和的分布是被加项分布的卷积.

由独立随机变量组成的级数的收敛性 我们将导出一些不等式，它们把 Колмогоров 不等式及其各种推广的不等式推广到取值于 Hilbert 空间的随机变量的情形.

引理 1 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是独立随机变量，$\mathbf{E}\xi_k = 0$, $\mathbf{E}|\xi_k|^2 < \infty$ 且

$$\zeta_k = \sum_{i=1}^k \xi_i.$$

那末

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k\leqslant n}|\zeta_k|>\varepsilon\right\}\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{E}|\zeta_n|^2. \tag{3}$$

证．由 $|\zeta_k|^2$ 构成半鞅以及第二章 §2 的不等式(16)，可以得到证明．

引理 2 如果 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 独立，且 $|\xi_i|\leqslant C$，那末对任意自然数 l 和正数 α

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k\leqslant n}|\zeta_k|>l\alpha+(l-1)C\right\}\leqslant\left(\mathbf{P}\left\{\sup_{k\leqslant n}|\zeta_k|>\frac{\alpha}{2}\right\}\right)^l.$$

证．设 $\chi_k=1$，如果 $|\zeta_k|>(l-1)\alpha+(l-2)C$，和当 $i<k$ 时，$|\zeta_i|\leqslant(l-1)\alpha+(l-2)C$；在其余情形设 $\chi_k=0$ 那末

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left\{\sup_{k\leqslant n}|\zeta_k|>l\alpha+(l-1)C\right\}&=\mathbf{P}\left\{\sup_{k\leqslant n}|\zeta_k|\right.\\&\qquad\left.>l\alpha+(l-1)C\,|\,\chi_i=1\right\}\mathbf{P}\{\chi_i=1\}\\&\leqslant\sum_{i=1}^n\mathbf{P}\left\{\sup_{i<k\leqslant n}|\zeta_k-\zeta_i|>\alpha\right\}\mathbf{P}\{\chi_i=1\}\\&\leqslant\sup_{1\leqslant i\leqslant n}\mathbf{P}\left\{\sup_{i<k\leqslant n}|\zeta_k-\zeta_i|>\alpha\right\}\sum_{i=1}^n\mathbf{P}\{\chi_i=1\}\\&\leqslant\mathbf{P}\left\{\sup_{1\leqslant i<k\leqslant n}|\zeta_k-\zeta_i|>\alpha\right\}\mathbf{P}\left\{\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|\zeta_k|\right.\\&\qquad\left.>(l-1)\alpha+(l-2)C\right\}.\end{aligned}$$

最后注意到

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{1\leqslant i<k\leqslant n}|\zeta_k-\zeta_i|>\alpha\right\}\leqslant\mathbf{P}\left\{\sup_{k\leqslant n}|\zeta_k|>\frac{\alpha}{2}\right\}.$$

引理得证．

随机变量 ξ 称为**对称的**，如果 ξ 和 $-\xi$ 有相同的分布．

引理 3 如果 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是对称的独立随机变量，那末

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k\leqslant n}|\zeta_k|>\varepsilon\right\}\leqslant2\mathbf{P}\{|\zeta_n|>\varepsilon\}.$$

证．如果 $|\zeta_k|>\varepsilon$ 及当 $i<k$ 时 $|\zeta_i|\leqslant\varepsilon$，设 $\chi_k=1$；在其

余情形，设 $\chi_k = 0$. 那末

$$\mathbf{P}\{|\zeta_n| > \varepsilon, \chi_k = 1\} \geqslant \mathbf{P}\{(\zeta_n - \zeta_k, \zeta_k) \geqslant 0, \chi_k = 1\}$$
$$= \mathbf{P}\{(\zeta_n - \zeta_k, \zeta_k) \geqslant 0 | \chi_k = 1\} P\{\chi_k = 1\}$$
$$\geqslant \frac{1}{2} \mathbf{E}\chi_k.$$

因此

$$\mathbf{P}\{|\zeta_n| > \varepsilon\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{|\zeta_n| > \varepsilon, \chi_k = 1\}$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\chi_k = \frac{1}{2}\mathbf{P}\left\{\sup_{k\leqslant n} |\zeta_k| > \varepsilon\right\}.$$

引理得证.

引理 4 设 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是独立随机变量，使得对所有 $k \leqslant n$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{i=k}^{n} \xi_i\right| > C\right\} < \alpha.$$

那末

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k\leqslant n} |\zeta_k| > a + C\right\} \leqslant \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{P}\{|\zeta_n| > a\}. \tag{4}$$

此论断的证明类似于第二章 § 3 定理 6 的证明.

现在利用这些引理证明关于 Hilbert 空间的 Колмогоров 三级数定理.

定理 1 如果 $\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots$ 是在 $\mathscr{X}$ 中取值的独立随机变量序列，那末级数 $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i$ 收敛的必要条件是，对任意 $C \geqslant 0$ 如下的级数收敛：

1) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $a_i = \int_{|x|\leqslant C} x\mu_{\xi_i}(dx)$;

2) $\sum_{i=1}^{\infty} \int_{|x|\leqslant \varepsilon} |x - a_i|^2 \mu_{\xi_i}(dx)$;

3) $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|\xi_i| > C\}$.

充分条件只要求对一个 $C>0$ 这些级数是收敛的。

定理条件的充分性的证明和一维情形一样（见第二章 § 3 定理 5）。

条件 3）的必要性由对任意 $C>0$ 仅有有限个事件 $\{|\xi_i|>C\}$ 发生及 Borel-Cantelli 引理得到。仅证明条件 1) 和 2) 的必要性。设 $\xi'_k=\xi_k$ 当 $|\xi_k|\leqslant C$，和 $\xi'_k=0$ 当 $|\xi_k|>C$。因为由条件 3) 得知，在 $\xi_k-\xi'_k$ 中仅有有限个异于 0，所以级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\xi'_k$ 与级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ 同时收敛。因此 $\sup_{n,p}\left|\sum_{k=n}^{n+p}\xi'_k\right|$ 是有限值。由于引理 2，对所有自然数 l

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi'_k\right|>l(C+\alpha)\right\}\leqslant\left(\mathbf{P}\left\{\sup_{n,p}\left|\sum_{k=n}^{n+p}\xi'_k\right|>\frac{\alpha}{2}\right\}\right)^l.$$

选取 α 使得

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{n,p}\left|\sum_{k=n}^{n+p}\xi'_k\right|>\frac{\alpha}{2}\right\}\leqslant e^{-1}.$$

那末对所有 n

$$\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi'_k\right|>t\right\}\leqslant Ke^{-\lambda t},$$

其中

$$\lambda=\frac{1}{C+\alpha},\qquad K=e^{C+\alpha}.$$

由此不等式得，$\mathbf{E}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi'_k\right|$ 对所有 s 一致有界，因此由积分号下取极限的定理，极限

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi'_k\right|^s=\mathbf{E}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\xi'_k\right|^s$$

是存在的。特别，当 $s=2$ 时存在极限：

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k'\right|^2=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}|\xi_k'-a_k|^2+\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|^2\right).$$

于是，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}|\xi_k'-a_k|^2$$

收敛．但此时由定理的条件的充分性得级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\xi_k'-a_k)$$

的收敛性，而因为级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k' \text{ 也收敛，所以级数 } \sum_{k=1}^{\infty}a_k \text{ 也收敛.}$$

定理得证.

推论 由独立随机变量组成的级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ 收敛的充分条件是，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}\xi_k \text{ 和 } \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}|\xi_k-\mathbf{E}\xi_k|^2$$

收敛，其中

$$\mathbf{E}\xi_k=\int x\mu_{\xi_k}(dx)$$

是 $\mathscr{X}$ 中的向量，使得对所有 $z\in\mathscr{X}$ $(\mathbf{E}\xi_k,z)=\int(x,z)\mu_{\xi_k}(dx)$.

由独立随机变量组成的级数的收敛条件可用特征泛函的术语表示.

定理 2 设 $\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots$ 是独立随机变量且 $\chi_n(z)$ 是它们的特征泛函． 级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ 收敛的充分必要条件是乘积 $\prod_{k=1}^{\infty}\chi_k(z)$ 在每一区域 $\{z:|z|\leqslant C\}$ 上一致收敛于某一特征泛函 $\chi(z)$.

证．必要性．设

$$\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \qquad \zeta = \lim_{n\to\infty} \zeta_n.$$

则对每个 $\delta > 0$

$$\left| \prod_{k=1}^{\infty} \chi_k(z) - \prod_{k=1}^{n} \chi_k(z) \right| = |\mathbf{E}e^{i(z,\zeta)} - \mathbf{E}e^{i(z,\zeta_n)}|$$

$$\leqslant \mathbf{E}|e^{i(\zeta-\zeta_n,z)} - 1| \leqslant 2\mathbf{P}\{|\zeta - \zeta_n| > \delta\} + \delta|z|.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|\zeta - \zeta_n| > \delta\} \to 0,$$

故定理的条件的必要性得证.

充分性．引入相互独立且与 ξ_k 相互独立，与 ξ_k 有同分布的随机变量 ξ_k'．令 $\eta_k = \xi_k - \xi_k'$．先证明由 η_k 组成的级数的收敛性．显然

$$\mathbf{E}e^{i(z,\eta_k)} = |\chi_k(z)|^2.$$

由不等式

$$1 - \prod_{k=1}^{n} |\chi_k(z)|^2 \leqslant 1 - \prod_{k=1}^{\infty} |\chi_k(z)|^2 = 1 - |\chi(z)|^2$$

及 $|\chi(z)|^2$ 是某一测度的特征泛函得知，$\sum_{k=1}^{n} \eta_k$ 的分布构成测度的紧族．因此

$$\lim_{C\to\infty} \sup_n \mathbf{P}\left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} \eta_k \right| > C \right\} = 0.$$

但由于引理 3

$$\lim_{C\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \sup_{n,p} \left| \sum_{k=n}^{n+p} \eta_k \right| > C \right\} \leqslant \lim_{C\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \sup_n \left| \sum_{k=1}^{n} \eta_k \right| > \frac{C}{2} \right\}$$

$$\leqslant 2 \lim_{C\to\infty} \sup_n \mathbf{P}\left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} \eta_k \right| > \frac{C}{2} \right\} = 0.$$

因此随机变量 $\sup_{n,p} \left| \sum_{k=n}^{n+p} \eta_k \right|$ 是有限的．特别，随机变量 $\sup_k |\eta_k|$ 是

有限的．因此对足够大的 C

$$0<\mathbf{P}\left\{\sup_k |\eta_k| \leqslant C\right\}=\prod_{k=1}^{\infty}(1-\mathbf{P}\{|\eta_k|>C\})$$

$$\leqslant \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\{|\eta_k|>C\}\right\},$$

所以级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\{|\eta_k|>C\}$ 收敛． 设 $\eta_k'=\eta_k$ 对于 $|\eta_k|\leqslant C$；$\eta_k'=0$ 对于 $|\eta_k|>C$． 那末随机变量

$$\sup_{n,p}\left|\sum_{k=n}^{n+p}\eta_k'\right|$$

也是有限的，因为除去有限多个指标 k 外 $\eta_k'=\eta_k$．由这个随机变量的有限性，和定理 1 一样可得到级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}|\eta_k'|^2$ 的收敛性(因为 $\mathbf{E}\eta_k'=0$)．因此，由定理 1 可得级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k=\sum_{k=1}^{\infty}(\xi_k-\xi_k')$$

以概率为 1 收敛．因此可以在 $\mathscr{H}$ 中找到这样的向量序列 $x_1,\cdots,x_n,\cdots$(ξ_k' 的可能值)，使得级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(\xi_k-x_k)$ 以概率为 1 收敛．

余下要证明的就是级数 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ 的收敛性． 由于已经证明了定理条件的必要性，无穷乘积

$$\prod_{k=1}^{\infty}e^{-i(z,x_k)}\chi_k(z)$$

当 $|z|\leqslant C$ 时是一致收敛的．因为可找到 δ，使得当 $|z|\leqslant\delta$ 时，

$$|\chi(z)|>\frac{1}{2},$$

所以当 $|z|\leqslant\delta$ 时，存在一致极限

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} e^{-i(z,x_k)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\chi(z)}\prod_{k=1}^{n} e^{-i(z,x_k)}\chi_k(z).$$

因此当 $|z| \leqslant \delta$ 时极限 $\lim_{n\to\infty}\left(z, \sum_{k=1}^{n} x_k\right)$ 对 z 一致存在，就是说，当 $|z| \leqslant C$ 时对 z 一致存在，不论是怎样的 $C > 0$. 由此得出 $\sum_{k=1}^{n} x_k$ 有弱极限 x:

$$\lim_{n\to\infty}\left(z, \sum_{k=1}^{n} x_k\right) = (z, x)$$

和 $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|$ 是总体有界的. 由一致收敛性得，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, x\right) = (x, x).$$

因此，$\sum_{k=1}^{n} x_k$ 弱收敛于 x 且 $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \to |x|$. 就是说 $\sum_{k=1}^{n} x_k \to x$. 定理得证.

推论 如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ 依概率收敛，那末它也以概率 1 收敛.

事实上，在证明定理 2 条件的必要性时仅利用到级数的依概率收敛性.

在 Hilbert 空间中的无穷可分分布 分布（测度）μ 称为*无穷可分的*，如果它的特征泛函 $\chi(z)$ 满足条件：对于任意自然数 n 存在某个分布的特征泛函 $\chi_n(z)$，使得 $\chi(z) = (\chi_n(z))^n$. 现在我们寻求无穷可分分布的特征泛函的一般形式.

设 ξ 是在 $\mathscr{X}$ 中取值的随机变量，使得 $\mathbf{E}e^{i(z,\xi)} = \chi(z)$，而 $\xi_{n1}, \cdots, \xi_{nn}$ 是独立同分布随机变量，且有

$$\mathbf{E}e^{i(z,\xi_{nk})} = \chi_n(z), \qquad \xi = \sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}.$$

我们证明，对任意 $\varepsilon > 0$ 可以找到 C，使得对所有 $k \leqslant n$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{j=k}^{n} \xi_{nj}\right| > C\right\} < \varepsilon. \tag{5}$$

设 S 是核算子，使得

$$1 - \mathrm{Re}\chi(z) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \left(\varepsilon < \frac{1}{4}\right), \text{ 当}(Sz, z) \leqslant 1.$$

那末

$$|\mathrm{Im}\chi(z)| \leqslant \sqrt{1 - (\mathrm{Re}\chi(z))^2} < \sqrt{\varepsilon}.$$

因此

$$|\arg\chi(z)| \leqslant \mathrm{arctg} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1 - \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\pi}{4},$$

$$1 - \mathrm{Re}(\chi_n(z))^{n-k} = 1 - |\chi(z)|^{\frac{n-k}{n}} \cos\left[\frac{n-k}{n} \arg\chi(z)\right]$$

$$< 1 - |\chi(z)| \cos\arg\chi(z) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

利用第五章 § 5 不等式 (7)，可以得到

$$\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{j=k}^{n} \xi_{nj}\right| > C\right\} \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2} + 2\lambda \mathrm{Sp} S\right)\left(1 - e^{-\frac{\lambda C^2}{2}}\right)^{-1}.$$

由这个不等式就有可能选取 λ 和 C 使得 (5) 成立． 现由引理 4，我们得

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k \leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{k} \xi_{nj}\right| > 2C\right\} \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon} \mathbf{P}\left\{\left|\sum_{j=1}^{n} \xi_{nj}\right| > C\right\}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \tag{6}$$

最后，

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k \leqslant n} |\xi_{nk}| > 4C\right\} \leqslant P\left\{\sup_{k \leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{k} \xi_{nj}\right| > 2C\right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

因此，

$$\prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{|\xi_{nk}| \leqslant 4C\} \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

且

$$\exp\left\{-\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{|\xi_{nk}| > 4C\right\} \geqslant \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{|\xi_{nk}| \leqslant 4C\}$$
$$\geqslant \frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{|\xi_{nk}| > 4C\} \leqslant \log \frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon}.$$

由后一不等式得到

引理 5 对于所有足够大的 C

$$\sup_{n} n\mathbf{P}\{|\xi_{n1}| > C\} < \infty, \tag{7}$$

且

$$\lim_{C\to\infty} \sup_{n} n\mathbf{P}\{|\xi_{n1}| > C\} = 0. \tag{8}$$

定义 $\xi'_{ni} = \xi_{ni}$ 当 $|\xi_{ni}| \leqslant C$ 时， $\xi'_{ni} = 0$ 当 $|\xi_{ni}| > C$ 时，其中 C 使得

$$\sup_{n} n\mathbf{P}\{|\xi_{n1}| > C\} < \frac{1}{2}.$$

那末

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{k} \xi'_{nj}\right| > \alpha\right\} \leqslant \mathbf{P}\left\{\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{k} \xi_{nj}\right| > \alpha\right\}$$
$$+ nP\{|\xi_{n1}| > C\}.$$

由 (6) 以及选取 C 得到，对足够大的 α，对所有 n 有

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{k} \xi'_{nj}\right| > \alpha\right\} < \frac{1}{2}.$$

因此由引理 2， $\mathbf{E}\left|\sum_{j=1}^{n} \xi'_{nj}\right|$， $\left|\mathbf{E}\sum_{j=1}^{n} \xi'_{nj}\right|$， $\mathbf{E}\left|\sum_{j=1}^{n} \xi'_{nj}\right|^2$ 对 n 是一致有界的．由此特别有

$$|\mathbf{E}\,\xi'_{n1}| = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{9}$$

用 μ_n 表示变量 ξ_{ni} 的分布所对应的测度，而用 π_n 表示由关系式

$$\pi_n(A) = n\int_A \frac{|x|^2}{1+|x|^2}\,\mu_n(dx)$$

所定义的测度．测度 $\pi_n(A)$ 是一致有界的：

$$\pi_n(\mathscr{X}) \leqslant \mathbf{E}\left|\sum_{j=1}^{n}\xi'_{nj}\right|^2 + n\mathbf{P}\{|\xi_{nj}| > C\}.$$

从 (8) 得知，测度 π_n 具有性质

$$\lim_{C\to\infty}\sup_n \pi_n(\{x:\,|x| > C\}) = 0. \tag{10}$$

现往证测度 π_n 是紧的．为此只要证明，对任意 $\varepsilon > 0$ 存在核算子 S，使得当 $(Sz,z) \leqslant 1$ 时就有

$$\pi_n(\mathscr{X}) - \mathrm{Re}\int e^{i(z,x)}\pi_n(dx) \leqslant \varepsilon.$$

但

$$\begin{aligned}
&\pi_n(\mathscr{X}) - \mathrm{Re}\int e^{i(z,x)}\pi_n(dx)\\
&\quad = n\int(1-\cos(z,x))\frac{|x|^2}{1+|x|^2}\,\mu_n(dx) \leqslant n[1-\mathrm{Re}\chi_n(z)]\\
&\quad = n\left[1-|\chi(z)|^{1/n}\cos\left(\frac{1}{n}\arg\chi(z)\right)\right]\\
&\quad \leqslant n[1-|\chi(z)|^{1/n}] + n|x(z)|^{1/n}\left(1-\cos\left[\frac{1}{n}\arg\chi(z)\right]\right)\\
&\quad \leqslant \frac{1-|\chi(z)|}{|\chi(z)|} + \frac{1}{2n}[\arg\chi(z)]^2.
\end{aligned}$$

假定

$$1-\mathrm{Re}\chi(z) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,(\varepsilon < 1),$$

那末

$$|\mathrm{Im}\chi(z)| < \sqrt{\varepsilon}.$$

因此在满足这一假定的每一连通区域里，

$$|\arg\chi(z)| < \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\pi}{4},\ 1-|\chi(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

如果 S 是核算子,使得当 $(Sz,z)\leqslant 1$ 时

$$1-\operatorname{Re}\chi(z)\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

那末对这些 z

$$\pi_n(\mathscr{X})-\operatorname{Re}\int e^{i(z,x)}\pi_n(dx)\leqslant\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1-\frac{\varepsilon}{2}}+\frac{1}{2n}\frac{\varepsilon}{\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}.$$

当 $n>1$ 和 ε 足够小,右边部分小于 ε. 测度 π_n 的紧性得证。

设 a_n 由关系式

$$(a_n,z)=n\int\frac{(z,x)}{1+|x|^2}\mu_n(dx)=n\mathbf{E}\frac{(z,\xi_{ni})}{1+|\xi_{ni}|^2}$$

所定义。

由 (9) 得到, a_n 是总体有界的. 最后用等式

$$(V_nz,z)=n\int\frac{(z,x)^2}{1+|x|^2}\mu_n(dx)$$

定义对称线性算子 V_n. 注意到

$$\operatorname{Sp}V_n=n\int\frac{|x|^2}{1+|x|^2}\mu_n(dx)=\pi_n(\mathscr{X}),$$

于是 $\operatorname{Sp}V_n$ 是一致有界的。

选取子序列 n' 使得: 1) $\pi_{n'}$ 弱收敛于 π', 2) $a_{n'}$ 弱收敛于某个向量 a 和 3) 对所有 z 存在极限

$$\lim_{n'\to\infty}(V_{n'}z,z)=(Vz,z). \tag{11}$$

后一条件是可能的,因为,由于一致有界性 ($\|V_n\|\leqslant\operatorname{Sp}V_n$), (11) 式只要在 $\mathscr{X}$ 的某一可数稠密集成立就够了. 显然 V 也是核算子,因为

$$\operatorname{Sp}V\leqslant\varliminf_{n'\to\infty}\operatorname{Sp}V_{n'},$$

其次，令 $\pi(A)=\pi'(A)$ 如果 $0\bar{\in}A$，$\pi(\{0\})=0$，那末

$$\chi(z)=[\chi_{n'}(z)]^{n'}=\lim_{n'\to\infty}\Big[1+\frac{1}{n'}\Big\{i(a_{n'},z)-\frac{1}{2}(V_{n'}z,z)$$

$$+\int\Big(e^{i(z,x)}-1-\frac{i(z,x)}{1+|x|^2}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{(z,x)^2}{1+|x|^2}\Big)\frac{1+|x|^2}{|x|^2}\pi_{n'}(dx)\Big\}\Big]^{n'}$$

$$=\exp\Big\{i(a,z)-\frac{1}{2}(Vz,z)+\int\Big(e^{i(z,x)}-1$$

$$-\frac{i(z,x)}{1+|x|^2}+\frac{1}{2}\frac{(z,x)^2}{1+|x|^2}\Big)\frac{1+|x|^2}{|x|^2}\pi'(dx)\Big\}.$$

函数

$$\Big(e^{i(z,x)}-1-\frac{i(z,x)}{1+|x|^2}+\frac{1}{2}\frac{(z,x)^2}{1+|x|^2}\Big)\frac{1+|x|^2}{|x|^2}$$

在 $x=0$ 的值按连续性可定义为0．因此

$$\chi(z)=\exp\Big\{i(a,z)-\frac{1}{2}(Bz,z)+\int\Big(e^{i(z,x)}-1-\frac{i(z,x)}{1+|x|^2}\Big)$$

$$\times\frac{1+|x|^2}{|x|^2}\pi(dx)\Big\},\tag{12}$$

其中

$$(Bz,z)=(Vz,z)-\int\frac{(z,x)^2}{|x|^2}\pi(dx).$$

由于

$$(Bz,z)=\lim_{n'\to\infty}\int\frac{(z,x)^2}{|x|^2}\pi_{n'}(dx)-\int\frac{(z,x)^2}{|x|^2}\pi(dx)$$

和对几乎所有 $\varepsilon>0$（使得 $\pi(\{x:|x|=\varepsilon\})=0$ 的 ε）

$$\lim_{n'\to\infty}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{(z,x)^2}{|x|^2}\pi_{n'}(dx)=\int_{|x|>\varepsilon}\frac{(z,x)^2}{|x|^2}\pi(dx),$$

而只要合适选取 $\varepsilon>0$，

$$\int_{|x|\leqslant\varepsilon}\frac{(z,x)^2}{|x|^2}\pi(dx)$$

就可做到任意小，所以对所有 z，$(Bz,z)\geqslant 0$．因此对每个无穷

可分分布来说，都能找到向量 $a \in \mathscr{X}$，核算子 B 和使 $\pi(\{0\}) = 0$ 的有限测度 π，使得此分布的特征泛函具有形式 (12).

现在我们来证明逆命题，即证明式 (12) 确定了某个分布的特征泛函. 设 P 是在有限维子空间 $\mathscr{L}$ 上的投影算子，那末当 z 在 $\mathscr{L}$ 上变化时，$\chi(Pz)$ 是 $\mathscr{L}$ 中某一无穷可分分布的特征泛函，由此可得 $\chi(z)$ 的正定性.

其次，利用关系式

$$1 - |\chi(z)| \leqslant \frac{1}{2}(Bz, z) + \int (1 - \cos(z, x))\pi(dx) + \frac{1}{2}\int \frac{(z, x)^2}{|x|^2}\pi(dx),$$

$$\arg\chi(z) = (a, z) + \int \sin(z, x)\pi(dx) + \int \frac{\sin(z, x) - (z, x)}{|x|^2}\pi(dx),$$

$$|\sin t - t| \leqslant \frac{t^2}{2}, \qquad \sin^2 t \leqslant 4(1 - \cos t),$$

可以证明对于某个 C，

$$1 - \operatorname{Re}\chi(z) \leqslant 1 - |\chi(z)| + \frac{1}{2}(\arg\chi(z))^2$$

$$\leqslant C\left[(a, z)^2 + (Bz, z) + \int (1 - \cos(z, x))\pi(dx) + \int \frac{(z, x)^2}{|x|^2}\pi(dx) + \left(\int \frac{(z, x)^2}{|x|^2}\pi(dx)\right)^2\right].$$

对于测度 π 可找到核算子 S'，使得对每个 $\varepsilon > 0$ 有

$$\int (1 - \cos(z, x))\pi(dx) < \frac{\varepsilon}{2C}, \quad 当 \ (S'z, z) < 1.$$

令

$$S = \frac{2C}{\varepsilon - \varepsilon^2}(B + U) + S',$$

其中核算子 U 由等式

$$(Uz,z)=(a,z)^2+\int\frac{(z,x)^2}{|x|^2}\pi(dx),\quad \mathrm{Sp}U=|a|^2+\pi(\mathscr{X})$$

所定义，我们有：当 $(Sz,z)<1$ 时，$1-\mathrm{Re}\chi(z)<\varepsilon$．因此 $\chi(z)$ 是特征泛函．从而我们证明了下面的定理：

定理 3 泛函 $\chi(z)$ 是某一无穷可分分布的特征泛函的充分必要条件是存在向量 $a\in\mathscr{X}$，核算子 B 和 $\mathfrak{B}$ 上满足 $\pi(\{0\})=0$ 的有限测度 π，使得 $\chi(z)$ 能用式(12)表示．

注．$\chi(z)$ 的表示式(12)是唯一的．事实上，

$$(Bz,z)=-2\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\ln\chi(tz).$$

因此今后可以认为 $B=0$．设 $\{e_k\}$ 是某一基并且数 $c_k>0$ 使得

$$\sum_k|c_k|<\infty.$$

那末级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k\left[1-\frac{e^{it(x,e_k)}+e^{-it(x,e_k)}}{2}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(1-\cos t(e_k,x))$$

单调收敛于有界函数，因此级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k\left[\ln\chi(z)-\frac{\ln\chi(z+te_k)-\ln\chi(z-te_k)}{2}\right]$$

$$=\int e^{i(z,x)}\sum_{k=1}^{\infty}c_k[1-\cos t(e_k,x)]\frac{1+|x|^2}{|x|^2}\pi(dx)\quad (13)$$

收敛．因而，知道了 $\chi(z)$ 就可以确定表达式

$$\int e^{i(z,x)}\sum_{k=1}^{\infty}c_k\left(1-\frac{\sin\delta(e_k,x)}{\delta(e_k,x)}\right)\frac{1+|x|^2}{|x|^2}\pi(dx),\quad (14)$$

它可从(13)式的右边按变量 t 从 $-\delta$ 到 δ 求积分，然后除以 2δ 得到．因此测度

$$\tilde{\pi}(A)=\int_A\sum_{k=1}^{\infty}c_k\left(1-\frac{\sin\delta(e_k,x)}{\delta(e_k,x)}\right)\frac{1+|x|^2}{|x|^2}\pi(dx)$$

被唯一地确定，因为(14)是这个测度的特征泛函．测度 π 完全由

下述条件所确定：

1）$\pi(\{0\})=0$，

2）如果 $0\bar{\in}A$，那末

$$\pi(A)=\int_A\left[\sum_{k=1}^{\infty}c_k\left(1-\frac{\sin\delta(e_k,x)}{\delta(e_k,x)}\right)\right]^{-1}\frac{|x|^2}{1+|x|^2}\tilde{\pi}(dx).$$

这就是说，测度 π 被 $\chi(z)$ 的值所确定。因此，a 也就被 $\chi(z)$ 的值所唯一确定。

独立随机变量和的极限定理 设 $\xi_{n1},\cdots,\xi_{nk_n}$ 是独立随机变量组的序列：$\zeta_n=\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{nk}$。假定变量 ξ_{nk} 无穷小，即对任意 $\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty}\sup_k \mathbf{P}\{|\xi_{nk}|>\varepsilon\}=0.$$

我们来寻求当 $n\to\infty$ 时 ζ_n 的分布收敛于某一极限分布的条件．用 μ_{nk} 表示变量 ξ_{nk} 的分布，用 ν_n 表示 ζ_n 的分布．其次，设 $a_{nk}\in\mathscr{X}$ 由下等式所定义：对所有 $z\in\mathscr{X}$

$$(a_{n,k},z)=\int\frac{(z,x)}{1+|x-a_{nk}|^2}\mu_{nk}(dx).$$

对足够大的 n 满足不等式 $|a_{nk}|<\delta<1$ 的 a_{nk} 的存在与唯一性由下关系式得到：

$$|Ta|\leqslant\int\frac{|x|}{1+|x-a|^2}\mu_{nk}(dx)\leqslant\varepsilon+|a|\mu_{nk}(\{x:|x|>\varepsilon\}),$$

其中

$$(Ta,z)=\int\frac{(x,z)}{1+|x-a|^2}\mu_{nk}(dx),$$

$$|Ta-Tb|\leqslant|a-b|\int\frac{(2|x|+|a|+|b|)|x|}{(1+|x-a|^2)(1+|x-b|^2)}\mu_{nk}(dx)$$
$$\leqslant|a-b|[2\varepsilon^2+2\delta\varepsilon+L\mu_{nk}(\{x:|x|>\varepsilon\})],$$
$$L=\sup\left\{\frac{(2|x|+|a|+|b|)|x|}{(1+|x-a|^2)(1+|x-b|^2)}\right\};$$

$$|a| \leqslant \delta, |b| \leqslant \delta, x \in \mathscr{X} \Big\} \leqslant 2\frac{(1+\delta)^2}{(1-\delta)^2}.$$

由这些不等式得知，T 在区域 $|a| < \delta < 1$ 是压缩算子且将此区域映射到它自身．因此 a_{nk} 存在且唯一．令

$$a_n = \sum_{k=1}^{k_n} a_{nk}, \qquad (V_n z, z) = \sum_{k=1}^{k_n} (V_{nk} z, z),$$

$$(V_{nk} z, z) = \int \frac{(z, x - a_{nk})^2}{1 + |x - a_{nk}|^2} \mu_{nk}(dx),$$

且设测度 μ_n 由等式

$$\int e^{i(z,x)} \mu_n(dx) = \sum_{k=1}^{k_n} \int e^{i(z,x-a_{nk})} \frac{|x - a_{nk}|^2}{1 + |x - a_{nk}|^2} \mu_{nk}(dx).$$

所定义．

定理 4 当 $n \to \infty$ 时测度序列 ν_n 弱收敛于某个测度 ν 的充分必要条件是：

1）μ_n 弱收敛于某个测度 π'；

2）存在极限 $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$；

3）算子序列 V_n 是使得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (V_n e_k, e_k)$ 对于 n 一致收敛且对每个 z $\lim\limits_{n \to \infty} (V_n z, z) = (Vz, z)$ 存在，其中 V 是核算子．同时，极限分布的特征泛函由式(12)给出，其中

$$(Bz, z) = (Vz, z) - \int \frac{(x, z)^2}{|x|^2} \pi(dx),$$

$$\pi(A) = \pi'(A) \quad \text{当 } 0 \bar{\in} A, \quad \pi(\{0\}) = 0.$$

证．充分性．我们有

$$\mathbf{E} e^{i(z,\zeta_n)} = \mathbf{E} e^{i(z,a_n)} \prod_{k=1}^{k_n} \int e^{i(z,x-a_{nk})} \mu_{nk}(dx)$$

$$= \mathbf{E} e^{i(z,a_n)} \prod_{k=1}^{k_n} \Big\{ 1 - \frac{1}{2} (V_{nk} z, z) + \iint \Big[e^{i(z,x-a_{nk})} - 1$$

$$-\frac{i(z, x-a_{nk})}{1+|x-a_{nk}|^2}+\frac{1}{2}\frac{(x-a_{nk}, z)^2}{1+|x-a_{nk}|^2}\Big]\mu_{nk}(dx)\Big\}.$$

注意

$$\Big|-\frac{1}{2}(V_{nk}z, z)+\int\Big[e^{i(z,x-a_{nk})}-1-\frac{i(z, x-a_{nk})}{1+|x-a_{nk}|}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{(z, x-a_{nk})^2}{1+|x-a_{nk}|^2}\Big]\mu_{nk}(dx)\Big|$$

$$\leqslant \Big|\int[\cos(z, x-a_{nk})-1]\mu_{nk}(dx)$$

$$+i\int\Big[\sin(z, x-a_{nk})-\frac{(z, x-a_{nk})}{1+|x-a_{nk}|^2}\Big]\mu_{nk}(dx)\Big|$$

$$=O(V_{nk}z, z)+(1+|z|)\mu_{nk}(\{x: |x|>1\}).$$

由后一不等式得

$$\ln \mathbf{E}\, e^{i(z,\zeta_n)}=i(z, a_n)-\frac{1}{2}(V_nz, z)$$

$$+\sum_{k=1}^{k_n}\int\Big[e^{i(z,x-a_{nk})}-1-\frac{i(z, x-a_{nk})}{1+|x-a_{nk}|^2}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{(z, x-a_{nk})^2}{1+|x-a_{nk}|^2}\Big]\mu_{nk}(dx)$$

$$+O\ [\sup_k(V_{nk}z, z)+(1+|z|)\sup_k \mu_{nk}\{x: |x|>1\}].$$

容易验证

$$\lim_{n\to\infty}\sup_k |a_{nk}|=0.$$

此外，

$$\mathrm{Sp}V_{nk}=\int\frac{|x-a_{nk}|^2}{1+|x-a_{nk}|^2}\mu_{nk}(dx)\leqslant 2\delta^2+|a_{nk}|^2$$

$$+P\{|\xi_{nk}|>\delta\},$$

且因此，

$$\lim_{n\to\infty}\sup_k \mathrm{Sp}V_{nk}=0.$$

因此由定理的条件，对所有 z

$$\lim_{n\to\infty} \ln \mathbf{E}\, e^{i(z,\zeta_n)} = i(z, a) - \frac{1}{2}(Vz, z)$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int \left[e^{i(z, x-a_{nk})} - 1 - \frac{i(z, x-a_{nk})}{1+|x-a_{nk}|} + \frac{1}{2} \frac{(z, x-a_{nk})}{1+|x-a_{nk}|^2} \right] \mu_{nk}(dx).$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int \left[e^{i(z, x-a_{nk})} - 1 - \frac{i(z, x-a_{nk})}{1+|x-a_{nk}|^2} + \frac{1}{2} \frac{(z, x-a_{nk})^2}{1+|x-a_{nk}|^2} \right] \mu_{nk}(dx)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int \left(e^{i(z,x)} - 1 - \frac{i(z,x)}{1+|x|^2} + \frac{1}{2} \frac{(z,x)^2}{1+|x|^2} \right) \frac{1+|x|^2}{|x|^2} \mu_n(dx)$$

$$= \int \left(e^{i(z,x)} - 1 - \frac{i(z,x)}{1+|x|^2} + \frac{1}{2} \frac{(z,x)}{1+|x|^2} \right) \frac{1+|x|^2}{|x|^2} \pi'(dx)$$

$$= \int \left(e^{i(z,x)} - 1 - \frac{i(z,x)}{1+|x|^2} + \frac{1}{2} \frac{(z,x)^2}{1+|x|^2} \right) \frac{1+|x|^2}{|x|^2} \pi(dx),$$

因为当 $x = 0$ 时如果我们定义函数

$$\left(e^{i(z,x)} - 1 - \frac{i(z,x)}{1+|x|^2} + \frac{1}{2} \frac{(z,x)^2}{1+|x|^2} \right) \frac{1+|x|^2}{|x|^2}$$

等于 0，那末它是连续的。

因此

$$\lim_{n\to\infty} \ln \mathbf{E} e^{i(z,\zeta_n)} = i(z, a) - \frac{1}{2}(Bz, z)$$

$$+ \int \left(e^{i(z,x)} - 1 - \frac{i(z,x)}{1+|x|^2} \right) \frac{1+|x|^2}{|x|^2} \pi(dx).$$

为了证明测度 ν_n 的弱收敛性，验证它们是弱紧的就够了．但

$$\left|1-\int e^{i(z,x)}\nu_n(dx)\right| = \left|1-e^{i(a_n,z)}\prod_{k=1}^{k_n}\int e^{i(z,x-a_{nk})}\mu_{nk}(dx)\right|$$

$$\leqslant |(a_n,z)| + \sum_{k=1}^{k_n}\left|1-\int e^{i(z,x-a_{nk})}\mu_{nk}(dx)\right|$$

$$\leqslant |(a_n,z)| + \sum_{k=1}^{k_n}\int(1-\cos(z,x-a_{nk}))\mu_{nk}(dx)$$

$$+\sum_{k=1}^{k_n}\left|\int\left[\sin(z,x-a_{nk})-\frac{(z,x-a_{nk})}{1+|x-a_{nk}|^2}\right]\mu_{nk}(dx)\right|.$$

我们利用估计

$$|(a_n,z)|\leqslant\delta+\frac{1}{\delta}(a_n,z)^2,$$

$$\int(1-\cos(z,x-a_{nk}))\mu_{nk}(dx)$$

$$\leqslant\int_{|x-a_{nk}|\leqslant c}(x-a_{nk},z)^2\mu_{nk}(dx)+2\int_{|x-a_{nk}|>c}\mu_{nk}(dx),$$

$$\left|\int\frac{|x-a_{nk}|^2}{1+|x-a_{nk}|^2}\sin(z,x-a_{nk})\mu_{nk}(dx)\right|$$

$$\leqslant\delta\int\frac{|x-a_{nk}|^2}{1+|x-a_{nk}|^2}\mu_{nk}(dx)+\frac{1}{\delta}\int\sin^2(z,x-a_{nk})\mu_{nk}(dx)$$

$$\leqslant\delta\int\frac{|x-a_{nk}|^2}{1+|x-a_{nk}|^2}\mu_{nk}(dx)$$

$$+\frac{1}{\delta}\int_{|x-a_{nk}|\leqslant c}(z,x-a_{nk})^2\mu_{nk}(dx)+\frac{1}{\delta}\int_{|x-a_{nk}|>c}\mu_{nk}(dx),$$

$$\int_{|x-a_{nk}|\leqslant c}(z,x-a_{nk})^2\mu_{nk}(dx)\leqslant(1+c^2)(V_{nk}z,z).$$

由这些估计得不等式

$$\left|1-\int e^{i(z,x)}\nu_n(dx)\right|\leqslant(1+c^2)\left(1+\frac{1}{\delta}\right)(V_nz,z)$$

$$+\frac{1}{\delta}(a_n,z)^2+\delta(\mu_n(\mathscr{X})+1)$$

$$+\left(2+\frac{1}{\delta}\right)\mu_n\left(\left\{x:|x|>c-\sup_k|a_{nk}|\right\}\right).$$

通过选取 δ 和 c，表达式

$$\delta\mu_n(\mathscr{X})+\delta+\left(2+\frac{1}{\delta}\right)\mu_n\left(\left\{x:|x|>c-\sup_k|a_{nk}|\right\}\right)$$

可以变得任意小，所以为证明 ν_n 的紧性，只要证明对于由关系式

$$(S_nz, z)=(V_nz, z)+(a_n, z)^2$$

所定义的算子 S_n，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(S_ne_k, e_k)=\sum_{k=1}^{\infty}(V_ne_k, e_k)+\sum_{k=1}^{\infty}(a_n, e_k)^2$$

关于 n 一致收敛就够了，其中 $\{e_k\}$ 是任意规范正交基.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(V_ne_k, e_k)$$

关于 n 的一致收敛性由条件 (3) 得到，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(a_n, e_k)^2$ 的一致收敛性则由于条件 (2) 有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}[(a_n, e_k)-(a, e_k)]^2=0$$

而得到. 这就证明了定理条件的充分性.

必要性. 设 $\xi'_n, \cdots, \xi'_{nk_n}$ 是在 $\mathscr{X}$ 中取值的相互独立随机变量，且独立于 $\xi_{n1}, \cdots, \xi_{nk_n}$，又设 ξ_{n1} 与 ξ'_{n1} 具有相同的分布. 由于

$$\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{k_n}(\xi_{nk}-\xi'_{nk})\right|>2c\right\}\leqslant 2\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{nk}\right|>c\right\}$$

和变量 $\xi_{nk}-\xi'_{nk}$ 是对称的，所以由于引理 3

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{j\leqslant k_n}\left|\sum_{k=1}^{j}(\xi_{nk}-\xi'_{nk})\right|>2c\right\}\leqslant 4\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{nk}\right|>c\right\},$$

因此

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k\leqslant k_n}|\xi_{nk}-\xi'_{nk}|>4c\right\}\leqslant 4\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{nk}\right|>c\right\}.$$

如果 c 足够大使得

$$4\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{nk}\right|>c\right\}<1,$$

那末由于不等式 $x\leqslant -\ln(1-x)$,

$$\sum_{k=1}^{k_n}\mathbf{P}\{|\xi_{nk}-\xi'_{nk}|>4c\}\leqslant -\sum_{k=1}^{k_n}\ln\mathbf{P}\{|\xi_{nk}-\xi'_{nk}|\leqslant 4c\}$$

$$=-\ln\mathbf{P}\left\{\sup_{k\leqslant k_n}|\xi_{nk}-\xi'_{nk}|\leqslant 4c\right\}$$

$$\leqslant -\ln\left(1-4\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{nk}\right|>c\right\}\right).$$

因而能找到向量 b_{nk}, 使得

$$\sum_{k=1}^{k_n}\mathbf{P}\{|\xi_{nk}-b_{nk}|>4c\}\leqslant -\ln\left(1-4\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{nk}\right|>c\right\}\right).$$

因为对任意 $\varepsilon>0$, $\sup\limits_k \mathbf{P}\{|\xi_{nk}|>\varepsilon\}\to 0$, 所以只要

$$-\ln\left(1-4\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{nk}\right|>c\right\}\right)<1-\sup_k\mathbf{P}\{|\xi_{nk}|>\varepsilon\}.$$

就有 $|b_{nk}|\leqslant c+\varepsilon$. 取 $\varepsilon=c$, 我们得

$$\sum_{k=1}^{k_n}\mathbf{P}\{|\xi_{nk}|>9c\}\leqslant -\ln\left(1-4\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{nk}\right|>c\right\}\right). \quad (14')$$

设 $\psi_c(x)=1$ 当 $|x|\leqslant c$ 时; $\psi_c(x)=0$ 当 $|x|>c$ 时. 那末

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k\leqslant k_n}\left|\sum_{j=1}^{k}\psi_c(\xi_{nj}-\xi'_{nj})(\xi_{nj}-\xi'_{nj})\right|>\alpha\right\}$$

$$\leqslant 2\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{j=1}^{k_n}\psi_c(\xi_{nj}-\xi'_{nj})(\xi_{nj}-\xi'_{nj})\right|>\alpha\right\}$$

$$\leqslant 2\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{j=1}^{k_n}(\xi_{nj}-\xi'_{nj})\right|>\alpha\right\}+2\mathbf{P}\left\{\sup_j|\xi_{nj}-\xi'_{nj}|>c\right\}$$

$$\leqslant 2\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{j=1}^{k_n}(\xi_{nj}-\xi'_{nj})\right|>\alpha\right\}$$

$$+\ 4\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{j=1}^{k_n}(\xi_{nj}-\xi'_{nj})\right|>\frac{c}{2}\right\}$$

$$\leqslant 4\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{j=1}^{k_n}\xi_{nj}\right|>\frac{\alpha}{2}\right\}+8\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{j=1}^{k_n}\xi_{nj}\right|>\frac{c}{4}\right\}.$$

对足够大的 α 和 c 这不等式的右边可以变得任意小，因此由引理 2

$$\mathbf{E}\left|\sum_{j=1}^{k_n}\psi_c(\xi_{nj}-\xi'_{nj})(\xi_{nj}-\xi'_{nj})\right|^2$$

对 n 一致有界（对所有足够大的 c）。但对所有 $\delta>0$

$$\mathbf{E}\psi_c(\xi_{nj}-\xi'_{nj})|\xi_{nj}-\xi'_{nj}|^2$$

$$\geqslant \mathbf{P}\{|\xi'_{nj}|\leqslant\delta\}\inf_{|a|\leqslant\delta}\int_{|x|<c-\delta}|x-a|^2\mu_{nj}(dx).$$

用 $\tilde{a}_{nj}$ 表示使得能达到下确界的 a。对足够大的 n

$$\tilde{a}_{nj}=\int_{|x|<c-\delta}x\mu_{nj}(dx).$$

因为当 $n\to\infty$ 时

$$\inf_j \mathbf{P}\{|\xi'_{nj}|\leqslant\delta\}=\inf_j \mathbf{P}\{|\xi_{nj}|\leqslant\delta\}\to 1,$$

所以

$$\sup_n\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<c-\delta}|x-\tilde{a}_{nk}|^2\mu_{nk}(dx)<\infty.$$

从后一不等式和 (14′)，我们得

$$\sup_n\sum_{k=1}^{k_n}\int\frac{|x-\tilde{a}_{nk}|^2}{1+|x-a_{nk}|^2}\mu_{nk}(dx)<\infty. \tag{15}$$

但

$$|x-\tilde{a}_{nk}|^2=|x-a_{nk}|^2+2(x-a_{nk},\tilde{a}_{nk}-a_{nk})$$
$$+|\tilde{a}_{nk}-a_{nk}|^2.$$

又因为

$$\int\frac{(x-a_{nk},a_{nk}-\tilde{a}_{nk})}{1+|x-a_{nk}|^2}\mu_{nk}(dx)=0,$$

所以

$$\sup_n \sum_{k=1}^{k_n} \int \frac{|x-a_{nk}|^2+|a_{nk}-\tilde{a}_{nk}|^2}{1+|x-a_{nk}|^2} \mu_{nk}(dx) < \infty.$$

由此得

$$\sup_n \sum_{k=1}^{k_n} \int \frac{|x-a_{nk}|^2}{1+|x-a_{nk}|^2} \mu_{nk}(dx) < \infty. \tag{16}$$

关系式

$$\sup_{k \leqslant k_n} \int \frac{|x-a_{nk}|^2}{1+|x-a_{nk}|^2} \mu_{nk}(dx) = o(1)$$

也是显然的．因此，利用不等式

$$\left| \int \left[e^{i(z, x-a_{nk})} - 1 - \frac{i(z, x-a_{nk})}{1+|x-a_{nk}|^2} \right] \mu_{nk}(dx) \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int \frac{(z, x-a_{nk})^2}{1+|x-a_{nk}|^2} \mu_{nk}(dx)$$

$$+ \left| \int (e^{i(z, x-a_{nk})} - 1) \frac{|x-a_{nk}|^2}{1+|x-a_{nk}|^2} \mu_{nk}(dx) \right|,$$

可以得到

$$\ln \chi_n(z) = \ln \mathbf{E} e^{i(z, \zeta_n)} = i(a_n, z)$$

$$+ \sum_{k=1}^{k_n} \int \left(e^{i(z, x-a_{nk})} - 1 - \frac{i(z, x-a_{nk})}{1+|x-a_{nk}|^2} \right) \mu_{nk}(dx)$$

$$+ (V_n z, z)[O(\sup_{k \leqslant k_n} (V_{nk} z, z)) + o(1)] + o(1).$$

由测度 ν_n 的紧性得知，对任意 $\varepsilon > 0$ 可以找到算子 $B \in T_c$ 及算子 $A_n \in S_1$，使得 $(BA_nBz, z) \leqslant 1$ 时有 $1 - \mathrm{Re}\chi_n(z) \leqslant 1$．那末当 $(BA_nBz, z) \leqslant 1$ 时，对足够小的 ε 有 $-\ln|\chi_n(z)| < 2\varepsilon$．因此，

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int (1 - \cos(z, x-a_{nk})) \mu_{nk}(dx) < 2\varepsilon.$$

但这时

$$\int (1 - \cos(z, x)) \mu_n(dx)$$

$$= \sum_{k=1}^{k_n}\int(1-\cos(z, x-a_{nk}))\frac{|x-a_{nk}|^2}{1+|x-a_{nk}|^2}\mu_{nk}(dx)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{k_n}\int(1-\cos(z, x-a_{nk}))\mu_{nk}(dx) < 2\varepsilon.$$

由此得到测度 μ_n 的紧性. 因此,由于 § 2 定理 2 的推论 2, $V_n^{1/2}$ 是 $\mathscr{H}_{\mathscr{X}}$ 中的紧集,从而根据 § 2 引理 2 级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(V_n e_k, e_k)$ 对每个基 $\{e_k\}$ 一致收敛. 显然

$$\lim_{n\to\infty}\chi_n(z) = \lim_{n\to\infty}\exp\left\{i(a_n, z) - \frac{1}{2}(V_n z, z)\right.$$

$$+\int\left(e^{i(z,x)} - 1 - \frac{i(z, x)}{1+|x|^2}\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\frac{(z, x)^2}{1+|x|^2}\right)\frac{1+|x|^2}{|x|^2}\mu_n(dx)\right\}.$$

我们选取子序列 n' 使得测度 $\mu_{n'}$ 收敛于某个测度 π' 及 $(V_{n'}z, z)\to(Vz, z)$. 这时 $(a_{n'}, z)$ 的极限也存在且等于 (a, z). 因此

$$\lim_{n'\to\infty}\chi_{n'}(z) = \exp\left\{i(a, z) - \frac{1}{2}(Vz, z)\right.$$

$$+\int\left(e^{i(z,x)} - 1 - \frac{i(z, x)}{1+|x|^2}\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\frac{(z, x)^2}{1+|x|^2}\right)\frac{1+|x|^2}{|x|^2}\pi'(dx)\right\}.$$

由特征函数表示的唯一性得到, μ_n 弱收敛于 π' 且 $(V_n z, z)$ 收敛于 (Vz, z). 此外,由此还得到, a_n 弱收敛于 a. 为验证 a_n 强收敛于 a, 我们注意当 $|z|\leqslant c$ 时, $\chi_n(z)$ 一致收敛于 $\chi(z)$ (参考 § 2 定理 3 的注), 当 $|z|\leqslant c$ 时, $(V_n z, z)\to(Vz, z)$ 也一致收敛(这由定理的条件 3) 得到). 最后如 § 2 定理 3 的注一样, 可以证明

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int\left(e^{i(z,x-a_{nk})} - 1 - \frac{i(z, x-a_{nk})}{1+|x-a_{nk}|^2}\right.$$

$$+\frac{1}{2}\frac{(z, x-a_{nk})^2}{1+|x-a_{nk}|^2}\Big)\mu_{nk}(dx)$$

也一致收敛于

$$\int\left(e^{i(z,x)}-1-\frac{i(z, x)}{1+|x|^2}+\frac{1}{2}\frac{(z, x)^2}{1+|x|^2}\right)\pi'(dx).$$

因此当 $|z|\leqslant c$ 时，(a_n, z) 也一致收敛于 (a, z). 由此，正如在定理 2 中所论证，可以得出，a_n（强）收敛于 a. 定理得证.

注. 如果利用关系式

$$(a_{nk}, z)=\int_{|x|\leqslant c}(x, z)\mu_{nk}(dx)$$

定义 a_{nk}，而 μ_n, V_{nk}, V_n 如在定理 4 那样定义，那末在定理 4 的条件下随机变量 ζ_n 的分布将弱收敛于特征函数为

$$\begin{aligned}\chi(z)=\exp\Big\{&i(a, z)-\frac{1}{2}(Bz, z)\\&+\int_{|x|\leqslant c}\Big(e^{i(z,x)}-1-i(z, x)\Big)\frac{1+|x|^2}{|x|^2}\pi(dx)\\&+\int_{|x|>c}(e^{i(z,x)}-1)\frac{1+|x|^2}{|x|^2}\pi(dx)\Big\}\end{aligned}$$

的无穷可分分布，倘若选取 c 满足 $\pi(\{x: |x|=c\})=0$. 该条件的充分必要性的证明和定理 4 的证明一样.

§4. 关于连续随机过程的极限定理

在这一节里，将应用 §1 所介绍的距离空间测度弱收敛的一般定理来导出以概率为 1 连续的随机过程的极限定理.

设 $\xi_n(t)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上，取值于某个完备可分距离空间 $\mathscr{X}$，且在区间 $[a, b]$ 上以概率为 1 连续的随机过程序列. 用 $\mathscr{C}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 表示定义在 $[a, b]$ 上取值于 $\mathscr{X}$ 的连续函数 $x(t)$ 的集合.

在 $\mathscr{C}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 中引入距离

$$r(x(\cdot), y(\cdot)) = \sup_{a \leq t \leq b} \rho(x(t), y(t)),$$

其中 ρ 是 $\mathscr{X}$ 中的距离．以此为距离，$\mathscr{C}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 成为完备可分距离空间．用 $\mathfrak{B}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 表示 $\mathscr{C}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 的所有 Borel 集的 σ 代数．此 σ 代数与包含 $\mathscr{C}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 中全体柱集的最小 σ 代数相重合(参考第五章 §2 关于 $\mathscr{X}$ 是线性情形所给出的证明，在现在的情形证明是同样的)．因此可以用 $\mathfrak{B}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 上的测度 μ_n 与每一过程 $\xi_n(t)$ 联系起来，这测度在柱集上的值与过程 $\xi_n(t)$ 的有限维分布相同．

测度 μ_n 的弱收敛性对于随机过程 $\xi_n(t)$ 来说有什么样的含义呢?

设 μ_n 弱收敛于过程 $\xi(t)$ 所对应的测度 μ．那末对于每一定义在 $\mathscr{C}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 上 μ 几乎处处连续有界的 $\mathfrak{B}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 可测泛函 $\varphi(x)$，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int \varphi(x)\mu_n(dx) = \int \varphi(x)\mu(dx)$$

(参见第五章 § 1 引理)．因此对每一 μ 几乎处处连续 $\mathfrak{B}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 可测泛函 $f(x)$，对所有实数 λ，

$$\lim_{n\to\infty}\int e^{i\lambda f(x)}\mu_n(dx) = \int e^{i\lambda f(x)}\mu(dx).$$

现注意

$$\int e^{i\lambda f(x)}\mu_n(dx) = \mathbf{E}e^{i\lambda f(\xi_n(\cdot))},$$

$$\int e^{i\lambda f(x)}\mu(dx) = \mathbf{E}e^{i\lambda f(\xi(\cdot))},$$

(对每一 $\mathfrak{B}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 可测泛函 f 来说，$f(\xi_n(\cdot))$ 和 $f(\xi(\cdot))$ 是随机变量而且最后的两式是第五章 § 1 式 (2) 的推论)．由变量 $f(\xi_n(\cdot))$ 的特征函数收敛于变量 $f(\xi(\cdot))$ 的特征函数得到，变量 $f(\xi_n(\cdot))$ 的分布收敛于 $f(\xi(\cdot))$ 的分布．因此测度 μ_n 弱收敛于 μ 推得，对每一 μ 几乎处处连续 $\mathfrak{B}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 可测泛函 $f(x)$，$f(\xi_n(\cdot))$ 的分布收敛于 $f(\xi(\cdot))$ 的分布．反之，如果对每一 μ 几乎处处连续的 $\mathfrak{B}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 可测泛函，$f(\xi_n(\cdot))$ 的分布收敛于

$f(\xi(\cdot))$ 的分布，那末对每一有界 μ 几乎处处连续的 $\mathfrak{B}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 可测泛函 φ，$\mathbf{E}\varphi(\xi_n(\cdot))\to\mathbf{E}\varphi(\xi(\cdot))$，即

$$\lim_{n\to\infty}\int\varphi(x)\mu_n(dx)=\int\varphi(x)\mu(dx).$$

因此，测度 μ_n 弱收敛于 μ 等价于对每一 μ 几乎处处连续的 $\mathfrak{B}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 可测泛函 f，$f(\xi_n(\cdot))$ 的分布收敛于 $f(\xi(\cdot))$ 的分布。

通常在考虑随机过程的极限定理时假定了边沿分布弱收敛，即对测度 μ 的所有连续柱集 A，测度 $\mu_n(A)$ 收敛于测度 $\mu(A)$。因为对 $\mathscr{C}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 中每一形为

$$\{x(\cdot):\rho(\bar{x}(t),x(t))<\varepsilon,\ a\leqslant t\leqslant b\}$$

的开球（$\bar{x}(t)$ 是 $\mathscr{C}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 中给定的函数）有关系式

$$\{x(\cdot):\rho(\bar{x}(t),x(t))<\varepsilon,\ a\leqslant t\leqslant b\}$$

$$=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\left\{x(\cdot):\rho(\bar{x}(t_k),x(t_k))<\varepsilon-\frac{1}{m},\ k=1,\cdots,N\right\},$$

此处 $\{t_1,t_2,\cdots\}$ 是在 $[a,b]$ 上处处稠密的序列，所以测度 μ 的连续开柱集的代数 $\mathfrak{A}_0$ 满足 §1 定理 4 的条件。

为了能应用 §1 定理 4，需要找出在空间 $\mathscr{C}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 中紧集的一般形式。当 $\mathscr{X}$ 是有限维欧几里得空间时，$\mathscr{C}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 中紧集的一般形式由著名的 Arzelá 定理给出。

在现在的情形里，类似的结果成立，我们将它叙述成下面的引理。

设 λ_δ 是正的单调连续函数，当 $\delta>0$ 时有定义且满足当 $\delta\downarrow 0$ 时 $\lambda_\delta\downarrow 0$ 的条件，而 X_1 是 $\mathscr{X}$ 中的某个紧集。用 $K(X_1,\lambda_\delta)$ 表示 $\mathscr{C}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 中满足如下条件的函数 $x(t)$ 的集合：a) $x(t)\in X_1$，$0\leqslant t\leqslant b$；b) 当 $|t_1-t_2|\leqslant\delta$ 时 $\rho(x(t_1),x(t_2))\leqslant\lambda_\delta$。

引理 1 集合 $K(X_1,\lambda_\delta)$ 是 $\mathscr{C}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 中的紧集。对 $\mathscr{C}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 中每一紧集 K_1 均可以找到 $\mathscr{X}$ 中的紧集 X_1 和正的递增连续函数 λ_δ，$\lambda_0=0$，使得 $K_1\subset K(X_1,\lambda_\delta)$。

证．为了证明集合 $K(X_1,\lambda_\delta)$ 的紧性，我们考虑此集合中的任意序列 $x_n(\cdot)$ 并证明在其中可选取收敛子序列．对每个 t 利用

$x_n(t)$ 的值的集合的紧性,我们可用对角线办法选取子序列 $x_{n_k}(t)$ 使得对 $[a, b]$ 中的每个有理数 t, $x_{n_k}(t)$ 收敛于某一极限. 用 $y_k(t)$ 表示 $x_{n_k}(t)$ 并证明序列 $y_k(t)$ 收敛. 设 $a \leqslant t_1 < \cdots < t_N \leqslant b$ 是有理点, 使得区间 $[a, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $\cdots$, $[t_N, b]$ 中的每一个的长度不超过 δ. 那末

$$\sup_{a \leqslant t \leqslant b} \rho(y_k(t), y_l(t)) \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant N} \rho(y_k(t_i), y_l(t_i)) + \sup\{(\rho(y_k(t_i), y_k(t)) + \rho(y_l(t_i), y_l(t))); |t - t_i| \leqslant \delta, i = 1, \cdots, N\}.$$

因此

$$\overline{\lim_{k, l \to \infty}} r(y_k(\cdot), y_l(\cdot)) \leqslant 2\lambda_\delta.$$

由 $\delta > 0$ 的任意性得, $y_k(\cdot)$ 是基本列,且因此它有极限. 为证明引理的第二个结论,用 X_t 表示 $x(\cdot) \in K_1$ 时 $x(t)$ 值的集合. 我们证明, $X_1 = \bigcup_t X_t$, $t \in [a, b]$ 是紧集. 设 $x_n \in X_1$, 那末 $x_n = y(t_n)$, 其中 $y_n(\cdot) \in K_1$. 选取子序列 n_k 使得 $t_{n_k} \to t_0$ 及 $r(y_{n_k}(\cdot), y(\cdot)) \to 0$, 由此由 $x_{n_k} \to y(t_0) \in X_1$. 其次令

$$\lambda_\delta(x(\cdot)) = \sup\{\rho(x(t_1), x(t_2)); |t_1 - t_2| < \delta\}.$$

易见 $\lambda_\delta(x(\cdot))$ 关于变元 $\delta > 0$ 和 $x(\cdot)$ 二元连续. 因此由 K_1 的紧性得函数

$$\sup\{\lambda_\delta(x(\cdot)); x(\cdot) \in K_1\} = \lambda_\delta$$

关于 δ 的连续性. λ_δ 的单调性由 $\delta_1 < \delta_2$ 时,

$$\lambda_{\delta_1}(x(\cdot)) \leqslant \lambda_{\delta_2}(x(\cdot))$$

得到. 由于当 $\delta \downarrow 0$ 时, $\lambda_\delta(x(\cdot))$ 单调趋于 0, 所以由 Dini 定理得知,此收敛是在每个紧集上是一致的. 因此

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lambda_\delta = \lim_{\delta \downarrow 0} \sup\{\lambda_\delta(x(\cdot)); x(\cdot) \in K_1\} = 0.$$

这就是说, $K_1 \subset K(X_1, \lambda_\delta)$. 引理得证.

定理 1 设随机过程 $\xi_n(t)$ 的边沿分布收敛于过程 $\xi(t)$ 的边沿分布. 为使 $\mathscr{C}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 上的所有连续泛函 f, $f(\xi_n(\cdot))$ 的分布收敛于 $f(\xi(\cdot))$ 的分布的充分必要条件是对任意 $\rho > 0$ 关系式

$$\lim_{h\to 0}\sup_n \mathbf{P}\{\sup_{|t_1-t_2|\leq h}\rho(\xi_n(t_1),\xi_n(t_2))>\rho\}=0 \tag{1}$$

成立.

证. 必要性. 如果定理的结论成立,那末对应于过程 $\xi_n(t)$ 的测度 μ_n 的序列是弱紧,所以§1 定理 1 条件 b) 成立. 因此对任意 $\varepsilon>0$ 可找到紧集 $K(K_1,\lambda_\delta)$ 使得

$$\sup_n \mu_n(\mathscr{C}_{[a,b]}(\mathscr{X})-K(X_1,\lambda_\delta))\leqslant\varepsilon.$$

故

$$\mathbf{P}\{\sup_{|t_1-t_2|\leqslant h}\rho(\xi_n(t_1),\xi_n(t_2))>\lambda_h\}\leqslant\varepsilon.$$

如果 h 足够小,那末 $\lambda_h<\rho$ 且

$$\overline{\lim_{h\to\infty}}\mathbf{P}\{\sup_{|t_1-t_2|\leqslant h}\rho(\xi_n(t_1),\xi_n(t_2))>\rho\}\leqslant\varepsilon.$$

因为 $\varepsilon>0$ 是任意的, 由此得 (1).

充分性. 注意到由 $\xi_n(t)$ 的边沿分布收敛于 $\xi(t)$ 的边沿分布得知,在测度 μ 的连续开柱集上,测度 μ_n 收敛于 μ. 还由于§1 定理 4, 只要证明测度 μ_n 的紧性就够了. 用 ν_{nt} 表示在$\mathscr{X}$上对应于 $\xi_n(t)$ 的分布的测度. 我们可证明, 测度集合 $\{\nu_{nt},n=1,2,\cdots,t\in[a,b]\}$ 是紧的. 事实上,如果 ν_{nt_n} 是某一测度序列,那末选取子序列 n_k 使得 $t_{n_k}\to t_0$. 容易验证,对定义在$\mathscr{X}$上的任意有界连续函数 $\varphi(x)$,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int\varphi(x)\nu_{n_kt_{n_k}}(dx)&=\lim_{k\to\infty}\mathbf{E}\,\varphi(\xi_{n_k}(t_{n_k}))\\&=\lim_{k\to\infty}\mathbf{E}\,\varphi(\xi_{n_k}(t_0))+\lim_{k\to\infty}\mathbf{E}\,[\varphi(\xi_{n_k}(t_{n_k}))\\&\quad-\varphi(\xi_{n_k}(t_0))]=\mathbf{E}\varphi(\xi(t_0)).\end{aligned}$$

因为对任意紧集 X_1 和 $\delta>0$

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{k\to\infty}}\mathbf{E}|\varphi(\xi_{n_k}(t_{n_k}))-\varphi(\xi_{n_k}(t_0))|\\&\leqslant 2\sup_x|\varphi(x)|\,\overline{\lim_{k\to\infty}}[\mathbf{P}\{\xi_{n_k}(t_0)\bar{\in}X_1\}\\&\quad+\mathbf{P}\{\rho(\xi_{n_k}(t_{n_k}),\xi_{n_k}(t_0))>\delta\}]\\&\quad+\sup\{|\varphi(x)-\varphi(y)|;x\in X_1,\rho(x,y)\leqslant\delta\},\end{aligned}$$

且由于 $\varphi(x)$ 的连续性，$\nu_{n_k t_0}$ 的紧性及条件 (1)，上不等式右边可以任意小。

按条件

$$\sup_n \mathbf{P}\{\sup_{|t'-t''|\leqslant h_k} \rho(\xi_n(t'), \xi_n(t'')) > 2^{-k}\} \leqslant 2^{-k}$$

选取序列 h_k. 设 $X^{(k)}$ 是紧集，使对所有 n 及 $t \in [a, b]$，满足

$$\nu_{nt}(\mathscr{X} - X^{(k)}) \leqslant 2^{-k} \frac{h_k}{b-a}.$$

以 $X_1^{(k)}$ 表示满足 $\rho(x, X^{(k)}) \leqslant 2^{-k}$ 的 x 的集合. 那末

$$\mathbf{P}\{\xi_n(t) \in X_1^{(k)},\ a \leqslant t \leqslant b\}$$
$$\geqslant \mathbf{P}\{\xi_n(a + lh_k) \in X^{(k)};\ 1 \leqslant l \leqslant \frac{b-a}{h_k},$$
$$\sup_{|t_1-t_2|\leqslant h_k} \rho(\xi_n(t_1), \xi_n(t_2)) \leqslant 2^{-k}\}.$$

因此

$$1 - \mathbf{P}\{\xi_n(t) \in X_1^{(k)},\ a \leqslant t \leqslant b\} \leqslant \sum_{l\leqslant \frac{b-a}{h_k}} \mathbf{P}\{\xi_n(a+lh_k)\bar{\in} X^{(k)}\}$$
$$+ \mathbf{P}\{\sup_{|t_1-t_2|\leqslant h_k} \rho(\xi_n(t_1), \xi_n(t_2)) > 2^{-k}\} \leqslant 2 \cdot 2^{-k}.$$

注意 $\bigcap_{k=m}^{\infty} X_1^{(k)}$ 是 $\mathscr{X}$ 中的紧集. 现在我们对 $\varepsilon > 0$ 构造紧集 $K(X_1, \lambda_\delta)$ 使得对所有 n，$\mu_n(\mathscr{C}_{[a,b]}(\mathscr{X}) - K(X_1, \lambda_\delta)) < \varepsilon$. 为此，我们选取 m，使

$$2\sum_{k>m} 2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2}$$

且令

$$X_1 = \bigcap_{k=m}^{\infty} X_1^{(k)}.$$

取序列 $\lambda_r \downarrow 0$. 对每个 r，可找到 h_r 满足 $h_r < h_{r-1}$ 且

$$\sup_n \mathbf{P}\{\sup_{|t_1-t_2|\leqslant h_r} \rho(\xi_n(t_1), \xi_n(t_2)) > \lambda_r\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{r+1}}.$$

设 λ_δ 是一非负连续不增函数，使得 $\lambda_{h_r} = \lambda_{r-1}$. 显然，当

$\delta \downarrow 0$ 时 $\lambda_\delta \downarrow 0$. 此外,

$$\mathbf{P}\{\xi_n(\cdot)\bar{\in}K(X_1, \lambda_\delta)\} \leqslant 1 - \mathbf{P}\{\xi_n(t) \in X_1, a \leqslant t \leqslant b\}$$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\sup_{|t_1-t_2|\leqslant h_r} \rho(\xi_n(t_1), \xi_n(t_2)) > \lambda_r\}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{r+1}} = \varepsilon.$$

定理得证.

注 1. 代替条件 1, 可要求下述容易验证的条件

$$\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{P}\{\sup_{|t_1-t_2|\leqslant h} \rho(\xi_n(t_1), \xi_n(t_2)) > \varepsilon\} = 0, \qquad (2)$$

事实上, 由 (2) 得知, 对任意 $\eta > 0$ 存在 $\delta > 0$ 和 N, 当 $n > N$, $h < \delta$ 时

$$\mathbf{P}\{\sup_{|t_1-t_2|\leqslant h} \rho(\xi_n(t_1), \xi_n(t_2)) > \varepsilon\} \leqslant \eta. \qquad (3)$$

从过程 $\xi_n(t)$ 的连续性得到它们的一致连续性,因此对每个 n

$$\lim_{h\to 0} \mathbf{P}\{\sup_{|t_1-t_2|\leqslant h} \rho(\xi_n(t_1), \xi_n(t_2) > \varepsilon\} = 0.$$

所以可选取 δ 使得当 $h < \delta$ 时关系式 (3) 对所有 n 成立.

下面的定理有时更方便于应用:

定理 2 设过程 $\xi_n(t)$ 的边沿分布收敛于过程 $\xi(t)$ 的有限维分布且存在 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 和 $H > 0$, 使对所有 $t_1, t_2 \in [a, b]$ 和所有 n

$$\mathbf{E}[\rho(\xi_n(t_1), \xi_n(t_2))]^\alpha \leqslant H|t_1 - t_2|^{1+\beta}. \qquad (4)$$

那末对 $\mathscr{C}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 上的所有连续泛函 f, $f(\xi_n(\cdot))$ 的分布收敛于 $f(\xi(\cdot))$ 的分布.

证. 利用第三章 §5 引理 1, 对过程 $\xi_n(t)$ 来说, 如果令 $g(h) = h^r$, 其中 $0 < r < \beta/\alpha$, $q(C, h) = HC^{-\alpha}h^{1+\delta}$, 其中 $\delta = \beta - \alpha\gamma$, 这引理的条件 (4) 成立. 此时由第三章 §5 等式 (8) 所定义的函数 $G(m)$ 和 $Q(m, C)$ 分别等于

$$G(m) = T^\gamma \frac{2^{-m\gamma}}{1-2^{-\gamma}}, \qquad Q(m, C) = HC^{-\alpha}T^{1+\delta}\frac{2^{-m\delta}}{1-2^{-\delta}},$$

$$T = b - a.$$

于是，由于第三章 §5 关系式 (7)，不等式

$$\mathbf{P}\{\sup_{|t_1-t_2|\leqslant h} \rho(\xi_n(t_1), \xi_n(t_2)) > \varepsilon\} \leqslant L\varepsilon^{-\alpha}h^{\beta}$$

成立，其中 L 是某个常数. 证明的余下部分由定理 1 可得.

由独立随机变量和构造的过程的收敛性　设 $\xi_{n1}, \cdots, \xi_{nk_n}$ 是数值随机变量组的序列，在每个组中随机变量是独立的，且满足条件：

1) $\mathbf{E}\xi_{ni} = 0,\ i = 1, \cdots, k_n$;

2) $\mathbf{D}\xi_{ni} = b_{ni},\ \sum_{i=1}^{k_n} b_{ni} = 1.$

用如下方式构造随机函数 $\xi_n(t)$, $t \in [0, 1]$. 令

$$S_{nk} = \sum_{i=1}^{k}\xi_{ni},\quad t_{nk} = \sum_{i=1}^{k} b_{ni},$$

$$\xi_n(t) = S_{nk} + \frac{t - t_{nk}}{t_{nk+1} - t_{nk}}[S_{nk+1} - S_{nk}]$$

对于 $t \in [t_{nk}, t_{nk+1}]$, $S_{n0} = 0$, $t_{n0} = 0$. 那末 $\xi_n(t)$ 是平面 (t, ξ) 上连接具有坐标 $(t_{nk}; S_{nk})$, $k = 0, 1, \cdots, k_n$ 的点的随机折线.

我们研究在什么样的条件下过程 $\xi_n(t)$ 的边沿分布和这些过程的泛函的分布分别收敛于 Brown 运动过程 $w(t)$ 的边沿分布和它的相应的泛函的分布.

定理 3　设随机变量 ξ_{ni} 满足条件 1) 和 2) 以及 Linderberg 条件：如果 $F_{ni}(x)$ 是变量 ξ_{ni} 的分布函数，那末对任意 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}\int_{|u|>\varepsilon} u^2 dF_{ni}(u) = 0. \tag{5}$$

在这些条件下，过程 $\xi_n(t)$ 的有限维分布收敛于过程 $w(t)$ 的有限维分布且对于 $\mathscr{C}_{[0,1]}$ 上的每一连续泛函 f, $f(\xi_n(\cdot))$ 的分布收敛于 $f(w(\cdot))$ 的分布.

证. 由中心极限定理得到，过程 $\xi_n(t)$ 的有限维分布收敛于 $w(t)$ 的有限维分布. 为证明对 $\mathscr{C}_{[0,1]}$ 上所有连续泛函 f, $f(\xi_n(\cdot))$

的分布收敛于 $f(w(\cdot))$ 的分布，我们来验证对任意 $\varepsilon>0$ 条件

$$\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{P}\left\{\sup_{|t_1-t_2|\leqslant h}|\xi_n(t_1)-\xi_n(t_2)|>\varepsilon\right\}=0 \tag{6}$$

成立，并利用定理 1 的注 1．因为

$$\sup_{|t_1-t_2|\leqslant h}|\xi_n(t_1)-\xi_n(t_2)|\leqslant 2\sup_k\sup_{kh<t\leqslant(k+2)h}|\xi_n(t)-\xi_n(kh)|$$
$$\leqslant 4\sup_k\sup_{kh<t\leqslant(k+1)h}|\xi_n(t)-\xi_n(kh)|,$$

所以

$$\mathbf{P}\{\sup_{|t_1-t_2|\leqslant h}|\xi_n(t_1)-\xi_n(t_2)|>\varepsilon\}$$
$$\leqslant\sum_{kh<1}\mathbf{P}\left\{\sup_{kh<t\leqslant(k+1)h}|\xi_n(t)-\xi_n(kh)|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}.$$

注意到

$$\sup_{kh<t\leqslant(k+1)h}|\xi_n(t)-\xi_n(kh)|\leqslant 2\sup_{i_{n,k}<r\leqslant i_{n,k+1}}\left|\sum_{j=i_{n,k}}^{r}\xi_{nj}\right|,$$

其中$i_{n,k}$是使t_{nj}不超过kh的那些 i 的最大值.因为当 $i_{n,k}<s<i_{n,k+1}$ 时

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_s\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{j=s}^{i_{n,k+1}}\xi_{nj}\right|>\frac{\varepsilon}{16}\right\}\leqslant\frac{256}{\varepsilon^2}h,$$

所以当 h 足够小时，由于第二章 § 3 定理 6

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{P}\left\{\sup_{kh<t\leqslant(k+1)h}|\xi_n(t)-\xi_n(kh)|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}$$
$$\leqslant\frac{1}{1-\frac{256}{\varepsilon^2}h}\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{P}\left\{|\xi_n(t_{n_{i_{n,k+1}}})-\xi_n(t_{n_{i_{n,k}}})|>\frac{\varepsilon}{16}\right\}.$$

由 $\xi_n(t)$ 的有限维分布收敛于 $w(t)$ 的有限维分布得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{P}\left\{|\xi_n(t_{n_{i_{n,k+1}}})-\xi_n(t_{n_{i_{n,k}}})|>\frac{\varepsilon}{16}\right\}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|u|>\varepsilon/16\sqrt{h}}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

于是，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{P}\{\sup_{|t_1-t_2|\leqslant h} |\xi_n(t_1)-\xi_n(t_2)| > \varepsilon\}$$
$$= O\left(\sum_{kh<1}\int_{|u|>\varepsilon/16\sqrt{h}} e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)$$
$$= O\left(\frac{1}{h}\int_{|u|>\varepsilon/16\sqrt{h}} e^{-\frac{u^2}{2}}du\right).$$

因为

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{|u|>\varepsilon/\sqrt{h}} e^{-\frac{u^2}{2}}du = 0,$$

所以得(6). 定理得证.

由定理 3 立即得

定理 4 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$ 是独立同分布随机变量序列, $\mathbf{E}\xi_i = 0$, $\mathbf{D}\xi_i = 1$. 用 $\xi_n(t)$ 表示具有顶点$\left(\frac{k}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}S_k\right)$的随机折线,其中 $S_0 = 0$, $S_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$. 那末对每个在 $\mathscr{C}_{[0,1]}$ 上按测度 μ_w 几乎处处有定义和连续的泛函 f, $f(\xi_n(\cdot))$ 的分布收敛于 $f(w(\cdot))$ 的分布, 其中 μ_w 是对应于过程 $w(t)$ 的测度.

推论 如果定理 4 的条件成立,那末

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k| < \alpha\sqrt{n}\} = \mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|w(t)| < \alpha\}$$

对几乎所有 α 成立.

这从泛函

$$f(x(\cdot)) = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$$

的连续性可以得到.

定理 5 设函数 $\varphi(x)$ 对 $x\in\mathscr{R}^1$ 有定义且在每个有限区间上 Riemann 可积, 而变量 ξ_k 满足定理 4 的条件. 那末

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_k\right) < \alpha\right\} = \mathbf{P}\left\{\int_0^1\varphi(w(t))dt < \alpha\right\}$$

对所有满足

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1\varphi(w(t))dt = \alpha\right\} = 0$$

的 α 成立.

证. 我们来证明泛函

$$f(x(\cdot)) = \int_0^1 \varphi(x(t))dt$$

是在 $\mathscr{C}_{[0,1]}$ 的距离下按测度 μ_w 几乎处处连续. 设在 [0, 1] 上一致地有 $x_n(t) \to x(t)$. 那末对所有使得 $x(t)\bar{\in}\Lambda_\varphi$ 的 t, 有 $\varphi(x_n(t)) \to \varphi(x(t))$, 其中 Λ_φ 是函数 φ 的间断点的集合. 我们用 $\chi_\varphi(x)$ 表示集合 Λ_φ 的示性函数. 如果 $x(t)\bar{\in}\Lambda_\varphi$ 对几乎所有 t 成立,即

$$\int_0^t \chi_\varphi(x(s))ds = 0,$$

那末,由于这时对几乎所有 t, $\varphi(x_n(t)) \to \varphi(x(t))$, 且由

$$\sup_{n,t} |x_n(t)|$$

有限及 $\varphi(x)$ 在每个有限区间有界推得, $\varphi(x_n(t))$ 以同一常数为界,所以泛函 $f(x(\cdot))$ 在点 $x(\cdot) \in \mathscr{C}_{[0,1]}$ 连续. 因为 φ 是 Riemann 可积,所以 Λ_φ 的 Lebesgue 测度为 0. 我们得

$$\mathbf{E}\int_0^1 \chi_\varphi(w(t))dt = \int_0^1 \mathbf{E}\,\chi_\varphi(w(t))dt$$

$$= \int_0^1 \int_{\Lambda_\varphi} e^{-\frac{x^2}{2t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} dxdt = 0.$$

$\int_0^1 \chi_\varphi(w(t))dt$ 是非负的,因此

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 \chi_\varphi(w(t))dt \neq 0\right\} = 0.$$

如果用 $A \subset \mathscr{C}_{[0,1]}$ 表示泛函 f 的间断点的集,那末

$$A \subset \left\{x(\cdot): \int_0^1 \chi_\varphi(x(s))ds > 0\right\},$$

从而

$$\mu_w(A) \leqslant P\left\{\int_0^1 \chi_\varphi(w(t))dt \neq 0\right\} = 0.$$

如果 $\xi_n(t)$ 是定理 4 中所引入的过程, 那末根据定理 4, 只要

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 \varphi(w(t))dt = \alpha\right\} = 0,$$

就有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\int_0^1\varphi(\xi_n(t))dt<\alpha\right\}=\mathbf{P}\left\{\int_0^1\varphi(w(t))dt<\alpha\right\}.$$

设 $\varphi_\varepsilon^+(x)$, $\varphi_\varepsilon^-(x)$ 是两个连续函数,满足 $\varphi_\varepsilon^-(x)<\varphi(x)<\varphi_\varepsilon^+(x)$ 及

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi_\varepsilon^+(x)-\varphi_\varepsilon^-(x)]dx<\varepsilon.$$

对任意连续函数 $\bar\varphi(x)$

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1\bar\varphi(\xi_n(t))dt-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\bar\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_k\right)\right|\\&\quad\leqslant\sum_{k=1}^n\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left|\bar\varphi(\xi_n(t))-\bar\varphi\left(\xi_n\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right|dt\\&\quad\leqslant\sup\{|\bar\varphi(x)-\bar\varphi(y)|;\\&\quad|x-y|\leqslant\eta_n,\ |x|\leqslant\zeta_n\},\end{aligned}$$

其中

$$\eta_n=\sup_k\left|\xi_n\left(\frac{k}{n}\right)-\xi_n\left(\frac{k+1}{n}\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{n}}\sup_{k\leqslant n}|\xi_k|,$$

$$\zeta_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sup_{k\leqslant n}|S_k|.$$

因此只要选取 δ 和 C 使得当 $|x-y|\leqslant\delta$, $|x|\leqslant C$ 时 $|\bar\varphi(x)-\bar\varphi(y)|<\varepsilon$, 就有

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\left\{\left|\int_0^1\bar\varphi(\xi_n(t))dt-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\bar\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_k\right)\right|>\varepsilon\right\}\\&\quad\leqslant\mathbf{P}\{\eta_n>\delta\}+P\{\zeta_n>C\}.\end{aligned}$$

但依概率 $\eta_n\to0$, 又对所有 n, 可选取足够大的 C 使 $\mathbf{P}\{\zeta_n>C\}$ 任意小. 因此依概率

$$\left|\int_0^1\bar\varphi(\xi_n(t))dt-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\bar\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_k\right)\right|\to0,$$

所以,只要

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1\bar\varphi(w(t))dt=\alpha\right\}=0,$$

就有

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_k\right)<\alpha\right\}=\mathbf{P}\left\{\int_0^1 \bar{\varphi}(w(t))dt<\alpha\right\}.$$

因为

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi_\varepsilon^+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_k\right)<\alpha\right\}\leqslant \mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_k\right)<\alpha\right\}$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi_\varepsilon^-\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_k\right)<\alpha\right\},$$

所以，当 $n\to\infty$ 时对此关系式取极限，我们得，对每一 $h>0$

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 \varphi_\varepsilon^+(w(t))dt<\alpha-h\right\}$$

$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_k\right)<\alpha\right\}$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_k\right)<\alpha\right\}$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{\int_0^1 \varphi_\varepsilon^-(w(t))dt<\alpha+h\right\}.$$

但

$$\mathbf{E}\left|\int_0^1\varphi_\varepsilon^+(w(t))dt-\int_0^1\varphi(w(t))dt\right|$$

$$\leqslant \mathbf{E}\left[\int_0^1\varphi_\varepsilon^+(w(t))dt-\int_0^1\varphi_\varepsilon^-(w(t))dt\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi_\varepsilon^+(x)-\varphi_\varepsilon^-(x)]e^{-\frac{x^2}{2t}}dx$$

$$\leqslant \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}.$$

因此当 $\varepsilon\to 0$ 时分布

$$\int_0^1\varphi_\varepsilon^+(w(t))dt$$

收敛于分布 $\int_0^t\varphi(w(t))dt$. 类似的结论对 φ_ε^- 也正确. 当 $\varepsilon\to 0$ 取

极限，得证对所有 $h>0$

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 \varphi(w(t))\,dt<\alpha+h\right\}\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_k\right)\right.$$

$$\left.<\alpha\right\}\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_k\right)<\alpha\right\}$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{\int_0^1 \varphi(w(t))dt<\alpha+h\right\}.$$

当 $h\to 0$ 时取极限和顾及到如果

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 \varphi(w(t))dt=\alpha\right\}=0,$$

在 $z=a$，时函数

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 \varphi(w(t))dt<z\right\}$$

是连续的，我们得证定理.

独立增量连续过程的收敛性 我们来研究有独立增量和取值于某个 Banach 空间$\mathscr{X}$的连续过程. 如果 $\xi(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$，是这样的过程，那末对所有 $\varepsilon>0$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}\{|\xi(t_{k+1})-\xi(t_k)|>\varepsilon\}=0, \tag{7}$$

其中 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, $\lambda=\max_k(t_{k+1}-t_k)$（参见第三章 §5 定理 1 和 4).

定理 6 设 $\xi_n(t)$, $n=0,1,\cdots$是定义在 $[a,b]$ 上取值于$\mathscr{X}$的独立增量连续过程. 为了使得 $\mathscr{C}_{[a,b]}(\mathscr{X})$上每一连续函数 $\varphi(x)$，变量 $\varphi(\xi_n(\cdot))$ 的分布收敛于变量 $\varphi(\xi_0(\cdot))$ 的分布，如下条件是充分必要的:

1）过程 $\xi_n(t)$ 的边沿分布收敛于 $\xi_0(t)$ 的边沿分布；

2）对任意 $\varepsilon>0$

$$\lim_{h\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\sup_{|t_1-t_2|\leqslant h}\mathbf{P}\{|\xi_n(t_2)-\xi_n(t_1)|>\varepsilon\}=0.$$

证. 条件 1) 的必要性由对定义在$\mathscr{X}^k$上的任一有界连续

函数 $g(x_1, \cdots, x_k)$, $g(\xi_n(t_1), \cdots, \xi_n(t_k))$ 的分布收敛于 $g(\xi_0(t_1), \cdots, \xi_0(t_k))$ 的分布得到(泛函 $\varphi(x(\cdot)) = g(x(t_1), \cdots, x(t_k))$ 在 $\mathscr{C}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 上连续). 因为

$$\sup_{|t_2-t_1|\leqslant h} \mathbf{P}\{|\xi_n(t_1) - \xi_n(t_2)| > \varepsilon\}$$
$$\leqslant \mathbf{P}\{\sup_{|t_1-t_2|\leqslant h} |\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1)| > \varepsilon\}$$

所以由定理 1 的注,得证条件 2) 的必要性.

根据定理 1 的注,为证明定理条件的充分性,仅需证明由条件 2) 可推出,对任意 $\varepsilon > 0$ 等式

$$\lim_{h\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{P}\{\sup_{|t_1-t_2|\leqslant h} |\xi_n(t_1) - \xi_n(t_2)| > \varepsilon\} = 0 \tag{8}$$

成立. 用定理 1 注的同样方法,条件 2) 可推出对任意 $\varepsilon > 0$ 有等式

$$\lim_{h\to 0} \sup_n \sup_{|t_1-t_2|\leqslant h} \mathbf{P}\{|\xi_n(t_1) - \xi_n(t_2)| > \varepsilon\} = 0. \tag{9}$$

对给定的 $\varepsilon > 0$ 选取足够小的 h, 使得

$$\sup_n \sup_{|t_1-t_2|\leqslant 2h} \mathbf{P}\left\{|\xi_n(t_1) - \xi_n(t_2)| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} \leqslant \frac{1}{2}.$$

那末利用 $\xi_n(t)$ 的连续性和 § 3 引理 4, 我们得到

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{s\leqslant t\leqslant s+2h} |\xi_n(t) - \xi_n(s)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$
$$\leqslant 2\mathbf{P}\left\{|\xi_n(s+2h) - \xi_n(s)| > \frac{\varepsilon}{4}\right\}.$$

因此

$$\mathbf{P}\{\sup_{|t-s|\leqslant h} |\xi_n(t) - \xi_n(s)| > \varepsilon\}$$
$$\leqslant \mathbf{P}\left\{\sup\left[|\xi_n(t) - \xi_n(a+kh)|; kh \leqslant t - a\right.\right.$$
$$\left.\left.\leqslant (k+2)h,\ 0 \leqslant k < \frac{b-a}{h}\right] > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$
$$\leqslant \sum_{kh<b-a} \mathbf{P}\left\{\sup[|\xi_n(t) - \xi_n(a+kh)|;\right.$$
$$\left.kh \leqslant t - a \leqslant (k+2)h] > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

$$\leqslant 2 \sum_{kh<b-a} \mathbf{P}\left\{|\xi_n(a+kh+2h) - \xi_n(a+kh)| > \frac{\varepsilon}{4}\right\},$$

(当 $t > b$ 时我们认为 $\xi_n(t) = \xi_n(b)$). 由于定理的条件 1), 有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{P}\{\sup_{|t_1-t_2|\leqslant h} |\xi_n(t_1) - \xi_n(t_2)| > \varepsilon\}$$

$$\leqslant 2 \sum_{kh<b-a} \mathbf{P}\left\{|\xi_0(a+(k+2)h) - \xi_0(a+kh)| > \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

$$\leqslant 4 \sum_{kh<b-a} \mathbf{P}\left\{|\xi_0(a+(k+1)h) - \xi_0(a+kh)| > \frac{\varepsilon}{8}\right\}.$$

由条件 (7) 得知, $h \to 0$ 时最后的和式趋于 0. 定理得证.

连续 Марков 过程的收敛性 我们考察定义在区间 $[a, b]$ 上取值于完备距离空间 $(\mathscr{X}, \rho)$ 的连续 Марков 过程序列 $\xi_n(t)$, $n = 0, 1, \cdots$. 用 $P_n(t, x, s, A)$ 表示过程 $\xi_n(t)$ 的转移概率. 设

$$V_\varepsilon(x) = \{y: \rho(x, y) > \varepsilon\},$$

$$a_n(h, \varepsilon) = \sup\{\mathbf{P}_n(t_1, x, t_2, V_\varepsilon(x)); \; x \in \mathscr{X}, |t_1 - t_2| \leqslant h\}.$$

定理 7 设过程 $\xi_n(t)$ 的边沿分布收敛于过程 $\xi_0(t)$ 的边沿分布以及如下条件成立:

1) 对任意 $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{h\to 0} \sup\limits_{n} a_n(h, \varepsilon) = 0$;

2) 如果 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \lambda = \max\limits_k (t_{k+1} - t_k)$, 那末对任意 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}\{\rho(\xi_0(t_k), \xi_0(t_{k+1})) > \varepsilon\} = 0.$$

则对 $\mathscr{C}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 中每一函数 φ, $\varphi(\xi_n(\cdot))$ 的分布收敛于分布 $\varphi(\xi_0(\cdot))$.

作为准备, 我们证明下述引理:

引理 2 正如对 $\xi_n(t)$ 定义 $\alpha_n(h, \varepsilon/2)$ 一样，对可分 Марков 过程 $\xi(t)$ 定义量 $\alpha(h, \varepsilon/2)$，如果它小于 1，那末

$$\mathbf{P}\{\sup[\rho(\xi(t), \xi(s)); s\in[t, t+h]]\geqslant\varepsilon\}$$

$$\leqslant\frac{P\left\{\rho(\xi(t), \xi(t+h))\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}}{1-\alpha(h, \varepsilon/2)}. \tag{10}$$

证．考虑到过程的可分性，只要对 (10) 式在概率记号下的上确界对区间 $[t, t+h]$ 的任意有限子集上所取的情形进行证明就够了．设 $I=\{t=t_0, \cdots, t_n=t+h\}$．用 B_k 表示事件

$$\{\rho(\xi(t_0), \xi(t_k))\geqslant\varepsilon\},$$

$$C_k=\left\{\rho(\xi(t_k), \xi(t_k)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

那末

$$C_0\supset\bigcup_{j=1}^{n}\{\bar{B}_1\cap\cdots\cap\bar{B}_{j-1}\cap B_j\cap\bar{C}_j\}.$$

因此

$$\mathbf{P}\{C_0\}\geqslant\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}\{\bar{C}_j|\bar{B}_1\cap\cdots\cap\bar{B}_{j-1}\cap B_j\}\mathbf{P}\{\bar{B}_1\cap\cdots\cap\bar{B}_{j-1}\cap B_j\}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(1-\mathbf{P}\{C_j|\bar{B}_1\cap\cdots\cap\bar{B}_{j-1}\cap B_j\})$$

$$\times\mathbf{P}\{\bar{B}_1\cap\cdots\cap\bar{B}_{j-1}\cap B_j\}\geqslant(1-\alpha(h, \varepsilon/2))$$

$$\times\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}\{\bar{B}_1\cap\cdots\cap\bar{B}_{j-1}\cap B_j\}.$$

还注意到

$$\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}\{\bar{B}_1\cap\cdots\cap\bar{B}_{j-1}\cap B_j\}$$

$$=\mathbf{P}\{\sup[\rho(\xi(t), \xi(s)), s\in I]\geqslant\varepsilon\},$$

引理得证．

定理 7 的证明．选取 h 足够小使得

$$\sup_n \alpha_n(2h, \varepsilon/8) < \frac{1}{2}$$

那末由引理 2 得不等式

$$\mathbf{P}\left\{\sup[\rho(\xi_n(t), \xi_n(s)); s \in [t, t+2h] \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$
$$\leqslant 2\mathbf{P}\left\{\rho(\xi(t), \xi(t+2h)) \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\right\}.$$

由这不等式，用上定理同样的方法，我们可以得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{P}\{\sup_{|t_1-t_2|\leqslant h} \rho(\xi_n(t_1), \xi_n(t_2)) > \varepsilon\}$$
$$\leqslant 4 \sum_{kh<b-a} \mathbf{P}\left\{\rho(\xi_0(a+(k+1)h), \xi_0(a+kh)) \geqslant \frac{\varepsilon}{8}\right\}$$

(当 $t > b$ 时，我们令 $\xi(t) = \xi(b)$). 由这不等式和条件 2) 得证定理.

§5. 没有第二类间断点的过程的极限定理

没有第二类间断点的函数空间中的距离 为使 §1 的结果可以应用于没有第二类间断点的过程，需要先在没有第二类间断点的函数的空间中引入合适的距离. 我们用 $\mathscr{D}_{[a,b]}(\mathscr{X})$ 表示定义在 $[a, b]$ 上取值于完备距离空间 $\mathscr{X}$ 且对 $a \leqslant t < b$ 有极限值 $x(t+0)$ 和对 $a < t \leqslant b$ 有 $x(t-0)$ 的函数 $x(t)$ 的集合. 由于任意区间 $[a, b]$ 可以连续且相互单值地映为区间 $[0, 1]$，所以今后我们将考虑空间 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$. 在所有连续点上相等的函数将不加区别，因此对函数 $x(t)$ 在间断点的值采用统一的定义是自然的. 今后将假定 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 中的所有函数满足如下关系式，

$$x(t) = x(t+0), \quad x(0) = x(+0), \quad x(1) = x(1-0). \tag{1}$$

称值 $\rho(x(t-0), x(t))$ 为 $x(t)$ 在点 t 的跳跃. 需要在 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 中引入距离，在此距离下 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 将成为可分距离空间且具有如下性质: 包含所有柱集的最小 σ 代数和这空间的 Borel 集的 σ 代数相同. 还希望这距离是足够'强'(即有尽可能少的收敛序列

和因此有尽可能多的泛函在这距离下连续）．对这样的要求，一致距离

$$\rho_u(x(\cdot), y(\cdot)) = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \rho(x(t), y(t))$$

是不合适的，因为在这距离下 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 不是可分距离空间（函数集

$$x_s(t) = \begin{cases} x_1, & t < s, \\ x_2, & t \geqslant s, \end{cases} \quad \rho(x_1, x_2) = \delta > 0, \ 0 < s < 1,$$

具有连续统的势，但这集合的每两个元素间的距离等于 δ）．我们在空间 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 中引入一个比一致距离稍为弱些的距离．

我们用 Λ 表示在 $[0, 1]$ 上的连续单调递增的数值函数 $\lambda(t)$ 使 $\lambda(0) = 0$, $\lambda(1) = 1$ 的全体集合（即 $\lambda(t)$ 连续地和相互一一地将 $[0, 1]$ 映为自身）．

注意到对所有 $\lambda \in \Lambda$，反函数 λ^{-1} 存在并且也属于 Λ． 如果 λ_1 和 $\lambda_2 \in \Lambda$，那末复合函数 $\lambda_1(\lambda_2)$ 也属于 Λ．

现对 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 中每对 $x(t)$ 和 $y(t)$ 定义量

$$r_{\mathscr{D}}(x, y) = \inf \{ \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \rho(x(t)), y(\lambda(t))) + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |t - \lambda(t)|; \lambda \in \Lambda\}. \tag{2}$$

往证 $r_{\mathscr{D}}$ 定义了 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 中的距离．为此需验证函数 $r_{\mathscr{D}}$ 满足距离的三个公理：a) $r_{\mathscr{D}}(x, y) \geqslant 0$ 以及当且仅当 $x = y$ 时等于 0；b) $r_{\mathscr{D}}(x, y) = r_{\mathscr{D}}(y, x)$；c) 对 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 中任意的 $x(\cdot)$, $y(\cdot)$, $z(\cdot)$ 有 $r_{\mathscr{D}}(x, z) \leqslant r_{\mathscr{D}}(x, y) + r_{\mathscr{D}}(y, z)$．

条件 a) 显然．条件 b) 由下关系式可得：

$$r_{\mathscr{D}}(y, x) = \inf_{\lambda\in\Lambda} \{ \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \rho(y(t), x(\lambda(t))) + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |t - \lambda(t)| \} = \inf \{ \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \rho(y(\lambda^{-1}(t), x(t))) + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\lambda^{-1}(t) - t|; \lambda \in \Lambda\} = r_{\mathscr{D}}(x, y).$$

现讨论条件 c)，即三角形不等式．设 $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ 和 $z(\cdot)$ 是 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 中的函数．对任意 $\varepsilon > 0$ 可找到函数 $\lambda_1(t)$ 和 $\lambda_2(t)$ 使得下关系式成立：

$$\left.\begin{aligned} r_{\mathscr{D}}(x, y) \geqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \rho(x(t), y(\lambda_1(t))) \\ + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |t - \lambda_1(t)| - \varepsilon, \\ r_{\mathscr{D}}(y, z) \geqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \rho(y(t), z(\lambda_2(t))) \\ + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |t - \lambda_2(t)| - \varepsilon. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

那末

$$\begin{aligned} r_{\mathscr{D}}(x, z) &\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \rho(x(t), z(\lambda_2(\lambda_1(t)))) \\ &\quad + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |t - \lambda_2(\lambda_1(t))| \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \rho(x(t), y(\lambda_1(t))) \\ &\quad + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |t - \lambda_1(t)| + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \rho(y(\lambda_1(t)), z(\lambda_2(\lambda_1(t)))) \\ &\quad + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\lambda_1(t) - \lambda_2(\lambda_1(t))| \\ &= \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \rho(x(t), y(\lambda_1(t))) + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |t - \lambda_1(t)| \\ &\quad + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \rho(y(t), z(\lambda_2(t))) + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |t - \lambda_2(t)|, \end{aligned}$$

因为,如果 t 取遍 $[0, 1]$,那末 $\lambda_1(t)$ 也取遍区间 $[0, 1]$. 考虑关系式 (3),我们得到

$$r_{\mathscr{D}}(x, z) \leqslant r_{\mathscr{D}}(x, y) + r_{\mathscr{D}}(y, z) + 2\varepsilon,$$

由于 ε 是任意的,由此得到 c).

因此,$r_{\mathscr{D}}$ 可以作为 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 中的距离.

为了进一步研究距离 $r_{\mathscr{D}}$ 的性质,如下辅助命题是必需的:

对 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 中的每一个函数 $x(\cdot)$ 定义

$$\begin{aligned} \Delta_c(x) &= \sup\{\min[\rho(x(t'), x(t));\ \rho(x(t), x(t''))];\\ &\quad t - c \leqslant t' \leqslant t \leqslant t'' \leqslant t + c\} \\ &\quad + \sup_{0\leqslant t\leqslant c} \rho(x(0), x(t)) + \sup\{\rho(x(t), x(1));\\ &\quad 1 - c \leqslant t \leqslant 1\}. \end{aligned} \quad (4)$$

那末由于第三章 § 4 引理 1,有

$$\lim_{c\to 0} \Delta_c(x) = 0.$$

引理 1 设 $x(\cdot)$ 是 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 中的函数, $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$. 如果 $x(\cdot)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上没有超过 ε 的跃度,那末当 $|t' - t''| < c$, $t', t'' \in [\alpha, \beta]$ 时

$$\rho(x(t'), x(t'')) \leqslant 2\Delta_c(x) + \varepsilon.$$

证．取任意 $\delta\in(0,\varepsilon)$ 和区间 $[t',t'']$ 中的点 τ，使具有如下性质：当 $t\in[t',\tau)$ 时

$$\rho(x(t'),x(t))<\Delta_c(x)+\delta,$$
$$\rho(x(t'),x(\tau))\geqslant\Delta_c(x)+\delta.$$

如果这样的点不存在，那末 $\rho(x(t'),x(t''))<\Delta_c(x)+\delta$，这就是说引理的论断成立．如果点 τ 存在，那末由于

$$\min[\rho(x(t'),x(\tau));\ \rho(x(\tau),x(t''))]\leqslant\Delta_c(x),$$

及 $\rho(x(t'),x(\tau))\geqslant\Delta_c(x)+\delta$，我们有

$$\rho(x(t),x(t''))\leqslant\Delta_c(x).$$

因此，

$$\begin{aligned}\rho(x(t'),x(t''))&\leqslant\rho(x(t');\ x(\tau-0))\\&\quad+\rho(x(\tau-0),x(\tau))+\rho(x(\tau),x(t''))\\&\leqslant\Delta_c(x)+\delta+\varepsilon+\Delta_c(x).\end{aligned}$$

当 $\delta\downarrow0$ 取极限，我们得证引理．

我们用 Y_m 表示使得

$$\bigcup_k S_{1/m}(y_{mk})=\mathscr{X}$$

的点 $y_{mk}\in\mathscr{X}$ 的可数集，其中 $S_a(x)$ 是以 x 为心半径为 a 的开球．用 $H_{m,n}$ 表示在每个区间 $\left[\frac{k}{n},\ \frac{k+1}{n}\right)$ 上是常值且取值于 Y_m 的函数 $x(\cdot)\in\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 的集合．

引理 2 对 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 中每个函数 $x(\cdot)$ 存在 $H_{m,n}$ 中的函数 $x^*(\cdot)$ 使得

$$r_{\mathscr{D}}(x,x^*)\leqslant\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+4\Delta_{2/n}(x).$$

证．在每个区间 $\left[\frac{k}{n},\ \frac{k+1}{n}\right]$ 中最多能找到一个点，使得在该点的跳跃超过 $2\Delta_{2/n}(x)$．事实上，如果 τ 是一个这样的点，那末

$$\rho(x(s),x(\tau-0))=\min[\rho(x(s),x(\tau-0);$$
$$\rho(\tau-0),x(\tau))]\leqslant\Delta_{1/n}(x)，当 s\in\left[\frac{k}{n},\tau\right);$$

$$\rho(x(s), x(\tau)) \leqslant \Delta_{1/n}(x), \text{ 当 } s \in \left(\tau, \frac{k+1}{n}\right].$$

从而，

$$\rho(x(s-0), x(s)) \leqslant 2\Delta_{1/n}(x) \leqslant 2\Delta_{2/n}(x), \ s \neq \tau.$$

设 τ_k 是区间$\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$的点使得

$$\rho(x(\tau_k - 0), x(\tau_k)) \geqslant 2\Delta_{2/n}(x),$$

如果在此区间这样的点存在．用$\lambda(t)$表示Λ中满足

$$\lambda\left(\frac{k+1}{n}\right) = \tau_k$$

和

$$t - \frac{1}{n} \leqslant \lambda(t) \leqslant t$$

的函数(例如用等式

$$\lambda(0) = 0, \quad \lambda\left(\frac{k+1}{n}\right) = \tau_k, \quad \lambda(1) = 1$$

定义的分段线性函数就是)． 令 $\bar{x}(t) = x(\lambda(t))$． 函数 $\bar{x}(t)$ 仅在形为k/n 的点具有超过 $2\Delta_{2/n}(x)$ 的跳跃，并且

$$r_{\mathscr{D}}(x, \bar{x}) \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \rho(\bar{x}(t), x(\lambda(t))) + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |t - \lambda(t)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

其次设函数 $\bar{x}^*(t)$ 等于 $\bar{x}(k/n)$ 当 $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$, $k \leqslant n-1$;

和设 $\bar{x}^*(1) = \bar{x}\left(\frac{n-1}{n}\right)$. 那末

$$\begin{aligned} r_{\mathscr{D}}(x, x^*) &\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \rho(\bar{x}(t), \bar{x}^*(t)) \\ &\leqslant \sup_k \sup \left[\rho\left(\bar{x}(t), \bar{x}\left(\frac{k}{n}\right)\right); \ \frac{k}{n} \leqslant t < \frac{k+1}{n}\right]. \end{aligned}$$

因为$\bar{x}(t)$的跳跃超过 $2\Delta_{2/n}(x)$ 只能在形为k/n的点中发生，所以在半开闭区间$\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$中没有这样的跳跃点，因此按引理 1

$$\rho\left(\bar{x}\left(\frac{k}{n}\right), \bar{x}(t)\right) \leqslant 2\Delta_{1/n}(\bar{x}) + 2\Delta_{2/n}(x),$$

当 $$t\in\left[\frac{k}{n},\ \frac{k+1}{n}\right).$$

我们来估计 $\Delta_{1/n}(\bar{x})$:

$$\Delta_{1/n}(\bar{x})=\sup\left\{\min[\rho(\bar{x}(t'),\bar{x}(t));\ \rho(\bar{x}(t),\bar{x}(t''))];\ t-\frac{1}{n}\leqslant t'\leqslant t\leqslant t''\leqslant t+\frac{1}{n}\right\}$$
$$+\sup\left\{\rho(\bar{x}(0),\bar{x}(t));\ 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{n}\right\}$$
$$+\sup\left\{\rho(\bar{x}(t),\bar{x}(1));\ 1-\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1\right\}$$
$$=\sup\left\{\rho(x(0),x(\lambda(t)));0\leqslant t\leqslant\frac{1}{n}\right\}$$
$$+\sup\left\{\rho(x(\lambda(t)),x(1));\ 1-\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1\right\}$$
$$+\sup\left\{\min[\rho(x(\lambda(t')),x(\lambda(t)));\rho(x(\lambda(t)),x(\lambda(t'')))];t-\frac{1}{n}\leqslant t'\leqslant t\leqslant t''\leqslant t+\frac{1}{n}\right\}.$$

注意到当 $t_1<t_2<t_1+\dfrac{1}{n}$ 时,

$$t_1-\frac{1}{n}<\lambda(t_1)<\lambda(t_2)\leqslant t_2<t_1+\frac{1}{n},$$

因此

$$0\leqslant\lambda(t_2)-\lambda(t_1)\leqslant\frac{2}{n}.$$

因而 $\Delta_{1/n}(\bar{x})\leqslant\Delta_{2/n}(x)$. 这就是说, $r_{\varnothing}(\bar{x},\bar{x}^*)\leqslant 4\Delta_{2/n}(x)$.

最后,令 $x^*(t)=y_{mk}$, 其中 k 是使得 $\rho(\bar{x}^*,y_{mk})<1/m$ 的最小标码.

因为 $\rho(\bar{x}^*(t),x^*(t))\leqslant 1/m$, 所以 $r_{\varnothing}(\bar{x}^*,x^*)\leqslant 1/m$,

$$r_{\varnothing}(x,x^*)\leqslant r_{\varnothing}(x,\bar{x})+r_{\varnothing}(\bar{x},\bar{x}^*)+r_{\varnothing}(\bar{x}^*,x^*)$$
$$\leqslant\frac{1}{n}+4\Delta_{2/n}(x)+\frac{1}{m}.$$

引理得证.

推论 以 $r_{\mathscr{D}}$ 为距离的空间 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 是可分的.

按引理 2，可数集合 $\bigcup\limits_{m,n} H_{m,n}$ 在 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 中处处稠密，由此得证推论.

设 X_1 是 $\mathscr{X}$ 中某个紧集，而 λ_δ 是当 $\delta>0$ 时有定义和满足条件 $\lambda_{+0}=0$ 的连续增函数. 用 $K_{\mathscr{D}}(X_1, \lambda_\delta)$ 表示 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 中使当 $t\in[0,1]$ 时 $x(t)\in X_1$ 且对所有 $c>0$ 时有 $\Delta_c(x)\leqslant\lambda_c$ 的函数 $x(\cdot)$ 的集合.

定理 1 1) 集合 $K_{\mathscr{D}}(X_1, \lambda_\delta)$ 是 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 中的紧集; 2) 对每一紧集 K_1 可以找到紧集 $X_1\subset\mathscr{X}$ 和递增连续函数 λ_δ, $\lambda_{+0}=0$, 使得 $K_1\subset K_{\mathscr{D}}(X_1, \lambda_\delta)$.

证. 1) 我们来证明对每个 $\varepsilon>0$, $K_{\mathscr{D}}(X_1, \lambda_\delta)$ 有有限 ε 网. 为此我们注意到，对每个 m 存在 k_m 使得

$$\bigcup_{k=1}^{k_m} S_{1/m}(y_{mk})\supset X_1.$$

选取 m 和 n 使得

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+4\lambda_{2/n}<\varepsilon.$$

那末函数集 $H_{m,n}\cap F[y_{m1},\cdots,y_{mk_m}]$ ($F[y_1,\cdots,y_s]$是仅取值 $y_1,\cdots,y_s$ 的函数集合)是集合 $K_{\mathscr{D}}(X_1, \lambda_\delta)$ 中的有限 ε 网. 事实上，由引理 2 $H_{m,n}$ 是 $K_{\mathscr{D}}(X, \lambda_\delta)$ 中$\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+4\lambda_{2/n}\right)$网，而且取值于集合 $\{y_{m1},\cdots,y_{mk_m}\}$ 的函数也构成这样的网. 集合 $K_{\mathscr{D}}(X_1, \lambda_\delta)$ 是闭集. 容易验证关系式

$$\Delta_c(x)\leqslant\Delta_{c+r_{\mathscr{D}}(x,y)}(y)+3r_{\mathscr{D}}(x,y).$$

因此，如果 $r_{\mathscr{D}}(x_n,\bar{x})\to 0$，那末对每一 $\alpha>0$

$$\Delta_c(\bar{x})\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\Delta_{c+\alpha}(x_n)\leqslant\lambda_{c+\alpha}.$$

因此，由 λ 的连续性有 $\Delta_c(\bar{x})\leqslant\lambda_c$. 如果对所有 n, $x_n(t)\in X_1$，那末 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)\in X_1$ 也是显然的.

于是，属于 $K_{\mathscr{D}}(X_1, \lambda_\delta)$ 的序列的极限也属于 $K_{\mathscr{D}}(X_1, \lambda_\delta)$. 还要证明，属于$K_{\mathscr{D}}(X_1, \lambda_\delta)$的所有基本列 $x_n(\cdot)$ 是收敛的. 设 $x_n(\cdot)$ 是 $K_{\mathscr{D}}(X_1, \lambda_\delta)$ 中的函数列，满足 $r_{\mathscr{D}}(x_n, x_m) \to 0$ 当 $n \to \infty$ 和 $m \to \infty$(即 $x_n(\cdot)$ 是基本列). 只要证明某个子列 $x_{n_k}(\cdot)$ 有极限 $\bar{x}(\cdot)$ 就够了. 不妨认为序列 $x_n(\cdot)$ 满足 $r_{\mathscr{D}}(x_n, x_{n+1}) < 2^{-n-1}$. 那末在 Λ 中存在函数序列 λ_n 使得

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |t - \lambda_{n+1}(t)| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}},$$

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \rho(x_n(t), x_{n+1}(\lambda_{n+1}(t))) \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}.$$

令 $\mu_1(t) = \lambda_1(t)$, $\mu_n(t) = \lambda_n(\mu_{n-1}(t))$. 因为

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\mu_n(t) - \mu_{n-1}(t)| \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\lambda_n(t) - t| \leqslant \frac{1}{2^n},$$

所以 $\mu_n(t)$ 收敛于某个不减连续函数 $\mu(t)$，且 $\mu(t)$ 满足条件 $\mu(0) = 0$, $\mu(1) = 1$. 其次

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \rho(x_n(\mu_n(t)), x_{n-1}(\mu_{n-1}(t)))$$
$$= \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \rho(x_n(\lambda_n(t)), x_{n-1}(t)) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

因此 $x_n(\mu_n(t))$ 一致收敛于 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 中某个函数 $x^*(t)$. 现考察函数 $x^*(t)$ 和 $\mu(t)$ 之间的联系. 设 $\mu(t)$ 在某个区间 $[\alpha, \beta]$ 上是常值. 如果 $x^*(\alpha) = x^*(\beta)$, 那末 $x^*(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上也是常值，如果 $x^*(\alpha) \neq x^*(\beta)$, 那末存在 $\gamma \in [\alpha, \beta]$, 使得 $x^*(t) = x^*(\alpha)$, 当 $t \in [\alpha, \gamma)$; $x^*(t) = x^*(\beta)$, 当 $t \in [\gamma, \beta]$. 事实上，若不然，则存在属于 $[\alpha, \beta]$ 的点 $t' < t'' < t'''$, 使得 $x^*(t') \neq x^*(t'')$, $x^*(t'') \neq x^*(t''')$, 于是

$$\lim_{n \to \infty} \min[\rho(x_n(\mu_n(t'')), x_n(\mu_n(t'''))),$$
$$\rho(x_n(\mu_n(t'')), x_n(\mu_n(t')))]$$
$$= \min[\rho(x^*(t''), x^*(t''')), \rho(x^*(t''), x^*(t'))] > 0,$$

而 $\mu_n(t') < \mu_n(t'') < \mu_n(t''')$ 和 $\mu_n(t')$, $\mu_n(t'')$, $\mu_n(t''')$ 趋向 $\mu(\alpha)$. 这与序列 $x_n(\cdot)$ 属于$K_{\mathscr{D}}(X_1, \lambda_\delta)$矛盾.

用 $\bar{x}(\cdot)$ 表示 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 中用如下方式定义的函数：对只要 $s\in(t,1]$ 就有 $\mu(s)>\mu(t)$ 的所有 t，定义

$$\bar{x}(t)=x^*(\mu(t)). \tag{5}$$

式 (5) 定义了 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 中唯一的函数 $\bar{x}(t)$.

我们来证明，此函数 $\bar{x}(\cdot)$ 是序列 $x_n(\cdot)$ 的极限. 为此构造属了 Λ 的辅助函数 φ_n. 设 $\tau_1,\cdots,\tau_k$ 是 $[0,1]$ 上使得 $\bar{x}(\cdot)$ 有跳跃超过 $1/n$ 的全部点. 用 $[\alpha_i,\beta_i]$ 表示 $\mu(t)$ 在其上取值 τ_i 的最大区间(这区间可以只包含一点).

设 γ_i 是区间 $[\alpha_i,\beta_i]$ 上的点使得 $x^*(t)=\bar{x}(\tau_i-0)$ 当 $t\in[\alpha_i,\gamma_i)$ 及 $x^*(t)=\bar{x}(\tau_i)$ 当 $t\in[\gamma_i,\beta_i]$. 特别，如果 $\alpha_i=\gamma_i$，那末 $x^*(t)$ 在 $[\alpha_i,\beta_i]$ 上取唯一的值 $\bar{x}(\tau_i)$. 选取不超过 $1/n$ 的 ε_n 使得 $\Delta_{\varepsilon_n}(x)<\frac{1}{n}$. 设 $\varphi_n(t)$ 是满足关系式 $\varphi_n(\gamma_i)=\tau_i$，$|\varphi_n(t)-\mu(t)|\leqslant\varepsilon_n$ 的函数.

我们来估计 $\sup\{\rho(x^*(t),\bar{x}(\varphi_n(t)));0\leqslant t\leqslant 1\}$. 如果 t 不属于区间 $[\alpha_i,\beta_i]$ 中任一个，则因为 $x(t)$ 在 $\mu(t)$ 和 $\varphi_n(t)$ 之间没有超过 $\frac{1}{n}$ 的跳跃，所以依引理 1

$$\rho(x^*(t),\bar{x}(\varphi_n(t)))=\rho(\bar{x}(\mu(t)),\bar{x}(\varphi_n(t)))\leqslant 2\Delta_{\varepsilon_n}(\bar{x})+\frac{1}{n}.$$

如果 $t\in[\alpha_i,\gamma_i)$，则因为

$$\rho(\bar{x}(\tau_i-0),\bar{x}(\tau_i))>\frac{1}{n}>\Delta_{\varepsilon_n}(x),\ \text{所以}$$

$$\rho(x^*(t),\bar{x}(\varphi_n(t)))\leqslant\sup\{\rho(\bar{x}(\tau_i-0),\bar{x}(s));\ s\in[\tau_i-\varepsilon_n,\tau_i)\}\leqslant\Delta_{\varepsilon_n}(x).$$

类似可证明，当 $t\in[\gamma_i,\beta_i]$ 时 $\rho(x^*(t),\bar{x}(\varphi_n(t)))\leqslant\Delta_{\varepsilon_n}(\bar{x})$. 于是，

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\rho(x^*(t),\bar{x}(\varphi_n(t)))\leqslant\frac{1}{n}+2\Delta_{\varepsilon_n}(\bar{x})\leqslant\frac{3}{n}.$$

现来估计 $r_{\mathscr{D}}(x_n,\bar{x})$. 我们有

$$r_{\mathscr{D}}(x_n,\bar{x})\leqslant r_{\mathscr{D}}(x_n(\cdot),x^*(\mu_n^{-1}(\cdot)))$$

$$+ r_{\mathscr{D}}(x^*(\mu_n^{-1}(\cdot)), \bar{x}(\varphi_n(\mu_n^{-1}(\cdot))))$$
$$+ r_{\mathscr{D}}(\bar{x}(\cdot), \bar{x}(\varphi_n(\mu_n^{-1}(\cdot))))$$
$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \rho(x_n(\mu_n(t)), x^*(t)) + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \rho(x^*(t),$$
$$\bar{x}(\varphi_n(t))) + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |t - \varphi_n(\mu_n^{-1}(t))| \leqslant \frac{1}{2^n}$$
$$+ \frac{3}{n} + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\mu_n(t) - \varphi_n(t)| \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{3}{n} + \frac{1}{2^n} + \varepsilon_n.$$

因此，$r_{\mathscr{D}}(x_n, \bar{x}) \to 0$，即序列 $x_n(\cdot)$ 收敛于函数 $\bar{x}(\cdot)$．论断 1)得证．

2) 用 X_t 表示当 $x(\cdot)\in K_1$ 时值 $x(t)$ 和 $x(t-0)$ 的集合．那末 $\bigcup_t X_t$ 是紧集的证明和 § 4 引理 1 的证明一样．

令 $\Delta_c = \sup\{\Delta_c(x);\ x(\cdot)\in K_1\}$．显然 Δ_c 是 c 的单调增函数．我们来证明 $\lim\limits_{c\downarrow 0}\Delta_c = 0$．若不然，那末可以找到函数列 $x_n(\cdot)\in K_1$ 和序列 $c_n\to 0$．使得对某个 $\delta>0$ $\Delta_{c_n}(x_n)\geqslant\delta$．由于 K_1 的紧性可以假设 $x_n(\cdot)\to x_0(\cdot)$．但当 $r_{\mathscr{D}}(x, y)\leqslant\varepsilon$ 时

$$\Delta_c(x)\leqslant\Delta_{c+\varepsilon}(y)+3\varepsilon.$$

因此对每个 $c>0$，只要 $c_n < c - r_{\mathscr{D}}(x_n, x_0)$ 就有

$$\Delta_c(x_0)\geqslant\Delta_{c-r_{\mathscr{D}}(x_n,x_0)}(x_n) - 3r_{\mathscr{D}}(x_n, x_0)$$
$$\geqslant \delta - 3r_{\mathscr{D}}(x_n, x_0),$$

因此，对每个 $c>0$，$\Delta_c(x_0)\geqslant\delta$，而这与条件 $\lim\limits_{c\to 0}\Delta_c(x_0)=0$ 矛盾．所以 $\lim\limits_{c\downarrow 0}\Delta_c=0$．显然可以构造连续单调函数 λ_c 使它满足条件 $\Delta_c<\lambda_c$，$\lambda_{+0}=0$．那末 $K_1\subset K(X_1, \lambda_\delta)$，定理得证．

没有第二类间断点的过程的基本极限定理

定理 2 设 $\xi_n(t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，$n=0, 1,\cdots$是取值于$\mathscr{X}$的没有第二类间断点的过程的序列，而且 $\xi_n(t)$ 的边沿分布收敛于 $\xi_0(t)$ 的边沿分布．对每一定义在 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 上在距离 $r_{\mathscr{D}}$ 下连续的泛函 f，分布 $f(\xi_n(\cdot))$ 收敛于分布 $f(\xi_0(\cdot))$ 的充分必要条件是对所有 $\varepsilon>0$，

$$\lim_{c\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{P}\{\Delta_c(\xi_n(\cdot))>\varepsilon\}=0. \tag{6}$$

证．由等式(6)得知，对所有 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{c\to 0}\sup_n \mathbf{P}\{\Delta_c(\xi_n(\cdot))>\varepsilon\}=0.$$

正如§4定理1，由此可以证明存在连续单调函数 λ_δ，使 $\lambda_{+0}=0$ 且

$$\sup_n \mathbf{P}\{\Delta_c(\xi_n(\cdot))\leqslant\lambda_c,\ 0<c\leqslant 1\}>1-\frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

仍如§4定理1一样，利用过程 $\xi_n(t)$ 的边沿分布的收敛性，可以证明测度族 $\{\nu_{nt},n=1,2,\cdots;\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$（其中 $\nu_{nt}(A)=\mathbf{P}\{\xi_n(t)\in A\}$）是紧的，因此对每个 k 可以找到紧集 $X^{(k)}$ 使

$$\nu_{nt}(X^{(k)})\geqslant 1-2^{-2k}\frac{\varepsilon}{4}$$

对所有 n，t 成立． 用 $\tilde{X}^{(k)}$ 表示满足 $\rho(y,X^{(k)})\leqslant\lambda_{2^{-k}}$ 的 y 的集合．那末

$$X_1=\bigcap_k \tilde{X}^{(k)}$$

是紧集．由于从

$$x\left(\frac{1}{2^k}\right)\in X^{(k)},\ x\left(\frac{l+1}{2^k}\right)\in X^{(k)},\ \Delta_{2^{-k}}(x)<\lambda_{2^{-k}}$$

得到当

$$\frac{l}{2^k}\leqslant t\leqslant\frac{l+1}{2^k}\text{时，}x(t)\in\tilde{X}^{(k)},$$

所以

$$\mathbf{P}\{\xi_n(\cdot)\bar{\in}K_{\mathscr{D}}(X_1,\lambda_\delta)\}\leqslant 1-\mathbf{P}\{\Delta_c(\xi_n(\cdot))\leqslant\lambda_c,$$

$$0<c\leqslant 1\}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{2^k}\mathbf{P}\left\{\xi_n\left(\frac{1}{2^k}\right)\bar{\in}X_1\right\}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{2^k}2^{-2k}\frac{\varepsilon}{4}<\varepsilon.$$

于是对每个 $\varepsilon>0$ 可构造紧集 $K_{\mathscr{D}}(X_1,\lambda_\delta)$ 使对所有在 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 上对应于随机过程 $\xi_n(\cdot)$ 的测度 μ_n，不等式

$$\mu_n(K_{\mathscr{D}}(X_1, \lambda_\delta)) \geqslant 1-\varepsilon$$

成立. 余下只需应用 § 1 定理 1 (从 § 1 定理 1 的注得知, 在不完备空间里定理条件仍是充分的). 定理条件的充分性得证.

为证明条件 (6) 的必要性我们引入泛函

$$\begin{aligned} F_a(x(\cdot)) = & \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \rho(x(0), x(t))e^{-at} \\ & + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \rho(x(1), x(t))e^{-a(1-t)} \\ & + \sup\{\min[\rho(x(t), x(s))e^{-a(t-s)}; \rho(x(t), \\ & x(u))e^{-a(u-t)}]; 0\leqslant s\leqslant t\leqslant u\leqslant 1\}. \end{aligned}$$

容易验证, $F_a(x(\cdot))$ 是 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 上的连续泛函. 因此如果对所有连续泛函 f, $f(\xi_n(\cdot))$ 的分布收敛于 $f(\xi_0(\cdot))$ 的分布, 那末对每个 $\varepsilon > 0$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\{F_a(\xi_n(\cdot)) > \varepsilon\} \leqslant \mathbf{P}\{F_a(\xi_0(\cdot)) \geqslant \varepsilon\}.$$

现注意到

$$\Delta_c(x(\cdot)) \leqslant e^{ac}F_a(x(\cdot)),$$

$$F_a(x(\cdot)) \leqslant \Delta_c(x(\cdot)) + 5e^{-ac}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \rho(x(0), x(t)).$$

因此

$$\begin{aligned} \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\Delta_c(\xi_n(\cdot)) > \varepsilon\} & \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\{F_{1/c}(\xi_n(\cdot)) > e^{-1}\varepsilon\} \\ & \leqslant \mathbf{P}\{F_{1/c}(\xi_0(\cdot)) \geqslant e^{-1}\varepsilon\} \leqslant \mathbf{P}\left\{\Delta_{\sqrt{c}}(\xi_0(\cdot)) \geqslant \frac{1}{2}e^{-1}\varepsilon\right\} \\ & + \mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \rho(\xi_0(0), \xi_0(t)) \geqslant \frac{\varepsilon}{10}e^{-1+\frac{1}{\sqrt{c}}}\right\}. \end{aligned}$$

根据第三章 § 4 引理 1 且对所有 $x(\cdot) \in \mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 来说, $\sup_t \rho(x(0), x(t))$ 有限, 以及以概率为 1 $\xi_0(\cdot) \in \mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$, 故当 $c \to 0$ 时此不等式的右边趋向 0. 定理得证.

定理 3 设 $\xi_n(t)$, $n = 0, 1, \cdots$ 是以概率为 1 属于 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 的随机过程序列, $\xi_n(t)$ 的边沿分布收敛于 $\xi_0(t)$ 的边沿分布且存在 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 以及 $H > 0$, 使当 $n \geqslant 0$, $t_1 < t_2 < t_3$ 时不等式

$$\mathbf{E}[\rho(\xi_n(t_1), \xi_n(t_2))\rho(\xi_n(t_2), \xi_n(t_3))]^\beta \leqslant H(t_3 - t_1)^{1+\alpha}$$

成立. 那末对 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 上的所有连续泛函 f, $f(\xi_n(\cdot))$ 的分布收敛于 $f(\xi_0(\cdot))$ 的分布.

证. 利用第三章 § 4 引理 4. 如果令 $g(h) = h^\gamma$, 其中 $0 < \gamma < \beta/\alpha$, 和 $q(h) = 2^{1+\alpha}Hh^\delta$, 其中 $\delta = \beta - \alpha\gamma$, 那末取

$$G(m) = \frac{2^{-m\gamma}}{1 - 2^{-\gamma}},$$

$$Q(m, c) = c^{-\beta}H2^{1+\alpha}\frac{2^{-m\delta}}{1 - 2^{-\delta}}$$

时, 对所有过程 $\xi_n(t)$ 该引理的条件成立. 于是对某个 L

$$\mathbf{P}\{\Delta_c(\xi_n(\cdot)) > \varepsilon\} \leqslant L\varepsilon^{-\beta}c^\alpha.$$

余下只要利用定理 2 就可完成定理的证明.

Марков 过程的极限定理 设 $\xi_n(t)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上样本函数以概率为 1 属于 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 的 Марков 过程序列. 用 $P_n(t, x, s, A)$ 表示过程 $\xi_n(t)$ 的转移概率. 其次设

$$V_\varepsilon(x) = \{y: \rho(x, y) > \varepsilon\}.$$

定理 4 如果过程 $\xi_n(t)$ 的边沿分布收敛于 $\xi_0(t)$ 的边沿分布且对每个 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{h\downarrow 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup\{P_n(t, x, s, V_\varepsilon(x));\ x \in \mathscr{X},\ 0 \leqslant s - t \leqslant h\} = 0,$$

那末对所有在 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 上的连续泛函 f 来说 $f(\xi_n(\cdot))$ 的分布将收敛于 $f(\xi_0(\cdot))$ 的分布.

此定理的证明根据于下述引理.

引理 3 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是一 Марков 链, 使对所有 $k < l$ 以概率为 1

$$\mathbf{P}\{\rho(\xi_k, \xi_l) \geqslant \varepsilon | \xi_k\} \leqslant \alpha < 1.$$

那末

$$\mathbf{P}\{\sup\{\min[\rho(\xi_i, \xi_j); \rho(\xi_j, \xi_l)]; 1 \leqslant i < j < l \leqslant n\} \geqslant 4\varepsilon\} \leqslant \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\mathbf{P}\{\rho(\xi_1, \xi_n) \geqslant \varepsilon\}.$$

证. 事件

$$\{\sup\{\min[\rho(\xi_i, \xi_j); \rho(\xi_j, \xi_l)]; 1 \leqslant i < j < l \leqslant n\} \geqslant 4\varepsilon\}$$

蕴含于事件 $A_r \cap B_r$ 中的一个，其中

$$A_r = \{\rho(\xi_1, \xi_j) < 2\varepsilon, j = 1, \cdots, r-1; \rho(\xi_1, \xi_r) \geqslant 2\varepsilon\},$$

$$B_r = \{\sup_{k>r} \rho(\xi_r, \xi_k) \geqslant 2\varepsilon\}.$$

因此

$$\mathbf{P}\{\sup\{\min[\rho(\xi_i, \xi_j); \rho(\xi_j, \xi_l)]; 1 \leqslant i < j < 1 \leqslant n\}$$

$$\geqslant 4\varepsilon\} \leqslant \sum_{r=1}^{n} \int_{A_r} \mathbf{P}\{B_r | \xi_1, \cdots, \xi_r\} \mathbf{P}(d\omega)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \int_{A_r} \mathbf{P}\{B_r | \xi_r\} \mathbf{P}(d\omega).$$

由于 § 4 引理 2，我们有

$$\mathbf{P}\{B_r | \xi_r\} \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha},$$

和

$$\sum_{r=1}^{n} \mathbf{P}\{A_r\} = \mathbf{P}\{\sup_k \rho(\xi_1, \xi_k) \geqslant 2\varepsilon\}$$

$$\leqslant \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{P}\{\rho(\xi_1, \xi_n) \geqslant \varepsilon\}.$$

从这两个不等式得到所要的结果. 引理得证.

推论 如果 $\xi(t)$ 是可分 Марков 过程，它的转移概率 $P(t, x, s, A)$ 在 $t_1 \leqslant t < s \leqslant t_2$ 时满足不等式

$$P(t, x, s, V_\varepsilon(x)) \leqslant \alpha < 1,$$

那末

$$\mathbf{P}\{\sup\{\min[\rho(\xi(t'), \xi(t'')); \rho(\xi(t''), \xi(t'''))];$$

$$t_1 \leqslant t' < t'' < t''' \leqslant t_2\} \geqslant 4\varepsilon\}$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \mathbf{P}\{\rho(\xi(t_1)\xi(t_2)) \geqslant \varepsilon\}.$$

现在我们来证明定理 4. 只要证明对每个 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{c\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{P}\{\Delta_c(\xi_n(\cdot))>\varepsilon\}=0$$

就够了．我们来估计这个概率．设 c 这样小，以致对足够大的 n

$$\sup\{P_n(t,x,s,V_{\varepsilon/8}(x));x\in\mathscr{X},0<s-t\leqslant 3c\}<\frac{1}{2}.$$

那末

$$\Delta_c(\xi_n(\cdot))\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant c}\rho(\xi_n(0),\xi_n(t))+\sup_{0\leqslant 1-t\leqslant c}\rho(\xi_n(1),\xi_n(t))$$
$$+\sup\Big\{\min[\rho(\xi_n(t),\xi_n(t'));\rho(\xi_n(t),\xi_n(t''))];$$
$$kc\leqslant t'<t<t''\leqslant(k+3)c,\ k<\frac{1}{c}\Big\}.$$

因此

$$\mathbf{P}\{\Delta_c(\xi_n(\cdot))\geqslant\varepsilon\}\leqslant\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant c}\rho(\xi_n(0),\xi_n(t))\geqslant\frac{\varepsilon}{4}\right\}$$
$$+\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant 1-t\leqslant c}\rho(\xi_n(1),\xi_n(t))\geqslant\frac{\varepsilon}{4}\right\}$$
$$+\sum_{k<\frac{1}{c}}\mathbf{P}\Big\{\sup\{\min[\rho(\xi_n(t'),\xi_n(t));\rho(\xi_n(t),\xi_n(t''))];$$
$$kc\leqslant t'<t<t''\leqslant(k+3)c\}\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\Big\}$$
$$\leqslant\frac{2\alpha_n}{1-\alpha_n}+\frac{\alpha_n}{(1-\alpha_n)^2}\sum_{k<\frac{1}{c}}\mathbf{P}\Big\{\rho(\xi_n(kc),\xi_n(kc+3c))$$
$$\geqslant\frac{\varepsilon}{8}\Big\},$$

其中

$$\alpha_n=\sup\{P_n(t,x,s,V_{\varepsilon/8}(x));x\in\mathscr{X},0<s-t\leqslant 3c\}.$$

由于

$$\mathbf{P}\left\{\rho(\xi_n(kc),\xi_n(kc+3c))\geqslant\frac{\varepsilon}{8}\right\}$$
$$\leqslant\mathbf{P}\left\{\rho(\xi_n(kc),\xi(kc+c))\geqslant\frac{\varepsilon}{24}\right\}$$
$$+\mathbf{P}\left\{\rho(\xi_n(kc+c),\xi_n(kc+2c))\geqslant\frac{\varepsilon}{24}\right\}$$

$$+\mathbf{P}\left\{\rho\left(\xi_n(kc+2c),\ \xi_n(kc+3c)\right)\geqslant\frac{\varepsilon}{24}\right\},$$

且$\frac{1}{1-\alpha_n}\leqslant 2$，所以

$$\mathbf{P}\{\Delta_c(\xi_n(\cdot))\geqslant\varepsilon\}\leqslant 4\alpha_n\left[1+3\sum_{k<\frac{1}{c}}\mathbf{P}\left\{\rho(\xi_n(kc),\ \xi_n(kc+c))\right.\right.$$

$$\left.\left.\geqslant\frac{\varepsilon}{24}\right\}\right].$$

由于定理的条件和等式

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k<1/c}\mathbf{P}\left\{\rho(\xi_n(kc),\ \xi_n(kc+c))\geqslant\frac{\varepsilon}{24}\right\}$$

$$=\sum_{k<1/c}\mathbf{P}\left\{\rho(\xi_0(kc),\ \xi_0(kc+c))\geqslant\frac{\varepsilon}{24}\right\}$$

对几乎所有 $\varepsilon>0$ 是正确的，因此只要证明后一等式的右边当 $c\to 0$ 时有界就够了．选取 h 使

$$P_0(t,\ x,\ s,\ V_{\varepsilon_1}(x))\leqslant\frac{1}{3},$$

当

$$s-t\leqslant h,\qquad \varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{96}.$$

只要证明在给定 h 时对所有 $\bar{t}$,

$$\sum_{\bar{t}\leqslant kc<\bar{t}+h}\mathbf{P}\{\rho(\xi_0(kc),\ \xi_0(kc+c))\geqslant 4\varepsilon_1\}$$

有界就够了．

如果 $P(\xi_0(kc),\ \xi_0(kc+c))\geqslant 4\varepsilon$，设 $\eta_k=1$，在其余情形设 $\eta_k=0$.

我们需要证明 $\sum\limits_{\bar{t}\leqslant kc<\bar{t}+h}\mathbf{E}\eta_k$ 按 $\bar{t}$ 及 c 一致有界。

我们来估计

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{\bar{t}\leqslant kc<\bar{t}+h}\eta_k>l\right\}.$$

只考虑下标 k 满足 $\bar{t} \leqslant kc < \bar{t} + h$ 的 η_k。

设 A_r 是事件

$$\left\{\omega: \sum_{k \leqslant r} \eta_k = l; \ \eta_r = 1\right\}.$$

那末

$$\mathbf{P}\{\sum \eta_k > l\} = \sum_r \mathbf{P}\left\{A_r \cap \left\{\omega: \sum_{k>r} \eta_k > 0\right\}\right\}$$

$$= \sum_r \int_{A_r} \mathbf{P}\left\{\sum_{k>r} \eta_k > 0 \,|\, \xi_0(rc + c)\right\} \mathbf{P}(d\omega)$$

$$\leqslant \sum_r \int_{A_r} \mathbf{P}\{\sup_{k>r} \rho(\xi_0(kc), \xi_0(rc + c)$$

$$\geqslant 2\varepsilon_1 \,|\, \xi_0(rc + c)\} \mathbf{P}(d\omega) \leqslant \frac{1/3}{1 - 1/3} \sum_r \mathbf{P}\{A_r\}$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \mathbf{P}\{\sum \eta_k > l - 1\}.$$

因此对所有 $\bar{t}$ 和 c

$$\sum_{\bar{t} \leqslant kc < \bar{t}+h} \mathbf{E}\eta_k \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} l\left(\frac{1}{2}\right)^l = \frac{1}{4}.$$

定理得证。

在完备线性赋范空间 $\mathscr{X}$ 中独立增量过程是 Марков 过程的一个特殊情形。因此作为定理 4 的一个推论，我们有如下定理：

定理 5 设 $\xi_n(t)$, $n = 0, 1, \cdots$ 是定义在 $[0, 1]$ 上取值于 $\mathscr{X}$ 的独立增量过程序列，同时以概率为 1 属于 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$。如果过程 $\xi_n(t)$ 的边沿分布收敛于过程 $\xi_0(t)$ 的边沿分布，且对任意 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{h \to 0} \lim_{n \to \infty} \sup_{|t-s| \leqslant h} \mathbf{P}\{|\xi_n(t) - \xi_n(s)| > \varepsilon\} = 0,$$

那末对 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 上的每一连续泛函 f 有，$f(\xi_n(\cdot))$ 的分布收敛于 $f(\xi_0(\cdot))$ 的分布。

注. 在定理 2—5 中只要求泛函 f 是可测且 μ_0 几乎处处连续（μ_0 是 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{X})$ 上的极限过程对应的测度）就够了。

应用于统计 我们应用上面所讨论的极限定理研究在数理统计用到的经验分布渐近性质.

假设某一试验结果表示为有未知连续分布函数 $F(x)$ 的随机变量. 如果已经知道 n 次独立试验的结果是 $\xi_1, \cdots, \xi_n$, 怎样去估计函数 $F(x)$ 呢?

在数理统计中,为此利用关系式

$$F_n^*(x) = \frac{\nu_n(x)}{n}$$

定义经验分布函数 $F_n^*(x)$, 式中 $\nu_n(x)$ 是 ξ_k 落在区间 $(-\infty, x)$ 的数目. 由 Bernoulli 定理得, $F_n^*(x)$ 依概率收敛于 $F(x)$. 因此函数 $F_n^*(x)$ 可以作为 $F(x)$ 的一个估计. 自然,我们对这估计的误差发生兴趣. 另一方面, 有一个 $F(x)$ 的近似解析表达式是方便的. 这时要解决如下问题: 如果试验的结果 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是知道的话,能否给出一个函数 $\Phi(x)$ 作为 $F(x)$ 的近似. 在任何情况下, 重要的是要知道经验分布函数和理论分布函数 $F(x)$ 的差的性态. 为此,我们引入过程

$$\eta_n(t) = \sqrt{n}\,(F_n^*(t) - F(t)).$$

引理 4 过程 $\eta_n(t)$ 的边沿分布收敛于 Gauss 过程 $\eta(t)$ 的边沿分布,其中 $\mathbf{E}\eta(t) = 0$ 和当 $t < \tau$ 时

$$\mathbf{E}\eta(t)\eta(\tau) = F(t)[1 - F(\tau)].$$

证. 注意到

$$\eta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} [\varepsilon(\xi_k - t) - F(t)],$$

其中 $\varepsilon(t) = 0$, 当 $t \leqslant 0$ 及 $\varepsilon(t) = 1$, 当 $t > 0$. 因为

$$\mathbf{E}\varepsilon(\xi_k - t) = F(t),$$

$$\mathbf{E}\varepsilon(\xi_k - t)\varepsilon(\xi_k - \tau) = F(t), \quad 当 \ t < \tau,$$

且过程 $\varepsilon(\xi_k - t) - F(t)$ 对不同的 k 是相互独立的, 证明的余下部分由第三章 § 1 定理 1 得到.

推论 设 $F^{-1}(t)$ 是 $F(t)$ 的反函数. 令

$$\xi_n(t) = \eta_n(F^{-1}(t)), \qquad \xi(t) = \eta(F^{-1}(t)).$$

那末过程 $\xi_n(t)$ 的边沿分布收敛于定义在 $t\in[0,1]$ 的 Gauss 过程 $\xi(t)$ 的边沿分布，$\xi(t)$ 满足

$$\mathbf{E}\xi(t)=0,\quad \mathbf{E}\xi(t)\xi(s)=t(1-s), \text{当 } 0\leqslant t<s\leqslant 1.$$

注 1. 过程 $\xi_n(t)$ 能表为

$$\xi_n(t)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}[\varepsilon(\eta_k-t)-t],$$

其中 $\eta_k=F^{-1}(\xi_k)$ 是在 $[0,1]$ 取均匀分布的独立随机变量.

注 2. 过程 $\xi(t)$ 的有限维分布和 Brown 运动过程 $w(t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，在条件 $w(1)=0$ 下的条件有限维分布相同. 因为过程 $w(t)$ 在条件 $w(t)=0$ 下的条件分布是 Gauss 分布，所以只需证明

$$\mathbf{E}(w(t)\,|\,w(1))_{w(1)=0}=0,$$

$$\mathbf{E}(w(t)w(s)\,|\,w(1))_{w(1)=0}=t(1-s),\quad 0\leqslant t<s\leqslant 1.$$

变量 $\bar{\xi}(t)=w(t)-tw(1)$ 与 $w(1)$ 不相关. 因为 $\bar{\xi}(t)$ 和 $w(1)$ 具有联合 Gauss 分布，所以过程 $\bar{\xi}(t)$ 独立于 $w(1)$. 因此

$$\mathbf{E}(\bar{\xi}(t)\,|\,w(1))=\mathbf{E}\bar{\xi}(t)=0,$$

$$\mathbf{E}(\bar{\xi}(t)\bar{\xi}(s)\,|\,w(1))=\mathbf{E}\bar{\xi}(t)\bar{\xi}(s).$$

利用 $\bar{\xi}(t)=w(t)-tw(1)$ 和上述公式，我们得

$$\mathbf{E}(w(t)\,|\,w(1))=tw(1),$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(w(t)w(s)\,|\,w(1))&=\mathbf{E}\bar{\xi}(t)\bar{\xi}(s)+ts(w(1))^2\\&=\min[t,s]-ts+ts[w(1)]^2.\end{aligned}$$

令 $w(1)=0$，我们证实了注 2 开始时所说的正确性.

定理 6 对 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{R}^1)$ 上的任一连续泛函 f，$f(\xi_n(\cdot))$ 的分布收敛于 $f(\xi(\cdot))$ 的分布.

证. 首先注意到可分过程 $\xi(t)$ 是连续的，因此 $\xi(t)$ 以概率为 1 属于 $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathscr{R}^1)$. 事实上，$\xi(t+h)-\xi(t)$ 具有 Gauss 分布，而且

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\xi(t+h)-\xi(t))^4=3(\mathbf{E}[\xi(t+h)\\-\xi(t)]^2)^2=O(h^2).\end{aligned}$$

因此根据第三章 §5 定理7，过程 $\xi(t)$ 是连续的. 过程 $\xi_n(t)$ 的边

沿分布收敛于$\xi(t)$的边沿分布得证.

由于定理 2，余下要证明关系式 (6) 成立. 因为

$$\Delta_c(x) \leqslant \sup\{|x(t') - x(t'')|; |t' - t''| \leqslant c\},$$

如果对所有 $\varepsilon > 0$ 能确立关系式

$$\lim_{c \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \mathbf{P}\{\sup_{|t'-t''| \leqslant c} |\xi_n(t') - \xi_n(t'')| > \varepsilon\} = 0, \qquad (8)$$

则定理将得到证明. 过程 $\xi_n(t) + \sqrt{n}\, t$ 单调递增，因此当 $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ 时

$$-\sqrt{n}(t_4 - t_1) \leqslant \xi_n(t_3) - \xi_n(t_2) \leqslant \xi_n(t_4) - \xi_n(t_1) + \sqrt{n}(t_4 - t_1),$$

所以

$$\sup_{|t'-t''| \leqslant c} |\xi_n(t') - \xi_n(t'')| \leqslant \frac{2\sqrt{n}}{2^m} + \sup_{|k_1-k_2| \leqslant c2^{m+2}} \left|\xi_n\left(\frac{k_1}{2^m}\right) - \xi_n\left(\frac{k_2}{2^m}\right)\right|.$$

选取 m_n 使当 $n \to \infty$时 $\frac{\sqrt{n}}{2^{m_n}} \to 0$，和 $n2^{-m_n} \geqslant 1$.

为证明 (8) 只要验证对所有 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{c \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \mathbf{P}\{\sup_{|k_1-k_2| \leqslant c2^{m_n}} |\xi_n(k_1 2^{-m_n}) - \xi_n(k_2 2^{-m_n})| > \varepsilon\} = 0$$

就够了. 注意到

$$\sup_{|k_1-k_2| \leqslant c2^{m_n}} |\xi_n(k_1 2^{-m_n}) - \xi_n(k_2 2^{-m_n})| \leqslant 2\sum_{r=m^{(c)}}^{m_n} \sup_i \left|\xi_n\left(\frac{i+1}{2^r}\right) - \xi_n\left(\frac{i}{2^r}\right)\right|,$$

其中 $m^{(c)}$ 是满足关系式 $c2^{m^{(c)}} \geqslant 1$ 的最小整数(参见第二章 § 4 引理 3 证明时所涉及到的最后的不等式).

选取 $a < 1$ 使 $2a^4 < 1$. 那末

$$\mathbf{P}\{\sup_{|k_1-k_2| \leqslant c2^{m_n}} |\xi_n(k_1 2^{-m_n}) - \xi_n(k_2 2^{-m_n})| > \varepsilon\}$$

$$\leqslant \sum_{r=m^{(c)}}^{m_n} \mathbf{P}\left\{\sup_i \left|\xi_n\left(\frac{i+1}{2^r}\right) - \xi_n\left(\frac{i}{2^r}\right)\right|\right.$$

$$\left. > \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{a^{r-m^{(c)}}}{1-a}\right\} \leqslant \sum_{r=m^{(c)}}^{m_n}\sum_{i=0}^{2^r-1} \mathbf{P}\left\{\left|\xi_n\left(\frac{i+1}{2^r}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. - \xi_n\left(\frac{i}{2^r}\right)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{a^{r-m^{(c)}}}{1-a}\right\}$$

$$\leqslant \sum_{r=m^{(c)}}^{m_n}\sum_{i=0}^{2^r-1} \mathbf{E}\left|\xi_n\left(\frac{i+1}{2^r}\right)\right.$$

$$\left. - \xi_n\left(\frac{i}{2^r}\right)\right|^4 \left(\frac{2(1-a)}{\varepsilon a^{r-m^{(c)}}}\right)^4. \tag{9}$$

设 μ_n 是变量 η_i 落在区间 $[t, t+h]$ 的数目. 那末

$$\mathbf{P}\{\mu_n = k\} = C_n^k h^k (1-h)^{n-k}$$

和

$$\xi(t+h) - \xi(t) = \sqrt{n}\left(\frac{\mu_n}{n} - h\right).$$

经计算可得(参见 Б. В. Гнеденко [17], 214 页);

$$\mathbf{E}(\xi_n(t+h) - \xi_n(t))^4 \leqslant 3h^2 + \frac{h}{n} \leqslant 3h^2 + h2^{-m_n}.$$

因此,当 $h \geqslant 2^{-m_n}$ 时我们有

$$\mathbf{E}(\xi_n(t+h) - \xi_n(t))^4 \leqslant 4h^2.$$

将此估计代入不等式 (9),我们得

$$\mathbf{P}\{\sup_{|k_1-k_2|\leqslant c2^{m_n}} |\xi_n(k_1 2^{-m_n}) - \xi_n(k_2 2^{-m_n})| > \varepsilon\}$$

$$\leqslant \sum_{r=m^{(c)}}^{m_n} \frac{2^4(1-a)^4}{\varepsilon^4 a^{4(r-m_c)}} \cdot 4 \cdot 2^{-r} \leqslant L_\varepsilon \frac{1}{2^{m^{(c)}}},$$

其中

$$L_\varepsilon = \frac{2^6(1-a)^4}{\varepsilon^4}\sum_{r=0}^{\infty}(2a^4)^{-r}.$$

定理得证.

第七章 对应于随机过程的测度的绝对连续性

§1. 关于绝对连续性的一般定理

首先让我们来回顾一下测度论中的某些定义.

设在可测空间$(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$上给出两个测度$\mu_1$及$\mu_2$. 测度$\mu_2$称为关于测度$\mu_1$绝对连续(记为$\mu_2 \ll \mu_1$), 如果对所有$\mathfrak{B}$中的$A$只要$\mu_1(A)=0$就有$\mu_2(A)=0$. 如果$\mu_1 \ll \mu_2$及$\mu_2 \ll \mu_1$, 则记$\mu_1 \sim \mu_2$并称这两个测度是等价的. 测度$\mu_1$和$\mu_2$是互相奇异的, 如果存在集合$A$使$\mu_1(A)=0$, $\mu_2(\mathscr{X}-A)=0$. 互相奇异的测度还称为正交的(记为$\mu_1 \perp \mu_2$). 如果测度μ_1和μ_2是有限的, 则$\mu_2 = \nu_1 + \nu_2$, 其中$\nu_1 \ll \mu_1$, $\nu_2 \perp \mu_1$. 这样的表示是唯一的. 测度ν_1和ν_2分别称为测度μ_2关于测度μ_1的绝对连续分量和奇异分量.

对于有限测度来说 Radon-Nikodym 定理是正确的: $\mu_2 \ll \mu_1$当且仅当存在$\mathfrak{B}$可测函数$\rho(x)$使对所有$A \in \mathfrak{B}$等式

$$\mu_2(A) = \int_A \rho(x)\mu_1(dx)$$

成立. 函数$\rho(x)$被确定精确到按测度μ_1的等价类, 并称之为测度μ_2对于μ_1的密度或导数, 及表为

$$\rho(x) = \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x).$$

如果μ_2关于μ_1不绝对连续, 那末把$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}$理解为测度μ_2关于μ_1的绝对连续分量的导数. 特别, 如果$\mu_1 \perp \mu_2$, 则$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}=0$.

在这一章里我们将考虑测度μ_1和μ_2是概率测度, 即μ_i

$(\mathscr{X})=1$ 的这一情形. 如果$\mathscr{X}$是一个函数空间,那末 $\mathfrak{B}$ 被理解为由柱集所生成的 σ 代数,因此测度 μ_i 可了解为对应于某个随机过程的测度. 这一章就是致力于研究这样的测度的绝对连续性、等价和奇异性的条件,还有计算一个测度对于另一个测度的密度.

在证明关于可测空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 上概率测度的绝对连续性定理时常利用如下步骤. 设 $\mathfrak{B}_n$ 是递增 σ 代数序列, 使得

$$\sigma\left\{\bigcup_n \mathfrak{B}_n\right\} = \mathfrak{B},$$

而 μ_i^n 是测度 μ_i 在 $\mathfrak{B}_n$ 上的收缩. 假定 σ 代数 $\mathfrak{B}_n$ 使得验证测度 μ_2^n 关于测度 μ_1^n 的绝对连续性是不难的. 如果 $\mathscr{X}$ 是函数空间,那末通常将 $\mathfrak{B}_n$ 理解为由 $\mathscr{X}$ 的固定有限维子空间组成基底的柱集所生成的 σ 代数. 设 $\mu_2^n \ll \mu_1^n$ 且

$$\rho_n(x) = \frac{d\mu_2^n}{d\mu_1^n}(x).$$

$\rho_n(x)$ 在概率空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu_1)$ 上构成鞅. 事实上,对每个 $\mathfrak{B}_n$ 可测函数 $f(x)$

$$\begin{aligned}\int f(x)\rho_{n+1}(x)\mu_1(dx) &= \int f(x)\rho_{n+1}(x)\mu_1^{n+1}(dx)\\ &= \int f(x)\mu_2^{n+1}(dx) = \int f(x)\mu_2^n(dx)\\ &= \int f(x)\rho_n(x)\mu_1^n(dx) = \int f(x)\rho_n(x)\mu_1(dx).\end{aligned}$$

由此,根据概率空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu_1)$ 上条件期望的定义,我们有

$$\mathbf{E}(\rho_{n+1}(x)\,|\,\mathfrak{B}_n) = \rho_n(x).$$

但变量 $\rho_n(x)\mathfrak{B}_n$ 可测,因此 $\rho_n(x)$ 是鞅. 由于 $\rho_n(x) \geqslant 0$ 及

$$\int \rho_n(x)\mu_1(dx) = \mu_2^n(\mathscr{X}) = 1,$$

那末根据鞅的极限定理 (第二章 § 2 定理 1), 按测度 μ_1 几乎处处存在极限

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n(x) = \rho(x). \tag{1}$$

定理 1 由式 (1) 定义的函数 $\rho(x)$ 是测度 μ_2 关于 μ_1 的绝对连续分量的密度,即

$$\rho(x) = \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x).$$

证．设 $\mu_2 = a\mu' + b\mu''$，其中 $a + b = 1$，$\mu' \ll \mu_1$，$\mu'' \perp \mu_1$，因此 μ' 和 μ'' 是概率测度．用 μ'^n 和 μ''^n 表示这两个测度在 $\mathfrak{B}_n$ 上的收缩．那末

$$\rho_n(x) = a\rho_n'(x) + b\rho_n''(x),$$

其中

$$\rho_n'(x) = \frac{d\mu'^n}{d\mu_1^n}(x), \qquad \rho_n''(x) = \frac{d\mu''^n}{d\mu_1^n}(x).$$

为证明定理，只要证明 $\rho_n''(x) \to 0$ 和 $\rho_n'(x) \to \frac{d\mu'}{d\mu_1}(x)$ 按测度 μ_1 几乎处处成立．对每个 $\mathfrak{B}_n$ 可测有界函数 $f(x)$ 等式

$$\int f(x)\frac{d\mu'}{d\mu_1}(x)d\mu_1(x) = \int f(x)\mu_2'(dx) = \int f(x)\mu'^n(dx)$$

$$= \int f(x)\rho_n'(x)\mu_1(dx)$$

成立．因此

$$\rho_n' = \mathbf{E}\left(\frac{d\mu'}{d\mu_1}(x) \mid \mathfrak{B}_n\right),$$

其中条件数学期望是在概率空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu_1)$ 上取的．由于第二章 §2 定理 4 对每一单调递增 σ 代数序列 $\mathfrak{B}_n$ 以概率为 1 有

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(\xi|\mathfrak{B}_n) = \mathbf{E}\left(\xi|\sigma\left\{\bigcup_n \mathfrak{B}_n\right\}\right).$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n'(x) = \mathbf{E}\left(\frac{d\mu'}{d\mu_1}(x)|\mathfrak{B}\right) = \frac{d\mu'}{d\mu_1}(x).$$

现证明依测度 μ_1 几乎处处有 $\rho_n''(x) \to 0$．设

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n''(x) = \rho''(x)$$

(由 $\rho_n''(x)$ 是鞅知极限存在)．根据 Fatou 定理对每一非负 $\mathfrak{B}_n$ 可测函数 $f(x)$ 有

$$\int f(x)\mu''(dx) = \int f(x)\mu''^n(dx) = \int f(x)\rho_n''(x)\mu_1^n(dx)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int f(x)\rho_n''(x)\mu_1(dx) \geqslant \int f(x)\rho''(x)\mu_1(dx),$$

（此处 $n > m$），因此对 $A \in \mathfrak{B}$

$$\int_A \rho''(x)\mu_1(dx) \leqslant \mu''(A).$$

设 A 使 $\mu''(A) = 0$，$\mu_1(A) = 1$. 那末

$$\int_A \rho''(x)\mu_1(dx) = 0.$$

因此依测度 μ_1 在集合 A 上几乎处处 $\rho''(x) = 0$，且因为 $\mu_1(A) = 1$，所以依测度 μ_1 几乎处处 $\rho''(x) = 0$. 定理得证.

推论 1 如果由式(1)所定义的 $\rho(x)$ 依测度 μ_1 几乎处处是正的，则 $\mu_1 \ll \mu_2$ 且

$$\frac{d\mu_1}{d\mu_2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho(x)}, & x \in S, \\ 0, & x \bar{\in} S, \end{cases}$$

其中 $S \in \mathfrak{B}$ 满足 $\mu_2''(S) = 0$，$\mu_1(S) = 1$.

事实上，对每一非负 $\mathfrak{B}$ 可测函数 $f(x)$，如下等式是正确的，

$$\int_S f(x)\mu_2(dx) = \int_S f(x)\rho(x)\mu_1(dx).$$

将函数 $f(x)$ 取作 $g(x)/\rho(x)$，我们得

$$\int_S g(x)\mu_1(dx) = \int_S \frac{g(x)}{\rho(x)}\mu_2(dx),$$

由此得到我们的论断.

推论 2 测度 μ_2 关于 μ_1 绝对连续的充分必要条件是由式(1)所定义的函数 $\rho(x)$ 满足条件

$$\int \rho(x)\mu_1(dx) = 1. \tag{2}$$

因为

$$\int \rho_n(x)\mu_1(dx) = 1, \tag{3}$$

所以(2)成立的充分必要条件是，在(3)中容许将极限搬入积分号内，即按测度 μ_1 函数 $\rho_n(x)$ 关于 n 一致可积.

有时代替测度 μ_i 在 $\mathfrak{B}_n$ 上的收缩测度 μ_i^n，而考虑近似于 μ_i 的

某些测度 μ_i^n，使得$\frac{d\mu_2^n}{d\mu_1^n}$的计算更为简单，有时这样做会更方便。这种情况在某种程度上类似于在定理 1 及其推论所考虑的情况。

定理 2 设在 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 上给出两个概率测度序列 μ_n^1 和 μ_n^2，满足条件:

a) 在 σ 闭包重合于 $\mathfrak{B}$ 的某个代数 $\mathfrak{B}_0$ 上，μ_n^i 收敛于 μ_0^i:

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n^i(A) = \mu_0^i(A), \quad A\in\mathfrak{B}_0;$$

b) 当 $n \geqslant 1$ 时，测度 μ_n^2 关于 μ_n^1 绝对连续；

c) 函数 $\rho_n(x) = \frac{d\mu_n^2}{d\mu_n^1}(x)$ 关于 μ_n^1 一致可积，即对任意 $\varepsilon > 0$ 可找到N使对所有 n

$$\int\rho_n(x)\chi_{[N,\infty)}(\rho_n(x))\mu_n^1(dx) < \varepsilon.$$

其中 $\chi_{[N,\infty)}(t)$ 是区间 $[N, \infty)$ 的示性函数。那末 $\mu_0^2 \ll \mu_0^1$。

证. 对 $A\in\mathfrak{B}_0$ 我们有

$$\begin{aligned}\mu_0^2(A) &= \lim_{n\to\infty}\mu_n^2(A) = \lim_{n\to\infty}\int_A\rho_n(x)\mu_n^1(dx)\\ &\leqslant N\lim_{n\to\infty}\mu_n^1(A) + \overline{\lim_{n\to\infty}}\int_A\rho_n(x)\chi_{[N,\infty)}(\rho_n(x))\mu_n^1(dx)\\ &\leqslant N\mu_0^1(A) + \varepsilon,\end{aligned}$$

如果选取N和 ε 使条件 c) 的不等式成立。满足

$$\mu_0^2(A) \leqslant N\mu_0^1(A) + \varepsilon \tag{4}$$

的集合类是一单调类，它包含代数 $\mathfrak{B}_0$，于是对 $\mathfrak{B}$ 中所有 A，(4) 成立。由 (4) 式，倘若 $\mu_0^1(A) = 0$，则因为 $\varepsilon > 0$ 可取任意小，故 $\mu_0^2(A) = 0$。

注. 为要定理 2 的条件 c) 成立，如下条件之一成立就够了:

1) 对某个 $\alpha > 1$

$$\sup_n\int[\rho_n(x)]^\alpha\mu_n^1(dx) < \infty,$$

2) 存在正的连续函数 $\varphi(t)$ 使得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\varphi(t)} = 0 \qquad 且 \qquad \sup_n\int\varphi(\rho_n(x))\mu_n^1(dx) < \infty,$$

3) $\sup_n \int \log \rho_n(x)\, \mu_n^2(dx) = \sup_n \int \rho_n(x) \log \rho_n(x) \mu_n^1(dx) < \infty$,

4) 测度 μ_n^1 关于 μ_n^2 绝对连续且对任意 $\varepsilon > 0$ 可以找到N，使

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mu_n^2\left\{x: \frac{d\mu_n^1}{d\mu_n^2}(x) < \frac{1}{N}\right\} < \varepsilon. \tag{5}$$

事实上，1) 和 3) 是 2) 的特殊情形，只要取

$$\varphi(t) = t^\alpha \quad 和 \quad \varphi(t) = t\log t + 1.$$

条件 2) 的充分性从不等式

$$\int \rho_n(x)\, \chi_{[N,\infty)}(\rho_n(x))\, \mu_n^1(dx) \leqslant \sup_{t>N} \frac{t}{\varphi(t)} \int \varphi(\rho_n(x)) \mu_n^1(dx)$$

得到.

为证明条件 4) 的充分性，我们只要注意到

$$\int \rho_n(x) \chi_{[N,\infty)}(\rho_n(x)) \mu_n^1(dx) = \mu_n^2\left(\left\{x: \frac{d\mu_n^1}{d\mu_n^2}(x) < \frac{1}{N}\right\}\right).$$

由于 (5)，可选取足够大的N使对所有足够大的 n 这表示式变得任意小. 此外由于 $\mu_n^2 \ll \mu_n^1$, $1/\rho_n(x)$ 按测度 μ_n^2 几乎处处是正的，所以对一切 n

$$\lim_{N\to\infty} \mu_n^2\left(\left\{x: \frac{d\mu_n^1}{d\mu_n^2}(x) < \frac{1}{N}\right\}\right) = 0.$$

由此和 5)，得条件 c).

定理 2 没有给出计算 $\frac{d\mu_0^2}{d\mu_0^1}(x)$ 的可能性. 因为每一个函数 $\rho_n(x)$ 按照它自身的测度被定义，所以不可能谈论 $n\to\infty$ 时 $\rho_n(x)$ 的极限. 特别当所有测度 μ_n^1 与 μ_0^1 重合时，考虑 $\rho_n(x)$ 按测度 μ_0^1 的极限才是可能的. 如果它存在，那末当定理 2 的条件成立时这极限将是 $\frac{d\mu_0^2}{d\mu_0^1}(x)$. 现在我们来证明关于密度 $\frac{d\mu_0^2}{d\mu_0^1}(x)$ 的更一般的定理.

定理 3 设在概率空间 $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$ 上给出取值于可测空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 的随机变量 ξ_n^i, $i = 1, 2$, $n = 0, 1, \cdots$, 且存在其 σ 闭包就是 $\mathfrak{B}$ 的代数 $\mathfrak{B}_0$, 使对所有 $A \in \mathfrak{B}_0$ 依概率 $\mathbf{P}$

$$\chi_A(\xi_n^i) \to \chi_A(\xi_0^i).$$

如果测度 $\mu_n^i(A) = \mathbf{P}\{\xi_n^i \in A\}$ 在 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 上满足定理 2 的条件 b) 和 c) 并且在依概率收敛意义下

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n(\xi_n^1) = \rho$$

存在，则 $\rho = \frac{d\mu_0^2}{d\mu_0^1}(\xi_0^1)$.

证. 对 $\mathfrak{B}_0$ 中所有 A 存在依概率收敛的极限

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n(\xi_n^1)\chi_A(\xi_n^1) = \rho\chi_A(\xi_0^1).$$

由于定理 2 的条件 c)，$\rho_n(\xi_n^1)\chi_A(\xi_n^1)$ 按测度 μ_n^1 是一致可积的，因此极限可取入数学期望记号内：

$$\mu_0^2(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\chi_A(\xi_n^2) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\chi_A(\xi_n^1)\rho_n(\xi_n^1)$$
$$= \mathbf{E}\chi_A(\xi_0^1)\rho = \int_A \rho(x)\mu_0^1(dx).$$

此关系式可用显然的方式推广至所有 $A \in \mathfrak{B}$. 定理得证.

注 1. 如果 $\frac{d\mu_n^1}{d\mu_n^2}$ 依概率收敛于某个极限 $\bar{\rho} > 0$，则定理 2 的条件 c) 自然而然成立，因为此时定理 2 注的条件 4) 成立.

注 2. 如果不要求定理 2 的条件 c) 成立，而设 $\mathbf{E}\rho = 1$，则定理 3 的结论仍然正确. 事实上，由 Fatou 定理得关系式

$$\mathbf{E}\rho\chi_A(\xi_0^1) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\rho_n(\xi_n^1)\chi_A(\xi_n^1)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mu_n^2(A) = \mu_0^2(A)$$

对所有 $A \in \mathfrak{B}_0$ 成立. 此外，使

$$\mathbf{E}\rho\chi_A(\xi_0^1) \leqslant \mu_0^2(A) \tag{6}$$

成立的集合 A 的全体构成一单调类. 因此 (6) 对所有 $A \in \mathfrak{B}$ 成立. 如果对某个 A 有不等式

$$\mathbf{E}\rho\chi_A(\xi_0^1) < \mu_0^2(A),$$

则

$$\mathbf{E}\rho = \mathbf{E}\rho\chi_A(\xi_0^1) + \mathbf{E}\rho\chi_{(\mathscr{X}-A)}(\xi_0^1) < \mu_0^2(A)$$
$$+ \mu_0^2(\mathscr{X} - A) = 1,$$

这与假设 $\mathbf{E}\rho=1$ 相矛盾．因此对所有 $A\in\mathfrak{B}$

$$\mathbf{E}\rho\chi_A(\xi_0^1)=\mu_0^2(A),\qquad \text{或}\qquad \rho=\frac{d\mu_0^2}{d\mu_0^1}(\xi_0^1).$$

当概率空间和 $(\mathscr{X},\mathfrak{B},\mu)$ 相一致且随机变量是 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$ 的可测映象时，情况是特别有趣的．由定理 3 得

推论 1 设 1) 给定由 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$ 的两个可测映象序列 $T_n^1(x)$ 和 $T_n^2(x)$，而测度 μ_n^i 是由等式 $\mu_n^i(A)=\mu(T_n^{i-1}(A))$ 所定义，其中 $T_n^{i-1}(A)$ 是映象 T_n^i 下 A 的全原象，2) 按测度 μ 对几乎所有 x，$T_n^i(x)\to T_0^i(x)$，3) $\mu_n^1\sim\mu_n^2$ 且按测度 μ 对几乎所有 x 存在非负极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d\mu_n^2}{d\mu_n^1}(T_n^1(x))=\rho_1(x),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d\mu_n^1}{d\mu_n^2}(T_n^2(x))=\rho_2(x).$$

那末 $\mu_0^1\sim\mu_0^2$ 和

$$\frac{d\mu_0^2}{d\mu_0^1}(T_0^1(x))=\rho_1(x),$$

$$\frac{d\mu_0^1}{d\mu_0^2}(T_0^2(x))=\rho_2(x).$$

事实上，如果我们选取测度 $\mu_0^1+\mu_0^2$ 的连续集作为代数 $\mathfrak{B}_0$（测度 μ_n^i 弱收敛于测度 μ_0^i），则此时定理 3 及注 1 的条件成立．

推论 2 设推论 1 的条件 1) 和 2) 成立，此外还有 3) $\mu_0^1=\mu_0^2=\nu$，4) $\mu_n^2\ll\mu$，$\mu\ll\mu_n^1$ 及存在依测度 μ 的非零极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d\mu_n^2}{d\mu}(x)=\rho_1(x),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d\mu}{d\mu_n^1}(T_n^1(x))=\rho_2(x),$$

5) 按测度 μ 对几乎所有 x，等式

$$\rho_1(T_0^1(x))\rho_2(x)=1$$

成立．那末 $\mu\sim\nu$ 且

$$\rho_1(x)=\frac{d\nu}{d\mu}(x),\qquad \rho_2(x)=\frac{d\mu}{d\nu}(T_0^1(x)).$$

事实上，由定理 3 及注 1 得 $\mu\sim\nu$. 其次，正如在注 2 已建立的，

$$\rho_1(x)\leqslant\frac{d\nu}{d\mu}(x),\qquad \rho_2(x)\leqslant\frac{d\mu}{d\nu}(T_0^1(x)).$$

因此

$$1=\rho_1(T_0^1(x))\rho_2(x)\leqslant\frac{d\nu}{d\mu}(T_0^1(x))\frac{d\mu}{d\nu}(T_0^1(x))=1,$$

由此得，按测度 μ 几乎处处有

$$\rho_2(x)=\frac{d\mu}{d\nu}(T_0^1(x))$$

和

$$\rho_1(T_0^1(x))=\frac{d\nu}{d\mu}(T_0^1(x)).$$

但这时按测度 ν 几乎处处有

$$\rho_1(x)=\frac{d\nu}{d\mu}(x),$$

且因为 $\nu\sim\mu$，所以最后的等式也按测度 μ 几乎处处成立. 因此命题得证.

我们来研究在象空间情形测度的绝对连续性. 设 $(\mathscr{X}_1,\mathfrak{B}_1)$ 和 $(\mathscr{X}_2,\mathfrak{B}_2)$ 是两个可测空间. 由 $\mathscr{X}_1$ 到 $\mathscr{X}_2$ 的映象称为**可测的**，如果对所有 $A\in\mathfrak{B}_2$, $\varphi^{-1}(A)\in\mathfrak{B}_1$. 设在 $\mathfrak{B}_1$ 上给出两个测度 μ_1, ν_1，而测度 μ_2, ν_2 在 $\mathfrak{B}_2$ 上由如下等式所定义:

$$\mu_2(A)=\mu_1(\varphi^{-1}(A)),\quad \nu_2(A)=\nu_1(\varphi^{-1}(A)).$$

定理 4 如果 $\nu_1\ll\mu_1$，那末 $\nu_2\ll\mu_2$，且

$$\frac{d\nu_2}{d\mu_2}(\varphi^{-1}(x))=\mathbf{E}\left(\frac{d\nu_1}{d\mu_1}\,|\tilde{\mathfrak{B}}_1\right),$$

其中 $\tilde{\mathfrak{B}}_1$ 是形为 $\varphi^{-1}(A)$, $A\in\mathfrak{B}_2$ 的集合的 σ 代数，而条件数学期望是在概率空间 $(\mathscr{X}_1,\mathfrak{B}_1,\mu_1)$ 中取的.

证. 每一 $\mathfrak{B}_2$ 可测函数 $f(x)$ 可表为 $g(\varphi(x))$，其中 g 是 $\tilde{\mathfrak{B}}_1$ 可测. 因此

$$\int f(x)\nu_2(dx) = \int g(\varphi(x))\nu_2(dx) = \int g(x)\nu_1(dx)$$
$$= \int g(x)\frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x)\,\mu_1(dx) = \int g(x)\mathbf{E}\left(\frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x)\,|\,\tilde{\mathfrak{B}}\right)\mu_1(dx).$$

设

$$\mathbf{E}\left(\frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x)\,|\,\tilde{\mathfrak{B}}_1\right) = \rho(x).$$

因为 $\rho(x)$ 是 $\tilde{\mathfrak{B}}_1$ 可测，所以 $\rho(\varphi(x))$ 是 $\mathfrak{B}_2$ 可测. 因此，

$$\int g(x)\rho(x)\mu_1(dx) = \int g(\varphi(x))\rho(\varphi(x))\mu_2(dx)$$
$$= \int f(x)\rho(\varphi(x))\mu_2(dx).$$

由此等式得到定理的证明.

§2. Hilbert 空间中测度的容许位移

正如我们在下一节将会见到，当研究在各种变换下测度的绝对连续性时，在测度的最简单的变换——平移变换下，测度的绝对连续性和密度起着重要作用. 设 μ 是在 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 上的某一测度，其中 $\mathscr{X}$ 是 Hilbert 空间，$\mathfrak{B}$ 是这空间上的 Borel 集的 σ 代数. 我们引入平移算子: $S_a x = x + a$. 用 μ_a 表示由关系式

$$\mu_a(A) = \mu(S_{-a}A)$$

定义的测度. 注意，如果 μ 是取值于 $\mathscr{X}$ 的随机元 ξ 的分布，那末 μ_a 是随机元 $\xi + a$ 的分布. 测度 μ_a 由下式所唯一确定:

$$\int f(x)\,\mu_a(dx) = \int f(x+a)\mu(dx)$$

只要对于使式中右边的积分存在的所有可测函数等式成立.

我们说 a 是测度 μ 的**容许位移**，如果 $\mu_a \ll \mu$. 测度的容许位移的集合用 M_μ 或简单地用M 表示 (如果所涉及的测度不致混乱的话). 如果 $a \in M_\mu$，那末记

$$\rho(a, x) = \rho_\mu(a, x) = \frac{d\mu_a}{d\mu}(x).$$

在本节研究集合 M_μ 的结构和密度 $\rho_\mu(a, x)$ 的性质. 下面各处所考虑的是 $\mathscr{X}$ 上的概率测度.

定理 1 集合 M_μ 是加法半群, 即如果 $a \in M_\mu$ 及 $b \in M_\mu$, 则 $a+b \in M_\mu$; 此外

$$\rho(a+b, x) = \rho(a, x)\rho(b, x-a).$$

证. 我们有

$$\begin{aligned}\int f(x)\mu_{a+b}(dx) &= \int f(x+a+b)\mu(dx) \\ &= \int f(x+a)\rho(b, x)\mu(dx) = \int f(x)\rho(b, x-a)\mu_a(dx) \\ &= \int f(x)\rho(b, x-a)\rho(a, x)\mu(dx).\end{aligned}$$

因为这些等式对任意有界可测函数 $f(x)$ 是成立的, 由此得证定理.

下述定理表明, 容许位移并不很多, 特别由这定理得知, 在 $\mathscr{X}$ 的任一无穷维子空间中 M_μ 是第一类型集合.

定理 2 设 $\varphi(z)$ 是测度 μ 的特征泛函, 并设 B 是全连续非负对称算子, 使当 $(Bz, z) \to 0$ 时 $\varphi(z) \to 1$. 那末对每一 $a \in M_\mu$ 存在 $b \in \mathscr{X}$, 使得 $a = B^{1/2}b$, 即 $M_\mu \subset B^{1/2}\mathscr{X}$.

证. 设 $a \in M_\mu$ 和

$$\rho(a, x) = \frac{d\mu_a}{d\mu}(x).$$

那末测度 μ_a 的特征泛函可表为

$$\begin{aligned}\varphi_a(z) &= \int e^{i(x,z)}\mu_a(dx) = \int e^{i(x+a,z)}\mu(dx) \\ &= e^{i(a,z)}\varphi(z).\end{aligned}$$

此外,

$$\varphi_a(z) = \int e^{i(z,x)}\rho(a, x)\mu(dx).$$

因此,

$$\varphi_a(z) - 1 = \int (e^{i(z,x)} - 1)\rho(a, x)\mu(dx).$$

我们来证明, 当 $(Bz, z) \to 0$ 时 $\varphi_a(z) \to 1$. 因为对任一特征泛

函 $\phi(z)$ 来说不等式

$$|1-\phi(z)|^2 \leqslant 2\mathrm{Re}(1-\phi(z))$$

成立，所以只要证明当 $(Bz, z) \to 0$ 时

$$\mathrm{Re}\int (1-e^{i(z,x)})\rho(a, x)\mu(dx) \to 0.$$

令 $\rho_N(x) = \rho(a, x)$ 当 $\rho(a, x) \leqslant N$; $\rho_N(x) = 0$ 当 $\rho(a, x) > N$. 那末

$$\mathrm{Re}\int(1-e^{i(z,x)})\rho(a, x)\mu(dx) = \int(1-\cos(z, x))\rho_N(x)\mu(dx)$$
$$+\int(1-\cos(z, x))[\rho(a, x)-\rho_N(x)]\mu(dx)$$
$$\leqslant N\mathrm{Re}(1-\varphi(z)) + 2\int[\rho(a, x)-\rho_N(x)]\mu(dx).$$

选取足够大的 N 可以使第二个被加项对所有 z 任意小，而当 $(Bz, z) \to 0$ 时，对任意 N 第一个被加项趋于 0. 于是我们证明了当 $(Bz, z) \to 0$ 时 $\varphi(z)\, e^{i(a,z)} \to 1$. 因此当 $(Bz, z) \to 0$ 时 $e^{i(a,z)} \to 1$，从而当 $(Bz, z) \to 0$ 时 $(a, z) \to 0$. 设 $(Bz, z) < \delta$ 时，$|(a, z)| < \varepsilon$. 那末对所有 z 有不等式

$$|(a, z)|^2 < \frac{\varepsilon^2}{\delta}(Bz, z).$$

注意，a 属于算子 B 的值域的闭包，因为对所有使 $By = 0$ 的 y 均有 $(a, y) = 0$. 设 λ_k 是算子 B 的特征值，e_k 是对应于它的特征向量. 令

$$C = \frac{\varepsilon^2}{\delta}, \qquad z = \sum_{k=1}^{n}\frac{(a, e_k)}{\lambda_k}e_k, \text{我们有}$$

$$(a, z)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(a, e_k)^2}{\lambda_k}\right)^2 \leqslant C\sum_{k=1}^{n}\frac{(a, e_k)^2}{\lambda_k},$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(a, e_k)^2}{\lambda_k} < C.$$

当 $n \to \infty$ 取极限，即证实存在向量

$$b = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a, e_k)}{\sqrt{\lambda_k}} e_k,$$

且满足 $B^{1/2}b = a$. 定理得证.

现来研究在测度 μ 的最简单变换下集合 M_μ 和函数 $\rho(a, x)$ 的变换.

定理 3 1）如果 $\nu = \mu_c$, 那末对任意 $c \in X$, $M_\nu = M_\mu$,

$$\rho_\nu(a, x) = \rho_\mu(a, x - c).$$

2）如果 $\nu \ll \mu$, $f(x) = \frac{d\nu}{d\mu}(x)$ 和 $a \in M_\mu$, 则 $a \in M_\nu$ 当且仅当表示式

$$\rho_\nu(a, x) = \frac{f(x - a)}{f(x)} \rho_\mu(a, x) \tag{1}$$

按测度 μ 几乎处处有定义,即

$$\mu(\{x: f(x) = 0\} - \{x: f(x - a)\rho_\nu(a, x) = 0\}) = 0$$

(我们约定 $\frac{0}{0} = 0$). 同时 $\rho_\nu(a, x)$ 由公式 (1) 所确定.

3）如果 $\nu(A) = \mu(L^{-1}A)$, 其中 L 是可逆线性算子, 那末

$$M_\nu = LM_\mu, \qquad \rho_\nu(a, x) = \rho_\mu(L^{-1}a, L^{-1}x).$$

证. 1）从等式

$$\int g(x)\nu_a(dx) = \int g(x + a + c)\mu(dx)$$

$$= \int g(x + c)\rho_\mu(a, x)\mu(dx) = \int g(x)\rho_\mu(a, x - c)\mu_c(dx)$$

$$= \int g(x)\rho_\mu(a, x - c)\nu(dx)$$

可得.

2）设 $g(x)$ 是有界可测函数. 那末, 如果 $\frac{f(x - a)}{f(x)} \rho_\mu(a, x)$ 按测度 μ 几乎处处有定义,则

$$\int g(x)\nu_a(dx) = \int g(x + a)\nu(dx) = \int g(x + a)f(x)\mu(dx)$$

$$= \int g(x) f(x-a) \mu_a(dx) = \int g(x) \rho_\mu(a, x) f(x-a) \mu(dx)$$

$$= \int g(x) \frac{f(x-a)}{f(x)} \rho_\mu(a, x) \nu(dx).$$

但若 $a \in M_\nu$，则对所有有界可测函数 $g(x)$ 有关系式

$$\int g(x) \rho_\nu(a, x) f(x) \mu(dx) = \int g(x) \rho_\mu(a, x) f(x-a) \mu(dx).$$

由此得

$$\rho_\nu(a, x) f(x) = \rho_\mu(a, x) f(x-a)$$

按测度 μ 几乎处处成立．我们的论断得证．

3）对有界可测函数 $g(x)$ 和 $a = Lb$（其中 $b \in M_\mu$）有

$$\int g(x) \nu_a(dx) = \int g(x+a) \nu(dx) = \int g(Lx + a) \mu(dx)$$

$$= \int g(L(x+b)) \mu(dx) = \int g(Lx) \rho_\mu(b, x) \mu(dx)$$

$$= \int g(x) \rho_\mu(b, L^{-1}x) \nu(dx).$$

由此得 $M_\nu \supset LM_\mu$ 和当 $a \in LM_\mu$ 时 $\rho_\nu(a, x) = \rho_\mu(b, L^{-1}x)$．利用算子 L 的可逆性得 $M_\nu \subset LM_\mu$． 因此，$M_\nu = LM_\mu$． 定理得证．

注．1）由 1）得知如果 ν 是变量 $\xi + \eta$ 的分布，其中 ξ 和 η 是取值于 $\mathscr{X}$ 的独立随机变量，而 μ 是变量 ξ 的分布，那末 $M_\nu \supset M_\mu$ 且当 $a \in M_\mu$ 时有等式

$$\rho_\nu(a, x) = \mathbf{E}(\rho_\mu(a, \xi) | \xi + \eta)_{\xi+\eta=x}.$$

此等式由关系式

$$\int g(x) \nu_a(dx) = \int g(x+a) \nu(dx)$$

$$= \iint g(x + y + a) \mu(dx) P\{\eta \in dy\}$$

$$= \iint g(x+y) \rho_\mu(a, x) \mu(dx) P\{\eta \in dy\}$$

$$= \mathbf{E} g(\xi+\eta) \rho_\mu(a, \xi) = \mathbf{E} g(\xi+\eta) \mathbf{E}(\rho_\mu(a, \xi) | \xi + \eta).$$

得到．

2）如果在条件 3) 中 L 是不可逆算子，则 $M_\nu \supset LM_\mu$ 及

$$\rho_\nu(a, x) = \mathbf{E}(\rho_\mu(b, \xi) | L\xi)_{L\xi=x},$$

其中 b 是满足关系式 $Lb = a$ 的任意向量. 该式可从 § 1 定理 4 得到.

设 $|a| = 1$. 我们来研究对所有 $\lambda > 0$ 使 $\lambda a \in M_\mu$ 的条件.设

$$F(t) = \mu(\{x:(a, x) < t\});$$

$F(t)$ 是概率空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ 上的随机变量 (a, x) 的分布函数. 对每个 $\lambda > 0$ 在同样的概率空间上变量

$$(a, x) + \lambda = (a, x + \lambda a)$$

的分布函数 $F(t - \lambda)$ 关于 (a, x) 的分布绝对连续. 下面的引理说明了在这些条件下关于函数 $F(t)$ 可能得出什么样的结论.

引理 如果在直线 $\mathscr{R}^1$ 的 Borel 集上的测度 $\nu_\lambda(E)$ 由关系式

$$\nu_\lambda(E) = \int_E dF(t - \lambda)$$

所定义，且对所有 $\lambda > 0$，它关于测度 $\nu_0(E)$ 绝对连续，那末 $F(t)$ 绝对连续且它的导数

$$p(t) = \frac{dF}{dt}(t)$$

使对某个 t_1 (有可能等于 $-\infty$) 有: $p(t) = 0$ 对几乎所有 $t < t_1$ 及 $p(t) > 0$ 对几乎所有 $t > t_1$.

证. 把 $F(t)$ 表为 $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$, 其中 $F_1(t)$ 是 F 的绝对连续分量，$F_2(t)$ 是奇异分量. 设

$$\nu_\lambda^i(E) = \int_E dF_i(t - \lambda).$$

由于 $\nu_\lambda^2 \ll \nu_0^1 + \nu_0^2$, $\nu_\lambda^2 \perp \nu_0^1$, 所以 $\nu_\lambda^2 \ll \nu_0^2$. 因此测度

$$\bar{\nu}(E) = \int_0^\infty \nu_\lambda^2(E) e^{-\lambda} d\lambda$$

关于测度 ν_0^2 绝对连续. 另一方面

$$\bar{\nu}(E) = \int_0^\infty \int_{t \in E} dF(t - \lambda) e^{-\lambda} d\lambda$$

$$=\iint_{\substack{u-t<0\\ t\in B}} dF_2(u)e^{u-t}dt \leqslant \mathrm{mes}E,$$

其中 $\mathrm{mes}E$ 是集合 E 的 Lebesgue 测度. 由于 $\bar{\nu}$ 关于 Lebesgue 测度奇异，所以 $\bar{\nu}=0$ 且因此 $F_2(t)=0$.

现设 $\bar{F}(t)=\int_0^\infty F(t-\lambda)e^{-\lambda}d\lambda$ 及 $\tilde{\nu}(E)=\int d\bar{F}(t)$.
容易验证

$$\frac{d\tilde{\nu}}{d\nu}(t)=\frac{1}{p(t)}\int_0^\infty p(t-\lambda)e^{-\lambda}d\lambda,$$

而且在使 $p(s)=0$ 的 s 的集合上对几乎所有 t 这个分数的分子等于 0. 如果集合 $\{t: p(t)=0\}$ 有正的 Lebesgue 测度，那末可找到 s 使得对所有 $\delta>0$ 集合 $\{t: p(t)=0\}\cap\{s-\delta, s\}$ 的 Lebesgue 测度是正的. 因此对任意 $\delta>0$ 对某些 $t\in(s-\delta, s)$ 函数

$$\int_0^\infty p(t-\lambda)e^{-\lambda}d\lambda$$

为 0，又因为这函数是连续的，所以

$$\int_0^\infty p(s-\lambda)e^{-\lambda}d\lambda=0,$$

因此对几乎所有 $t<s$, $p(t)=0$. 如果 $p(t)$ 不恒等于0，则可以找到一个具有上述性质的最大 s. 那末对几乎所有 $t<s$ 有 $p(t)=0$ 和对几乎所有 $t>s$ 有 $p(t)>0$. 引理得证.

设 Γ_t 表示 $(a,x)=t$ 的超平面. 在 Γ_t 的 Borel 集合上利用等式

$$\mu^t(A)=\mu^t(A\cap\Gamma_t),\qquad \mu(A)=\int\mu^t(A)dF(t).$$

定义测度 μ^t. 因此 $\mu^t(A)$ 是概率空间$(\mathscr{X},\mathfrak{B},\mu)$ 上在 $(a,x)=t$ 的条件下 x 的条件分布. 引入 x 在 Γ_0 上的投影在 $(a,x)=t$ 的条件下的条件分布: $\nu^t(A)=\mu^t(S_{ta}A)$. 最后，设 ν 是 x 在 Γ_0 上的投影的无条件分布:

$$\nu(A)=\int\nu^t(A)p(t)dt.$$

用等式

$$\mu^*(A)=\int\nu(S_{-ta}[A\cap\Gamma_t])p(t)dt \tag{2}$$

来引入测度 μ^*. 注意 μ^* 是随机变量 ξ 的分布，ξ 是使(a,ξ)和 ξ 在 Γ_0 上的投影相独立，而它们的分布与概率空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ 上的变量 (a, x) 及 x 在 Γ_0 上的投影的分布相同. 我们来证明测度 μ 关于 μ^* 绝对连续. 注意到

$$\begin{aligned}\mu_{\lambda a}(A)=\mu(S_{-\lambda a}A)&=\int\nu^t(S_{-ta}[S_{-\lambda a}A\cap\Gamma_t]p(t)dt\\&=\int\nu^t(S_{-(t+\lambda)a}[A\cap\Gamma_{t+\lambda}])p(t)dt\\&=\int\nu^{t-\lambda}(S_{-at}[A\cap\Gamma_t])p(t-\lambda)dt.\end{aligned} \tag{3}$$

于是对任意有界可积函数 $k(\lambda)$

$$\int\mu_{\lambda a}(A)k(\lambda)\,d\lambda=\iint p(t-\lambda)k(\lambda)\nu^{t-\lambda}(S_{-ta}[A\cap\Gamma_t])\,dt d\lambda$$

成立. 从测度 μ^* 的定义得等式

$$\mu^*(A)=\iint\nu^s(S_{-ta}[A\cap\Gamma_t])p(s)p(t)dtds.$$

如果 $\mu^*(A)=0$，则 $\nu^s(S_{-ta}[A\cap\Gamma_t])=0$ 按 Lebesgue 测度对几乎所有 $t>t_1$ 和 $s>t_1$ 成立(其中 t_1 如在引理中那样规定). 不失一般性，可认为 $\nu^t(A)=0$ 当 $t<t_1$. 此外，仅考虑集合 A 属于在某个 $\delta>0$ 时的集合 $\{x: (a, x)>t_1+\delta\}$ 是自然的，这因为

$$\mu^*(\{x: (a, x)\leqslant t_1\})=\mu(\{x: (a, x)\leqslant t_1\})=0.$$

在这些假定下，条件 $\mu^*(A)=0$ 推得不等式

$$\int_{-\delta}^{0}\mu_{\lambda a}(A)d\lambda=\int_{-\delta}^{0}d\lambda\int p(t-\lambda)\nu^{t-\lambda}(S_{-ta}[A\cap\Gamma_t])\,dt=0,$$

因此，对几乎所有 $\lambda\in[-\delta, 0]$，$\mu_{\lambda a}(A)=0$. 又因为 $\mu\ll\mu_{\lambda a}$，所以 $\mu(A)=0$. 我们的论断得证.

注意，对所有 $\lambda>0$，$\mu_{\lambda a}^*\ll\mu$. 事实上，由于定义：

$$\mu_{\lambda a}^*(A)=\int p(t-\lambda)\,\nu\,(S_{-ta}[A\cap\Gamma_t])dt$$

$$=\int \frac{p(t-\lambda)}{p(t)} \nu(S_{-ta}[A\cap\Gamma_t])p(t)dt,$$

因此，

$$\frac{d\mu^*_{\lambda a}}{d\mu^*}(x)=\frac{p((a,x)-\lambda)}{p((a,x))}.$$

从而利用定理 3 之 2)，我们得到如下定理：

定理 4 对所有 $\lambda>0$ 使得 $\lambda a\in M_\mu$ 的充分必要条件是如下条件成立：

1) 函数 $F(t)=\mu(\{x:(a,x)<t\})$ 绝对连续，且对它的导数 $p(t)$ 存在 t_1（可能等于 $-\infty$）使得对几乎所有 $t<t_1$ 有 $p(t)=0$ 及对几乎所有 $t>t_1$ 有 $p(t)>0$.

2) 测度 μ 关于测度 μ^* 绝对连续，μ^* 由等式

$$\mu^*(\{x:\alpha<(a,x)<\beta\}\cap\{x:px\in A\})$$
$$=\mu(\{x:\alpha<(a,x)<\beta\})\mu(\{x:px\in A\})$$

所定义，其中 p 是在子空间 Γ_0 上的投影算子. 又 μ 的密度

$$\rho(x)=\frac{d\mu}{d\mu^*}(x)$$

使得表示式

$$\rho_\mu(\lambda,a,x)=\frac{p((a,x)-\lambda)}{p((a,x))}\frac{\rho(x-\lambda a)}{\rho(x)} \tag{4}$$

按测度 μ^* 几乎处处有定义，如果此分式中的分子等于 0，我们就认为表示式等于 0 .

注. 如果对所有实数 λ 有 $\lambda a\in M_\mu$，则对几乎所有 t 有 $p(t)>0$，而且测度 μ 和 μ^* 等价. 事实上，如果 $k(\lambda)$ 是正的可积函数及测度 $\int k(\lambda)\mu_{\lambda_a}d\lambda$ 是关于 μ 绝对连续，则 μ^* 等价于测度 $\int k(\lambda)\mu_{\lambda_a}d\lambda$.

推论 如果 $a_1,\cdots,a_n$ ($|a_k|=1$)是相互正交的向量，并使得对所有实数 λ 和 $k=1,\cdots,n$ 有 $\lambda a_k\in M_\mu$，那末 1) 函数

$$F_k(t)=\mu(\{x:(a_k,x)<t\})$$

绝对连续且它们的导数

$$p_k(t) = \frac{d}{dt} F_k(t)$$

对几乎所有 t 是正的；2) 测度 μ 等价于测度 $\bar{\mu}$，其中 $\bar{\mu}$ 由关系式

$$\bar{\mu}\left(\left[\bigcap_{k=1}^{n}\{x: \alpha_k < (a_k, x) < \beta_k\}\right] \cap \{x: p_n x \in C\}\right)$$

$$= \mu(\{x: p_n x \in C\}) \prod_{k=1}^{n} \mu(\{x: \alpha_k < (a_k, x) < \beta_k\})$$

所定义，其中 $\alpha_k, \beta_k, k = 1, \cdots, n$ 是任意实数，P_n 是在子空间

$$\mathscr{X}^n = \{x: (x, a_k) = 0, \ k = 1, \cdots, n\}$$

上的投影算子，而 C 是这子空间中的任意 Borel 集。

此论断的证明由如下事实可得。在定理 4 的证明中所构造的测度 μ^* 的正交于 a 的可容许位移也是测度 ν 的容许位移，ν 同样是在定理 4 的证明中所规定的意义。注意在上面所定义的测度 $\bar{\mu}$ 是

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} \eta_k a_k + \xi^n$$

的分布，其中 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 是取值于 $\mathscr{R}^1$ 和有密度 $p_k(t)$ 的独立随机变量，而 ξ^n 是取值于 $\mathscr{X}^n$ 且独立于 η_i 的随机变量，它的分布是 x 在 $\mathscr{X}^n$ 上的投影在概率空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ 的分布。

设可以找到向量 a_k 的规范正交序列使 M_μ 包含这些向量的线性包络。能否类似于刚才的推论所说的，测度 μ 是等价于随机变量

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k a_k \tag{5}$$

的分布的测度？其中 η_k 是一独立数值随机变量序列，并且有正的密度。为回答这个问题，我们研究测度 $\bar{\mu}$ 的容许位移。我们用 Π^∞ 表示形为 (5) 式的随机变量 ξ 的分布的测度集合。

定理 5 如果 η_k 是有正密度 $p_k(t)$的独立随机变量，$\bar{\mu}$ 是由等式(5)所定义的变量 ξ 的分布，那末 $\bar{\mu}_a \ll \bar{\mu}$ 当且仅当级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\log p_k(\eta_k-\alpha_k)-\log p_k(\eta_k)] \tag{6}$$

以概率为 1 收敛，其中 $\alpha_k=(a, a_k)$. 如果这级数收敛，则 $\bar{\mu}_a \perp \bar{\mu}$.

证. 设 $\bar{\mu}^n$ 和 $\bar{\mu}_a^n$ 表示测度 $\bar{\mu}$ 和 $\bar{\mu}_a$ 在由 $a_1, \cdots, a_n$ 所张成的子空间 $\mathscr{X}_n$ 上的投影. 则

$$\frac{d\bar{\mu}_a^n}{d\bar{\mu}^n}(x)=\prod_{k=1}^{n}\frac{p_k((x, a_k)-\alpha_k)}{p_k((x, a_k))}.$$

如果 $\bar{\mu}_a$ 不正交于 $\bar{\mu}$，那末按测度 $\bar{\mu}$ 几乎处处存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{p_k((x, a_k)-\alpha_k)}{p_k((x, a_k))},$$

且此极限不恒等于 0. 因此由独立随机变量组成的级数 (6) 以正的概率收敛，从而它以概率为 1 收敛(序列 (x, a_k) 与 η_k 在概率空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ 上有相同的分布). 就是说，如果 $\bar{\mu}_a \ll \bar{\mu}$，级数 (6) 收敛且因此

$$\frac{d\bar{\mu}_a}{d\bar{\mu}}(x)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{p_k((x, a_k)-\alpha_k)}{p_k((x, a_k))}\right\}$$

处处是正的，则 $\bar{\mu}_a \sim \bar{\mu}$. 反之由级数 (6) 的收敛得到异于 0 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d\bar{\mu}_a^n}{d\bar{\mu}^n}(x)$ 的存在性. 故根据 §1 定理 1 的推论 1 有 $\bar{\mu} \ll \bar{\mu}_a$，从而 $\bar{\mu} \sim \bar{\mu}_a$. 定理得证.

推论 如果 $\mu \sim \bar{\mu}$，其中 $\bar{\mu} \in \Pi^{\infty}$，则 μ_a 与 μ 或者等价或者正交.

所以如果我们构造测度 μ，使得所有 λ 有 $\lambda a_k \in M_{\mu}$，并存在 a 使 μ 与 μ_a 既不等价也不正交，那末在 Π^{∞} 中不存在与 μ 等价的测度 $\bar{\mu}$. 下面将构造出这样的测度的一个例子.

加权测度的容许位移 先考虑测度的线性组合的容许位移. 如果 $\mu=\mu^1+\mu^2$，那末自然仅考虑 μ^1 与 μ^2 正交情形，因为在条件 $\mu^2 \ll \mu^1$ 下，测度 μ 和 μ^1 等价，故它们的容许位移是一样的；如果 μ^2 有关于 μ^1 的绝对连续分量，则它可并入 μ^1，从而问题归结

为奇异测度情形．其次假定对所有a，$\mu_a^1 \perp \mu^2$．（我们发现没有这一假设大概不可能建立μ^1和μ^2的容许位移的联系．以

$$\mu^k(A) = \int_A f_k(x)\mu(dx), \quad k = 1, 2,$$

$$f_1(x) + f_2(x) = 1, \quad f_1(x)f_2(x) = 0$$

为例就可说明这点，这样的μ^1和μ^2一般可能没有容许位移，但μ可以有）．如果上假设成立，那末$M_\mu = M_{\mu^1} \cap M_{\mu^2}$．事实上，由$\mu_a^1 \ll \mu^1$和$\mu_a^2 \ll \mu^2$得

$$\mu_a = \mu_a^1 + \mu_a^2 \ll \mu^1 + \mu^2 = \mu.$$

反之，设$\mathscr{X} = E_1 \cup E_2$和对某个$a$设$\mu^1(E_2) = 0$，$\mu_a^1(E_2) = 0$，$\mu^2(E_1) = 0$，$\mu_a^2(E_1) = 0$．那末，如果$a \in M_\mu$，则由条件$\mu^1(A) = 0$得$\mu(A \cap E_1) = 0$，且因此$0 = \mu_a(A \cap E_1) = \mu_a^1(A \cap E_1)$．所以$\mu_a^1 \ll \mu^1$．同理有$\mu_a^2 \ll \mu^2$．这意味着$M_\mu = M_{\mu_1} \cap M_{\mu_2}$．现我们来考虑怎样用

$$\rho^1(a, x) = \frac{d\mu_a^1}{d\mu^1}(x) \qquad 和 \qquad \rho^2(a, x) = \frac{d\mu_a^2}{d\mu^2}(x)$$

表示$\rho_\mu(a, x)$．如果集合E_1和E_2如上述所定义，那末

$$\begin{aligned}\mu_a(A) &= \mu_a^1(A \cap E_1) + \mu_a^2(A \cap E_2) \\ &= \int_{A \cap E_1} \rho^1(a, x)\mu^1(dx) + \int_{A \cap E_2} \rho^2(a, x)\mu^2(dx) \\ &= \int_A [\rho^1(a, x)\chi_{E_1}(x) + \rho^2(a, x)\chi_{E_2}(x)]\mu(dx),\end{aligned}$$

其中χ_{E_k}是集合E_k的示性函数．因此，

$$\rho_\mu(a, x) = \sum_{i=1}^{2} \rho^i(a, x)\chi_{E_i}(x).$$

所得的结果容易推广到可数个测度的情形．

定理 6 设$\mu^1, \mu^2, \cdots$是一两两正交的测度序列并且当$i \neq k$时对任意$a \in \mathscr{X}$ $\mu^i \perp \mu_a^k$．如果$\mu = \sum_k p_k \mu^k$，其中$p_k > 0$和$\sum_k p_k = 1$，则$M_\mu = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_{\mu^k}$

及可以找到两两不相交的集合 E_k 使得

$$\rho_\mu(a, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k(a, x)\chi_{E_k}(x), \tag{7}$$

其中

$$\rho^k(a, x) = \frac{d\mu_a^k}{d\mu_k}(x).$$

证. 只要对所有 k, $\mu_a^k \ll \mu_k$ 就有 $\sum p_k\mu_a^k \ll \sum p_k\mu_k$, 由此得包含关系 $M_\mu \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} M_{\mu^k}$. 另一方面, 由两个奇异测度 μ^k 和 $\sum_{l\neq k} p_l\mu^l$ 满足条件 $\mu_a^k \perp \sum_{l\neq k} p_l\mu^l$ 得到, 如果每个被加项有容许位移, 则它们的和也有容许位移. 因此 $M_\mu \subset M_{\mu^k}$, 从而

$$M_\mu = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_{\mu^k}.$$

设集合 $\mathscr{G}_l$ 满足 $\mu^l(\mathscr{G}_l) = 1$, $\mu_a^l(\mathscr{G}_l) = 1$, $\sum_{k\neq l} p_k\mu^k(\mathscr{G}_l) = 0$. 由 $\mu^l + \mu_a^l$ 和 $\sum_{k\neq l} p_k\mu^k$ 的奇异性得知,这样的集合是存在的.

现设

$$E_l = \mathscr{G}_l \setminus \bigcup_{k\neq l} \mathscr{G}_k.$$

显然 $\mu^k(E_l) = \delta_{kl}$ 且 E_l 两两不相交. 其次

$$\mu_a(A) = \sum_k p_k\mu_a^k(A) = \sum_k p_k\mu_a^k(A\cap E_k)$$

$$= \sum_k p_k\int_{A\cap E_k} \rho^k(a, x)\,\mu^k(dx)$$

$$= \sum_k \int_{A\cap E_k} \rho^k(a, x) \sum_l p_l\mu^l(dx)$$

$$= \sum_k \int_A \chi_{E_k}(x)\rho^k(a, x)\mu(dx).$$

由此得公式 (7). 定理得证.

现考虑并不是表为和的形式而是表为依赖于连续变化的参数的测度族的积分形式的测度的位移. 设Θ是某个完备距离空间，$\mathfrak{S}$是它的 Borel 子集的σ代数. 我们将考虑在$(\mathscr{X},\mathfrak{B})$上满足如下条件的测度族$\mu^\theta$, $\theta\in\Theta$: 对定义在$\mathscr{X}$上的所有有界连续函数$f(x)$，函数$\int f(x)\mu^\theta(dx)$按θ连续. 由此得，对所有$A\in\mathfrak{B}$，$\mu^\theta(A)$是θ的$\mathfrak{S}$可测函数. 设$\sigma(d\theta)$是$\mathfrak{S}$上的某个测度(也是概率测度). 考虑测度

$$\mu(A)=\int\mu^\theta(A)\sigma(d\theta),\quad A\in\mathfrak{B}. \tag{8}$$

定理 7 设M^θ是测度μ^θ的容许位移的集合，那末

$$M_\mu\supset\bigcap_\theta M^\theta.$$

如果除此以外，测度μ^θ相互正交且存在取值于Θ的$\mathfrak{B}$可测函数$\theta(x)$使得

$$\mu^\theta(\{x:\theta(x)=\theta\})=1,$$

那末可以构造按θ, x关于$\mathfrak{S}\times\mathfrak{B}$的可测函数$\rho^\theta(a,x)$, $a\in\bigcap M^\theta$，使得对所有$\theta\in\Theta$

$$\rho^\theta(a,x)=\frac{d\mu_a^\theta}{d\mu^\theta}(x)$$

$(\mathrm{mod}\,\mu^\theta)$，而

$$\rho_\mu(a,x)=\rho^{\theta(x)}(a,x). \tag{9}$$

证. 如果$a\in\bigcap\limits_\theta M_\theta$，则对所有$\theta$，$\mu_a^\theta\ll\mu^\theta$. 设$\mu(A)=0$，那末按测度$\sigma$对几乎所有$\theta$，$\mu^\theta(A)=0$. 但那时按测度$\sigma$对几乎所有$\theta$，$\mu_a^\theta(A)=0$. 因此$\mu_a(A)=0$及$\mu_a\ll\mu$.

设$\mathscr{X}_n$是$\mathscr{X}$的有限维子空间的增序列，$\mu_a^\theta(n,\cdot)$和$\mu^\theta(n,\cdot)$是测度μ_a^θ和μ^θ在这些子空间上的投影及

$$\rho_n^\theta(a,x)=\frac{d\mu_a^\theta(n,\cdot)}{d\mu^\theta(n,\cdot)}(x).$$

注意函数

$$\int e^{-l|x-y|}\mu^{\theta}(n, dx),$$

$$\int \rho_n^{\theta}(a,x)e^{-l|x-y|}\mu^{\theta}(n,dx) = \int e^{-l|x+a-y|}\mu^{\theta}(n, dx)$$

是按 θ 和 x 二元连续，因此函数

$$g_l(\theta, y) = \left[\int e^{-l|x-y|}\mu^{\theta}(n, dx)\right]^{-1}\int \rho_n^{\theta}(a, x)e^{-l|x-y|}\mu^{\theta}(n, dx)$$

也有同样的性质．当 $l\to\infty$ 时它按测度 $\mu^{\theta}(n, dx)$ 几乎处处收敛于 $\rho_n^{\theta}(a, y)$．于是函数

$$\bar{\rho}_n^{\theta}(a, x) = \lim_{l\to\infty} g_l(\theta, x)$$

（在这极限存在的地方）是对于 $\mathfrak{S}\times\mathfrak{B}$ 可测且对每个 θ 按测度 $\mu^{\theta}(n, \cdot)$ 几乎处处与 $\rho_n^{\theta}(a, x)$ 相等．令

$$\rho^{\theta}(a, x) = \lim_{n\to\infty} \bar{\rho}_n^{\theta}(a, x)$$

（在此极限存在的地方），它就是所求的函数．为导出式(9)，我们利用按测度 μ^{θ} 对几乎所有 x，$\rho^{\theta(x)}(a, x) = \rho^{\theta}(a, x)$，可写出如下等式

$$\int f(x)\mu_a(dx) = \int f(x+a)\mu(dx) = \int f(x+a)\int \mu^{\theta}(dx)\sigma(d\theta)$$

$$= \int\left[\int f(x)\rho^{\theta(x)}(a, x)\mu^{\theta}(dx)\right]\sigma(d\theta)$$

$$= \int f(x)\rho^{\theta(x)}(a, x)\mu(dx).$$

定理得证．

注．在所有 μ^{θ} 关于某个测度 ν 绝对连续及函数

$$g(\theta, x) = \frac{d\mu^{\theta}}{d\nu}(x)$$

按 θ，x 二元可测的条件下，容易写出 $\rho_{\mu}(a, x)$ 的表示式．此时

$$\int f(x)\mu_a(dx) = \int f(x+a)\mu(dx) = \iint f(x+a)\mu^{\theta}(dx)\sigma(d\theta)$$

$$= \iint f(x)\rho^{\theta}(a, x)g(\theta, x)\nu(dx)\sigma(d\theta)$$

$$= \int f(x) \frac{\int \rho^{\theta}(a, x) g(\theta, x) \sigma(d\theta)}{\int g(\theta', x) \sigma(d\theta')} \mu(dx).$$

由于对所有有界可测函数 $\varphi(x)$

$$\int \varphi(x) \mu(dx) = \iint \varphi(x) g(\theta', x) \nu(dx) \sigma(d\theta').$$

因此在上述的假设下，有

$$\rho_{\mu}(a, x) = \frac{\int \rho^{\theta}(a, x) g(\theta, x) \sigma(d\theta)}{\int g(\theta, x) \sigma(d\theta)}.$$

这结果可推广为：设测度族 $\mu^{\alpha,\theta}$ 依赖于两个参数 α 和 θ，它们分别在完备可分距离空间 $\mathscr{A}$ 和 Θ 变化，且存在测度族 μ^{θ} 使得定理 7 的条件成立和对所有 $\alpha \in \mathscr{A}$ 有 $\mu^{\alpha,\theta} \ll \mu^{\theta}$. 设对每一有界连续函数 $f(x)$ 表示式 $\int f(x) \mu^{\alpha,\theta}(dx)$ 按 α 和 θ 连续. 用 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{S}$ 分别表示在 $\mathscr{A}$ 和 Θ 中的 Borel 集的 σ 代数. 设 $\sigma(d\alpha, d\theta)$ 是 $\mathfrak{A} \times \mathfrak{S}$ 上的某个概率测度以及在 $\mathfrak{B}$ 上定义测度 μ:

$$\mu(E) = \int \mu^{\alpha,\theta}(E) \sigma(d\alpha, d\theta).$$

那末 $M_{\mu} \supset \bigcap_{\alpha,\theta} M^{\alpha,\theta}$, 其中 $M^{\alpha,\theta}$ 是测度 $\mu^{\alpha,\theta}$ 的容许位移的集合且对于 $a \in \bigcap_{\alpha,\theta} M^{\alpha,\theta}$ 存在按 α, θ, x 的 $\mathfrak{A} \times \mathfrak{S} \times \mathfrak{B}$ 可测函数 $\rho^{\alpha,\theta}(a, x)$ 及 $g(\alpha, \theta, x)$, 使得

$$\rho^{\alpha,\theta}(a, x) = \frac{d\mu_a^{\alpha,\theta}}{d\mu^{\alpha,\theta}}(x) \quad (\mathrm{mod}\, \mu^{\alpha,\theta}),$$

$$g(\alpha, \theta, x) = \frac{d\mu^{\theta,\theta}}{d\mu^{\theta}}(x) \quad (\mathrm{mod}\, \mu^{\theta}),$$

而 $\rho_{\mu}(a, x)$ 是用这些函数表示为

$$\rho_{\mu}(a,x)=\frac{\int \rho^{\alpha,\theta(x)}(a,x)g(\alpha,\theta(x),x)\sigma(d\alpha|\theta(x))}{\int g(\alpha,\theta(x),x)\sigma(d\alpha|\theta(x))}, \quad (10)$$

其中 $\sigma(d\alpha|\theta)$ 是由下式所定义的条件测度:

$$\int \phi(\alpha,\theta)\sigma(d\alpha|\theta)\sigma(\mathscr{A},d\theta)=\int \phi(\alpha,\theta)\sigma(d\alpha,d\theta).$$

等式对变元 α 和 θ 的任意可测函数 $\phi(\alpha,\theta)$ 及使

$$\mu^{\theta}(\{x: \theta(x)=\theta\})=1$$

的可测函数 $\theta(x)$ 成立. 式(10)由如下一串等式得到:

$$\int f(x+a)\mu(dx)=\iint f(x+a)\mu^{\alpha,\theta}(dx)\sigma(d\alpha,d\theta)$$

$$=\iiint f(x)\rho^{\alpha,\theta}(a,x)g(\alpha,\theta,x)\mu^{\theta}(dx)\sigma(d\alpha|\theta)\sigma(A,d\theta)$$

$$=\iiint f(x)\rho^{\alpha,\theta(x)}(a,x)g(\alpha,\theta(x),x)$$

$$\times\sigma(d\alpha|\theta(x))\mu^{\theta}(dx)\sigma(A,d\theta)$$

$$=\int f(x)\frac{\int \rho^{\alpha,\theta(x)}(a,x)g(\alpha,\theta(x),x)\sigma(d\alpha|\theta(x))}{\int g(\alpha,\theta(x),x)\sigma(d\alpha|\theta(x))}\mu(dx),$$

而函数 $\rho^{\alpha,\theta}(a,x)$ 及 $g(\alpha,\theta,x)$ 的存在性的证明与定理 7 的函数 $\rho^{\theta}(a,x)$ 的存在性的证明一样.

正如从式(9)得到的一样，由式(8)表示的测度的密度函数 $\rho_{\mu}(a,x)$ 不依赖于测度 σ, 如果测度 μ_1 和 μ_2 定义为

$$\mu_k(A)=\int \mu^{\theta}(A)\sigma_k(d\theta),$$

且 σ_1 与 σ_2 等价，那末亦有 $\mu_1\sim\mu_2$, 而且

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x)=\frac{d\sigma_2}{d\sigma_1}(\theta(x)),$$

其中 $\theta(x)$ 是使

$$\mu^{\theta}(\{x: \theta(x)=\theta\})=1$$

的函数. 由于 $\rho_{\mu_1}(a,x)$ 和 $\rho_{\mu_2}(a,x)$ 相等，所以，如果对几乎所有

$a \in M_{\mu_1}$ 和所有 x 等式 $\theta(x-a)=\theta(x)$ 成立，则

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x-a)=\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x).$$

所论及的情况在某种程度上是一般的．设测度 μ 和 ν 等价且对某个 a，对任意实数 λ 有 $\lambda a \in M_\mu$ 和 $\rho_\mu(a, x)=\rho_\nu(a, x)$．令

$$\varphi(x)=\frac{d\nu}{d\mu}(x).$$

设 $E_t=\{x: \varphi(x)=t\}$，σ 是直线上的测度，使

$$\sigma((-\infty, t))=\mu\left(\bigcup_{s<t} E_s\right),$$

而测度族 μ^t 由下式所定义：

$$\mu(A \cap\{x: \varphi(x) \in \Lambda\})=\int_\Lambda \mu^t(A) \sigma(dt), \tag{11}$$

其中 $A \in \mathfrak{B}$ 和 Λ 是直线上的 Borel 集（即 μ^t 是在概率空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ 上在条件 $\varphi(x)=t$ 下 x 的条件分布）．我们证明按测度 σ 对几乎所有 t，a 是测度 μ^t 的容许位移．由定理 4 得，测度 μ 可表为

$$\mu(A)=\iint_{\substack{x+sa \in A \\ x \in \mathscr{X}_0}} f(x, s) \bar{\mu}(dx) dF(s),$$

其中

$$f(x, s)=\frac{d\mu}{d\mu^*}(x+sa),$$

$\bar{\mu}$ 是在子空间

$$\mathscr{X}_0=\{x:(a, x)=0\}$$

上由关系式 $\bar{\mu}(A)=\mu(P^{-1}A)$ 所定义的测度，P 是在 $\mathscr{X}_0$ 上的投影算子，而

$$F(s)=\mu(\{x:(a, x)<s\}).$$

类似于 (11) 我们有

$$\bar{\mu}(A)=\int \bar{\mu}^t(A) \sigma(dt)$$

（由按测度 μ 对几乎所有 x，$\varphi(Px)=\varphi(x)$ 得等式

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{s<t} E_s\right)=\bar{\mu}(\{x: \varphi(x)<t\})$$

$$= \mu(\{x: \varphi(x) < t\}) = \sigma((-\infty, t))).$$

设 $\bar{f}(t, x, s)$ 是可测函数，使得当 $\varphi(x) = t$ 时 $\bar{f}(t, x, s) = f(x, s)$，那末

$$\mu(A) = \iint_{x+ta\in A} \bar{f}(t, x, s)\bar{\mu}^t(dx)\sigma(dt)dF(s)$$

$$= \int\left[\int_{x+ta\in A} \bar{f}(t, x, s)\bar{\mu}^t(dx)dF(s)\right]\sigma(dt).$$

令

$$\int_{x+sa\in A} \bar{f}(t, x, s)\bar{\mu}^t(dx)dF(s) = \mu^{*t}(A),$$

我们得

$$\mu(A) = \int \mu^{*(t)}\sigma(dt).$$

因此对直线上所有可测集 Λ 和连续函数 $g(x)$ 等式

$$\int_\Lambda \int g(x)\mu^t(dx)\sigma(dt) = \int_\Lambda \int g(x)\mu^{*t}(dx)\sigma(dt)$$

成立，即按测度 σ 对几乎所有 t，有

$$\int g(x)\mu^t(dx) = \int g(x)\mu^{*t}(dx).$$

但由 μ^{*t} 的表示式得 a 是这测度的容许位移. 最后，注意到

$$\nu(A) = \int_A \varphi(x)\mu(dx) = \iint \chi_A(x)\varphi(x)\mu^t(dx)\sigma(dt)$$

$$= \int \mu^t(A)\sigma_1(dt),$$

其中

$$\frac{d\sigma_1}{d\sigma}(t) = t.$$

因此我们证明了

定理 8 如果 μ 和 ν 是两个等价测度，使得 $M_\mu = M_\nu$（这些集合是线性流形），和 $\rho_\mu(a, x) = \rho_\nu(a, x)$，则存在一单参数测度族 μ^t 使 $a \in M_{\mu^t}$ 以及可测函数 $\varphi(x)$ 使 $\mu^t(\{x: \varphi(x) = t\}) = 1$，还存在直线上的等价测度 σ 和 σ_1 使

$$\mu(A) = \int \mu^t(A)\sigma(dt), \qquad \nu(A) = \int \mu^t(A)\sigma_1(dt).$$

同时，对所有 $a \in M_\mu$ 和按测度 μ 对几乎所有 x，函数 $\varphi(x)$ 满足等式 $\varphi(x-a)=\varphi(x)$。

容许位移的一个充分条件 考察在 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 上的测度 μ，设 $\{e_n, n=1,\cdots\}$ 是 $\mathscr{X}$ 的规范正交基，$\mathscr{X}_n$ 是由 $e_1,\cdots,e_n$ 所张成的子空间，P_n 是在这子空间上的投影算子，μ^n 是测度 μ 在 $\mathscr{X}_n$ 上的投影. 我们设 μ^n 关于 $\mathscr{X}_n$ 上的 Lebesgue 测度绝对连续，而它对于这测度的密度 $f_n(x)$ 是正的. 那末

$$\frac{d\mu_a^n}{d\mu^n}(x)=\frac{f_n(x-a_n)}{f_n(x)}, \quad a_n=p_n a,\ x\in\mathscr{X}_n.$$

由于 §1 定理 1，按测度 μ 几乎处处有极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(P_n(x-a))}{f_n(P_n x)}=g(x,a).$$

如果 $a\in M_\mu$，那末 $g(x,a)=\rho_\mu(a,x)$，而使 $a\in M_\mu$ 的充分必要条件是

$$\int g(x,a)\mu(dx)=1$$

(参见 §1 定理 1 推论 2). 验证这条件是很困难的. 下面将导出使对所有实数 t，$ta\in M_\mu$ 的条件，这些条件根据于 §1 定理 2 的注.

假定密度 $f_n(x)$ 关于 x 连续可微并用 $\nabla f_n(x)$ 表示 $f_n(x)$ 的梯度，即在 $\mathscr{X}_n$ 中这样的一个向量，使得对所有

$$a\in\mathscr{X}_n, \qquad \frac{d}{dt}f_n(x+ta)\big|_{t=0}=(\nabla f_n(x),a).$$

对所有 $x\in\mathscr{X}$ 和 $a\in\mathscr{X}$，令

$$h_n(x,a)=\frac{1}{f_n(p_n x)}(\nabla f_n(p_n x),p_n a).$$

我们往证当 a 固定而 n 变动时 $h_n(x,a)$ 在概率空间 $(\mathscr{X},\mathfrak{B},\mu)$ 上构成鞅. 以 $\mathfrak{B}_n$ 表示基底在 $\mathscr{X}_n$ 的柱集的 σ 代数. 设

$$a_k=(a,e_k), \quad t_k=(x,e_k), \quad f_n(x)=F_n(t_1,\cdots,t_n).$$

那末

$$h_n(x,a)=\frac{1}{F_n(t_1,\cdots,t_n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_n}{\partial t_k}(t_1,\cdots,t_n)a_k,$$

如果 $\varphi(x)$ 是 $\mathfrak{B}_n$ 可测函数，则 $\varphi(x)=\Phi(t_1,\cdots,t_n)$. 首先假定 $\Phi(t_1,\cdots,t_n)$ 连续可微和仅在某个有界区域内异于 0. 那末

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}h_{n+1}(x,a)\varphi(x)\\
&=\int\frac{1}{F_{n+1}(t_1,\cdots,t_{n+1})}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\partial}{\partial t_k}F_{n+1}(t_1,\cdots,t_{n+1})\alpha_k\\
&\qquad\times\Phi(t_1,\cdots,t_n)F_{n+1}(t_1,\cdots,t_{n+1})dt_1\cdots dt_{n+1}\\
&=\mathbf{E}h_n(x,a)\varphi(x)+\alpha_{n+1}\int\frac{\partial}{\partial t_{n+1}}F_{n+1}(t_1,\cdots,t_{n+1})\\
&\qquad\times\Phi(t_1,\cdots,t_n)dt_1\cdots dt_{n+1}=\mathbf{E}h_n(x,a)\varphi(x)\\
&\qquad-\alpha_{n+1}\int F_{n+1}\frac{\partial}{\partial t_{n+1}}\Phi(t_1,\cdots,t_n)dt_1\cdots dt_{n+1}\\
&=\mathbf{E}h_n(x,a)\varphi(x).
\end{aligned}
$$

由于这样形式的函数 $\varphi(x)$ 在全体有界 $\mathfrak{B}_n$ 可测函数的空间中处处稠密，所以等式

$$\mathbf{E}h_{n+1}(x,a)\varphi(x)=\mathbf{E}h_n(x,a)\varphi(x)$$

对所有有界 $\mathfrak{B}_n$ 可测函数成立. 从后一等式得

$$\mathbf{E}(h_{n+1}(x,a)|\mathfrak{B}_n)=h_n(x,a),$$

即 $h_n(x,a)$ 是鞅.

我们用 N 表示满足

$$\sup_n\int h_n^2(x,a)\mu(dx)<\infty$$

的 a 的集合. 对所有 $a\in N$，按测度 μ 几乎处处存在极限

$$h(x,a)=\lim_{n\to\infty}h_n(x,a),$$

而且 $\{h_1(x,a),\cdots,h_n(x,a),\cdots,h(x,a)\}$ 也是概率空间 $(\mathscr{X},\mathfrak{B},\mu)$ 上的鞅且

$$\lim_{n\to\infty}\int[h(x,a)-h_n(x,a)]^2\mu(dx)=0.$$

容易验证，N 是一线性流形，而且对每个实数 t 及 N 中的 a 和 b 按测度 μ 对几乎所有 x，

$$h(x,ta)=th(x,a),\ h(x,a+b)=h(x,a)+h(x,b)$$

成立.

下面的定理用上面所定义的函数 $h(x, a)$ 来给出 $a \in M_\mu$ 的充分条件.

定理 9 设密度 $f_n(x)$ 是正的和连续可微并且对某个 $a \in \mathscr{X}$, $h(x, a)$ 被定义. 如果对某个 $\delta > 0$

$$\int e^{\delta|h(x,a)|}\mu(dx) < \infty,$$

则对所有实数 t 有 $ta \in M_\mu$ 及式

$$\rho(ta, x) = \exp\left\{-\int_0^t h(x - sa, a)ds\right\} \tag{12}$$

成立.

证. 令

$$I_n(t) = \int_{\mathscr{X}_n} \ln\left(1 + \frac{f_n(x)}{f_n(x + ta)}\right) f_n(x)dx.$$

由于定理的假设,导数 $I_n'(t)$ 存在而且

$$I_n'(t) = -\int_{\mathscr{X}_n} h_n(x + ta, a)\frac{f_n(x)}{f_n(x) + f_n(x + ta)} f_n(x)dx.$$

因此,

$$|I_n'(t)| \leqslant \int_{\mathscr{X}_n} |h_n(x + ta, a)| f_n(x)dx.$$

现利用下面的 Young 不等式:如果 $g(t)$ 是对所有 $t \geqslant 0$ 有定义的连续严格增函数并有 $g(0) = 0$, 而 $g^{-1}(t)$ 是 g 的反函数, $a > 0$ 和 $b > 0$, 那末

$$ab \leqslant \int_0^a g(t)dt + \int_0^b g^{-1}(t)dt.$$

取

$$g(t) = \frac{1}{\alpha}\ln(1 + t),$$

我们得

$$ab \leqslant \frac{a}{\alpha}\ln(1 + a) + \frac{e^{ab} - 1}{\alpha}.$$

利用此不等式,则有

$$I'_n(t) \leqslant \int_{\mathscr{X}_n} |h_n(x+ta, a)| \frac{f_n(x)}{f_n(x+ta)} f_n(x+ta)\, dx$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta} \int_{\mathscr{X}_n} \frac{f_n(x)}{f_n(x+ta)} \ln\left(1 + \frac{f_n(x)}{f_n(x+ta)}\right) f_n(x+ta)\, dx$$

$$+ \frac{1}{\delta} \int_{\mathscr{X}_n} e^{\delta |h_n(x+ta, a)|} f_n(x+ta)\, dx$$

$$= \frac{1}{\delta} I_n(t) + \frac{1}{\delta} \int e^{\delta |h_n(x,a)|} \mu(dx).$$

由这个微分不等式得

$$I_n(t) \leqslant \left(1 + \int e^{\delta |h_n(x,a)|} \mu(dx)\right) e^{\frac{1}{\delta} t}.$$

因 $\{h_1(x,a), \cdots, h_n(x,a), \cdots, h(x,a)\}$ 是鞅，故 $\{\exp\{\delta|h(x,a)|\}, \cdots, \exp\{\delta|h(x,a)|\}\}$ 是半鞅，从而

$$\int e^{\delta |h_n(x,a)|} \mu(dx) \leqslant \int e^{\delta |h(x,a)|} \mu(dx).$$

于是，

$$\sup_n \int_{\mathscr{X}_n} \ln \frac{f_n(x - tP_n a)}{f_n(x)} \cdot \frac{f_n(x - tP_n a)}{f_n(x)} f_n(x)\, dx$$

$$\leqslant \sup_n \int_{\mathscr{X}_n} \ln\left(1 + \frac{f_n(x)}{f_n(x + tP_n a)}\right) f_n(x)\, dx$$

$$\leqslant \sup_n I_n(t) < \infty.$$

为证明 $a \in M_\mu$，余下只要应用 § 1 定理 2 的注。

现在着手推导式 (12)．首先注意，由于

$$\rho((t+s)a, x) = \rho(ta, x)\rho(sa, x - ta),$$

所以只要对任意小的 t 建立该式就够了．另一方面，利用 $h(x,a)$ 关于 a 的齐次性，我们可假定定理的条件对充分大的 δ，例如 $\delta = 4$ 时成立．利用 $h_n(x,a)$ 的定义可以有

$$\frac{f_n(P_n(x - ta))}{f_n(P_n x)} = \exp\left\{-\int_0^t h_n(x - sa, a)\, ds\right\}.$$

因此

$$\rho(ta, x) = \lim_{n\to\infty} \exp\left\{-\int_0^t h_n(x - sa, a)\, ds\right\}.$$

为证明按测度μ对几乎所有x积分$\int_0^t h(x-sa, a)ds$存在和按测度μ有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t h_n(x-sa, a)ds=\int_0^t h(x-sa, a)ds,$$

只要证明式

$$\lim_{n,m\to\infty}\iint_0^t |h_n(x-sa, a)-h_{n+m}(x-sa, a)|ds\mu(dx)=0, \tag{13}$$

成立就够了(由$h(x, a)$的$\mathfrak{B}$可测性得$h(x-sa, a)$是s的 Borel 函数，对每个s按测度μ对几乎所有x，$h_n(x-sa, a)\to h(x-sa, a)$，故由 Fubini 定理也按测度$\mu$对几乎所有$x$及按 Lebesgue 测度对几乎所有$s$成立；由式(13)得积分

$$\int_0^t |h(x-sa, a)|ds$$

是有限的及等式

$$\lim_{n\to\infty}\iint_0^t |h_n(x-sa, a)-h(x-sa, a)|ds\mu(dx)=0).$$

我们有

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{m,n\to\infty}}\iint_0^t |h_n(x-sa, a)-h_{n+m}(x-sa, a)|ds\mu(dx)\\&=\overline{\lim_{n,m\to\infty}}\int_{\mathscr{X}_{n+m}}\int_0^t |h_n(x, a)-h_{n+m}(x, a)|\\&\qquad\times f_{n+m}(x+sP_{n+m}a)dsdx.\end{aligned}$$

再次利用 Young 不等式的如下形式：

$$ab\leqslant\frac{e^a-1}{\alpha}+b\ln(1+\alpha b).$$

则

$$\begin{aligned}&\int_{\mathscr{X}_{n+m}}\int_0^t |h_n(x, a)-h_{n+m}(x, a)|\frac{f_{n+m}(x+sP_{n+m}a)}{f_{n+m}(x)}\\&\qquad\times f_{n+m}(x)dsdx\leqslant\frac{t}{\alpha}\int[\exp\{|h_n(x, a)\\&\qquad-h_{n+m}(x, a)|\}-1]\mu(dx)+\int_{\mathscr{X}_{n+m}}\int_0^t f_{n+m}(x)\end{aligned}$$

$$\times \ln\left(1+\alpha\frac{f_{n+m}(x)}{f_{n+m}(x+sP_{n+m}a)}\right)dsdx.$$

注意

$$\exp\{2|h_n(x,a)-h_{n+m}(x,a)|\}$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\exp\{4|h_n(x,a)|\}+\frac{1}{2}\exp\{4|h_{n+m}(x,a)|\}.$$

因此积分

$$\int(\exp\{|h_n(x,a)-h_{n+m}(x,a)|\})^2\mu(dx)$$

一致有界，这意味着函数 $\exp\{|h_n(x,a)-h_{n+m}(x,a)|\}$ 一致可积从而能将极限取入积分号。因为当 $n\to\infty$ 和 $m\to\infty$ 时依测度 μ, $|h_n(x,a)-h_{n+m}(x,a)|\to 0$, 所以

$$\lim_{n,m\to\infty}\int\exp\{|h_n(x,a)-h_{n+m}(x,a)|\}\mu(dx)=1.$$

因此

$$\overline{\lim_{n,m\to\infty}}\iint_0^t|h_n(x,a)-h_{n+m}(x,a)|ds\mu(dx)$$
$$\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{\mathscr{X}_n}\int_0^t f_n(x)\ln\left(1+\frac{f_n(x)}{f_n(x-sP_na)}\right)dsdx.$$

由于序列

$$\eta_n=\frac{f_n(x)}{f_n(x-sP_na)}$$

是概率空间 $(\mathscr{X},\mathfrak{B},\mu_{sa})$ 上的鞅及

$$\eta_\infty=\rho(-sa,x-sa)=\lim\eta_n$$

使得

$$\mathbf{E}\eta_\infty=\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\eta_n=1,$$

所以这序列一致可积，因此由于第二章 § 2 定理 3，序列 $[\eta_n,n=1,2,\cdots,\infty]$ 也是鞅。因为

$$\sup_n\mathbf{E}\eta_n\ln(1+\alpha\eta_n)<\infty,$$

所以序列 $[\eta_n\ln(1+\alpha\eta_n),\ n=1,2,\cdots,\infty]$ 是半鞅（$\sup_n\mathbf{E}\eta_n\times\ln(1+\alpha\eta_n)$ 的有限性的证明，类似于 $I_n(t)$ 的有界性的证明；而

当 $\alpha \leqslant 1$ 本来是我们所需要的，由 $I_n(t)$ 的有界性可得)．因此

$$\mathbf{E}\eta_n \ln(1+\alpha\eta_n) \leqslant \mathbf{E}\eta_\infty \ln(1+\alpha\eta_\infty),$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\eta_n \ln(1+\alpha\eta_n) = \mathbf{E}\eta_\infty \ln(1+\alpha\eta_\infty)$$

(数学期望是在概率空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu_{sa})$ 上取的)． 因为

$$\mathbf{E}\eta_n \ln(1+\alpha\eta_n) = \int f_n(x) \ln\left(1+\alpha \frac{f_n(x)}{f_n(x-sP_na)}\right) dx,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \int f_n(x) \ln\left(1+\alpha \frac{f_n(x)}{f_n(x-sP_na)}\right) dx ds$$

$$= \int_0^t \int \ln(1+\alpha\rho(-as, x-as))\mu_{sa}(dx) ds.$$

因此，

$$\overline{\lim_{n,m\to\infty}} \iint_0^t |h_n(x-sa, a) - h_{n+m}(x-sa, a)| ds\mu(dx)$$

$$\leqslant \int_0^t \int \ln(1+\alpha\rho(-as, x-sa))\mu_{sa}(dx) ds. \qquad (14)$$

易见积分

$$\int \ln(1+\alpha\rho(-as, x-sa))\mu_{sa}(dx)$$

当 $\alpha \downarrow 0$ 时单调趋于 0．在 (14) 式当 $\alpha \downarrow 0$ 取极限，即得 (13)．定理得证．

推论 设 μ 是均值为 0 和相关算子为 B 的 Gauss 测度． 那末 $M_\mu = B^{1/2}\mathscr{X}$．

证．因为测度 μ 的特征泛函具有形式

$$\varphi(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(Bz, z)\right\}$$

且 $\varphi(z) \to 1$ 当 $(Bz, z) \to 0$，所以由定理 2，$M_\mu \subset B^{1/2}\mathscr{X}$． 我们用 $e_1, e_2, \cdots$ 和 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 分别表示算子 B 的特征向量和特征值．如果 $\mathscr{X}_n$ 是由 $e_1, \cdots, e_n$ 所张成的子空间，那末

$$f_n(x) = (2\pi)^{-n/2}\left(\prod_{k=1}^n \lambda_k\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \frac{(x, e_k)^2}{\lambda_k}\right\}.$$

因此

$$h_n(x, a) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(x, e_k)(a, e_k)}{\lambda_k}.$$

易见

$$\int (h_n(x, a))^2 \mu(dx) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(a, e_k)^2}{\lambda_k},$$

因此只要

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a, e_k)^2}{\lambda_k} < \infty,$$

$h(x, a)$ 就被确定且

$$h(x, a) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x, e_k)(a, e_k)}{\lambda_k}.$$

因为 (x, e_k) 是概率空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ 上独立 Gauss 随机变量，所以 $h(x, a)$ 也是 Gauss 随机变量. 从而

$$\int e^{|h(x,a)|} \mu(dx) \leqslant \int [e^{h(x,a)} + e^{-h(x,a)}] \mu(dx)$$

$$= 2 \exp\left\{\frac{1}{2} \int h^2(x, a) \mu(dx)\right\}$$

$$= 2 \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a, e_k)^2}{\lambda_k}\right\}.$$

于是，由于定理 9，只要

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a, e_k)^2}{\lambda_k} < \infty,$$

即 $a \in B^{1/2}\mathscr{X}$，就有 $a \in M_\mu$. 推论得证.

由 (12) 式得

$$\rho_\mu(a, x) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x, e_k)(a, e_k)}{\lambda_k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a, e_k)^2}{\lambda_k}\right\}$$

$$= \exp\left\{(B^{-1/2}a, B^{-1/2}x) - \frac{1}{2} |B^{-1/2}a|^2\right\}.$$

最后，我们给出测度μ的一个例子，它使得M_μ是$\mathscr{X}$中处处稠密的线性流形，且存在不属于M_μ的向量a，使得μ_a不正交μ. 我们考虑均值是0和相关算子分别是A和B的Gauss测度μ^1和μ^2. 我们设两个算子的特征向量相同并表示为$e_1, e_2, \cdots$，而特征值分别用α_i和β_i表示. 设当$n\to\infty$时$\frac{\alpha_n}{\beta_n}\to 0$. 易见$M_{\mu^1}\subset M_{\mu^2}$及$M_{\mu^2}-M_{\mu^1}$是一非空集. 如果$a\in M_{\mu^2}-M_{\mu^1}$，则$\mu_a^2\sim\mu^2$，和$\mu_a^1\perp\mu^1$(参见定理5推论). 我们往证$\mu_a^1\perp\mu^2$. 变量$(x, e_k)=\xi_k$在概率空间$\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu^2\}$和$\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu_a^1\}$上均是独立Gauss变量，而且在第一个空间上$\mathbf{E}\xi_k=0, \mathbf{D}\xi_k=\beta_k$，在第二个空间上$\mathbf{E}\xi_k=(a, e_k)$，$\mathbf{D}\xi_k=\alpha_k$. 因此依测度$\mu^2$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(x, e_k)^2}{\beta_k}\to 1.$$

及依测度μ_a^1

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(x, e_k)^2}{\beta_k}\to 0.$$

于是得证μ^2和μ_a^1正交. 注意，由所给出的证明还得到$\mu^2\perp\mu^1$. 但在这种情况下由于定理6，测度

$$\mu=\frac{1}{2}(\mu^1+\mu^2)$$

的容许位移的集合与$M_{\mu^1}\cap M_{\mu^2}$一样，即与M_{μ^1}一样. 如果$a\in M_{\mu^2}-M_{\mu^1}$，那末μ_a有关于测度μ的绝对连续分量$\frac{1}{2}\mu_a^2$，因此μ满足所要求的条件.

§3. 在空间的映象下测度的绝对连续性

这一节所研究的基本问题是，在什么条件下由Hilbert空间到自身的映象将测度变换为关于μ的绝对连续测度. 如果$T(x)$是$\mathscr{X}$到$\mathscr{X}$的可测映象，即对所有$A\in\mathfrak{B}$，$T^{-1}(A)\in\mathfrak{B}$，那末在

此映象下测度 μ 变换为 ν:

$$\nu(A)=\mu(T^{-1}(A)). \tag{1}$$

下面我们将寻求保证 ν 关于 μ 绝对连续的充分条件以及 $\frac{d\nu}{d\mu}$ 用测度 μ 和映象 T 的特征表示的公式.

在考虑无穷维空间中的测度以前，我们首先对所提出的问题在有限维 Euclid 空间情形寻求解答. 设测度 μ 有关于 Lebesgue 测度的密度

$$\mu(A)=\int_A f(x)dx,$$

而且 f 不为 0. 我们还设映象 T 是双方单值和连续可微的，那末对有界可测函数 g

$$\begin{aligned}\int g(x)\nu(dx)&=\int g(T(x))\mu(dx)=\int g(T(x))f(x)\,dx\\&=\int g(y)f(T^{-1}(y))\left|\frac{DT^{-1}(y)}{Dy}\right|dy,\end{aligned}$$

其中 $\frac{DT^{-1}(y)}{Dy}$ 是 T 的逆映象的 Jacobian，由于所作的假设，此逆映象也是可微的. 在上述一串等式中最后的一个积分可以写成按测度 μ 的积分:

$$\begin{aligned}&\int g(y)f(T^{-1}(y))\left|\frac{DT^{-1}(y)}{Dy}\right|dy\\&\quad=\int g(y)\frac{f(T^{-1}(y))}{f(y)}\left|\frac{DT^{-1}(y)}{Dy}\right|\mu(dy).\end{aligned}$$

注意，

$$\frac{f(T^{-1}(y))}{f(y)}=\frac{f(y-(y-T^{-1}(y)))}{f(y)}=\rho(y-T^{-1}(y),y),$$

其中 $\rho(a,x)$ 是测度 μ_a 关于测度 μ 的密度(我们利用 § 2 的记号). 因此，在有限维空间中有公式

$$\int g(x)\nu(dx)=\int g(x)\rho(x-T^{-1}(x),x)\left|\frac{DT^{-1}(x)}{Dx}\right|\mu(dx).$$

此公式形式上在 Hilbert 空间仍然有意义，只要我们对变换的

Jacobian 赋予合理的意义．设 V 是某个线性算子，它使得 $V-I$ 是全连续算子，其中 I 是恒等变换．那末 VV^* 是非负对称算子，而 VV^*-I 也是全连续算子．设 λ_k 是算子 VV^* 的特征值序列(这算子有特征向量的完备系)，$\lambda_k \geqslant 0$，$\lambda_k \to 1$．令

$$|\det V| = \sqrt{\prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k},$$

如果这无穷乘积或者收敛，或者发散到 0 或 $+\infty$．

设 $S(x)$ 是由 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$ 的某个映象．如果存在这样的线性算子 $dS(x_0)$ 使得

$$|S(x_0+x)-S(x_0)-dS(x_0)x| = o(|x|),\quad x\in\mathscr{X}, \text{ 成立，}$$

则称算子 $S(x)$ 在点 x_0 是可微的，而算子 $dS(x_0)$ 被称为 $S(x)$ 在点 x_0 的微分．如果 $\mathscr{X}$ 是有限维空间，则易见变换 $S(x)$ 的 Jacobian 就是 $|\det dS(x)|$．最后的表示式在 Hilbert 空间也有意义．因此我们得到公式

$$\int g(x)\nu(dx) = \int g(x)\rho(x-T^{-1}(x),\ x)|\det dT^{-1}(x)|\mu(dx). \tag{2}$$

此公式对足够广的函数 g 的类成立导出等式

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x) = \rho(x-T^{-1}(x), x)|\det dT^{-1}(x)|. \tag{3}$$

在这一节的余下部分将致力于研究在什么条件下不仅对 Gauss 测度而且对更一般的情形式(3)成立．为使式(3)有意义需要对测度 μ 和变换 T 附加上某些一般条件．

条件 1 测度 μ 有容许位移的线性流形 M 和对所有规范正交基 $\{e_k\}$，测度 μ 在 $\mathscr{X}_n$($\mathscr{X}_n$ 是由 $e_1,\cdots,e_n$ 生成的子空间)上的投影 μ^n 有关于 $\mathscr{X}_n$ 上的 Lebesgue 测度的连续密度，且对每个 $c>0$ 和有限维子空间 $N\subset M$，依测度 μ

$$\sup\left[\left|\frac{f_n(P_n(x-a))}{f_n(P_nx)} - \rho(a,x)\right|;\ |a|\leqslant c,\ a\in N\right]\to 0,$$

这里 P_n 是在 $\mathscr{X}_n$ 上的投影算子，和

$$\rho(a_1 x) = \frac{d\mu_a}{d\mu}(x).$$

条件 2 映象 $T(x)$ 有逆映象并记为 $S(x)$，算子 $T(x)$ 和 $S(x)$ 局部有界和连续可微，而且量 $|\det dT(x)|$ 和 $|\det dS(x)|$ 有限，异于零，连续和局部有界.

定理 1 设条件 1 和 2 成立且在 M 中存在有限维子空间 N，使得 $x - T(x) \in N$, $x - S(x) \in N$ 对所有 $x \in \mathscr{X}$ 成立，且若 P 是 N 上的投影算子，则 $PT(x) = T(Px)$, $P(S(x)) = S(Px)$. 那末 $\nu \sim \mu$ 及公式 (3) 成立.

证. 选取基 $e_1, e_2 \cdots$，使对某个 m，向量 $e_1, \cdots, e_m$ 构成 N 的基. 设 μ^n 和 ν^n 是测度 μ 和 ν 在子空间 $\mathscr{X}_n$ 上的投影. 那末当 $n > m$ 时对定义在 $\mathscr{X}_n$ 上的任意有界可测函数 g，均有

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{X}_n} g(x)\nu^n(dx) &= \int_{\mathscr{X}} g(P_n x)\nu(dx) = \int_{\mathscr{X}} g(P_n T(x))\mu(dx)\\ &= \int_{\mathscr{X}} g(T(P_n x))\mu(dx) = \int_{\mathscr{X}_n} g(T(x))\mu^n(dx)\\ &= \int_{\mathscr{X}_n} g(T(x)) f_n(x)dx.\end{aligned}$$

在所作的假设下，当 $n > m$ 时映象 T 和 S 将 $\mathscr{X}_n$ 映为 $\mathscr{X}_n$. 作积分的变量替换 $x = S(y)$，我们得

$$\int_{\mathscr{X}_n} g(x)\nu^n(dx) = \int_{\mathscr{X}_n} g(x) \frac{f_n(S(x))}{f_n(x)} |\det dS(x)| \mu^n(dx).$$

由于 $S(x) = x + P(S(x) - x)$，所以变换 $S(x)$ 的 Jacobian 矩阵有形式 $I + V$，其中 V 仅在前 m 行有异于 0 的元素，而且这些元素不依赖于 m. 因此，当 $n > m$ 时变换 $S(x)$ 的 Jacobian 的模数不依赖于 n 且等于 $|\det dS(x)|$.

因此，

$$\frac{d\nu^n}{d\mu^n}(x) = \frac{f_n(S(x))}{f_n(x)} |\det dS(x)|.$$

显然，测度 ν^n 和 μ^n 等价，并且

$$\frac{d\mu^n}{d\nu^n}(x) = \frac{f_n(x)}{f_n(S(x))} \frac{1}{|\det dS(x)|}.$$

因此

$$\frac{d\mu^n}{d\nu^n}(T(x))=\frac{f_n(T(x))}{f_n(x)}\frac{1}{|\det dS(T(x))|}$$
$$=\frac{f_n(T(x))}{f_n(x)}|\det dT(x)|,$$

因为按复合函数的微分法则

$$I=dx=d[S(T(x))]=dS(T(x))dT(x).$$

由于条件 1，在依测度 μ 收敛的意义下存在异于零的极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(P_nS(x))}{f_n(P_nx)}=\rho(x-S(x),x),$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(P_nT(x))}{f_n(P_nx)}=\rho(x-T(x),x)$$

（此处我们用到 $x-S(x)\in N$，$x-T(x)\in N$ 是局部有界和条件 1）. 余下只要应用 § 1 定理 3 推论 1. 定理得证.

注1. 我们已证明在定理 1 的条件下，$\nu\sim\mu$，且除公式(3)外，有

$$\frac{d\mu}{d\nu}(T(x))=\rho(x-T(x),x)|\det dT(x)|. \tag{4}$$

注 2. 如果对任意 y 可以找到 δ 和有限维子空间 $N^y\subset M$ 使得只要用 N^y 代替N，当 $|x-y|\leqslant\delta$ 时定理条件成立，那末仍有公式 (3) 和 (4).

定理 2 设条件 1 和 2 成立且在M中的向量的基 $\{e_k\}$ 存在，使

1) 对足够大的 n，映象

$$T_n(x)=x+P_n(T(x)-x),$$
$$S_n(x)=x+P_n(S(x)-x)$$

有逆映象，及在依测度 μ 收敛的意义下

$$|\det dT_n(x)|\to|\det dT(x)|,$$
$$|\det dS_n(x)|\to|\det dS(x)|.$$

2) 当 $n\to\infty$时依测度 μ，

$$\rho(P_n(x-S(x)),x) \text{ 与 } \rho(P_n(x-T(x)),x)$$

有极限，并分别记为 $\rho(x-S(x),x)$ 与 $\rho(x-T(x),x)$；在

$\rho(x - S(x), x)$ 中可用 $T(x)$ 代替 x 且

$$\rho(T(x) - x, T(x))\rho(x - T(x), x) = 1.$$

那末测度 μ 和 ν 等价及式(3)和(4)均成立。

证．设

$$S_n^m(x) = x + P_n(S(P_m x) - x).$$

当 $m > n$ 时

$$S_n^m(P_m x) = P_m S_n^m(x).$$

映象 S_n^m 和它的逆映象满足定理 1 的条件．如果 ν_n^m 是由等式

$$\nu_n^m(A) = \mu(S_n^m(A))$$

所定义，那末

$$\frac{d\nu_n^m}{d\mu}(x) = \rho(x - S_n^m(x), x)|\det dS_n^m(x)|.$$

注意到由条件 1 和对所有 n，$f_n(x)$ 是连续和正的可推得，当 $a \in \mathscr{X}_m$，$|a| \leqslant c$ 时，$\rho(a, x)$ 依测度 μ 按 a 是一致连续的，即依测度 μ，当 $\delta \to 0$ 时

$$\sup\{|\rho(a_1, x) - \rho(a_2, x)|;\ |a_1| \leqslant c,\ |a_2| \leqslant c,\ a_1, a_2 \in \mathscr{X}_m,\ |a_1 - a_2| < \delta\} \to 0.$$

因为对所有 m，$x - S_n^m(x) \in \mathscr{X}_n$，依测度 μ 有 $x - S_n^m(x) \to x - S_n(x)$ 及 $x - S_n^m(x)$ 有界．所以当 $m \to \infty$ 依测度 μ

$$\rho(x - S_n^m(x), x) \to \rho(x - S_n(x), x).$$

其次，对所有 m，$dS_n^m(x)$ 显然有形式 $dS_n^m(x) = I + V_n^m(x)$，其中 $V_n^m(x)$ 将整个空间映入 $\mathscr{X}_n$．可以验证，这时 V 将 $\mathscr{X}$ 映入 $\mathscr{X}_n$，所以

$$|\det(I + V)| = |\det\|((I + V)e_i, e_j)\|_{i,j=1,\cdots,n}|,$$

其中 $\|((I + V)e_i, e_j)\|_{i,j=1,\cdots,n}$ 是 n 阶矩阵，其第 i 行第 j 列的元素是 $((I + V)e_i, e_j)$．由于对所有 i，j

$$\lim_{m\to\infty}(dS_n^m(x)e_i, e_j) = (dS_n(x)e_i, e_j),$$

所以

$$\lim_{m\to\infty}|\det dS_n^m(x)| = |\det dS_n(x)|.$$

因此，在依测度 μ 收敛的意义下

$$\lim_{m\to\infty}\frac{d\nu_n^m}{d\mu}(x)=\rho(x-S_n(x),x)|\det dS_n(x)|.$$

利用等式 $x-S_n(x)=P_n(x-S(x))$ 及定理的条件,可以验证在依测度 μ 收敛意义下

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\frac{d\nu_n^m(x)}{d\mu}=\rho(x-S(x),x)|\det dS(x)|.$$

因此可以选取序列 n_k 和 m_k 使 $m_k>n_k$ 和测度 $\nu_k=\nu_{n_k}^{m_k}$ 满足依测度 μ

$$\lim_{k\to\infty}\frac{d\nu_k}{d\mu}(x)=\rho(x-S(x),x)|\det dS(x)|.$$

现设 $T_n^m(x)=x+P_n(T(P_mx)-x)$. 类似的证明可以选取序列 n_k 和 m_k,使对测度

$$\tilde{\nu}_k(A)=\mu(\tilde{T}_k^{-1}(A)),\text{ 其中 }\tilde{T}_k=T_{n_k}^{m_k},$$

在依测 μ 收敛的意义下

$$\lim_{k\to\infty}\frac{d\mu}{d\tilde{\nu}_k}(\tilde{T}_k(x))=\rho(x-T(x),x)|\det dT(x)|.$$

最后,

$$\rho(T(x)-x,T(x))|\det dS(T(x))|\rho(x-T(x),x)|\det dT(x)|=1,$$

因为按复合函数的微分法则

$$I=dx=d(S(T(x)))=dS(T(x))dT(x)$$

且因此,

$$|\det dS(T(x))|\cdot|\det dT(x)|=1,$$

而由于定理的条件 2)

$$\rho(T(x)-x,T(x))\rho(x-T(x),x)=1.$$

从而可利用 § 1 定理 3 的推论 2,得证定理.

现考虑测度 μ 是有均值为 0 和相关算子 B^2 的 Gauss 测度的情形. 在 § 2 已证明在这一情形 $M=B\mathscr{X}$ 且若 $a=Bb$, e_k 是算子 B 的特征向量, β_k 是对应的特征值,则

$$\rho(a;x)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a,e_k)(x,e_k)}{\beta_k^2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a,e_k)}{\beta_k^2}\right\}$$

$$= \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(b, e_k)(x, e_k)}{\beta_k} - \frac{1}{2}|b|^2\right\}.$$

设映象 $T(x)$ 有 $T(x) = x + B\lambda(x)$，其中 $\lambda(x)$ 是连续和连续可微映象。如果 T 有逆映象，那末

$$S(x) = x + B\lambda^*(x),$$

其中

$$\lambda^*(x) = -\lambda(S(x))$$

也是连续和连续可微的。

因为在 Gauss 测度的情况下 $\ln\frac{f_n(x-a)}{f_n(x)}$ 是关于 a 的二次线性泛函的和，所以由 $\frac{f_n(x-a)}{f_n(x)}$ 收敛于 $\rho(a, x)$ 得 $a \in \mathscr{H}_m$，$|a| \leqslant c$ 时此收敛对 a 一致。其中 m 和 c 是任意的。因此对 Gauss 测度来说定理 2 条件 1 恒成立。现考虑该定理的条件 2。因为

$$\rho(P_n(x - T(x)), x) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{n}\frac{(\lambda(x), e_k)(x, e_k)}{\beta_k} - \frac{1}{2}|P_n\lambda(x)|^2\right\},$$

所以异于 0 的极限

$$\lim_{n\to\infty}\rho(P_n(x - T(x)), x)$$

的存在等价于级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda(x), e_k)\frac{(x, e_k)}{\beta_k}$$

依测度 μ 的收敛性，且这极限等于

$$\rho(x - T(x), x) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda(x), e_k)(x, e_k)}{\beta_k} - \frac{1}{2}|\lambda(x)|^2\right\}.$$

同样，$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(P_n(x - S(x)), x)$ 存在当且仅当级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda^*(x), e_k)\frac{(x, e_k)}{\beta_k}$$

依测度μ收敛，且这时

$$\rho(x-S(x), x)=\exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda^*(x), e_k)(x, e_k)}{\beta_k}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}|\lambda^*(x)|^2\right\}.$$

最后，注意

$$\rho(T(x)-S(T(x)), T(x))$$
$$=\exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda^*(T(x)), e_k)(T(x), e_k)}{\beta_k}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}|\lambda^*(T(x))|^2\right\}$$
$$=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda(x), e_k)(x+B\lambda(x), e_k)}{\beta_k}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}|\lambda(x)|^2\right\}$$
$$=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda(x), e_k)(x, e_k)}{\beta_k}\right.$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda(x), e_k)(\lambda(x), Be_k)}{\beta_k}$$
$$\left.-\frac{1}{2}|\lambda(x)|^2\right\}=(\rho(x-T(x), x))^{-1}.$$

因此我们证明了如下定理：

定理 3 设μ是均值为 0 和相关算子为B^2的 Gauss 测度；β_k和e_k分别是算子B的特征值和特征向量. 如果

a) 映象$T(x)$满足条件 2 和有形式$T(x)=x+B\lambda(x)$，而$S(x)=T^{-1}(x)=x+B\lambda^*(x)$，当$n$足够大时

$$T_n(x)=x+P_nB\lambda(x),\qquad S_n(x)=x+P_n$$

有逆映象，且

$$|\det dT_n(x)| \to |\det dT(x)|,\quad |\det d\dot{S}_n(x)| \to |\det d\dot{S}(x)|;$$

b）级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda(x), e_k)(x, e_k)}{\beta_k} \quad 和 \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda^*(x), e_k)(x, e_k)}{\beta_k}$$

按测度 μ 几乎处处收敛，那末测度 μ 和 ν 等价，而

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x) = |\det dS(x)| \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda(x), e_k)(x, e_k)}{\beta_k} - \frac{1}{2}|\lambda(x)|^2\right\}. \tag{5}$$

我们现在来讨论出现在 b) 中的级数收敛的某些充分条件，这对验证定理 3 的条件 b) 是否满足是有用的.

引理 如果测度 μ 是与定理 3 一样，而 $\lambda(x)$ 是 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$ 的连续映象，那末级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda(x), e_k)(x, e_k)}{\beta_k} \tag{6}$$

依测度 μ 收敛的充分条件是如下条件之一成立:

1）存在这样的数 α_k 使得 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2 < \infty$ 及级数 $\Sigma\alpha_k^{-2}(\lambda(x), e_k)^2$ 按测度 μ 几乎处处收敛.

2）级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda(x) - \lambda(P_{k-1}x), e_k)\frac{(x, e_k)}{\beta_k},\quad \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda(P_{k-1}x), e_k)^2$$

依测度 μ 收敛.

3）级数

$$\sum_{i,j}\int[(\lambda_{ij}(x), e_i)(\lambda_{ij}(x), e_j) - (\lambda(x), e_i)(\lambda(x), e_j)]\mu(dx),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int(\lambda(x), e_k)^2\frac{(x, e_k)^2}{\beta_k^2}\mu(dx)$$

收敛，其中

$$\lambda_{ij}(x) = \lambda(x - (x, e_i)e_i - (x, e_j)e_j).$$

证. 1) 从不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(x, e_k)}{\beta_k}(\lambda(x), e_k)\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2\frac{(x, e_k)^2}{\beta_k^2}} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda(x), e_k)^2}{\alpha_k^2}}$$

和

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int \alpha_k^2\frac{(x, e_k)}{\beta_k^2}\mu(dx) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2 < \infty$$

可得.

2) 不失一般性，可以认为 $|\lambda(x)|^2 \leqslant c$，因为由级数 (6) 在集合 $\{x: |\lambda(x)|^2 \leqslant c\}$ 上 (c 是任意的) 收敛推得它依测度 μ 收敛. 我们以 H_m 表示满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda(P_{k-1}x), e_k)^2 \leqslant m$$

的 x 的集合. 设 $\lambda_m(x) = \lambda(x)$ 当 $x \in H_m$; $\lambda_m(x) = 0$ 当 $x \bar{\in} H_m$. 因为由级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda(P_{k-1}x), e_k)^2$ 的收敛得知，当 $m\to\infty$ 时 $\mu(H_m)\to 1$，所以为要级数 (6) 收敛，只要对每个 m 级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_m(x), e_k)\frac{(x, e_k)}{\beta_k}$$

依测度 μ 收敛就够了. 但

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_m(x), e_k)\frac{(x, e_k)}{\beta_k} = \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_m(x) - \lambda_m(P_{k-1}x))\frac{(x, e_k)}{\beta_k} + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_m(P_{k-1}x), e_k)\frac{(x, e_k)}{\beta_k}.$$

注意到由于不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda(P_{k-1}P_l x), e_k)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda(P_{k-1}x), e_k)^2$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda(P_l x), e_k)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda(P_{k-1}x), e_k)^2$$

$$+|\lambda(P_l x)|^2$$

对所有 l 和 $x\in H_m$ 成立，故有 $P_l x\in H_{m+c}$。设 $x\in H_{m-c}$。那末

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_m(x)-\lambda_m(P_{k-1}x), e_k)\frac{(x, e_k)}{\beta_k}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda(x)-\lambda(P_{k-1}x), e_k)\frac{(x_1 e_k)}{\beta_k},$$

由假设知最后的级数收敛。因为 m 可以取任意大，所以证明级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_m(P_{k-1}x), e_k)\frac{(x, e_k)}{\beta_k}$$

依测度 μ 收敛就够了。在概率空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu\}$ 上，它的部分和构成鞅，由此得该级数收敛。事实上，(x, e_k) 是独立 Gauss 变量，此外

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_m(P_{k-1}x), e_k)\frac{(x, e_k)}{\beta_k}\right)^2$$

$$=\mathbf{E}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_m(P_{k-1}x), e_k)^2\frac{(x, e_k)^2}{\beta_k^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(\lambda_m(P_{k-1}x), e_k)^2\mathbf{E}\frac{(x, e_k)^2}{\beta_k}\leqslant m.$$

3) 现来证明级数 (6) 均方收敛。显然，

$$\int\left(\sum_{k=n}^{m}\frac{(\lambda(x), e_k)(x, e_k)}{\beta_k}\right)^2\mu(dx)$$

$$=\sum_{k=n}^{m}\int\frac{(\lambda(x), e_k)^2(x, e_k)^2}{\beta_k^2}\mu(dx)$$

$$+2\sum_{n<i<j\leqslant m}\int\frac{(\lambda_{ij}(x),e_i)(\lambda_{ij}(x),e_j)(x,e_i)(x,e_j)}{\beta_i\beta_j}\mu(dx)$$

$$+2\sum_{n\leqslant i<j\leqslant m}\int[(\lambda(x),e_i)(\lambda(x),e_j)$$

$$-(\lambda_{ij}(x),e_i)(\lambda_{ij}(x),e_j)\times\frac{(x,e_i)(x,e_j)}{\beta_i\beta_j}\mu(dx)$$

$$=\int\sum_{k=n}^{m}\frac{(\lambda(x),e_k)^2(x,e_k)^2}{\beta_k^2}\mu(dx)$$

$$+2\int\sum_{n<i<j\leqslant m}[(\lambda(x),e_i)(\lambda(x),e_j)$$

$$-(\lambda_{ij}(x),e_i)(\lambda_{ij}(x),e_j)]\frac{(x,e_i)(x,e_j)}{\beta_i\beta_j}\mu(dx),$$

因为，由于量 $\lambda_{ij}(x)$，(x, e_i)，(x, e_j) 在概率空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu\}$ 上独立，

$$\int(\lambda_{ij}(x),e_i)(\lambda_{ij}(x),e_j)(x,e_i)(x,e_j)\mu(dx)=0.$$

因此，当 $n\to\infty$ 和 $m\to\infty$ 时

$$\int\left(\sum_{k=n}^{m}\frac{(\lambda(x),e_k)(x,e_k)}{\beta_k}\right)^2\mu(dx)\to 0.$$

引理得证.

我们应用定理 3 到与恒等变换稍微不同的变换 $T(x)$ 的情形. 设有映象族 $T_\varepsilon(x)=x+\varepsilon\lambda(x)$，然后有

$$S_\varepsilon(x)=x-\varepsilon\lambda(x)+O(\varepsilon^2)$$

(我们仅考虑阶数不高于 ε 的项). 如果 $d\lambda(x)$ 有一有限迹，那末当 $\varepsilon>0$ 足够小时

$$\ln|\det dT_\varepsilon(x)|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\varepsilon^k\mathrm{Sp}[d\lambda(x)]^k.$$

于是，仅限于阶数不高于 ε 的项时，我们可以写出

$$\frac{d\nu_\varepsilon}{d\mu}(x)=1-\varepsilon\mathrm{Sp}[d\lambda(x)]$$

$$-\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x, e_k)(\lambda(x), e_k)}{\beta_k^2}+O(\varepsilon^2).$$

由此式见到，利用定理 3 时所引起的基本困难在于验证该定理条件 b) 中级数的收敛性，这对任意近似于恒等变换的变换仍然如此.

现在考察映象 T 是线性时的情形.

定理 4 设 μ 是均值为 0 和正相关算子为 B^2 的 Gauss 测度. 如果线性算子 T 是可逆的且有形式 $T=I+BCB^{-1}$，其中 $\mathrm{Sp}CC^*<\infty$，且算子 $I+C$ 具有有界逆算子，那末

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x)=K\exp\{W(x)\}, \tag{7}$$

其中

$$K=\lim_{n\to\infty}|\det(I+D_n)|e^{-\mathrm{Sp}D_n},\quad D_n=P_nDP_n, \tag{8}$$

$$W(x)=\lim_{n\to\infty}[-(DB^{-1}P_nx, B^{-1}P_nx)$$
$$-\frac{1}{2}|P_nDB^{-1}P_nx|^2+\mathrm{Sp}D_n]. \tag{9}$$

这极限理解为关于测度 μ 均方意义下的极限，P_n 是在 $\mathscr{H}_n$ 上的投影算子，$D=B^{-1}T^{-1}B-I$.

证. 算子 T 将 M 映到 M，因此 D 至少在 M 上有定义. 我们往证 $\mathrm{Sp}DD^*<\infty$. 因为

$$T^{-1}=I-BCB^{-1}T^{-1},$$
$$D=CB^{-1}T^{-1}B=C(I+C)^{-1}=CV,$$

其中 V 是有界算子，所以

$$\mathrm{Sp}DD^*=\sum_{k=1}^{\infty}(De_k, D^*e_k)=\sum_{k=1}^{\infty}(V^*C^*e_k, V^*C^*e_k)$$
$$\leqslant\|VV^*\|\sum_{k=1}^{\infty}|c^*e_k|^2=\|VV^*\|\,\mathrm{Sp}CC^*.$$

由此关系式还得到 D 的有界性. 令 $D_n=P_nDP_n$. 那末当 $n\to\infty$ 时

$$\mathrm{Sp}(D-D_n)(D-D_n)^*=\mathrm{Sp}DD^*-\mathrm{Sp}D_nD_n^*$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |D^* e_k|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |D_n^* e_k|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} (D^* e_k, e_j)^2 - \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (D^* e_k, e_j)^2 \to 0.$$

我们来证明极限

$$\lim_{n\to\infty} |\det(I + D_n)| \exp\{-\mathrm{Sp} D_n\}$$

存在且异于 0. 设

$$U_n = D_n + D_n^* + D_n D_n^*.$$

那末

$$|\det(I + D_n)| \exp\{-\mathrm{Sp} D_n\}$$

$$= \sqrt{\det(I + U_n) e^{-\mathrm{Sp} U_n}} \exp\left\{\frac{1}{2} \mathrm{Sp}\, D_n D_n^*\right\}.$$

由于 $\mathrm{Sp} D_n D_n^* \to \mathrm{Sp} DD^*$，所以证明极限

$$\lim_{n\to\infty} \det(I + U_n) e^{-\mathrm{Sp} U_n} \tag{10}$$

存在就够了. 令 $U = D + D^* + DD^*$.

由条件 $\mathrm{Sp}(D - D_n)(D - D_n)^* \to 0$ 得

$\mathrm{Sp}(U - U_n)(U - U_n)^* \to 0$. 用 $\lambda_1^{(n)}, \cdots, \lambda_n^{(n)}$ 表示 $\mathscr{H}_n$ 中的算子 U_n 的特征值（U_n 将 $\mathscr{H}_n$ 映到 $\mathscr{H}_n$，而它的正交余为 0)，和用$f_1^n, \cdots, f_n^n$ 表示对应的特征向量（假定按照绝对值 $\lambda_k^{(n)}$ 是有序的). 由

$$\sum_{i=1}^{n} |Uf_i^n - \lambda_i^{(n)} f_i^n|^2 \leqslant \mathrm{Sp}(U - U_n)^2 \to 0$$

得 $\lambda_i^{(n)} \to \lambda_i$，$f_i^{(n)} \to f_i$，其中 f_i 是算子U的特征向量，λ_i 是对应的特征值，其次，有

$$\det(I + U_n) e^{-\mathrm{Sp} U_n} = \prod_{k=1}^{n} (1 + \lambda_k^{(n)}) e^{-\lambda_k^{(n)}}$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{m} (1 + \lambda_k^{(n)}) e^{-\lambda_k^{(n)}}\right)\left(1 + O\left(\sum_{k>m} (\lambda_k^{(n)})^2\right)\right).$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{m}(1+\lambda_k^{(n)})e^{-\lambda_k^{(n)}}=\prod_{k=1}^{m}(1+\lambda_k)e^{-\lambda_k},$$

所以为证明极限 (10) 的存在性只要证明

$$\lim_{m\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{m+1}^{\infty}(\lambda_k^{(n)})^2=0.$$

然而

$$\lim_{m\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=m+1}^{\infty}(\lambda_k^{(n)})^2=\lim_{m\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\operatorname{Sp}U_n^2-\sum_{k=1}^{m}(\lambda_k^{(n)})^2\right]$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left[\operatorname{Sp}U^2-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^2\right]=0.$$

于是极限 (10) 的存在性得证. 因为算子 $(I+D)(I+D^*)$ 可逆,故极限异于 0 的事实由关系式

$$K=\sqrt{\prod_{k=1}^{\infty}(1+\lambda_k)e^{-\lambda_k}\,e^{1/2\operatorname{Sp}DD^*}}$$

及 $1+\lambda_k\neq 0$ 得到.

现证明极限 (9) 存在. 设

$$W_n(x)=\left[-(D_nB^{-1}x,B^{-1}P_nx)-\frac{1}{2}|D_nB^{-1}P_nx|^2+\operatorname{Sp}D_n\right].$$

那末由于第五章 § 6 公式 (7)

$$\int[W_n(x)-W_m(x)]^2\mu(dx)$$

$$=\int\Big[\Big(\Big\{D_n+\frac{1}{2}D_n^*D_n-D_m-\frac{1}{2}D_m^*D_m\Big\}B^{-1}x,B^{-1}x\Big)+\operatorname{Sp}(D_n-D_m)^2\Big]\mu(dx)$$

$$=\left[\frac{1}{2}\operatorname{Sp}(D_n^*D_n-D_m^*D_m)\right]^2+\operatorname{Sp}\Big(\frac{D_n-D_m+D_n^*-D_m^*}{2}$$

$$+\frac{D_n^*D_n-D_m^*D_m}{2}\Big)^2$$

$$\leqslant\left[\frac{1}{2}\operatorname{Sp}(D_n^*D_n-D_m^*D_m)\right]^2$$

$$+\frac{1}{4}\operatorname{Sp}(U_n-U_m)^2,$$

当 $n\to\infty$ 和 $m\to\infty$ 时，最后的表示式趋于 0. 得证极限 (9) 存在.

现往证式 (7). 设测度 ν_n 是由等式 $\nu_n(A)=\mu(T_n^{-1}A)$ 定义，其中 $T_n^{-1}=B(I+D_n)B^{-1}$. 那末由定理 3 得

$$\frac{d\nu_n}{d\mu}(x)=|\det B(I+D_n)B^{-1}|\exp\Big\{-\sum_{k=1}^{n}\Big[\frac{(D_nB^{-1}x,e_k)(x,e_k)}{\beta_k}$$

$$+\frac{(D_nB^{-1}x,e_k)^2}{2\beta_k^2}\Big]\Big\}$$

$$=|\det(I+D_n)|\exp\{-(D_nB^{-1}P_nx,B^{-1}P_nx)$$

$$-\frac{1}{2}|B^{-1}D_nB^{-1}P_nx|^2\Big\};$$

因为 $|\det B(I+D_n)B^{-1}|$ 和在 $\mathscr{H}_n$ 中考虑能用规范正交基写出的变换矩阵 $B(I+D_n)B^{-1}$ 的行列式的模相等，所以

$$|\det B(1+D_n)B^{-1}|=|\det(I+D_n)|.$$

因此

$$\frac{d\nu_n}{d\mu}(x)=K_n\exp\{W_n(x)\},$$

其中 $W_n(x)$ 如上所定义，而

$$K_n=|\det(I+D_n)|e^{-\operatorname{Sp}D_n}.$$

正如我们已证明依测度 μ 收敛意义下

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d\nu_n}{d\mu}(x)=K\exp\{W(x)\},$$

现设测度 $\tilde{\nu}_n$ 由 $\tilde{\nu}_n=\mu(\tilde{T}_n^{-1}(A))$ 所定义，其中

$$\tilde{T}_n=I+BP_nCP_nB^{-1}.$$

类似上述可证，依测度 μ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d\mu}{d\tilde{\nu}_n}(\tilde{T}_n(x))=\tilde{K}\exp\{\tilde{W}(x)\},$$

其中 $\tilde{K}$、$\tilde{W}$ 分别由式(8)及(9)当用 T^{-1} 代替 T 而用 TB^2T^* 代替 B^2 时所定义.

现利用§1定理3的推论2，得证定理.

§4. Hilbert 空间中 Gauss 测度的绝对连续性

设在 Hilbert 空间中定义两个 Gauss 测度 μ_1 及 μ_2，它们分别有均值 a_1 及 a_2 和相关算子 B_1 及 B_2. 下面寻求为 μ_2 关于 μ_1 绝对连续要求 a_1, a_2, B_1, B_2 满足的充分必要条件. 将证明密度 $\frac{d\mu_2}{d\mu_1}$ 处处是正数，从而 μ_2 关于 μ_1 绝对连续将导致测度 μ_1 和 μ_2 的等价性. 此外还证明绝对连续性条件的破坏将导致测度的正交性. 因此两个 Gauss 测度或者是等价或者是正交.

当测度的不同仅在于位移,即 $B_1=B_2$ 时,在§2已部分地进行了研究.

定理 1 如果 $B_1=B_2=B$，那末 $\mu_2\ll\mu_1$ 的充分必要条件是 $a_2-a_1\in B^{1/2}\mathscr{X}$；这时

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x)=\exp\Big\{(B^{-1/2}(x-a_1),B^{-1/2}(a_2-a_1))$$

$$-\frac{1}{2}[B^{-1/2}(a_2-a_1)]^2\Big\}. \qquad (1)$$

如果 $a_2-a_1\bar{\in}B^{1/2}\mathscr{X}$，那末 $\mu_1\perp\mu_2$.

证. 第一个论断和公式(1)在§2已经验证. 现设

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}(a_2-a_1,e_k)=\alpha_k,$$

其中 λ_k 是算子 B 的特征值，而 e_k 是对应的特征向量. 如果 $a_2-a_1\bar{\in}B^{1/2}\mathscr{X}$，则 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2=+\infty$. 现考虑函数

$$g_n(x)=\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\right)^{-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{\sqrt{\lambda_k}}(x-a_1,e_k).$$

由于

$$\int g_n(x)\mu_1(dx)=0,\qquad \int g_n(x)\mu_2(dx)=1,$$

$$\int g_n^2(x)\mu_1(dx)=\int(g_n(x)-1)^2\mu_2(dx)=\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\right)^{-1},$$

所以依测度 μ_1, $g_n\to 0$ 和依测度 μ_2, $g_n\to 1$. 由此得 μ_1 和 μ_2 的正交性. 定理得证.

现考虑 $a_1=a_2=0$ 的情形. 设 $\mu_2\ll\mu_1$. 那末 $(B_2z,z)/(B_1z,z)$ 对 $z\in\mathscr{H}$ 必定有界. 事实上，如果能找到序列 z_n，使

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(B_2z_n,z_n)}{(B_1z_n,z_n)}=+\infty,$$

那末依测度 μ_1, $\dfrac{(z_n,x)}{\sqrt{(B_2z_n,z_n)}}\to 0$, 而

$$\mu_2\left(\left\{x:\frac{|(z_n,x)|}{\sqrt{(B_2z_n,z_n)}}\leqslant\varepsilon\right\}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|t|\leqslant\varepsilon}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt\leqslant\frac{2\varepsilon}{\sqrt{2\pi}},$$

因此，$\dfrac{(z_n,x)}{\sqrt{(B_2z_n,z_n)}}$ 依测度 μ_2 不趋于 0. 这与 μ_2 关于 μ_1 的绝对连续性相矛盾. 易见，$\dfrac{(B_2z,z)}{(B_1z,z)}$ 的非有界性甚至导致测度 μ_1 和 μ_2 的奇异性. 因此这比值应当以一正数为下界. 由此得算子 $B_1^{1/2}$ 和 $B_2^{1/2}$ 的值域是一样的且算子 $C=B_1^{1/2}B_2^{-1/2}$ 和 $C^{-1}=B_2^{1/2}B_1^{-1/2}$ 是有界的. 注意由算子 C 的有界性得知，$(z,B_2^{-1/2}x)$ 不仅是依测度 μ_2 的可测泛函（参见第五章 § 6），而且也是依测度 μ_1 的可测泛函，这因为

$$(z,B_2^{-1/2}x)=(z,C^*B_1^{-1/2}x)=(Cz,B_1^{-1/2}x).$$

现考虑自共轭算子 $C^*C=B_2^{-1/2}B_1B_2^{-1/2}$. 我们证明 $C^*C=I+D$，其中 D 是全连续算子. 为此只要验证，如果 E_λ 是算子 D 的单位分解，那末当 $\lambda<0$ 时算子 E_λ 和当 $\lambda>0$ 时算子 $I-E_\lambda$ 的投影

将$\mathscr{X}$映为有限维子空间. 首先，我们证明，对算子D不存在特征值$\lambda \neq 0$使得对应于它的特征子空间是无穷维的. 若不然，则在该子空间中可找到规范正交无穷序列z_k，使得依测度μ_2有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(z_k, B_2^{-1/2}x)^2 \to 1$$

和依测度μ_1有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(z_k, B_2^{-1/2}x) \to 1+\lambda,$$

这因为在概率空间$(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu_1)$和$(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu_2)$中的每一个上，变量$(z_k, B_2^{-1/2}x)$构成均值为0和方差分别是$1+\lambda$和1的独立Gauss 随机变量序列.

事实上，

$$\int(z_k, B_2^{-1/2}x)(z_j, B_2^{-1/2}x)\mu_2(dx) = (z_k, z_j) = \delta_{kj},$$

$$\begin{aligned}\int(z_k, B_2^{-1/2}x)(z_j, B_2^{-1/2}x)\mu_1(dx) &= (B_1B_2^{-1/2}z_k, B_2^{-1/2}z_j) = (z_k, z_j) \\ &\quad + (Dz_k, z_j) = (1+\lambda)\delta_{kj}.\end{aligned}$$

所以$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(z_k, B_2^{-1/2}x)$依测度$\mu_1$和$\mu_2$收敛于不同的常数导致测度$\mu_1$和$\mu_2$的正交. 现设

$$z_k \in (E_{\lambda_{k-1}} - E_{\lambda_k})\mathscr{X},$$

其中$0 > \lambda = \lambda_0 > \lambda_1 > \cdots > \lambda_k$，而且$(E_{\lambda_{k-1}} - E_{\lambda_k})\mathscr{X}$是非空子空间. 那末$(z_k, B_2^{-1/2}x)$仍然是概率空间$(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu_1)$和$(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu_2)$上的独立 Gauss 变量.

事实上，

$$\int(z_k, B_2^{-1/2}x)(z_j, B_2^{-1/2}x)\mu_2(dx) = \delta_{kj},$$

$$\begin{aligned}\int(z_k, B_2^{-1/2}x)(z_j, B_2^{-1/2}x)\mu_1(dx) &= \delta_{kj} + (Dz_k, z_j) \\ &= \delta_{kj}\left(1+\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k-1}}\lambda d(E_\lambda z_k, z_k)\right).\end{aligned}$$

利用强大数定律，可以证明依测度 μ_2，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(z_k, B_2^{-1/2}x)^2 \to 1,$$

且依测度μ_1

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(z_k, B_2^{-1/2}x)^2 \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1+\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k-1}}\lambda d(E_\lambda z_k, z_k)\right)\leqslant 1+\lambda<1.$$

从这两式再次得到 μ_1 和 μ_2的奇异性. 为完成证明还要注意到，或者当一个无穷维特征子空间对应于某个 $\lambda<0$ 或者当在 $(-\infty, \lambda)$ 上存在有限个互不相交的区间，使得在它们每一个上 E_λ 的增量不等于 0 时，对于 $\lambda<0$ 子空间 $E_\lambda\mathscr{X}$ 是无穷维的. 因此得证 $\lambda<0$ 时 $E_\lambda\mathscr{X}$ 是有限维的. 同样可证当 $\lambda>0$ 时 $(I-E_\lambda)\mathscr{X}$ 是有限维的.

因此，算子 D 是全连续的. 设 $e_1, e_2, \cdots$是它的特征向量，而 δ_k 是对应的特征值. 现来证明由 μ_2 关于 μ_1 的绝对连续性得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k^2<\infty.$$

事实上，如果

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k^2=+\infty,$$

那末考虑函数列

$$g_n(x)=\left(\sum_{k=1}^{n}\delta_k^2\right)^{-1}\sum_{k=1}^{n}\delta_k[(e_k, B_2^{-1/2}x)^2-1].$$

我们已经指出，对于属于算子 D 的不同的特征子空间的向量 z_k，$(z_k, B_2^{-1/2}x)$ 是概率空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu_1)$ 和 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu_2)$ 上的独立 Gauss 变量. 由

$$\int g_n(x)\mu_2(dx)=0,$$

$$\int g_n^2(x)\mu_2(\lambda x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2\right)^{-2} \sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 \int\Big[(e_k, B_2^{-1/2}x)^4$$

$$- 2(e_k, B_2^{-1/2}x)^2 + 1\Big]\mu_2(dx) = 2\left(\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2\right)^{-1}.$$

$$\int g_n(x)\mu_1(dx) = \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2\right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \delta_k (De_k, e_k) = 1,$$

$$\int(g_n(x) - 1)^2\mu_1(dx)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2\right)^{-2} \sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 \Big\{\int(e_k, B_2^{-1/2}x)^4\mu_1(dx)$$

$$- \Big[\int(e_k, B_2^{-1/2}x)^2\mu_1(dx)\Big]^2\Big\}$$

$$= 2\left(\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2\right)^{-2} \sum_{k=1}^{n} \delta_k^2(1 + \delta_k^2) = O\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2\right)^{-1}\right)$$

得，依测度 μ_2，$g_n(x) \to 0$ 和依测度 μ_1，$g_n(x) \to 1$。因此，条件

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^2 = +\infty$$

推得测度 μ_1 和 μ_2 的正交性。δ_k 满足的另外一个必要条件由下式得到：

$$1 + \delta = 1 + \frac{(De_k, e_k)}{(e_k, e_k)} = \frac{(B_2^{-1/2}B_1B_2^{-1/2}e_k, e_k)}{(B_2^{-1/2}B_2B_2^{-1/2}e_k, e_k)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(B_1z_n, z_n)}{(B_2z_n, z_n)} > 0,$$

其中 Z_n 是 $B_2^{1/2}\mathscr{X}$ 中的向量序列，使得 $B_2^{1/2}z_n \to e_k$。因此，$\delta_k > -1$。

设 $\delta_k > -1$ 且 $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^2 < \infty$。现我们证明测度 μ_1 和 μ_2 等价。为此考察由等式

$$\tilde{\mu}(A) = \int_A \rho(x)\mu_1(dx)$$

定义的测度 $\tilde{\mu}$，其中

$$\rho(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[(B_2^{-1/2}x, e_k)^2\frac{\delta_k}{1+\delta_k} - \ln(1+\delta_k)\right]\right\}.$$

级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[(B_2^{-1/2}x, e_k)^2\frac{\delta_k}{1+\delta_k} - \ln(1+\delta_k)\right]$$

依测度 μ_1 收敛从如下事实得到：在概率空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu_1)$ 上，这级数是由独立随机变量所组成，而对应的数学期望和方差

$$\mathbf{E}\left[(B_2^{-1/2}x, e_k)^2\frac{\delta_k}{1+\delta_k} - \ln(1+\delta_k)\right] = \delta_k - \ln(1+\delta_k) = O(\delta_k^2),$$

$$\mathbf{D}\left[(B_2^{-1/2}x, e_k)\frac{\delta_k}{1+\delta_k}\right] = \frac{\delta_k^2}{(1+\delta_k)^2}2(1+\delta_k)^2 = 2\delta_k^2$$

所组成的级数收敛.

求测度 $\tilde{\mu}$ 的特征泛函：

$$\tilde{\chi}(z) = \int e^{i(z,x)}\tilde{\mu}(dx) = \int e^{i(z,x)}\rho(x)\mu_1(dx).$$

对每个 $z \in \mathscr{X}$，式

$$(z, x) = (B_2^{1/2}z, B_2^{-1/2}x) = \sum_{k=1}^{\infty}(B_2^{1/2}z, e_k)(B_2^{-1/2}x, e_k)$$

成立，其中右边的级数按测度 μ_1 几乎处处收敛.

利用变量 $(B_2^{-1/2}x, e_k)$ 是概率空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu_1)$ 上取均值为 0 和方差为 $1+\delta_k$ 的独立 Gauss 变量，得

$$\tilde{\chi}(z) = \mathbf{E}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{\infty}(B_2^{1/2}z, e_k)(B_2^{-1/2}x, e_k) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[(B_2^{-1/2}x, e_k)^2\frac{\delta_k}{1+\delta_k} - \ln(1+\delta_k)\right]\right\}$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}\exp\left\{i(B_2^{1/2}z, e_k)(B_2^{-1/2}x, e_k)\right.$$

$$- \frac{\delta_k}{2(1+\delta_k)} (B_2^{-1/2}x, e_k)^2\Big\}\sqrt{1+\delta_k}$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp\Big\{(B_2^{1/2}z, e_k)t - \frac{\delta_k}{2(1+\delta_k)} t^2$$

$$- \frac{1}{2(1+\delta_k)} t_2\Big\} dt = \prod_{k=1}^{\infty} \exp\Big\{-\frac{1}{2}(B_2^{1/2}z, e_k)^2\Big\}$$

$$= \exp\Big\{-\frac{1}{2}(B_2 z, z)\Big\}.$$

由于测度 $\tilde{\mu}$ 的特征泛函和测度 μ_2 的特征泛函相同，所以 $\mu_2 = \tilde{\mu}$ 及

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x) = \rho(x).$$

于是，得证如下定理：

定理 2 设 μ_1 和 μ_2 是取均值为 0 和相关算子为 $B_k, k=1, 2$ 的两个 Gauss 测度. 测度 μ_1 和 μ_2 等价的充分必要条件是，算子 $D = B_2^{-1/2}B_1B_2^{-1/2} - I$ 是 Hilbert-Schmidt 算子且它的特征值 δ_k 满足不等式 $\delta_k > -1$. 如果这条件不满足，那末测度 μ_1 与 μ_2 正交. 在测度等价情形时，式

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1} = \exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[(B_2^{-1/2}x, e_k)^2 \frac{\delta_k}{1+\delta_k} - \ln(1+\delta_k)\Big]\Big\}. \tag{2}$$

成立，其中 e_k 是算子 D 的对应于特征值 δ_k 的特征向量.

注. 设 μ_1 和 μ_2 是如定理 2 所定义的测度. 用 $\mathscr{L}^{(1)}$ 和 $\mathscr{L}^{(2)}$ 表示关于测度 μ_1 和 μ_2 的线性可测泛函的 Hilbert 空间（参见第五章 § 6）. 如果存在泛函序列 $\{l_k(x), k=1, 2, \cdots\}$ 使得它属于两个空间且是这两个空间中的每一个的完备正交系以及

$$\delta_k^{(i)} = \int [l_k(x)]^2 \mu_i(dx), i = 1, 2, k = 1, 2, \cdots,$$

那末在条件 $\delta_k^{(i)} > 0$，及

$$\sum_k \Big(1 - \frac{\delta_k^{(1)}}{\delta_k^{(2)}}\Big)^2 < \infty$$

下 $\mu_1 \sim \mu_2$，此外

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[l_k^2(x)\left(\frac{1}{\delta_k^{(1)}} - \frac{1}{\delta_k^{(2)}}\right) - \ln\frac{\delta_k^{(1)}}{\delta_k^{(2)}}\right]\right\}.$$

这个论断的证明完全类似于定理 2 条件的充分性的证明.

现来考察一般情形. 除测度 μ_1 和 μ_2 外，还引入测度 $\mu_{1,2}$，它有均值 a_1 和相关算子 B_2. 我们证明，由条件 $\mu_2 \ll \mu_1$ 推得关系 $\mu_2 \ll \mu_{12} \ll \mu_1$，因此

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1} = \frac{d\mu_2}{d\mu_{12}} \cdot \frac{d\mu_{12}}{d\mu_1},$$

而且可利用式 (1) 计算$\frac{d\mu_2}{d\mu_{12}}$，可利用式 (2) 计算$\frac{d\mu_{12}}{d\mu_2}$. 只要证明 $\mu_{12} \ll \mu_1$ 就够了，因为在这种情况下，$\mu_{12} \sim \mu_2$. 因此 $\mu_2 \ll \mu_{12}$. 如果 $\bar{\mu}_2$ 是均值为 $a_2 - a_1$ 和相关算子为 B_2 的测度，而 $\bar{\mu}_1$ 是均值为 0 和相关算子为 B_1 的测度，那末 $\bar{\mu}_2 \ll \bar{\mu}_1$. 设测度 $\bar{\mu}_i^*$ 由关系式

$$\bar{\mu}_i^*(A) = \bar{\mu}_i(\{x: -x \in A\})$$

所定义，显然 $\bar{\mu}_1^* = \bar{\mu}_1$. 因此 $\bar{\mu}_2^* \ll \bar{\mu}_1$，从而 $\bar{\mu}_2 * \bar{\mu}_2^* \ll \bar{\mu}_1 * \bar{\mu}_1$. 易见 $\bar{\mu}_2 * \bar{\mu}_2^*$ 是均值为 0 和相关算子为 $2B_2$ 的 Gauss 测度，而测度 $\bar{\mu}_1 * \bar{\mu}_1$ 和它相异之处仅在于相关算子等于 $2B_1$. 于是 $\nu_2 \ll \nu_1$，其中 ν_k 是均值为 0 和相关算子为 B_k 的 Gauss 测度. 但因为 μ_{12} 和 μ_1 可由测度 ν_2 和 ν_1 位移 a_1 得到，故 $\mu_{12} \ll \mu$. 因此，在一般情形如下定理是正确的：

定理 3 如果测度 μ_1，μ_2 是两个 Gauss 测度，它们有特征泛函

$$\varphi_k(z) = \exp\left\{i(a_k, z) - \frac{1}{2}(B_k z, z)\right\},\ k = 1,\ 2,$$

那末测度 μ_1 和 μ_2 等价的充分必要条件是如下条件成立：

1) $a_2 - a_1 = B_2^{1/2}b$，其中 $b \in \mathscr{X}$；

2) 算子 $D = B_2^{-1/2}B_1B_2^{-1/2} - I$ 是 Hilbert-Schmidt 算子且它的特征值 δ_k 满足不等式 $\delta_k > -1$. 若有一个条件不成立，则测度 μ_1 和 μ_2 正交. 对等价测度来说，式

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{\infty}(B_2^{-1/2}(x - a_1), e_k)^2\frac{\delta_k}{1 + \delta_k}\right.\right.$$

$$- \ln(1+\delta_k)\Big] + (B_2^{-1/2}(x-a_1), b) - \frac{1}{2}|b|^2\Big\} \quad (3)$$

成立，其中 e_k 是算子 D 的特征值 δ_k 所对应的特征向量.

现考察 Gauss 测度绝对连续的某些充分条件. 验证下面给出的条件看来会更方便，因为它们不包含相关算子的分数幂. 设算子 $B_1B_2^{-1}$ 和 $B_2B_1^{-1}$ 有界. 令 $V = B_1B_2^{-1} - I$. 由于 $V = B_2^{1/2}DB_2^{-1/2}$，所以 $V^2 = B_2^{1/2}D^2B_2^{-1/2}$. 设 f_k 是算子 B_1 的特征向量的规范正交序列. 那末

$$\mathrm{Sp}D^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(D^2f_k, f_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(D^2\sqrt{\lambda_k}B_2^{-1/2}f_k, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}B_2^{1/2}f_k\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(D^2B_2^{-1/2}f_k, B_2^{-1/2}f_k) = \sum_{k=1}^{\infty}(V^2f_k, f_k),$$

$$\lambda_k = (B_2f_k, f_k).$$

因此，只要 $\mathrm{Sp}V^2$ 有限就有 $\mathrm{Sp}D^2 < \infty$. 由于 V^2 是非对称算子，所以验证 $\mathrm{Sp}V^2$ 存在的条件也可能是困难的. 但是利用不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(V^2e_k, e_k)| = \sum_{k=1}^{\infty}|(Ve_k, V^*e_k)|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|Ve_k||V^*e_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|Ve_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}|V^*e_k|^2}$$

$$= \sqrt{\mathrm{Sp}V^*V \cdot \mathrm{Sp}VV^*} = \mathrm{Sp}V^*V$$

(因为 $\mathrm{Sp}V^*V = \mathrm{Sp}VV^*$)，可以用非负对称算子 V^*V 的迹的术语来陈述绝对连续性的条件.

定理 4 设 μ_1 和 μ_2 是均值为 0 和相关算子分别为 B_1 和 B_2 的 Gauss 测度. 如果存在有界算子 V 满足关系

$$VB_2 = B_1 - B_2, \qquad \mathrm{Sp}V^*V < \infty,$$

且 -1 不属于算子 V 的谱，那末 $\mu_2 \ll \mu_1$.

证. 仅需验证，如果算子 $I+V$ 可逆，即 $B_2B_1^{-1}$ 有界，则 $\delta_k > -1$ 就够了. 设对某个 m，$\delta_m = -1$. 那末令 $z = B_2^{1/2}e_m$，我们有

$$(I+V)z = z + B_2^{1/2}DB_1^{-1/2}B_2^{1/2}e_m = z - B_2^{1/2}e_m = 0,$$

即-1是算子V的特征值，由定理的假定，这是不可能的.

我们还指出在均值为0时一个 Gauss 测度对另一个 Gauss测度的密度的一个简单公式，虽然在某些附加限制下这公式才有意义，但因为它不含算子D的特征向量和特征值，所以更便于应用.

注. 如果定理4的条件成立且$\mathrm{Sp}V$被确定（即级数$\Sigma(Ve_k, e_k)$对任一规范正交基收敛），那末

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x) = \sqrt{\det(I+V)}\exp\left\{-\frac{1}{2}(B_1^{-1}Vx, x)\right\} \qquad (4)$$

成立. 根据第五章§6的结果，因为$\mathrm{Sp}V$存在且$\mathrm{Sp}V^*V<\infty$，故二次泛函$(B_1^{-1}Vx, x)$关于测度μ_1可测. 为证式(4)，注意到由$\mathrm{Sp}V$的存在得到$\mathrm{Sp}D$的存在，因此，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\log(1+\delta_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty}(B_2^{-1}x, e_k)^2\frac{\delta_k}{1+\delta_k}$$

收敛.

设P_n是在由$e_1, \cdots, e_n$张成的子空间上的投影算子，那末

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}(B_2^{-1/2}x, e_k)^2\frac{\delta_k}{1+\delta_k} &= \sum_{k=1}^{\infty}\Big[(B_2^{-1/2}x, e_k)^2 \\
&\quad - (B_2^{-1/2}x, e_k)^2\frac{1}{1+\delta_k}\Big] = \sum_{k=1}^{\infty}[(B_2^{-1/2}x, e_k)^2 \\
&\quad - (B_2^{-1/2}x, e_k)(B_2^{-1/2}x, B_2^{1/2}B_1^{-1}B_2^{1/2}e_k)] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}[(B_2^{-1/2}x, e_k)^2 - (B_2^{-1/2}x, e_k)(B_2^{1/2}B_1^{-1}x, e_k)] \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}[(P_nB_2^{-1/2}x, e_k)^2 - (P_nB_2^{-1/2}x, e_k) \\
&\quad \times (B_2^{1/2}B_1^{-1}x; e_k)] = \lim_{n\to\infty}[(P_nB_2^{-1/2}x, B_2^{-1/2}x) \\
&\quad - (P_nB_2^{-1/2}x, B_2^{1/2}B_1^{-1}x)] = ((B_2^{-1}-B_1^{-1})x, x) \\
&= (B_1^{-1}Vx, x).
\end{aligned}$$

其次，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\log(1+\delta_k) = \log|\det(I+D)|$$

$$= \log|\det(I + B_2^{1/2} D B_2^{-1/2})| = \log|\det(I + V)|.$$

将所得的表示式代入公式 (2) 就得 (4).

§5. 对应于平稳 Gauss 过程的测度的等价性和正交性

我们考虑在区间 $[-T, T]$ 上的两个实平稳 Gauss 过程 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$. 对应于这些过程是 $[-T, T]$ 上全体平方可积函数 $x(t)$ 的空间 $\mathscr{L}_2[-T, T]$ 上的 Gauss 测度 μ_1 和 μ_2. 考虑有内积

$$(x, y) = \int_{-T}^{T} x(t)\overline{y(t)}dt$$

的复值函数空间较为方便. 设 $\mathbf{E}\xi_j(t) = a_j(t)$ 而 $R_j(t)$ 是过程 $\xi_j(t)$ 的相关函数. 那末 $a_j(\cdot)$ 是测度 μ_j 的均值且相关算子 B_j 由式

$$(B_j x, y) = \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} R_j(t-s)x(t)\overline{y(s)}\,dtds$$

所定义，本节的目的是研究这种特殊类型的测度 μ_1 和 μ_2 的等价和正交的条件.

用 $F_j(x)$ 表示过程 $\xi_j(t)$ 的谱函数:

$$R_j(t) = \int e^{i\lambda t}dF_j(\lambda).$$

设过程 $\xi_j(t)$ 有谱表示:

$$\xi_j(t) = a_j(t) + \int e^{i\lambda t}dy_j(\lambda), \tag{1}$$

其中 $y_j(\lambda)$ 是复值不相关增量 Gauss 过程，且

$$\mathbf{E}|y_j(\lambda_2) - y_j(\lambda_1)|^2 = |F(\lambda_2) - F(\lambda_1)|.$$

今后我们将用到空间 $\mathscr{W}_T$，它由可以表示为

$$g(\lambda) = \int_{-T}^{T} e^{i+\lambda}\varphi(t)dt$$

的函数 $g(\lambda)$ 所组成，其中 $\varphi(\cdot) \in \mathscr{L}_2[-T, T]$. 空间 $\mathscr{W}_T$ 与在实轴上平方可积的不高于 T 的指数型的整解析函数的空间相一致. 今后我们仅在实轴上考虑 $\mathscr{W}_T$ 中的函数. 用 $\mathscr{W}_T(F_1)$ 表示在距离

$$\|g\|_{F_1}^2 = \int |g(\lambda)|^2 dF_1(\lambda)$$

下 $\mathscr{W}_T$ 的闭包. 空间 $\mathscr{W}_T(F_1)$ 是有内积

$$(g_1, g_2)_{F_1} = \int g_1(\lambda)\overline{g_2(\lambda)} dF_1(\lambda)$$

的 Hilbert 空间. 首先研究有不同均值和相同的 $R(t)$ 的过程所对应的测度的等价性和正交性的条件.

设 $R_1(t) = R_2(t)$, $a_1(t) = 0$, $a_2(t) = a(t)$.

定理 1 测度 μ_1 和 μ_2 等价的充分必要条件是，当 $t \in [-T, T]$ 时函数 $a(t)$ 可表为

$$a(t) = \int e^{-i\lambda t} b(\lambda) dF_1(\lambda),$$

其中 $b(\lambda) \in \mathscr{W}_T(F_1)$. 如果这条件成立，则

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(\cdot)) = \exp\left\{\int b(\lambda) dy_1(\lambda)\right. \tag{2}$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int |b(\lambda)|^2 dF_1(\lambda)\right\}; \tag{3}$$

这里 $y_1(\lambda)$ 是出现在 $\xi_1(t)$ 的谱表示式 (1) 中的函数.

证. 首先设 $\mu_1 \sim \mu_2$. 正如由 § 4 定理 1 所得

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x) = \exp\{l(x) - c\},$$

其中 $l(x)$ 是依测度 μ_1 的可测线性泛函，c 是某个常数. 在第五章 § 6 已证明了 $[-T, T]$ 上的平稳 Gauss 过程 $\xi_1(t)$ 的所有可测线性泛函 $l(\xi_1(\cdot))$ 可表为

$$l(\xi_1(\cdot)) = \int b(\lambda) dy_1(\lambda),$$

其中 $b(\lambda) \in \mathscr{W}_T(F_1)$. 为找到 $a(t)$, $b(t)$ 和量 c 之间的联系，我们写出 $\xi_2(t)$ (当 t 固定时)的特征函数:

$$\exp\left\{ia(t)z - \frac{1}{2}z^2R_1(0)\right\} = \mathbf{E}e^{iz\xi_2(t)} = \mathbf{E}e^{iz\xi_1(t)}\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(\cdot))$$

$$= \mathbf{E}\exp\left\{\int [b(\lambda) + ize^{it\lambda}] dy_1(\lambda) - c\right\}.$$

利用 $\mathbf{E}\xi=0$ 时对所有 Gauss 变量(包括复值情形)公式

$$\mathbf{E}e^{\xi}=\exp\left\{\frac{1}{2}\mathbf{E}\xi^2\right\}$$

成立。注意由 $\xi(t)$ 为实值得

$$dy(\lambda)=\overline{dy(-\lambda)} \quad \text{和} \quad dF(-\lambda)=dF(\lambda);$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\{\int[b(\lambda)+ize^{it\lambda}]dy_1(\lambda)\right\}^2 &= \mathbf{E}\int[b(\lambda)+ize^{it\lambda}]dy_1(\lambda) \\
&\quad \times\int[b(\lambda)+ize^{it\lambda}]\,\overline{dy_1(-\lambda)} \\
&= \mathbf{E}\int[b(\lambda)+ize^{it\lambda}]dy_1(\lambda)\int[b(-\lambda)+ize^{-it\lambda}]\,\overline{dy_1(\lambda)} \\
&= \int[b(\lambda)+ize^{it\lambda}][b(-\lambda)+ize^{-it\lambda}]dF_1(\lambda) \\
&= \int b(\lambda)b(-\lambda)dF_1(\lambda)+2iz\int b(\lambda)e^{-it\lambda}dF(\lambda) \\
&\quad -z^2R_1(0).
\end{aligned}$$

最后,由 $l(\xi_1(\cdot))$ 是实值得

$$\int b(\lambda)dy_1(\lambda)=\int\overline{b(\lambda)}\,\overline{dy_1(\lambda)}=\int\overline{b(-\lambda)}\,dy_1(\lambda).$$

因此 $b(\lambda)=\overline{b(-\lambda)}$, $b(-\lambda)=\overline{b(\lambda)}$, 且

$$\int b(\lambda)b(-\lambda)dF_1(\lambda)=\int|b(\lambda)|^2dF_1(\lambda).$$

故

$$\begin{aligned}
\exp\left\{iz\,a(t)-\frac{1}{2}R_1(0)z^2\right\} &= \exp\Big\{-c \\
&\quad +\frac{1}{2}\int|b(\lambda)|^2dF_1(\lambda)+iz\int e^{-i\lambda t}b(\lambda)dF_1(\lambda) \\
&\quad -\frac{1}{2}z^2R_1(0)\Big\}
\end{aligned}$$

且因此

$$c=\frac{1}{2}\int|b(\lambda)|^2dF_1(\lambda), \qquad a(t)=\int e^{-i\lambda t}b(\lambda)dF_1(\lambda).$$

于是我们证明了定理的条件的必要性及式(3)成立.

现往证定理条件的充分性.

设式(2)成立. 我们引入测度 $\tilde{\mu}$，它关于测度 μ_1 绝对连续且密度 $\frac{d\tilde{\mu}}{d\mu_1}$ 等于等式(3)的右边部分. 我们证明，测度 μ_2 和 $\tilde{\mu}$ 相等. 为此，我们来比较它们的特征泛函(测度 $\tilde{\mu}$ 和 μ_i 的特征泛函分别用 $\tilde{\chi}$ 和 χ_i 表示). 显然，

$$\chi_2(z) = \exp\left\{i\int_{-T}^{T} a(t)\, z(t)\, dt - \frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} R(t-s)z(t)z(s)\, dt ds\right\}.$$

其次，

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}(z) &= \mathbf{E}\exp\left\{i\int_{-T}^{T} z(t)\xi_1(t)dt\right\}\frac{d\tilde{\mu}}{d\mu_1}(\xi_1(\cdot)) \\
&= \mathbf{E}\exp\left\{\int\left[b(\lambda) + i\int_{-T}^{T} z(t)\, e^{it\lambda}dt\right] dy_1(\lambda) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\int |b(\lambda)|^2 dF_1(\lambda)\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int |b(\lambda)|^2 dF_1(\lambda)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\mathbf{E}\left(\int\left[b(\lambda) + i\int_{-T}^{T} z(t)\, e^{it\lambda}dt\right] dy_1(\lambda)\right)^2\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{i}{2}\int_{-T}^{T} z(t)\int [b(\lambda)e^{-it\lambda} + b(-\lambda)e^{it\lambda}]dF_1(\lambda)dt\right. \\
&\quad \left. + \frac{i^2}{2}\int\int_{-T}^{T} z(t)\, e^{it\lambda}dt\int_{-T}^{T} z(s)e^{-is\lambda}ds dF_1(\lambda)\right\} \\
&= \chi_2(z).
\end{aligned}$$

因为 $\chi_2 = \tilde{\chi}$，所以 $\mu_2 = \tilde{\mu}$. 定理得证.

推论 由定理1得到，如果对某个 T 在区间 $[-T, T]$ 上，过程 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_1(t) + a(t)$ 对应的测度 μ_1^T 和 μ_2^T 等价，那末函数 $a(t)$ 总能扩张到整个直线上，使得在 $(-\infty, \infty)$ 上这些过程对应的测度 μ_1^∞ 和 μ_2^∞ 也是等价的. 对所有 t，可取式(2)的右边作为这种扩张.

设谱函数 $F_1(\lambda)$ 存在谱密度 $f_1(\lambda)$. 设 $a^\infty(t)$ 是上述所说使测

度 μ_1^∞ 和 μ_2^∞ 等价的 $a(t)$ 的扩张.如果 $\tilde{a}(\lambda)$ 是函数 $a^\infty(t)$的 Fourier 变换,则

$$\tilde{a}(\lambda) = 2\pi b(\lambda) f_1(\lambda).$$

因此，测度 μ_1 和 μ_2（原先在定理 1 中所考虑的测度）等价的充分必要条件是函数 $a(t)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上存在扩张，使得扩张函数的 Fourier 变换 $\tilde{a}(\lambda)$ 满足关系式

$$\int \frac{|\tilde{a}(\lambda)|^2}{f_1(\lambda)} d\lambda < \infty.$$

那末可取 $\dfrac{\tilde{a}(\lambda)}{2\pi f_1(\lambda)}$ 作为 $b(\lambda)$.

现考虑过程 $\xi_j(t)$, $j = 1, 2$，它们的均值同为 0 但有不同的相关函数 $R_1(t)$ 和 $R_2(t)$. 用 $\mathscr{W}_T^2$ 表示形为

$$b(\alpha, \beta) = \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} e^{it\alpha - is\beta} \varphi(\alpha, \beta) dt\, ds$$

的函数 $b(\alpha, \beta)$ 所组成的空间,其中 φ 是在 $[-T, T] \times [-T, T]$ 上平方可积的函数. 用 $\mathscr{W}_T^2(F_1)$ 表示在内积

$$(b_1, b_2) = \iint b_1(\alpha, \beta) \overline{b_2(\alpha, \beta)} dF_1(\alpha) dF_2(\beta)$$

所产生的距离下，$\mathscr{W}_T^2$ 的闭包.

定理 2 如果 $\mathbf{E}\xi_j(t) = 0$, $j = 1, 2$，那末测度 μ_1 和 μ_2 等价的充分必要条件是 $\mathscr{W}_T^2(F_1)$ 中存在函数 $b(\alpha, \beta)$ 使得表示式

$$R_2(t - s) - R_1(t - s) = \iint e^{-i\alpha t + i\beta s} b(\alpha, \beta) dF_1(\alpha) dF_2(\beta) \tag{4}$$

成立. 此外,

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(\cdot)) = \exp\left\{\iint \Phi(\alpha, \beta) dy_1(\alpha) \overline{dy_1(\beta)} + c\right\}, \tag{5}$$

其中函数 $\Phi(\alpha, \beta)$ 通过下式

$$\int \Phi(\alpha, \beta) \overline{b(\beta, \gamma)} dF_1(\beta) = b(\alpha, \gamma) - \Phi(\alpha, \gamma) \tag{6}$$

与 $b(\alpha, \beta)$ 相联系,而

$$c = -\ln \mathbf{E} \exp\left\{\iint \Phi(\alpha, \beta) dy_1(\alpha) \overline{dy_1(\beta)}\right\}. \tag{7}$$

证．必要性．设 $\mu_1 \sim \mu_2$．那末关于测度 μ_1 和 μ_2 的可测线性泛函空间是相同的：$\mathscr{L}(\mu_1) = \mathscr{L}(\mu_2)$．（关于可测线性泛函参见第五章§6）．正如对 $\mathbf{E}\xi_j(t) = 0$ 的平稳 Gauss 过程 $\xi_j(t)$ 所提到的，每个可测线性泛函 $l(\xi_j)$ 可表为

$$l(\xi_j) = \int g(\alpha) dy_j(\alpha),$$

其中 $g \in \mathscr{W}_T(F_j)$．在证明§4定理2时已构造出同时成为 $\mathscr{L}(\mu_1)$ 和 $\mathscr{L}(\mu_2)$ 中的完备正交系的可测泛函序列（这泛函序列是 $(B_2^{-1/2}x, e_k) = l_k(x)$，其中 e_k 是算子D的特征向量）．
设

$$l_k(\xi_j) = \int g_k(\alpha) dy_j(\alpha).$$

由 l_k 按测度 μ_1 和 μ_2 的正交性得

$$0 = \mathbf{E} \int g_k(\alpha) dy_j(\alpha) \overline{\int g_m(\alpha) dy_j(\alpha)}$$

$$= \int g_k(\alpha) g_m(\alpha) dF_j(\alpha), \quad k \neq m.$$

将 g_k 规范化使得

$$\int |g_k(\alpha)|^2 dF_1(\alpha) = 1.$$

此外，设

$$\int |g_k(\alpha)|^2 dF_2(\alpha) = 1 + c_k.$$

由§4定理2得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$．令

$$b(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{g_k(\alpha)} g_k(\beta)$$

并证明 $b(\alpha, \beta)$ 满足关系式 (4)．考虑函数

$$\phi(t, s) = \iint e^{-i\alpha t + i\beta s} b(\alpha, \beta) dF_1(\alpha) dF_1(\beta)$$

$$+ R_1(t-s) - R_2(t-s).$$

如果

$$z(\alpha)=\int_{-T}^{T}e^{-i\alpha t}\varphi(t)\,dt,$$

那末

$$\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\psi(t,s)\varphi(t)\overline{\varphi(s)}\,dt\,ds\\
&=\iint z(\alpha)\overline{z(\beta)}\,b(\alpha,\beta)dF_1(\alpha)dF_1(\beta)\\
&\quad+\int|z(\alpha)|^2(dF_1(\alpha)-dF_2(\alpha))\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\left|\int z(\alpha)\overline{g_k(\alpha)}\,dF_1(\alpha)\right|^2\\
&\quad+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int z(\alpha)\,\overline{g_k(\alpha)}\,dF_1(\alpha)\right|^2\\
&\quad-\int\sum_{k=1}^{\infty}\left|g_k(\alpha)\int\overline{g_k(\beta)}\,z(\beta)dF_1(\beta)\right|^2dF_2(\alpha)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+c_k-\int|g_k(\alpha)|^2dF_2(\alpha)\right)\left|\int z(\alpha)\right.\\
&\quad\times\left.\overline{g_k(\alpha)}dF_1(\alpha)\right|^2=0.
\end{aligned}$$

利用等式 $\psi(t,s)=\overline{\psi(s,t)}$可验证 $\psi(t,s)=0$. 必要性得证.

充分性. 现往证定理条件的充分性和导出式(5). 设存在函数 $b(\cdot,\cdot)\in\mathscr{W}_T^2(F_1)$, 满足式(4). 考虑积分算子

$$V_g(\beta)=\int b(\alpha,\beta)g(\alpha)dF_1(\alpha).$$

如果 $b(\cdot,\cdot)\in\mathscr{W}_T^2(F_1)$, 那末这算子将 $\mathscr{W}_T(F_1)$ 映到 $\mathscr{W}_T(F_1)$. 这是容易验证的, 只要注意对任意有界函数 g,

$$V_g\in\mathscr{W}_T,\quad \text{如果}\ b(\cdot,\cdot)\in\mathscr{W}_T^2,$$

且

$$\|V\|=\iint|b(\alpha,\beta)|^2dF_1(\alpha)dF_1(\beta).$$

因此, 在 $\mathscr{W}_T(F_1)$ 上的算子 V 是有界自共轭算子. 它是有平方可

积核的积分，由此得知，它是全连续且是 Hilbert-Schmidt 算子。以 $g_k(\alpha)$ 表示算子 V 的特征函数的完备正交序列，而以 λ_k 表示对应的特征值。那末

$$b(\alpha, \beta)=\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{g_k(\alpha)} g_k(\beta), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2<\infty.$$

按 $g_k(\alpha)$ 的构造，函数 $g_k(\alpha)$ 在 $\mathscr{W}_T(F_1)$ 中正交。现证明，它们在 $\mathscr{W}_T(F_2)$ 中也是正交的。设 $\varphi_k^n(t)$ 是 $\mathscr{L}_2[-T, T]$ 中的函数序列，使当 $n \rightarrow \infty$ 时在 $\mathscr{W}_T(F_1)$ 中的收敛意义下

$$\int e^{-i\lambda t} \varphi_k^n(t) dt \rightarrow g_k(\lambda).$$

那末

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} & R_2(t-s)\varphi_k^n(t)\overline{\varphi_j^n(s)}\, dt ds \\
& -\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} R_1(t-s)\varphi_k^n(t)\overline{\varphi_j^n(s)}\, dt ds \\
&= \iint b(\alpha, \beta)\int_{-T}^{T}\varphi_j^n(t) e^{-i\alpha t} \\
&\quad \times dt \int_{-T}^{T}\overline{\varphi_k^n(s)} e^{-i\beta s}\, ds dF_1(\alpha) dF_1(\beta).
\end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时取极限得

$$\begin{aligned}
\int g_k(\alpha)\overline{g_j(\alpha)} dF_2(\alpha) &- \int g_k(\alpha)\overline{g_j(\alpha)}\, dF_1(\alpha) \\
&= \iint b(\alpha, \beta) g_j(\alpha)\overline{g_k(\beta)}\, dF_1(\alpha)\, dF_1(\beta).
\end{aligned}$$

因为当 $k \neq j$ 时

$$\iint b(\alpha, \beta) g_j(\alpha)\overline{g_k(\beta)} dF_1(\alpha)\, dF_1(\beta)=0,$$

所以当 $k \neq j$ 时有等式

$$\int g_k(\alpha)\overline{g_j(\alpha)} dF_2(\alpha)=\int g_k(\alpha)\overline{g_j(\alpha)} dF_1(\alpha)=0.$$

因此序列 $g_k(\alpha)$ 同时在空间 $\mathscr{W}_T(F_1)$ 和 $\mathscr{W}_T(F_2)$ 正交。由式 (4) 得，$b(\alpha, \beta)$ 可选取为 $b(\alpha, \beta)=b(-\alpha,-\beta)$；此时可选取 $g_k(\alpha)$ 使得 $g_k(\alpha)=\overline{g_k(-\alpha)}$。在此条件下，泛函 $\int g_k(\alpha) dy_i(\alpha)$

是过程 $\xi_j(t)$ 的实线性泛函. 由于 § 4 定理 2 的注, 有 $\mu_1 \sim \mu_2$ 和

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(\cdot)) = \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda_k}{1+\lambda_k}\left|\int g_k(\alpha)dy_1(\alpha)\right|^2 - \ln(1+\lambda_k)\right]\right\}.$$

其次注意到由于第五章 § 6 公式 (15), 下式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{1+\lambda_k}\left[\left|\int g_k(\alpha)dy_1(\alpha)\right|^2 - 1\right] = \iint \Phi(\alpha,\beta)dy_1(\alpha)\overline{dy_1(\beta)},$$

成立, 其中

$$\Phi(\alpha,\beta) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{1+\lambda_k}\overline{g_k(\alpha)}g_k(\beta).$$

为完成证明, 只要注意到

$$\int \Phi(\alpha,\gamma)\overline{b(\gamma,\beta)}\,dF_1(\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^2}{1+\lambda_k}\overline{g_k(\alpha)}g_k(\beta) = b(\alpha,\beta) - \Phi(\alpha,\beta).$$

定理得证.

假定谱密度

$$f_j(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}F_j(\lambda) \quad (j=1,2)$$

存在, 我们引入测度等价性的某些充分条件. 为此需要在 F_1 具有特殊形式时关于 $\mathscr{W}_T(F_1)$ 中正交基的一个辅助结果.

引理 设 $f_1(\lambda) = |\varphi_0(\lambda)|^2$, 其中 $\varphi_0 \in \mathscr{W}_s$ 和 $g_k(\lambda)$ 是 $\mathscr{W}_T(F_1)$ 中任一正交基. 那末

$$\sum_{k=1}^{\infty}|g_k(\lambda)|^2 \leqslant \frac{T+s}{\pi f_1(\lambda)}. \tag{8}$$

证. 由于 $\mathscr{W}_T$ 在 $\mathscr{W}_T(F_1)$ 中处处稠密, 所以对 $g_k(\lambda) \in \mathscr{W}_T$ 时证明不等式 (8) 就够了. 在此假设下 $g_k(\lambda)\varphi_0(\lambda) \in \mathscr{W}_{T+s}$, 于是

$$g_k(\lambda)\varphi_0(\lambda) = \int_{-T-s}^{T+s} e^{-i\lambda t}\psi_k(t)dt,$$

其中 $\psi_k(t)\in\mathscr{L}_2[-T-s,T+s]$. 因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}g_k(\lambda)\varphi_0(\lambda)\overline{g_j(\lambda)\varphi_0(\lambda)}d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}g_k(\lambda)\overline{g_j(\lambda)}f_1(\lambda)d\lambda,$$

所以由 Parseval 等式

$$\int_{-T-s}^{T+s}\psi_k(t)\overline{\psi_j(t)}\,dt=\frac{1}{2\pi}\delta_{kj}.$$

因此，$\sqrt{2\pi}\,\psi_k(t)$ 构成 $\mathscr{L}_2[-T-s,T+s]$ 中的规范正交函数系。因此由 Bessel 不等式得

$$2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_{-T-s}^{T+s}e^{-i\lambda t}\psi_k(t)dt\right|^2\leqslant\int_{-T-s}^{T+s}|e^{-i\lambda t}|^2dt$$
$$=2T+2s,$$

或

$$2\pi\sum_{k=1}^{\infty}|g_k(\lambda)\varphi_0(\lambda)|^2\leqslant 2(T+s).$$

引理得证。

定理 3. 设 μ_1 和 μ_2 是对应于有 $\mathbf{E}\xi_j(t)=0$ 和谱密度 $f_j(\lambda)$ 的平稳 Gauss 过程 $\xi_j(t)$, $j=1,2$, 的测度。如果存在函数 $\varphi_0(\lambda)\in\mathscr{W}_s$ 和常数 c_1, c_2 使得不等式

$$c_1|\varphi_0(\lambda)|^2\leqslant f_1(\lambda)\leqslant c_2|\varphi_0(\lambda)|^2, \tag{9}$$

成立，此外

$$\int\left[\frac{f_2(\lambda)-f_1(\lambda)}{f_1(\lambda)}\right]^2d\lambda<\infty,$$

那末对任意 T 测度 μ_1 和 μ_2 等价。

证。令

$$\bar{f}_1(\lambda)=c_1|\varphi_0(\lambda)|^2,$$

$$\bar{f}_2(\lambda)=\begin{cases}\bar{f}_1(\lambda);\ f_2(\lambda)>f_1(\lambda),\\ f_1(\lambda);\ f_2(\lambda)\leqslant f_1(\lambda),\end{cases}$$

$$\bar{f}_3(\lambda)=\begin{cases}\bar{f}_1(\lambda)+f_2(\lambda)-f_1(\lambda);& f_2(\lambda)>f_1(\lambda),\\ f_2(\lambda);& f_2(\lambda)\leqslant f_1(\lambda),\end{cases}$$

$$\bar{f}_4(\lambda)=\begin{cases}f_1(\lambda)-\bar{f}_1(\lambda);& f_2(\lambda)>f_1(\lambda);\\ 0 &;\ f_2(\lambda)\leqslant f_1(\lambda).\end{cases}$$

用 $\bar{\mu}_i$, $i=1,2,3,4$ 表示在 $[-T,T]$ 上分别有谱密度 $\bar{f}_i(\lambda)$ 的

平稳 Gauss 过程所对应的测度. 由于 $\mu_j = \tilde{\mu}_{j+1} * \tilde{\mu}_4$, $j = 1, 2$ (独立过程的和的谱密度等于被加项的谱密度的和),所以,为证明 μ_1 和 μ_2 等价只要证明 $\tilde{\mu}_2 \sim \tilde{\mu}_3$ 或 $\tilde{\mu}_j \sim \tilde{\mu}_1$, $j = 2, 3$ 就够了. 最后的关系对 $j = 2$ 和 $j = 3$ 证明是相同的. 我们用 $\tilde{F}_j(\lambda)$ 表示有谱密度 $\tilde{f}_j(\lambda)$ 的谱函数. 设 $\{g_k(\lambda)\}$ 是 $\mathscr{W}_T(\tilde{F}_1)$ 中的任意正交基. 令

$$\frac{\tilde{f}_j(\lambda) - \tilde{f}_1(\lambda)}{\tilde{f}_1(\lambda)} = h(\lambda),$$

那末根据引理得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int |g_k(\lambda)|^2 d\tilde{F}_1(\lambda) - \int |g_k(\lambda)|^2 d\tilde{F}_1(\lambda)\right]^2$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[\int |g_k(\lambda)|^2 h(\lambda)\tilde{f}_1(\lambda) d\lambda\right]^2$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\int |g_k(\lambda)|^2 h^2(\lambda)\tilde{f}_1(\lambda) d\lambda \cdot \int |g_k(\lambda)|^2 \tilde{f}_1(\lambda) d\lambda$$

$$= \int \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(\lambda)|^2 h^2(\lambda)\tilde{f}_1(\lambda) d\lambda \leqslant \frac{T+s}{\pi}\int h^2(\lambda) d\lambda$$

$$\leqslant \frac{T+s}{\pi}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \int\left[\frac{f_2(\lambda) - f_1(\lambda)}{f_1(\lambda)}\right]^2 d\lambda \leqslant c,$$

$\left(\text{因为 } |h(\lambda)| \leqslant \frac{c_2}{c_1}\left|\frac{f_2(\lambda) - f_1(\lambda)}{f_1(\lambda)}\right|\right)$. 设 V 是 $\mathscr{W}_T(\tilde{F}_1)$ 中的对称算子,满足

$$(Vg, g) = \int |g(\lambda)|^2 d\tilde{F}_j(\lambda).$$

我们证明, 对 $\mathscr{W}_T(\tilde{F})$ 中每一正交基 $\{g_k(\lambda)\}$, 式

$$\sum_{k=1}^{\infty}([V - I]g_k, g_k)^2 \leqslant c$$

成立. 由这式得知,算子 $V - I$ 是 Hilbert-Schmidt 算子.

设 g_k 是算子 $V - I$ 的特征函数序列, 而 α_k 是对应的特征值. 那末由于 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$, 所以函数

$$b(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k g_k(\alpha) g_k(\beta)$$

被确定且属于 $\mathscr{W}_T^2(\tilde{F}_1)$. 以 $\tilde{R}_k$ 表示谱密度为 $\tilde{f}_k$ 的过程的相关函数，以 $\phi_t(\lambda)$ 表示函数 $e^{i\lambda t}$, $|t| \leqslant T$ (它属于 $\mathscr{W}_T(\tilde{F}_1)$). 那末

$$\tilde{R}_j(t-s) - \tilde{R}_1(t-s) = \int e^{i\lambda(t-s)}(d\tilde{F}_j(\lambda) - d\tilde{F}_1(\lambda))$$

$$= ([V-I]\phi_t, \phi_s) = \sum_{k=1}^{\infty}([V-I]\phi_t, g_k)(g_k, \phi_s)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\phi_t, g_k)(g_k, \phi_s)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \int e^{it\alpha} \overline{g_k(\alpha)} d\tilde{F}_1(\alpha) \int e^{-is\beta} g_k(\beta) d\tilde{F}_1(\beta)$$

$$= \iint e^{it\alpha - is\beta} b(\alpha, \beta) d\tilde{F}_1(\alpha) d\tilde{F}_1(\beta).$$

为完成定理的证明余下只需利用定理 2.

注. 在满足

$$\int_{\Delta}\left[\frac{f_k(\lambda)}{|\varphi_0(\lambda)|^2}\right]^2 d\lambda < \infty, \quad k = 1, 2$$

的有限测度的集合 Δ 上，不等式 (9) 可以不满足. 事实上，在此情形可以引进测度 μ_1^*，它对应于有满足不等式 (9) 的谱密度 $f_1^*(\lambda)$:

$$f_1^*(\lambda) = \begin{cases} f_1(\lambda), & \lambda \bar{\in} \Delta, \\ c_1|\varphi_0(\lambda)|^2, & \lambda \in \Delta \end{cases}$$

的平稳 Gauss 过程. 那末

$$\int\left[\frac{f_1(\lambda) - f_1^*(\lambda)}{f_1^*(\lambda)}\right]^2 d\lambda < \infty, \quad \int\left[\frac{f_2(\lambda) - f_1^*(\lambda)}{f_1^*(\lambda)}\right]^2 d\lambda < \infty,$$

因此 $\mu_1 \sim \mu_1^*$, $\mu_2 \sim \mu_1^*$ 和 $\mu_1 \sim \mu_2$.

现来寻求在假设 $f_2(\lambda) \geqslant f_1(\lambda)$ 下测度 μ_1 和 μ_2 正交的充分条件. 首先考虑 $f_1(\lambda) = \dfrac{1}{1+\lambda^2}$ 的特殊情形. 设 μ_1 和 μ_2 等价，根据定理 2 可以断定存在函数 $b(\alpha, \beta)$，使

$$R_2(t-s)-R_1(t-s)=\iint e^{-i\alpha t+i\beta s}b(\alpha,\beta)\frac{d\alpha}{1+\alpha^2}\frac{d\beta}{1+\beta^2}$$

且

$$\iint|b(\alpha,\beta)|^2\frac{d\alpha}{1+\alpha^2}\frac{d\beta}{1+\beta^2}<\infty.$$

由于函数

$$b(\alpha,\beta)\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\frac{\beta}{1+\beta^2}$$

是平方可积，所以存在导数

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}[R_2(t-s)-R_1(t-s)]$$

且

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}[R_2(t-s)-R_1(t-s)]$$

$$=\iint e^{-i\alpha t+i\beta s}\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\frac{\beta}{1+\beta^2}b(\alpha,\beta)d\alpha d\beta.$$

令 $R(t)=R_2(t)-R_1(t)$，我们得

$$\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}[R''(t-s)]^2d+ds$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-2T}^{2T}[R''(t)]^2|2T-t|dt<\infty.$$

利用

$$\int_{-2T}^{2T}[R''(t)]^2|2T-t|dt=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2T(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)}\alpha^2[f_2(\alpha)-f_1(\alpha)]\beta^2[f_2(\beta)-f_1(\beta)]d\alpha d\beta,$$

以及等式

$$\frac{1}{f_1(\lambda)}=1+\lambda^2,$$

我们发现，当

$$f_1(\lambda)=\frac{1}{1+\lambda^2}\quad\text{时}$$

由测度的等价性得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 T(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)}\frac{f_2(\alpha)-f_1(\alpha)}{f_1(\alpha)}$$
$$\times\frac{f_2(\beta)-f_1(\beta)}{f_1(\beta)}d\alpha d\beta<\infty.$$

因此，如果对某个 $T>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 T(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)}\frac{f_2(\alpha)-f_1(\alpha)}{f_1(\alpha)}$$
$$\times\frac{f_2(\beta)-f_1(\alpha)}{f_1(\beta)}d\alpha d\beta=+\infty,$$

所以对应于 $[-T, T]$ 上的平稳 Gauss 过程的测度 μ_1 和 μ_2 在条件 $f_1(\lambda)=\frac{1}{1+\lambda^2}$ 之下是正交的。

上述全部论证仍然有效，只要对于某些 c_1 和 c_2 不等式

$$\frac{c_1}{1+\lambda^2}\leqslant f_1(\lambda)\leqslant\frac{c_2}{1+\lambda^2}$$

成立。

现设 $\varphi_0(\lambda)$ 是不高于 s 的指数型整解析函数，满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\lambda}{(1+\lambda^2)|\varphi_0(\lambda)|^2}<\infty.$$

设对于某些 c_1 和 c_2 谱密度 $f_1(\lambda)$ 满足不等式

$$\frac{c_1}{(1+\lambda^2)|\varphi_0(\lambda)|^2}\leqslant f_1(\lambda)\leqslant\frac{c_2}{(1+\lambda^2)|\varphi_0(\lambda)|^2}.$$

考察过程

$$\xi_j(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\varphi_0(\lambda)dy_j(\lambda),$$

其中 $y_j(\lambda)$ 由表示式 (1) 所定义。易见 $\varphi_0\in\mathscr{W}_s(F_1)$，因此取序列

$$\psi_n(\lambda)=\int_{-s}^{s}h_n(u)e^{i\lambda u}du,$$

它在 $\mathscr{W}_s(F_1)$ 中收敛于 $\varphi_0(\lambda)$。我们有

$$\xi_j(t)=\lim\int e^{i\lambda t}\int_{-s}^{s}e^{i\lambda u}h_n(u)dudy_j(\lambda)$$

$$= \lim \int_{-s}^{s} \xi_j(t+u) h_n(u)\, du.$$

因此过程 $\xi_j(t)$ 在 $[-T-s, T+s]$ 上的值确定了过程 $\tilde{\xi}_j(t)$ 在 $[-T, T]$ 上的值. 过程 $\tilde{\xi}_j(t)$ 的谱密度等于

$$\tilde{f}_j(\lambda) = f_j(\lambda) |\varphi_0(\lambda)|^2,$$

因此

$$\frac{c_1}{1+\lambda^2} \leqslant \tilde{f}_1(\lambda) \leqslant \frac{c_2}{1+\lambda^2}.$$

因为

$$\frac{f_2 - f_1}{f_1} = \frac{\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1}{\tilde{f}_1},$$

根据以上证明,如果

$$\iint \frac{\sin^2 T(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^2} \frac{f_2(\alpha)-f_1(\alpha)}{f_1(\alpha)} \frac{f_2(\beta)-f_1(\beta)}{f_1(\beta)}\, d\alpha d\beta = +\infty, \tag{10}$$

则测度 $\tilde{\mu}_1$ 和 $\tilde{\mu}_2$ 正交. 然而此时测度 μ_1 和 μ_2[1] 也是正交的. 最后指出,函数 $(1+i\lambda)\varphi_0(\lambda)$ 也是不高于 s 的指数型整函数. 因此我们证明了

定理 4 如果 μ_1 和 μ_2 是对应于 $[-T, T]$ 上有谱密度 $f_j(\lambda)$, $j=1,2$ 和均值为 0 的平稳 Gauss 过程,而且存在不高于 $s<T$ 的指数型整解析函数,使对某个 $c_1>0$ 和 $c_2>0$ 不等式

$$c_1 \leqslant |\varphi_0(\lambda)|^2 f_1(\lambda) \leqslant c_2$$

成立,则由关系式

$$\iint \frac{\sin^2 (T-s)(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^2} \frac{f_2(\alpha)-f_1(\alpha)}{f_1(\alpha)} \times \frac{f_2(\beta)-f_1(\beta)}{f_1(\beta)}\, d\alpha d\beta = +\infty$$

推得测度 μ_1 和 μ_2 正交.

注. 对每个 $\alpha>0$ 函数

---

1) 我们假定 μ_j 是对应于在区间 $[-T-s, T+s]$ 上的过程 $\xi_j(t)$.

$$\varphi_0(\lambda)=\int(|\theta|^\alpha+1)\frac{\sin^m\varepsilon(\theta-\lambda)}{(\theta-\lambda)^m}d\theta,$$

(其中 $m>\alpha+1$) 满足

$$\theta<\inf_\lambda\left(|\varphi_0(\lambda)|^2\frac{1}{1+|\lambda|^{2\alpha}}\right)$$

$$<\sup_\lambda\left(|\varphi_0(\lambda)|^2\frac{1}{1+|\lambda|^{2\alpha}}\right)<\infty.$$

函数 $\varphi_0(\lambda)$ 是不高于 $m\varepsilon$ 的指数型整函数. 在验证定理 3 和 4 的条件时可以利用这类函数.

推论 如果 $f_1(\lambda)$ 和 $f_2(\lambda)$ 是有理分式函数，那末测度 μ_1 和 μ_2 等价的充分必要条件是

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{f_2(\lambda)}{f_1(\lambda)}=1.$$

证. 如果 $f_1(\lambda)>0$，则 $\varphi_0(\lambda)$ 为上注所给出的形式时，无论是定理 3 还是定理 4 对于 $f_1(\lambda)$ 相应的条件成立. 如果

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{f_2(\lambda)}{f_1(\lambda)}=1,$$

则

$$\frac{f_2(\lambda)-f_1(\lambda)}{f_1(\lambda)}=O(\lambda^{-1})$$

并能利用定理 3. 如果这条件不满足，可应用定理 4. 如果 $f_1(\lambda)$ 为 0，则可用满足 $f_1^*(\lambda)>0$ 和

$$\lim_{\lambda\to\infty}f_1(\lambda)/f_1^*(\lambda)=1$$

的 $f_1^*(\lambda)$ 代替 $f_1(\lambda)$.

§6. 对应于 Марков 过程的测度的密度的一般性质

设在某个数集 T 上给出两个随机过程 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$，它们取值于某个带有可测集的 σ 代数 $\mathfrak{A}$ 的空间 $\mathscr{X}$ 上. 设 $\mathfrak{F}_\tau$ 是由 $(-\infty,\ \tau)\cap T$ 上的柱集所产生的 σ 代数，我们用 μ_i^τ 表示定义

在 σ 代数 $\mathfrak{F}_\tau$ 上对应于随机过程 $\xi_i(t)$ 的测度. 用 μ_i 表示 μ_i^∞. 设 $\mu_2 \ll \mu_1$ 和

$$\rho(\xi_1(\cdot)) = \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(\cdot)).$$

那末对所有 τ 也有 $\mu_2^\tau \ll \tau_1^\tau$, 而且

$$\rho_\tau(\xi_1(\cdot)) = \frac{d\mu_2^\tau}{d\mu_1^\tau}(\xi_1(\cdot)) = \mathbf{E}(\rho(\xi_1(\cdot))|\mathfrak{F}_\tau),$$

其中条件期望是在概率空间 $\{\mathscr{F}_T(\mathscr{X}), \mathfrak{F}_\infty, \mu_1\}$ 上取的, 其中 $\mathscr{F}_T(\mathscr{X})$ 是定义在 T 上取值于 $\mathscr{X}$ 的全体函数的空间. 易见,过程 $\{\rho_\tau, \mathfrak{F}_\tau\}$ 是鞅,满足条件 $\mathbf{E}\rho_\tau = 1$. 另一方面, 所有满足条件 $\mathbf{E}\rho_\tau = 1$ 的非负鞅,对某一对过程 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 来说,可表为 μ_2^τ 关于 μ_1^τ 的密度. 对任意过程这个结果均正确是不大有意义的. 如果假定 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 是更窄的一类过程中的过程时, 将会得到更有趣的结果. 在这一段我们将讨论两个过程都是 Марков 过程的情形.

设 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 是定义在区间 $[a, b)$ 上取值于可分距离空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{A})$ 的 Марков 过程 ($\mathfrak{A}$ 是 Borel 集的 σ 代数). 用 $\mathscr{F}_{[\alpha,\beta]}$ 表示定义在 $[\alpha, \beta]$ 上取值于 $\mathscr{X}$ 的全体函数的空间,而用 $\mathfrak{F}_{[\alpha,\beta]}$ 表示由柱集所产生的, $\mathscr{F}_{[\alpha,\beta]}$ 的子集的 σ 代数. 设 $\mu^i_{x,[\alpha,\beta]}(A)$ 是定义在 $\mathfrak{F}_{[\alpha,\beta]}$ 上由过程 $\xi_i(t)$ 在条件 $\xi_i(\alpha) = x$ 下转移概率所构造成的测度. 由过程的 Марков 性质得知,对形为 $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ (A_1 和 A_3 分别是 $\mathfrak{F}_{[a,c]}$ 和 $\mathfrak{F}_{[c,b]}$ 中的柱集, A_2 是 $\mathfrak{F}_{[c]}$ 中的柱集,即形为$\{x(\cdot): x(c) \in E\}$ 的集合)的柱集,式

$$\mu^i_{[a,b]}(A) = \int_{A_2} \mu^i_{[a,c]}(A_1;\ dy)\mu^i_{y,[cb]}(A), \tag{1}$$

成立,其中 $\mu^i_{[a,c]}$ 是对应于 $[a, c]$ 上的 Марков 过程 $\xi_i(t)$ 的测度 (是一个 $\mathscr{F}_{[a,c]}$ 上的测度), 而 $\mu^i_{[a,c]}(A_1;\ A_2)$ 是由等式

$$\mu^i_{[a,c]}(A_1;\ A_2) = \mu^i_{[a,c]}(A_1 \cap A_2)$$

所定义的测度 (它是一个关于 A_2 在 $\mathfrak{F}_{[c]}$ 上的测度). 我们指出, $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ 是 $\mathfrak{F}_{[a,b]}$ 中的柱集,它包含所有这样的函数 $x(\cdot)$; $x(\cdot)$ 限制在 $[a, c]$, $[c, c]$ 和 $[c, b]$ 时, 分别属于 A_1, A_2 和 A_3. 类

似地定义 $A_1 \cap A_2$. 现来建立一个辅助结果. 我们记得，如果存在一集合序列 $A_1, A_2, \cdots$ 使得 σ 代数 $\mathfrak{C}$ 与包含所有集合 A_k 的最小 σ 代数相一致，则称 $\mathfrak{C}$ 为可分的.

引理 设 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 和 $(\mathscr{Y}, \mathfrak{C})$ 是两个可测空间，μ_1 和 μ_2 是 $\mathscr{X}$ 上的概率测度，和对每个 $x \in \mathscr{X}$ 给出 $\mathfrak{C}$ 上的概率测度 $\nu_1(x, C)$ 和 $\nu_2(x, C)$，使对每个 $C \in \mathfrak{C}$，$\nu_k(x, C)$ 是 $\mathfrak{B}$ 可测. 利用等式

$$\pi_k(B \times C) = \int_B \mu_k(dx)\nu_k(x, C),\ B \in \mathfrak{B},\ C \in \mathfrak{C},$$

定义 $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ 上的测度 π_k. 如果 $\pi_2 \ll \pi_1$ 及存在可分 σ 代数 $\mathfrak{C}_0$ 使按测度 μ_1 对几乎所有 x，它按测度 $\nu_1(x, c)$ 的完备化包含 $\mathfrak{C}$，那末 $\mu_2 \ll \mu_1$ 且按测度 μ_2 对几乎所有 x 有 $\nu_2(x, \cdot) \ll \nu_1(x, \cdot)$.

证. 令

$$\rho(x, y) = \frac{d\pi_2}{d\pi_1}(x, y).$$

那末对所有 $B \in \mathfrak{B}$ 和 $C \in \mathfrak{C}$，我们有

$$\begin{aligned}\pi_2(B \times C) &= \int_B \left[\int_C \rho(x, y)\nu_1(x, dy)\right]\mu_1(dx) \\ &= \int_B \int_C \frac{\rho(x, y)}{\int_{\mathscr{Y}} \rho(x, y')\nu_1(x, dy')} y_1(x, dy) \\ &\quad \times \left[\int_{\mathscr{Y}} \rho(x, y')\nu_1(x, dy')\right]\mu_1(dx).\end{aligned} \tag{2}$$

取 $C = \mathscr{Y}$，我们得

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x) = \int_{\mathscr{Y}} \rho(x, y)\nu_1(x, dy). \tag{3}$$

利用 (2) 和 (3)，可得

$$\begin{aligned}\pi_2(B \times C) &= \int_B \nu_2(x, C)\mu_2(dx) \\ &= \int_B \int_C \tilde{\rho}(x, y)\nu_1(x, dy)\mu_2(dx),\end{aligned}$$

其中

$$\tilde{\rho}(x, y) = \rho(x, y)\left[\int_{\mathscr{Y}} \rho(x, y')\nu_1(x, dy')\right]^{-1}. \tag{4}$$

因此，按测度 μ_2 对几乎所有 x，对每个 C 式

$$\nu_2(x, C) = \int_C \tilde{\rho}(x, y)\nu_1(x, dy) \tag{5}$$

成立.

设 C_k 是生成 $\mathfrak{C}_0$ 的集合序列. 那末可找到集合 $B^* \subset \mathfrak{B}$，使 $\mu_2(B^*) = 1$ 且对 $x \in B^*$ 及每个 C_k，

$$\nu_2(x, C_k) = \int_{C_k} \tilde{\rho}(x, y)\nu_1(x, dy)$$

成立. 但此时对所有 $C \in \mathfrak{C}_0$ 等式 (5) 也成立，因此，这等式对 $\mathfrak{C}_0$ 关于测度 $\nu_1(x, \cdot)$ 的完备化中的每个 C 也成立. 引理得证.

我们指出，对取值于可分空间的随机连续过程来说，总可以找到可分 σ 代数 $\mathfrak{F}^0$（在过程自变量的定义域的可数处处稠密集上的柱集所产生的 σ 代数就是），使得 $\mathfrak{F}^0$ 按对应于过程的测度的完备化包含 $\mathfrak{F}$. 应用已证明的引理于由等式 (1) 表示的测度 $\mu^i_{[a,b]}$，我们得知，按由 $\xi_2(c)$ 的分布所决定的测度对几乎所有 x，有

$$\mu^2_{x,[c,b]} \ll \mu^1_{x,[c,b]}.$$

用 $\rho_{[a,c]}$ 表示测度 $\mu^2_{[a,c]}$ 关于 $\mu^1_{[a,c]}$ 的密度，如果在这个密度的自变量中用 $\xi_1(t)$ 来代替（我们假定，所有的过程 $\xi_i(t)$ 是定义在某个固定的概率空间 $\{\Omega, \mathfrak{B}, \mathbf{P}\}$ 上）. 类似地，用 $\rho_{y,[c,b]}$ 表示（有同样的自变量）测度 $\mu^2_{y,[c,b]}$ 关于 $\mu^1_{y,[c,b]}$ 的密度. 那末由公式 (1)，引理和式 (4) 得式

$$\rho_{[a,b]} = \rho_{[a,c]}\rho_{\xi_1(c),[cb]}. \tag{6}$$

用 $\mathfrak{B}_{[\alpha,\beta]}$ 表示概率空间 $\{\Omega, \mathfrak{B}, \mathbf{P}\}$ 中当 $t \in [\alpha, \beta]$ 时变量 $\xi_1(t)$ 所生成的代数. 变量 $\rho_{[a,c]}$ 和 $\rho_{\xi_1(c),[c,b]}$ 分别对 $\mathfrak{B}_{[a,c]}$ 和 $\mathfrak{B}_{[c,b]}$ 可测. 取区间 $[a, t]$ 的任意分割：

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = t.$$

由式 (6) 得

$$\rho_{[a,t]} = \rho_{[t_0,t_1]} \prod_{j=1}^{k-1} \rho_{\xi(t_j),[t_j,t_{j+1}]}. \tag{7}$$

我们利用式 (6) 证明如下定理：

定理 1 如果 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 是随机连续 Марков 过程，那末

联合过程 $\{\xi_1(t);\ \rho_{[a,t]}\}$ 也是 Марков 过程。

证．只要证明对两个变元 $x\in\mathscr{X}$ 和 $s\in\mathscr{R}^1$ 的全体有界连续函数 $f(x,s)$，当 $a<t_1<t$ 时，式

$$\mathbf{E}(f(\xi_1(t),\rho_{[a,t]})|\mathfrak{B}_{[a,t_1]})=\mathbf{E}(f(\xi_1(t),\rho_{[a,t]})|\xi_1(t_1),\rho_{[a,t_1]}). \tag{8}$$

成立就够了，

由于 $\rho_{[a,t]}=\rho_{[a,t_1]}\rho_{\xi_1(t_1),[t_1,t]}$，所以

$$f(\xi_1(t),\rho_{[a,t]})=\varphi(\xi_1(t),\rho_{[a,t_1]},\rho_{\xi_1(t_1),[t_1,t]}),$$

其中 $\varphi(x,s_1,s_2)$ 是 $\mathscr{X}\times\mathscr{R}^1\times\mathscr{R}^1$ 上的有界连续函数．先假设

$$\varphi(x,s_1,s_2)=\varphi(x,s_2)\psi(s_1),$$

那末利用 $\varphi(\xi_1(t),\rho_{\xi_1(t),[t_1,t]})$ 关于 $\mathfrak{B}_{[t_1,t]}$ 的可测性及 $\xi_1(t)$ 的 Марков 性质，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}(\varphi(\xi_1(t),\rho_{\xi_1(t_1),[t_1,t]})\psi(\rho_{[a,t_1]})|\mathfrak{B}_{[a,t_1]})\\
&=\psi(\rho_{[a,t_1]})\mathbf{E}(\varphi(\xi_1(t),\rho_{\xi_1(t_1),[t_1,t]})|\mathfrak{B}_{[a,t_1]})\\
&=\psi(\rho_{[a,t_1]})\mathbf{E}(\varphi(\xi_1(t),\rho_{\xi_1(t_1),[t_1,t]})|\xi_1(t_1))\\
&=\mathbf{E}(\psi(\rho_{[a,t_1]})\varphi(\xi_1(t),\rho_{\xi_1(t_1),[t_1,t]})|\xi_1(t_1),\rho_{[a,t_1]}).
\end{aligned}$$

因为式 (8) 的两边关于 f 是线性的，而形为

$$\Sigma c_k\varphi_k(x,s_2)\psi_k(s_1)$$

的线性组合可以逼近任意连续函数，所以我们证明了式 (8)，定理得证．

注．设对所有 $t\in[a,b]$ 和区间 $[a,t]$ 的分割公式 (7) 成立，其中 $\rho_{[a,t]}$ 和 $\rho_{\xi_1(t_j),[t_j,t_{j+1}]}$ 是分别关于 $\mathfrak{B}_{[a,t]}$ 和 $\mathfrak{B}_{[t_j,t_{j+1}]}$ 可测的变量．那末，如果 $\xi_1(t)$ 是 Марков 过程，则过程 $\xi_2(t)$ 也是，而且过程 $\xi_2(t)$ 的转移概率由等式

$$P^{(2)}(t_1,x,t_2,A)=\mathbf{E}(\chi_A(\xi_1(t_2))\rho_{\xi_1(t_1),[t_1,t_2]}|\xi_1(t_1))_{\xi_1(t_1)=x}$$

所确定．

事实上，对 $\mathfrak{A}$ 中任意一组集合 $A_1,\cdots,A_k$ 有

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\chi_{A_1}(\xi_2(t_1))\cdots\chi_{A_k}(\xi_2(t_k))\\
&=\mathbf{E}\chi_{A_1}(\xi_1(t_1))\rho_{[a,t_1]}\prod_{j=2}^{k}\chi_{A_j}(\xi_1(t_j))\rho_{\xi_1}(t_{j-1}),[t_{j-1},t_j]
\end{aligned}$$

$$= \mathbf{E}\chi_{A_1}(\xi_1(t_1))\rho_{[a,t_1]}\prod_{j=2}^{k-1}\chi_{A_j}(\xi_1(t_j))\rho_{\xi_1(t_{j-1}),[t_{j-1},t_j]}$$

$$\times \mathbf{E}(\chi_{A_k}(\xi_1(t_k))\rho_{\xi_1(t_{k-1}),[t_{k-1},t_k]}|\mathfrak{B}_{[a,t_{k-1}]})$$

$$= \mathbf{E}\chi_{A_1}(\xi_1(t_1))\rho_{[a,t_1]}\prod_{j=2}^{k-1}\chi_{A_j}(\xi_1(t_1))\rho_{\xi_1(t_{j-1}),[t_{j-1},t_j]}$$

$$\times P^{(2)}(t_{k-1}, \xi_1(t_{k-1}), t_k, A_k).$$

由此式得所要求的结论.

现在考虑按照过程 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 的转移概率构造函数 $\rho_{[a,t]}$. 同时还得到对应这些过程的测度的绝对连续性的某些充分条件. 由引理得到, μ_2 关于 μ_1 的绝对连续性蕴涵, 对 $\xi_2(t)$ 的分布所决定的测度和几乎所有 x, 过程 $\xi_2(t)$ 的转移概率 $P^{(2)}(t, x, s, A)$ (作为 A 的函数) 关于过程 $\xi_1(t)$ 的转移概率 $P^1(t, x, s, A)$ 的绝对连续性. 令

$$\rho(t, x, s, y) = \frac{dP^{(2)}(t, x, s, \cdot)}{dP^{(1)}(t, x, s, \cdot)}(y) \tag{9}$$

(如果对于给定的x, $P^{(2)}$ 关于 $P^{(1)}$ 不绝对连续, 那末 ρ 表示 $P^{(2)}$ 的绝对连续分量关于 $P^{(1)}$ 的导数). 其次设 $\rho_a(y)$ 表示 $\xi_2(a)$ 的分布关于 $\xi_1(a)$ 的分布的密度. 如果 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ 是 $[a, b]$ 的某个分割,则

$$\rho_a(\xi_1(a))\prod_{k=0}^{n-1}\rho(t_k, \xi_1(t_k), t_{k+1}, \xi_1(t_{k+1}))$$

与测度 $\mu_2^{(n)}$ 关于 $\mu_1^{(n)}$ 的密度相同, 其中 $\mu_i^{(n)}$ 是测度 μ_i 在 σ 代数 $\mathfrak{F}_{\Lambda_n}$ 上的收缩, 而 Λ_n 是变元 t 的有限集: $\Lambda_n = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$. 如果 $\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1}$, 则存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\rho^n = \lim_{n\to\infty}\frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(\xi_1(\cdot))$$

(以概率为 1). 如果

$$\Lambda = \bigcup_n \Lambda_n$$

在 $[a, b]$ 上处处稠密,而过程 $\xi_1(t)$ 随机连续,那末 $\mathfrak{F}_\Lambda$ 按测度 μ_1 的

完备化包含 $\mathfrak{F}_{[a,b]}$ 且因此 $\lim_{n\to\infty}\rho^n$ 就是 $\rho_{[a,b]}$。

定理 2 设 $P^{(i)}(t, x, s, A), i=1, 2$, 分别是定义在 $[a, b]$ 上的 Марков 过程 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 的转移概率。 如果下面的条件成立:

a) $\xi_2(a)$ 的分布关于 $\xi_1(a)$ 的有密度为 $\rho_a(x)$ 的分布是绝对连续的;

b) 对所有 $x\in\mathscr{X}$, $a\leqslant t<s\leqslant b$, 测度 $P^{(2)}(t, x, s, \cdot)$ 关于有密度为 $\rho(t, x, s, y)$ 的测度 $P^{(1)}(t, s, s, \cdot)$ 是绝对连续的;

c) 存在常数 c, 使

$$\int \log\rho(t, x, s, y)P^{(2)}(t, x, s, dy)\leqslant c(s-t),$$

则测度 μ_2 关于 μ_1 绝对连续且

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(\cdot))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\rho_a(\xi_1(a))\prod_{k=0}^{n-1}\rho(t_{nk}, \xi_1(t_{nk}), t_{nk+1}, \xi_1(t_{nk+1})), \quad (10)$$

其中

$$a=t_{n0}<\cdots<t_{nn}=b$$

和集合

$$\Lambda_n=\{t_{nk}, k=0, \cdots, n\}$$

满足条件:

$$\Lambda_n\subset\Lambda_{n+1} \quad 且 \quad \bigcup_n \Lambda_n$$

在 $[a, b]$ 中处处稠密.

证. 引入过程 $\xi_3(t)$, 它的转移概率与过程 $\xi_2(t)$ 的转移概率相同, 而 $\xi_3(a)$ 的分布与 $\xi_1(a)$ 的分布相同. 设 μ_3 是对应于过程 $\xi_3(t)$ 的测度, 而 $\mu_i^{(n)}$ 如上所述是测度 μ_i 在 σ 代数 $\mathfrak{F}_{\Lambda_n}$ 上的收缩, 如果 $\Lambda_n=\{t_{nk}, k=0, \cdots, n\}$. 那末,易见

$$\frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_3^{(n)}}(\xi_n(\cdot))=\rho_a(\xi_3(a)),$$

$$\frac{d\mu_3^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(\xi_1(\cdot))=\prod_{k=0}^{n-1}\rho(t_{nk}, \xi_1(t_{nk}), t_{nk+1}, \xi_1(t_{nk+1})).$$

显然
$$\lim_{n\to\infty}\frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_3^{(n)}}(\xi_3(a))=\rho_a(\xi_3(a)).$$
并且以概率为 1 存在极限
$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n-1}\rho(t_{nk},\xi_1(t_{nk}),t_{nk+1},\xi_1(t_{nk+1})).$$
用 ρ' 表示这极限. 为要 $\mu_3\ll\mu_1$ 成立，只要 $\mathbf{E}\rho'=1$ 成立. 为此由于 § 1 定理 2 的注，只要表示式
$$I_n=\mathbf{E}\prod_{k=0}^{n-1}\rho(t_{nk},\xi_1(t_{nk}),t_{nk+1},\xi_1(t_{nk+1}))$$
$$\times\log\prod_{k=0}^{n-1}\rho(t_{nk},\xi_1(t_{nk}),t_{nk+1},\xi_1(t_{nk+1}))$$
有界就够了. 利用等式
$$\mathbf{E}(\rho(t_{nk},\xi_1(t_{nk}),t_{nk+1},\xi_1(t_{nk+1}))|\xi_1(t_{nk}))=1,$$
我们得
$$I_n=\mathbf{E}\prod_{k=0}^{n-1}\rho(t_{nk},\xi_1(t_{nk}),t_{nk+1},\xi_1(t_{nk+1}))$$
$$\times\sum_{k=0}^{n-1}\log\rho(t_{nk},\xi_1(t_{nk}),t_{nk+1},\xi_1(t_{nk+1}))$$
$$=\mathbf{E}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{l-1}\rho(t_{nk},\xi_1(t_{nk}),t_{nk+1},\xi_1(t_{nk+1}))$$
$$\times\int\log\rho(t_{nl},\xi_1(t_{nl}),t_{nl+1},y)P^{(2)}(t_{nl},\xi_1$$
$$\times(t_{nl}),t_{nl+1},dy)\leqslant c\sum_{l=0}^{n-1}(t_{nl+1}-t_{nl})$$
$$=c(b-a).$$
于是，$\mu_3\ll\mu_1$，$\mu_2\ll\mu_3$. 因此，$\mu_2\ll\mu_1$.

公式 (10) 是式
$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}=\frac{d\mu_2}{d\mu_3}\frac{d\mu_3}{d\mu_1}$$
的推论. 定理得证.

现来考察构造 Марков 过程 $\xi_2(t)$ 的问题，使它对应的测度 μ_2 关于给定的 Марков 过程 $\xi_1(t)$ 对应的测度 μ_1 是绝对连续。

定理 3 设 $a=t_{n0}<\cdots<t_{nn}=b$ 是区间 $[a, b]$ 的分割序列，使得集合 $\Lambda_n=\{t_{nk}, k=0, \cdots, n\}$ 构成递增序列且 $\bigcup_n \Lambda_n$ 在 $[a, b]$ 处处稠密。设对每个 n 给出 x, y 的可测函数 $\alpha_n(t, x, s, y)$, $x, y\in\mathscr{X}$, $a\leqslant t<s\leqslant b$, 满足条件:

1) 在依概率收敛意义下存在极限

$$\eta=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_n(t_{nk}, \xi_1(t_{nk}), t_{nk+1}, \xi_1(t_{nk+1}));$$

2) 按 x 一致地有

$$\int e^{\alpha_n(t,x,s,y)}\alpha_n(t, x, s, y)P^{(1)}(t, x, s, dy)=O(s-t);$$

3) 对每个 n, k, x

$$\int e^{\alpha_n(t_{nk},x,t_{nk+1},y)}P^{(1)}(t_{nk}, x, t_{nk+1}, dy)=1.$$

那末在 $\mathfrak{F}_{[a,b]}$ 上由等式

$$\mu_2(A)=\mathbf{E}\chi_A(\xi_1(\cdot))e^{\eta}$$

定义的测度 μ_2 在 $[a, b]$ 上对应某一 Марков 过程。

证. 首先证明，测度 μ_2 是概率测度. 即 $\mathbf{E}e^{\eta}=1$. 设

$$\eta_n=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_n(t_{nk}, \xi_1(t_{nk}), t_{nk+1}, \xi_1(t_{nk+1})).$$

那末由定理条件 3) 得

$$\mathbf{E}e^{\eta_n}=\int\mathbf{P}\{\xi_1(a)\in dx_0\}\prod_{k=0}^{n-1}\int e^{\alpha_n(t_{nk},x_k,t_{nk+1},x_{k+1})}$$

$$\times\mathbf{P}^{(1)}(t_{nk}, x_k, t_{nk+1}, dx_{k+1})=1.$$

另一方面，由于条件 2),

$$\mathbf{E}e^{\eta_n}\ln e^{\eta_n}=\mathbf{E}e^{\eta_n}\eta_n$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int\mathbf{P}\{\xi_1(a)\in dx_0\}\prod_{j=0}^{k-1}\int e^{\alpha_n(t_{nj},x_j,t_{nj+1},x_{j+1})}$$

$$\times P^{(1)}(t_{nj}, x_j, t_{nj+1}dx_{j+1})\int e^{\alpha_n(t_{nk},x_k,t_{nk+1},dx_{k+1})}.$$

因此，$\mathbf{E}e^{\eta_n}\ln e^{\eta_n}$ 有界，这就是说，e^{η_n} 关于 n 一致可积且在式 $\mathbf{E}e^{\eta_n}=1$ 中可以将极限号搬入数学期望内．为证明测度 μ_2 对应于 Марков 过程，我们考虑函数

$$\eta(t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{t_{nk}<t}\alpha_n(t_{nk},\xi_1(t_{nk}),t_{nk+1},\xi_1(t_{nk+1}))$$

（了解为依概率收敛意义下的极限）．现证明对所有 $t\in[a,b]$，这极限存在且等于

$$\ln\mathbf{E}(e^{\eta}|\mathfrak{B}_{[0,t]})=\lim_{n\to\infty}\ln\mathbf{E}(e^{\eta_n}|\mathfrak{B}_{[0,t]})$$

（由于 e^{η_n} 一致可积，极限可以取进数学期望内）．

当 $t\in\bigcup\Lambda_n$ 时，有等式

$$\eta_n(t)=\sum_{t_{nk}<t}\alpha_n(t_{nk},\xi_1(t_{nk}),t_{nk+1},\xi_1(t_{nk+1}))$$
$$=\ln\mathbf{E}(e^{\eta_n}|\mathfrak{B}_{[0,t]}).$$

因此当 $t\in\bigcup\limits_n\Lambda_n$ 时，$\lim\eta_n$ 存在，但如果 $t_{nj}<t<t_{nj+1}$，则

$$\ln\mathbf{E}(e^{\eta_n}|\mathfrak{B}_{[0,t]})-\sum_{t_{nk}<t}\alpha_n(t_{nk},\xi_1(t_{nk}),t_{nk+1},\xi_1(t_{nk+1}))$$
$$=\ln\mathbf{E}(e^{\alpha_n(t_{nj},\xi_1(t_{nj}),t_{nj+1},\xi_1(t_{nj+1}))}|\mathfrak{B}_{[0,t]}).$$

由条件 2) 和 3) 得，当 $n\to\infty$ 时，对 j 一致地有

$$\mathbf{E}e^{\alpha_n(t_{nj},\xi_1(t_{nj}),t_{nj+1},\xi_1(t_{nj+1}))}\alpha_n(t_{nj},\xi_1(t_{nj}),t_{nj+1},\xi_1(t_{nj+1}))\to 0.$$

利用 $\exp\{\alpha_n(t_{nj},\xi_1(t_{nj}),t_{nj+1},\xi_1(t_{nj+1}))\}$ 关于 j 一致可积以及依概率收敛于 1 可得，在依概率收敛意义下

$$\ln\mathbf{E}(e^{\alpha_n(t_{nj},\xi_1(t_{nj}),t_{nj+1},\xi_1(t_{nj+1}))}|\mathfrak{B}_{[a,t]})\to 0.$$

$\eta(t)$ 的存在性得证．设 $a<c<b$ 和 $\rho_{[a,c]}=\exp\{\eta(c)\}$，$\rho_{[c,b]}=\exp\{\eta(b)-\eta(c)\}$．显然，$\rho_{[c,d]}$ 关于 $\mathfrak{B}_{[c,d]}$ 可测．借助于定理 1 的注，我们得证定理．

现考虑 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 是定义在 $[a,b]$ 上，$\xi_i(a)=0$，有独立增量的随机连续过程这一特殊情形，设区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，$\bar{\mu}^{(i)}_{[\alpha,\beta]}$ 表示 $t\in[\alpha,\beta]$ 时对应过程 $\xi_i(t)-\xi_i(\alpha)$ 的测度．那末，$\mu_2\ll\mu_1$ 推得 $\bar{\mu}^{(2)}_{[\alpha,\beta]}\ll\bar{\mu}^{(1)}_{[\alpha,\beta]}$．设 $\mathfrak{B}_{[\alpha,\beta]}$ 表示由变量 $\xi_1(t)-\xi_1(\alpha)$，$t\in[\alpha,\beta]$，所产生的 σ 代数，变量

$$\frac{d\bar{\mu}^{(2)}_{[\alpha,\beta]}}{d\bar{\mu}^{(1)}_{[\alpha,\beta]}}(\xi_1(\cdot))$$

是 $\mathfrak{B}_{[\alpha,\beta]}$ 可测，取区间 $[a, b]$ 的任意分割：$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. 考虑可测空间 $(\mathscr{F}_{[t_k,t_{k+1}]}, \mathfrak{F}_{[t_k,t_{k+1}]})$ 的乘积和在其上的乘积测度

$$\prod_{k=0}^{n-1} \bar{\mu}^{(i)}_{[t_k,t_{k+1}]}.$$

由 $\xi_i(t)$ 是独立增量过程得知，按公式

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} x_k(t_k) + x_{m+1}(t), \quad t_m \leqslant t \leqslant t_{m+1},$$

$$x(\cdot) \in \mathscr{F}_{[a,b]}, \quad x_k(\cdot) \in \mathscr{F}_{[t_k,t_{k+1}]},$$

将空间 $(\mathscr{F}_{[t_k,t_{k+1}]}, \mathfrak{F}_{[t_k,t_{k+1}]})$ 的乘积映入 $(\mathscr{F}_{[a,b]}, \mathfrak{F}_{[a,b]})$ 的双方单值可测映射将这乘积测度映为测度 μ_i. 因此

$$\frac{d\mu^{(2)}}{d\mu^{(1)}}(\xi_1(\cdot)) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{d\bar{\mu}^{(2)}_{[t_k,t_{k+1}]}}{d\bar{\mu}^{(1)}_{[t_k,t_{k+1}]}}(\xi_1(\cdot)).$$

上式中右边的因子是相互独立的. 设测度 μ_1 和 μ_2 等价. 那末这密度是正的且最后的乘积可取对数. 因此得

定理 4 为使

$$\rho_{[a,t]} = \frac{d\mu^{(2)}_{[a,t]}}{d\mu^{(1)}_{[a,t]}}(\xi_1(\cdot))$$

是对应于定义在 $[a, t]$ 上的独立增量过程的等价测度的密度的充分必要条件是，联合过程 $\{\xi_1(t), \ln\rho_{[a,t]}\}$ 是独立增量过程，$\rho_{[a,t]}$ 是 $\mathfrak{B}_{[a,t]}$ 可测和等式 $\mathbf{E}\rho_{[a,t]} = 1$ 成立.

第八章　Hilbert 空间上的可测函数

§1. Hilbert 空间上的可测线性泛函和算子*)

我们考虑定义有测度 μ 的可测 Hilbert 空间 $(\mathscr{H},\mathfrak{B})$. 定义在 $\mathscr{H}$ 上的所有连续线性泛函 $l(x)$ 显然是 $\mathfrak{B}$ 可测的. 我们已经知道，如果对所有 x，连续线性泛函序列 $l_n(x)$ 收敛于某极限 $l(x)$，则这极限也是 $\mathscr{H}$ 上的连续线性泛函. 然而，如果要求 $l_n(x)$ 不是对所有 x 有极限，而仅在 $\mu(D)=1$ 的集合 D 上有极限，情况会有所不同. 将这样的极限函数称为 $\mathfrak{B}$ 可测线性泛函是自然的. 作为可测函数的极限，它们也是 $\mathfrak{B}$ 可测的. 由关系式

$$\lim_{n\to\infty} l_n(\alpha x+\beta y)=\alpha\lim_{n\to\infty} l_n(x)+\beta\lim_{n\to\infty} l_n(y)$$

得，泛函 $l(x)$ 的定义域 D_l（假定它在极限存在的地方有定义）是一线性流形且 $l(x)$ 在 D_l 上是线性(可加和齐次)泛函. 今后将考虑对空间 $\mathscr{H}$ 的所有特征子空间 L 有 $\mu(L)=0$ 的非退化测度. 由于 $\mu(D_l)=1$，所以 D_l 在 $\mathscr{H}$ 中稠密. 因此，如果 $l(x)$ 是上面所说的意义下的可测泛函，那末：1) 它定义在 $\mathfrak{B}$ 可测线性流形 D_l 上，且 $\mu(D_l)=1$；2) $l(x)$ 是 $\mathfrak{B}$ 可测函数；3) $l(x)$ 在 D_l 上是线性的. 为要 $l(x)$ 是 μ- 可测，这些条件也是充分的. 这可从下定理得到.

定理 1　如果函数 $l(x)$ 满足条件 1)—3)，那末存在连续泛函序列 $l_n(x)$，使得

$$l(x)=\lim_{n\to\infty} l_n(x)(\bmod\mu).$$

---

*) 本节的定理 1 和定理 2 在本书第三卷英译本 1979 年版的附录中进行了改正. 现本节正文仍按原著译出，而英译者对本节的内容的改正将附录于本节之后，供读者参考. ——译注

证．我们构造连续泛函序列 $l_n(x)$，使得它依测度 μ 收敛于 $l(x)$．因为从这序列可选取按测度 μ 几乎处处收敛的子序列，这就是定理所要证明的．设 $S_c=\{x:|l(x)|<c\}$．因为

$$\lim_{c\to\infty}\mu(D_l-S_c)=0,$$

所以对每个 $\varepsilon>0$ 可找到 c 和紧集 $K\subset S_c$，使得 $\mu(D_l-K)<\varepsilon$．不失一般性，可以认为 K 是凸的和对称的，因为 S_c 就是这样的集合．我们用 $\mathscr{L}$ 表示集合 K 的线性包络且在 $\mathscr{L}$ 中引进范数使得 K 变成单位球．选取 K 使得 $\mathscr{L}$ 在此范数（为区别于 $\mathscr{X}$ 的范数，将用 $|\cdot|_k$ 表示）下是完备可分的．泛函 $l(x)$ 是在 $\mathscr{L}$ 上的有界线性泛函，于是它在范数 $|\cdot|_k$ 下连续．由于 K 的 $\mathfrak{B}$ 可测性，我们得 $\mathscr{L}$ 的全体 Borel 集为 $\mathfrak{B}$ 可测．用 $\mathfrak{B}'$ 表示 $\mathscr{L}$ 中的 Borel 集的 σ 代数，用 μ' 表示测度 μ 在 $\mathfrak{B}'$ 上的收缩．可以在 $\mathscr{L}$ 中找到紧集 K_1 使 $K_1\subset K$ 和 $\mu(K-K_1)<\varepsilon$．现证明 $l(x)$ 在 K_1 上是通常意义下的连续函数．设 $x_n\to x_0$ 和 $x_n\in K_1$．那末，这序列在 $\mathscr{L}$ 中是紧的且有唯一极限点 x_0．因此在 $\mathscr{L}$ 中 $x_n\to x_0$，从而 $l(x_n)\to l(x_0)$．由 $l(x)$ 在紧集 K_1 上的连续性得一致连续性，因此对所有 $\rho>0$ 可找到 $\delta>0$，使当 $x,y\in K_1$ 时由 $|x-y|<\delta$ 得不等式 $|l(x)-l(y)|<\rho$．设 N 是有限维子空间，使 $N\cap K_1$ 构成 K_1 中的 ε 网．用 $l_N(x)$ 表示 $l(x)$ 从 N（在整个有限维子空间 $N\subset\mathscr{L}$ 上 $l(x)$ 连续）到整个 $\mathscr{X}$ 不改变范数的扩张（按 Hahn-Banach 定理，这样的扩张存在）．显然，这样的扩张保持连续的模数，就是说，当 $|x-y|<\delta$ 时 $|l_N(x)-l_N(y)|<\rho$．因此对 $x\in K_1$

$$|l_N(x)-l(x)|\leqslant|l_N(x)-l_N(x')|+|l(x)-l(x')|,$$

其中 $x'\in N$ 满足 $|x-x'|<\delta$，于是当 $x\in K_1$ 时，

$$|l_N(x)-l(x)|\leqslant 2\rho.$$

于是，对给定 $\varepsilon>0$ 和 $\rho>0$ 我们构造出连续线性泛函使

$$\mu(\{x:|l_N(x)-l(x)|>2\rho\})<2\varepsilon.$$

定理得证．

推论 如果 $l(x)$ 是可测泛函且 $\mathscr{L}_n$ 是有限维子空间序列，使得 $\mathscr{L}_n\in D_l$ 且 $\bigcup\mathscr{L}_n$ 在 $\mathscr{X}$ 中稠密，而 P_n 是 $\mathscr{L}_n$ 上的投影算子，

则 $l(P_n x)$ 依测度 μ 收敛于 $l(x)$.

这可从如下事实得到. 可以从序列 $\mathscr{L}_n$ 中选取子空间作为上定理证明中所说的子空间 N，而 $l(P_n x)$ 的不改变范数的扩张可以构造出.

为构造出全体 μ 可测泛函的空间，利用测度 μ 的特征泛函是方便的. 设连续泛函序列 (z_n, x) 依测度 μ 收敛于某个可测泛函 $l(x)$. 那末对所有实数 t

$$\lim_{n,m\to\infty} \exp\{it(z_n - z_m, x)\} = 1.$$

因此，

$$\lim_{n,m\to\infty} \varphi(t(z_n - z_m)) = \lim_{n,m\to\infty} \int \exp\{it(z_n - z_m, x)\} \times \mu(dx) = 1. \tag{1}$$

设

$$k(z) = \int (1 - \varphi(tz)) \frac{1}{1+t^2} dt.$$

那末序列 (z_n, x) 依测度 μ 收敛意义下极限存在的充分必要条件是

$$\lim_{n,m\to\infty} k(z_n - z_m) = 0.$$

这条件的必要性由 (1) 和积分号下取极限的定理得到. 为证明充分性，注意

$$k(z) = \int\left[\int (1 - e^{it(z,x)}) \frac{1}{1+t^2} dt\right] \mu(dx)$$

$$= \pi \int (1 - e^{-|(z,x)|}) \mu(dx).$$

因此对任一 $\varepsilon > 0$

$$\mu(\{x: |(z_n - z_m, x)| > \varepsilon\}) \leqslant \frac{1}{\pi} k(z_n - z_m)(1 - e^{-\varepsilon})^{-1},$$

由此得 (z_n, x) 依测度 μ 收敛.

因为

$$k(z_1 + z_2) = \pi \int (1 - e^{-|(z_1,x)+(z_2,x)|}) \mu(dx)$$

$$\leqslant \pi\int(1 - e^{-|(z_1,x)| - |(z_2,x)|})\mu(dx)$$

$$\leqslant \pi\int(1 - e^{-|(z_1,x)|})\mu(dx)$$

$$+ \pi\int(1 - e^{-|(z_2,x)|})\mu(dx)$$

$$= k(z_1) + k(z_2),$$

所以 $\mathscr{X}$ 可考虑为具有距离

$$r(x, y) = k(x - y)$$

的距离空间.

设 $\tilde{\mathscr{X}}$ 表示在距离 r 下 $\mathscr{X}$ 的完备化. $\tilde{\mathscr{X}}$ 中每个元素可以和某个 μ 可测泛函 $l(x)$ 联系在一起: 如果在 $\mathscr{X}$ 中存在序列 z_n, 使 $r(z_n, \tilde{x}) \to 0$, 且依测度 μ, $(z_n, x) \to l(x)$, 则 $\tilde{x} \overset{S}{\longleftrightarrow} l$. 用 $\mathscr{L}(\mu)$ 表示全体 μ 可测泛函的空间. 我们把依测度 μ 几乎处处相等的泛函不加区别. 则 $\tilde{\mathscr{X}}$ 和 $\mathscr{L}(\mu)$ 之间的对应关系 S 是双方单值的. 如果在 $\mathscr{L}(\mu)$ 中引进距离

$$r(l_1, l_2) = \pi\int(1 - e^{-|l_1(x) - l_2(x)|})\mu(dx),$$

则上面引入的对应关系是等距的. 因此空间 $\tilde{\mathscr{X}}$ 和 $\mathscr{L}(\mu)$ 自然不加区别,今后我们总是这样做.

我们还指出,具有距离 r 的空间 $\tilde{\mathscr{X}}$ 的一个特点. 测度 μ 的特征泛函可由距离 r 下的连续性扩张到整个 $\tilde{\mathscr{X}}$ 上. 这种扩张可表为

$$\varphi(l) = \int e^{il(x)}\mu(dx)$$

(其中 l 作为 $\tilde{\mathscr{X}} = \mathscr{L}(\mu)$ 中的元素是可测泛函). 我们证明在某种意义下 $\tilde{\mathscr{X}}$ 是 $\varphi(z)$ 能按连续性扩张的最宽的空间.

设 $\mathscr{Y}$ 是具有距离 ρ 的某个线性距离空间,而且

$$\rho(x, y) = \rho(0, x - y)$$

及设 $\varphi(z)$ 在 $\mathscr{X}$ 上的距离 ρ 下连续和按连续性扩张至 $\mathscr{Y}$ 上. 因为 φ 在距离 ρ 下连续, 所以对任意 $\varepsilon > 0$ 可找到 $\delta > 0$, 使当 $\rho(0, z) < \delta$ 时 $\mathrm{Re}(1 - \varphi(z)) < \varepsilon$, 则利用

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leqslant \int |1 - e^{i(z_1 - z_2, x)}| \mu(dx)$$

$$\leqslant \sqrt{\int 2(1 - \cos(z_1 - z_2, x))\mu(dx)}$$

$$\leqslant \sqrt{2\,\mathrm{Re}(1 - \varphi(z_1 - z_2))}$$

得知，当 $\mathrm{Re}(1 - \varphi(z)) < \varepsilon$ 时

$$\mathrm{Re}(1 - \varphi(nz)) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\varphi((k-1)z) - \varphi(kz)|$$

$$\leqslant n\sqrt{2z}.$$

因此当 $\rho(0, z) < \delta$ 时

$$k(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}(1 - \varphi(tz)) \frac{dt}{1 + t^2}$$

$$= \int_{|t| \leqslant n} \mathrm{Re}(1 - \varphi(tz)) \frac{dt}{1 + t^2}$$

$$+ \int_{|t| > n} \mathrm{Re}(1 - \varphi(tz)) \frac{dt}{1 + t^2}$$

$$\leqslant \pi n \sqrt{2\varepsilon} + \frac{4}{n}.$$

因此，如果 $\rho(z_n, z_m) \to 0$，则 $k(z_n - z_m) \to 0$，因此 $\mathscr{Y}$ 可以等距地嵌入 $\tilde{\mathscr{X}}$ 的某个子空间.

空间 $\tilde{\mathscr{X}}$ 实质比 $\mathscr{X}$ 宽，因为它包含，例如由 $\mathscr{X}$ 在内积 $(x, y)_- = (Bx, y)$ 下完备化得到的空间 $\mathscr{X}^B_-$，其中 B 是使得 $\varphi(x)$ 在内积 (Bz, z) 下连续的核算子.

除所有可测泛函的空间 $\mathscr{L}(\mu)$ 之外，还可考虑所有平方可积线性泛函的空间 $\mathscr{L}^{(2)}(\mu)$. 但是，这空间可能仅由一个 0 元素所组成。如果测度 μ 有有限相关算子 C，那末 $\mathscr{L}^{(2)}(\mu)$ 包含 $\mathscr{X}$ 在内积 (Cx, y) 下的完备化，但不一定和这完备空间相重合。此外，可能发生对所有 $z \neq 0$ 有

$$\int (x, z)^2 \mu(dx) = +\infty,$$

而同时 $\mathscr{L}^{(2)}(\mu)$ 可包含异于 0 的元素。

作为例子考虑测度 μ，它是形为

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \eta_k e_k$$

的随机元 ξ 的分布，其中 $\{e_k\}$ 是规范正交基，η_k 是有稳定分布

$$\mathbf{E} e^{is\eta_k} = \exp\{i\gamma s - |s|^{\alpha}\}$$

的同分布独立随机变量序列.

首先设 $\gamma = 0$, $\alpha > 1$. 那末 (ξ, z) 有以同样的 α 为指数的稳定分布。因此对 $\mathscr{L}(\mu)$ 中任一泛函 $l(x)$

$$\int e^{isl(x)} \mu(dx) = e^{-|s|^{\alpha}}.$$

因此，仅当 $l(x) = 0$ 时

$$\int l^2(x) \mu(dx) < \infty,$$

如果 $\alpha > 1$, $\gamma \neq 0$, 则取序列

$$z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} e_k,$$

我们有

$$(\xi, z_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_k.$$

因此，以概率为 1，亦即依测度 μ 几乎处处存在极限

$$\lim_{n \to \infty} (x, z_n) = \mathbf{E} \eta_k = \gamma.$$

显然，

$$l(x) = \lim_{n \to \infty} (x, z_n)$$

属于 $\mathscr{L}^{(2)}(\mu)$.

另一方面，(z, x) 有指数 α 的稳定分布，因此，

$$\int (z, x)^2 \mu(dx) = +\infty, \text{ 当 } z \neq 0.$$

这例子表明，在一般情形考虑空间 $\mathscr{L}^2(\mu)$ 是不合乎常情的.

可测线性算子 如可测泛函一样，线性算子自然定义为连续算子的序列依测度 μ 的极限. 因为可以考虑序列 $A_n(x)$ 强收敛或者弱收敛，所以也可定义强可测或者弱可测性. 因此，如果存在

连续线性算子序列 A_n 使 A_nx 强（弱）收敛于 $Ax\,(\mathrm{mod}\mu)$，则算子 A 称为关于测度 μ 强（弱）可测. 显然，强可测算子也弱可测. 设 A 是弱可测. 用 D_A 表示序列 A_nx 存在弱极限的那些 x. 那末用 N 表示在 $\mathscr{H}$ 中的某个可数稠密集，我们有

$$D_A=\{x:\sup_n|A_nx|<\infty,\ \text{存在}\ \lim_{n\to\infty}(z,\ A_nx),\ z\in N\}.$$

由此可见，D_A 可测. D_A 是一线性流形也是显然的. 对每个 $x\in D_A$ 存在弱极限 $Ax=\lim\limits_{n\to\infty}A_nx$，而且

$$A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay,$$

对所有实数 α 和 β 以及 $x,y\in D_A$. 最后，$\mu(D_A)=1$. 我们指出，为使算子 A 是强可测的，上述条件也是充分的. 因而证明强和弱可测性概念等价.

定理 2 设在满足 $\mu(D_A)=1$ 的可测线性流形 D_A 上定义的取值于 $\mathscr{H}$ 的可测函数 Ax，对所有 $x,\ y\in D_A$ 和实数 $\alpha,\ \beta$，它满足关系式 $A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay$. 那末存在连续线性算子序列 A_n，使

$$Ax=\lim_{n\to\infty}A_nx(\mathrm{mod}\mu).$$

证. 我们注意，$|Ax|$ 是可测函数. 因此

$$\lim_{c\to\infty}\mu(\{x:\ |Ax|>c\})=0,$$

这意味着，对任意 $\varepsilon>0$ 可找到紧集 K，使当 $x\in K$ 时 $|Ax|\leqslant c$ 和 $\mu(\mathscr{H}-K)<\varepsilon$. 可以认为，这紧集是凸的对中心为对称的集合. 如定理 1 的证明，定义有范数 $|\cdot|_k$ 的空间 $\mathscr{L}$，和在 $\mathscr{L}$ 中选取紧集 K_1 使 $K_1\subset K$ 和 $\mu(K-K_1)<\varepsilon$，算子 A 在范数 $|\cdot|_k$ 下在 $\mathscr{L}$ 上连续和在 $\mathscr{H}$ 中的距离下在 K_1 上连续，因此，对任意 $\rho>0$ 可选取 $\delta>0$，使当 $|x-y|<\delta,\ x,\ y\in K_1$ 时 $|Ax-Ay|<\rho$. 设 N 是有限维子空间使 $N\cap K_1$ 构成 K_1 中 δ 网. 用如下方式构造算子 A_N：当 $x\in N$ 时，$A_Nx=Ax$，如果 y 正交于 N，则 $A_Ny=0$. 这时将 A 从 C 扩张到整个 $\mathscr{H}$ 而不改变 A 的连续性的模. 因此（参见定理 1 的证明），$|A_Nx-Ax|\leqslant 2\rho$ 当 $x\in K_1$. 这就是说，

$$\mu(\{|A_Nx - Ax| > 2\rho\}) < 2\varepsilon.$$

选取序列 $\varepsilon \to 0$ 和 $\rho \to 0$，构造有界限性算子序列使其依测度收敛于 A，而从这序列可选取几乎处处收敛的子序列，定理得证。

在今后将使用简单的术语“可测线性算子”而不说明是强的(或弱的)。

现在来考察绝对可测的线性算子的概念。如果对每个可测线性泛函 $l(x)$,$l(Ax)$ 也是可测线性泛函,则线性可测算子称为绝对可测的。$l(Ax)$ 是可测线性泛函可有两种解释。第一，因为存在序列 z_n，使 $k(l - z_n) \to 0$，所以可以将$l(Ax)$理解为可测泛函序列 $l_n(x) = (z_n, Ax)$ 依测度μ的极限。第二，$l(Ax)$ 可以理解为两个可测函数通常的复合。它也是可测的。可加性和齐次性的条件在这函数的定义域得到满足。这函数的定义域是集合 $\{x: Ax \in D_l\}$，其中 D_l 是 $l(x)$ 的定义域。如果 Δ_A 表示算子A的值域,那末,$l(Ax)$ 是可测泛函的充分必要条件是等式

$$\mu(A^{-1}(\Delta_A \cap D_l)) = 1$$

成立。此外,因为任意可测线性流形 L 只要 $\mu(L) = 1$ 就可取作 D_l，所以，如果 $\mu(L) = 1$，则条件 $\mu(A^{-1}(\Delta_A \cap L)) = 1$ 应成立。利用定理 1 和 2 可以证明,关于 $l(Ax)$的可测性的两种解释是等价的。

我们来叙述绝对可测算子的构造，注意到对任意绝对可测算子 A，可测线性泛函序列 $l_n(x)$ 依测度μ收敛于 $l(x)$ 推得序列 $l_n(Ax)$ 依测度收敛于 $l(Ax)$。为证明这一点，只要考虑几乎处处收敛代替依测度收敛就够了。在此情况下,可以找到线性流形 L，$\mu(L) = 1$，使当 $x \in L$ 时 $l_n(x) \to l(x)$。因此，$l_n(Ax) \to l(Ax)$ 对所有使得 $Ax \in L$ 的 x 成立，而由于算子 A 的绝对可测性，这样的集合的测度是 1。因此，按公式 $[A^*l](x) = l(Ax)$，将 $\tilde{\mathscr{X}}$ 映入 $\tilde{\mathscr{X}}$ 的算子 A^* 与绝对可测算子 A 联系在一起。从上面所述可得,这算子在距离 r 下连续,因为在此距离下泛函的收敛性等价于它们依测度 μ 的收敛性。我们证明反之亦然：如果 A 是可测线性算子使对所有 $z \in \mathscr{X}$ 由关系式 $A^*z(x) = (z, Ax)$ 定义的算子

A^* 在距离 r 下依连续性扩张到整个 $\tilde{\mathscr{X}}$ 上，则 A 是绝对可测算子. 如果 A^* 依连续性扩张到 $\tilde{\mathscr{X}}$ 上，则 $\varphi(A^*z)$ 是 r 连续正定泛函. 因此对任意正交基 $\{e_k\}$ 级数

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} [A^* e_k](x) e_k$$

按测度 μ 几乎处处收敛，而且 $\varphi(A^*z)$ 是用这种方式定义的变量 Ax 的特征泛函. 设 l 是可测泛函，$\{f_k\}$ 是 D_l 中的规范正交基. 那末

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} (Ax, f_k) f_k = \sum_{k=1}^{\infty} (A^* f_i, x) f_i.$$

设 P_n 是由 $f_1, \cdots, f_n$ 所张成的子空间上的投影算子. 我们证明 $l(P_n Ax)$ 依测度 μ 收敛于某个极限. 事实上，

$$l(P_n Ax) = \sum_{j=1}^{n} (A^* f_j, x) l(f_j) = \left[A^* \sum_{j=1}^{n} l(f_j) f_j\right](x),$$

和因为根据定理 1 的推论

$$\left(\sum_{j=1}^{n} l(f_j) f_j, x\right) = l(P_n x)$$

依测度 μ 收敛于 $l(x)$，所以由在 $\tilde{\mathscr{X}}$ 中 A^* 的连续性，依测度 μ

$$\left[A^* \sum_{j=1}^{n} l(f_j) f_j\right](x) \to (A^* l)(x).$$

因此，对任意线性泛函 l，

$$l(Ax) = [A^* l](x)$$

是可测线性泛函. A 的绝对可测性得证.

我们来考察一个 Hilbert 空间 $\mathscr{X}$ 到另一个 Hilbert 空间 $\mathscr{Y}$ 的线性可测映象.

我们仅考虑强可测映象. 看来研究这样的映象可自然归结为研究 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$ 的映象，即可测线性算子. 事实上，设 R 是 $\mathscr{Y}$ 到 $\mathscr{X}$ 上的双方单值等距映象（我们假定两空间都是可分的），设 V 是 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的可测映象，那末可找到连续线性映象序列 V_n，使依测度 μ，$V_n x \to Vx$（在 $\mathscr{Y}$ 中）. 但 RV_n 也是 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$ 的连

续线性映象序列，它依测度μ收敛于RV. 因此RV是可测线性算子. 反之，如果U是由$\mathscr{X}$到$\mathscr{X}$的可测线性算子，则UR^{-1}是$\mathscr{X}$到$\mathscr{Y}$的可测线性映象. 因此由$\mathscr{X}$到$\mathscr{Y}$的所有可测线性映象完全被描述.

用ν表示在$\mathscr{Y}$中由式$\nu(E)=\mu(V^{-1}(E))$定义的测度，其中V是$\mathscr{X}$到$\mathscr{Y}$的可测线性映象，我们求测度ν的特征泛函. 为此需要V的共轭映象的概念. 设D是映象V的定义域，$\mu(D)=1$. 对所有$y\in\mathscr{Y}$和$x\in D$，(Vx, y)有定义且是D上的可测线性泛函. 因此存在元素$l_y\in\tilde{\mathscr{X}}$，使$(Vx, y)=l_y(x)$. 令$l_y=V^*y$; V^*y确定了一个齐次可加的由$\mathscr{Y}$到$\tilde{\mathscr{X}}$的映象，它在下述定义下是连续的：当$|y_1-y_2|\to 0$时$r(V^*y_1, V^*y_2)\to 0$这映象V^*被称为V的共轭映象. 当V^*可考虑为由$\mathscr{Y}$到$\mathscr{X}$关于测度ν的可测映象时是特别有趣的. 设$\{e_k\}$是$\mathscr{X}$中某个规范正交基. V^*y属于$\mathscr{X}$的充分必要条件是

$$V^*y=\sum_{k=1}^{\infty}(V^*y, e_k)e_k=\sum_{k=1}^{\infty}(y, Ve_k)e_k$$

和级数$\sum_k (y, Ve_k)^2$按测度ν几乎处处收敛. 后一条件等价于级数$\sum_k (Vx, Ve_k)^2$按测度μ几乎处处收敛. 最后，求测度ν的特征泛函$\varphi_\nu(y)$. 我们用$\varphi_\mu(l)$表示特征泛函$\varphi_\mu(z)$在$\tilde{\mathscr{X}}$上的连续扩张. 那末

$$\varphi_\nu(y)=\int e^{i(y, Vx)}\mu(dx)=\int e^{i(V^*y, x)}\mu(dx)=\varphi_\mu(V^*y).$$

附录(英译本第三卷1979年版附录中关于本节内容的改正)

函数$l(x)$被称为Hilbert空间$(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$上关于测度$\mu$的可测线性泛函，如果$l(x)$是连续线性泛函序列$l_n(x)$依测度$\mu$的极限.

定理 1 为使 $\mathfrak{B}$ 可测函数 $l(x)$ 是关于测度 μ 的可测线性泛函的充分必要条件是，存在一对称凸紧集 K 使得如下条件满足：

1) 如果 $\mathscr{D}$ 是 K 的线性包络，那末 $\mu(\mathscr{D})=1$；

2) $l(x)$ 在 $\mathscr{D}$ 上是线性的；

3) $l(x)$ 在 K 上是连续的。

证．必要性．如果 $l(x)$ 是一可测线性泛函，则存在一连续线性泛函序列 $l_n(x)$ 使

$$l(x)=\mu\text{-}\lim_{n\to\infty} l_n(x)$$

和

$$\mu\left(\left\{x:\ |l_n(x)-l_{n+1}(x)|>\frac{1}{n^2}\right\}\right)\leqslant\frac{1}{n^2}.$$

令

$$\mathscr{G}_k=\bigcap_{n=k}^{\infty}\left\{x:\ |l_n(x)-l_{n+1}(x)|\leqslant\frac{1}{n^2}\right\}.$$

显然，$\mathscr{G}_k$ 是一对称凸闭集和

$$\mu(\mathscr{G}_k)=1-\sum_{n>k}\mu\left(\mathscr{X}-\left\{x:\ |l_n(x)-l_{n+1}(x)|\right.\right.$$

$$\left.\left.\leqslant\frac{1}{n^2}\right\}\right)\geqslant 1-\sum_{n>k}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

因为 $l_n(x)$ 在 $\mathscr{G}_k$ 的每一个上一致收敛于 $l(x)$，所以在集合 $\mathscr{G}_k$ 的线性包络 $\tilde{\mathscr{G}}_k$ 上收敛于 $l(x)$，从而 $l(x)$ 在 $\tilde{\mathscr{G}}_k$ 上是线性的．设 F_k 是满足 $F_k\subset\mathscr{G}_k$，$\mu(\mathscr{G}_k-F_k)<1/k$ 的对称凸紧集，及 $\mathscr{D}_k$ 是 F_k 的线性包络．选取序列 $\rho_k\downarrow 0$ 使

$$\sum\rho_k\left(\sup_{x\in F_k}|x|+\sup_n\sup_{x\in F_k}|l_n(x)|\right)<\infty$$

及设

$$K=\{x:\ x=\sum\rho_k x_k,\ x_k\in F_k\}.$$

易见：a) K 是一对称凸紧集；b) 集合 K 的线性包络 $\mathscr{D}$ 包含全体 $\mathscr{D}_k$ 且因此 $\mu(\mathscr{D})=1$；c) 在 K 上 $l_n(x)$ 一致收敛于 $l(x)$，从而 $l(x)$ 在 $\mathscr{D}$ 上是线性的．定理条件的必要性得证．

充分性．记 $K_n=\{x:(1/n)x\in K\}$．则 $\mathscr{D}=\bigcup_n K_n$ 且因

此对任意 $\varepsilon>0$ 存在 n 使 $\mu(K_n)>1-\varepsilon$. 显然 K_n 是一对称凸紧集. 我们来证明，对任意 $\delta>0$ 存在连续线性泛函 $\varphi(x)$ 使对 $x\in K_n$ 有 $|\varphi(x)-l(x)|<\delta$. 令

$$S_1=\left\{x:\ l(x)\geqslant\frac{\delta}{2}\right\}\cap K_n,\quad S_2=\left\{x: l(x)\leqslant-\frac{\delta}{2}\right\}.$$

由于条件 2) 和 3)，S_1 和 S_2 是关于原点 0 对称的凸紧集. 因此存在通过原点并且分离这些集合的超平面. 设以

$$\{x:(a,x)=0\}=L$$

表示该超平面. 以 $\varphi(x)$ 表示泛函

$$\varphi(x)=l(x_0)\frac{(a,x)}{(a,x_0)},$$

其中 $x_0\in S_1$ 是使 (a,x_0) 极大的点. $\varphi(x)$ 是一连续泛函. 此外，

$$\begin{aligned}|l(x)-\varphi(x)|&=\left|l(x)-l\left(x_0\frac{(a,x)}{(a,x_0)}\right)\right|\\&=\left|l\left(x-x_0\frac{(a,x)}{(a,x_0)}\right)\right|.\end{aligned}$$

然而，因为 $|(a,x)/(a,x_0)|\leqslant 1$，所以

$$\frac{1}{2}\left(x-x_0\frac{(a,x)}{(a,x_0)}\right)\in K_n\cap L\subset K_n\backslash S_1\backslash S_2.$$

因此

$$\left|l\left(\frac{1}{2}\left(x-x_0\frac{(a,x)}{(a,x_0)}\right)\right)\right|\leqslant\frac{\delta}{2},\quad |l(x)-\varphi(x)|<\delta.$$

定理得证.

注. 如果 $l(x)$ 是一 μ 可测线性泛函，则在 $\mathscr{D}$ 中存在规范正交基 $\{e_k\}$ 使 $l(x)$ 是序列 $l(P_nx)$ 依测度 μ 的极限. 事实上，设依测度 μ,

$$l(x)=\lim_{n\to\infty}(a_n,x).$$

存在一处处为正的函数 $\rho(x)$ 值

$$\lim_{n\to\infty}\int[(a_n,x)-l(x)]^2\rho(x)\mu(dx)=0,$$

$$\int|x|^2\rho(x)\mu(dx)<\infty.$$

设 A 是一对称算子满足

$$(Az, z) = \int (z, x)^2 \rho(x) \mu(dx).$$

从第五章 §-§ 5 引理得知，A 是一对称核算子. 以 $\{e_k\}$ 表示它的特征向量及以 λ_k 表示对应的特征值. 那末

$$\int [(a_m, x) - (a_n, x)]^2 \rho(x) \mu(dx) = (A(a_n - a_m), a_n - a_m)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [(a_n, e_k) - (a_m, e_k)]^2.$$

因此存在极限

$$\lim_{n \to \infty} (a_n, e_k) = \alpha_k$$

使

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \lambda_k < \infty, \quad l(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (x, e_k),$$

其中级数依测度 μ 收敛（参见第五章节 6).

定义在 $\mathscr{X}$ 上取值于 $\mathscr{X}$ 的可测函数 $A(x)$ 称为**可测线性算子**，如果存在线性算子序列 A_n 使 $A_n(x)$ 依测度 μ 弱收敛于 $A(x)$，即对所有 $y \in \mathscr{X}$，数值序列 $(A_n(x), y)$ 依测度 μ 收敛于 $(A(x), y)$.

定理 2 为使 $A(x)$ 是可测线性算子的充分必要条件是存在一对称紧集 K 使如下条件满足:

1) 如果 $\mathscr{D}$ 是 K 的线性包络，那末 $\mu(\mathscr{D}) = 1$;

2) $A(x)$ 在 $\mathscr{D}$ 上是线性的;

3) $A(x)$ 在 $\mathscr{D}$ 上是连续的.

证. 定理条件的必要性如同定理 1 的证明. 现证明其充分性. 设 $\mathscr{L}_n$ 是使 $\cup \mathscr{L}_n$ 在 $\mathscr{X}$ 中稠密的有限维子空间的单调序列，又设 P_n 是在 $\mathscr{L}_n$ 上的投影算子. 因为对所有 x，$A(x)$ 由 $n \to \infty$ 时 $P_n A(x) \to A(x)$ 所确定，所以只要证明对每个 n 算子 $P_n A(x)$ 是某一算子序列 $A_m^{(n)}(x)$ 依测度 μ 收敛的极限. 但在那种情况下 $P_n A_m^{(n)}(x)$ 也依测度 μ 收敛于 $P_n A(x)$. 为了后者得以实现，只要证明 $(A_m^{(n)} x, e_k)$ 依测度 μ 收敛于 $(P_n A(x), e_k)$，其中 $\{e_k\}$ 是一

基，使其截段是 $\mathscr{L}_n$ 中的基．因为 $(P_nA(x), e_k)=(A(x), e_k)$ 是一 μ 可测线性泛函，根据定理1可找到向量序列 $a_k^{(m)}$ 使当 $m\to\infty$ 时依测度 μ

$$(x, a_k^{(m)})\to(A(x), e_k).$$

但也依测度 μ 有

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x, a_k^{(m)})P_ne_k\to P_nA(x)$$

(左端和式中仅有有限个被加项是非零的)．因此所需的算子序列 $A_m^{(n)}$ 由方程

$$(A_m^{(n)}x, e_k)=\begin{cases}(x, d_k^{(m)}), & e_k\in\mathscr{L}_n,\\ 0, & e_k\notin\mathscr{L}_n,\end{cases}$$

所确定．定理2的条件的充分性得证．

§2. 可测多项式函数．正交多项式

虽然对线性可测函数我们在上一节已证实了可测函数空间和平方可积函数空间之间基本上是不同的，但是在考虑高阶多项式函数时我们仍然限于由连续多项式函数的均方极限产生的平方可积函数．这种限制的原因一方面是平方可测函数的结构的复杂性，另一方面是平方可积函数在各种分析应用中，特别在构造正交分解式时是方便的．但是为保证非平凡的平方可积连续多项式存在，我们应当对测度 μ 附加某些限制．

我们用 M_n 表示满足

$$\int|x|^n\mu(dx)<\infty$$

的测度 μ 的类，并设

$$M_\infty=\bigcap_n M_n.$$

Gauss 测度是 M_∞ 中的测度的一个例子．对 M_∞ 中的测度来说，每个 n 阶多项式将属于 $\mathscr{L}_1(\mu)$，$\mathscr{L}_2(\mu)$ 是依测度 μ 平方可积的可测函数空间．如果 $\mu\in M_\infty$，则所有连续多项式包含在 $\mathscr{L}_2[\mu]$

中.

我们回顾多项式函数（或简单地说多项式）的定义. 函数 $\Phi(x)$ 可表为

$$\Phi(x) = H(x, \cdots, x),$$

其中 $H(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathscr{H}$ 上的 n 线性型，则称 $\Phi(x)$ 为 n **次齐次多项式**，而形为

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \Phi_k(x)$$

的函数称为 n 次**多项式**，其中 Φ_k 是 k 次齐次多项式. 对每个 k 次齐次多项式存在由多项式(对应的多项式)生成的 k 线性连续对称函数 $\widetilde{H}(x_1, \cdots, x_k)$，这样的函数被唯一地确定. 设 $\{e_k\}$ 是 $\mathscr{H}$ 中某一规范正交基，数

$$\alpha_{i_1, \cdots, i_k} = \widetilde{H}(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$$

称为函数 $\widetilde{H}$ 和在这基中的型 Φ 的**系数**，型 Φ 可用它的系数表为

$$\Phi(x) = \sum_{i_1, \cdots, i_k} \alpha_{i_1, \cdots, i_k}(x, e_{i_1}) \cdots (x, e_{i_k}).$$

现考虑积分

$$\int T_n(x) T'_{n'}(x) \mu(dx),$$

其中 T_n 和 $T'_{n'}$ 是用 μ 的特征表示的多项式. 因 $T_n(x) T'_{n'}(x)$ 是多项式，所以能确定单个多项式的积分就够了. 为此只要确定一个齐次型的积分就够了. 设 $\mu \in M_n$ 和 $\Phi(x)$ 是 n 次齐次型. 用 H 表示对应的 n 线性连续函数. 如果 P 是在某个子空间上的投影算子，则

$$|\Phi(x) - \Phi(Px)| = |H(x, \cdots, x) - H(Px, \cdots, Px)|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |H(\underbrace{x, \cdots, x}_{k\text{个}}, Px, \cdots, Px)$$

$$- H(\underbrace{x, \cdots, x}_{k-1\text{个}}, Px, \cdots, Px)| = \sum_{k=1}^{n} |H(\underbrace{x, \cdots, x}_{k-1\text{个}}, x$$

$$- Px, Px, \cdots, Px)| \leqslant nC|x - Px||x|^{n-1},$$

其中

$$C = \sup[H(x_1, \cdots, x_n); |x_i| \leqslant 1].$$

因为当 $P \to I$ 时 $\Phi(x) - \Phi(Px) \to 0$ 和变量 $2nC|x|^n$ 按测度 μ 的积分是有界的，所以

$$\int \Phi(x)\mu(dx) = \lim_{P \uparrow I} \int \Phi(Px)\mu(dx).$$

选取任意规范正交基 $\{e_m\}$ 和用 P_m 表示在由 $e_1, \cdots, e_m$ 所张成的子空间上的投影算子．那末

$$\int \Phi(x)\mu(dx) = \lim_{m \to \infty} \int \Phi(P_m x)\mu(dx).$$

如果 $\alpha_{i_1, \cdots, i_n}$ 是型 Φ 在这些基中的系数，则

$$\Phi(P_m x) = \sum_{\substack{i_k \leqslant m \\ k=1, \cdots, n}} \alpha_{i_1, \cdots, i_n}(x, e_{i_1}) \cdots (x, e_{i_n})$$

和

$$\int \Phi(P_m x)\mu(dx) = \sum_{\substack{i_k \leqslant m \\ k=1, \cdots, n}} \alpha_{i_1, \cdots, i_n} \int (x, e_{i_1}) \cdots (x, e_{i_n})\mu(dx).$$

设

$$S_\mu^{(n)}(z_1, \cdots, z_n) = \int (x, z_1) \cdots (x, z_n)\mu(dx)$$

是测度 μ 的 n 阶矩的型．那末

$$S_\mu^{(n)}(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}) = \int (x, e_{i_1}) \cdots (x, e_{i_n})\mu(dx)$$

是在基 $\{e_k\}$ 中该型的系数．于是

$$\int \Phi(x)\mu(dx) = \lim_{m \to \infty} \sum_{i_k \leqslant m} \alpha_{i_1, \cdots, i_n} S_\mu^{(n)}(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}).$$

为证明上表达式右边是收敛级数的和，我们指出下关系式成立：

$$\int \Phi(x)\mu(dx) = \lim_{m_1 \to \infty, \cdots, m_n \to \infty} \int H(P_{m_1}x, \cdots, P_{m_n}x)\mu(dx)$$

$$= \lim_{m_1 \to \infty, \cdots, m_n \to \infty} \sum_{i_n=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} H(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}) S_\mu^{(n)}(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}).$$

这就意味着级数

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n=1}^{\infty} H(e_{i_1},\cdots,e_{i_n})S_{\mu}^{(n)}(e_{i_1},\cdots,e_{i_n}) \tag{1}$$

收敛. 如果对两个 n 线性对称连续函数 H 和 $S_{\mu}^{(n)}$ 来说，在任意正交基中级数 (1) 收敛，则这级数的和（它不依赖于基的选取）将表为 $\mathrm{Sp}H*S_{\mu}^{(n)}$ 并称它为这两个型的乘积的迹. 因此我们证明了公式

$$\int \Phi(x)\mu(dx) = \mathrm{Sp}H*S_{\mu}^{(n)}, \tag{2}$$

其中 H 是对应于齐次型 Φ 的 n 线性型，而 $S_{\mu}^{(n)}$ 是测度 μ 的矩的型.

多项式函数的正交系的构造 在今后，我们假定 $\mu\in M_{\infty}$. 我们将不高于 n 次的可测多项式理解为 n 次连续多项式的均方极限. 为构造出所有可测多项式，利用多项式的正交系是方便的. 设 $\tilde{\mathscr{P}}_n$ 是次数不高于 n 的所有可测多项式的集合; $\tilde{\mathscr{P}}_n$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{L}_2[\mu]$ 的子空间. 显然，$\tilde{\mathscr{P}}_0\subset\tilde{\mathscr{P}}_1\subset\cdots\subset\tilde{\mathscr{P}}_n$. 用 $\mathscr{P}_n$ 表示在 $\tilde{\mathscr{P}}_n$ 中 $\tilde{\mathscr{P}}_{n-1}$ 的正交余子空间. 子空间 $\mathscr{P}_0, \mathscr{P}_1, \cdots, \mathscr{P}_n, \cdots$ 是互相正交且称为多项式的正交系. 每一可测多项式可唯一地表为 $\sum c_k g_k(x)$，其中 $g_k\in\mathscr{P}_k$. 为构造出所有可测多项式，只要构造出所有子空间 $\mathscr{P}_k$ 就够了. 用归纳法来进行这样的构造是自然的.

设 $T(x)$ 是 n 次齐次型，它由 n 线性对称函数 H 所组成. 那末

$$T(x) = P_n(H, x) - \sum_{k=0}^{n-1} Q_k(H, x), \tag{3}$$

其中 $P_n(H, x)\in\mathscr{P}_n$, $Q_k(H, x)\in\mathscr{P}_k$. 显然，$P_n(H, x)$ 和 $Q_k(H, x)$ 是线性相关于 H. 用 $\tilde{\Phi}^n$ 表示所有 n 线性连续函数的空间. 在 $\tilde{\Phi}^n$ 中引入内积

$$\langle H, H'\rangle_n = \int P_n(H, x)P_n(H', x)\mu(dx), \tag{4}$$

并在这内积下将 $\tilde{\Phi}^n$ 完备化. 所得的 Hilbert 空间用 Φ^n 表示，它的元素将称为广义型. 注意，对应 $H\longleftrightarrow P_n(H, x)$ 是同构的，因

此它可以扩张到整个 Φ^n 上. 我们同样用 $P_n(H, x)$ 表示在 $\mathscr{P}_n$ 中对应于 $H \in \Phi^n$ 的函数. 式 (3) 中的函数 $Q_k(H, x)$ 可表为

$$Q_k(H, x) = P_k(H_k, x),$$

其中 $H_k \in \Phi^k$ 将. $H \in \tilde{\Phi}^n$ 映为 $H_k \in \Phi^k$ 的线性算子用 U_{nk} 表示. 因此,由 (3) 得

$$P_n(H, x) = T(x) + \sum_{k=0}^{n-1} P_k(V_{nk}H, x). \tag{5}$$

最后的公式表明, 当 $H \in \tilde{\Phi}^n$ 时为确定 $P_n(H, x)$ 只要知道算子 V_{nk} 就够了,而为要 $P_n(H, x)$ 扩张到 Φ^n 上则需要知道 $\langle\cdot,\cdot\rangle_n$. 如果有了这两个特征,那末公式 (5) 使得将构造 $P_n(H, x)$ 归结为构造 $P_k(H, x)$, $k \leqslant n$.

对 $H_n \in \tilde{\Phi}^n$ 和 $H_k \in \tilde{\Phi}^k$, 我们用 $H_n \times H_k$ 表示$(n+k)$线性型 $H_n(x_1, \cdots, x_n) H_k(x_{n+1}, \cdots, x_{n+k})$ (这是非对称的). 由式 (2), (4), (5) 得如下递推关系:

$$\langle H, H' \rangle_n = \mathrm{Sp}\,(H \times H' * S_\mu^{(2n)}) - \sum_{k=0}^{n-1} \langle V_{nk}H, V_{nk}H' \rangle_k. \tag{6}$$

为确定 V_{nk}, 我们引入双线性型 $A_{nk}(H_n, H_k)$, 当 $H_n \in \tilde{\Phi}^n$, $H_k \in \tilde{\Phi}^k$ 时它定义为

$$A_{nk}(H, H_k) = \int T(x) P_k(H_k, x) \mu(dx), \tag{7}$$

其中 $T(x)$ 是 n 次齐次型, $H \in \tilde{\Phi}^n$ 是对应的 n 线性函数. 为确定 A_{nk}, 由 (5) 和 (7) 还可得一递推关系

$$A_{nk}(H_n, H_k) = \mathrm{Sp}(H_n \times H_k * S_\mu^{(n+k)}) + \sum_{j=0}^{k-1} A_{nj}(H_n, V_{kj}H_k). \tag{8}$$

最后为确定 V_{nk}, 以 $\mathbf{P}_k(H^k, x)$ 乘 (5) 式并积分, 得到对所有 $H \in \tilde{\Phi}^n$ 和 $H_k \in \tilde{\Phi}^k$ 成立的等式

$$A_{nk}(H, H_k) = -\langle V_{nk}H, H_k \rangle_k. \tag{9}$$

如果 $\{H_m^k, m = 1, 2, \cdots\}$是 Φ^k 中某个规范正交基,则

$$V_{nk}H = -\sum_{m=1}^{\infty} A_{nk}(H, H_m^k)H_m^k. \tag{10}$$

关系式(6)，(8)，(9)使得能相继地确定$\langle\cdot,\cdot\rangle_0$，$A_{10}$，$V_{10}$，$\langle\cdot,\cdot\rangle_1$，$A_{20}$，$V_{20}$，$A_{21}$，$V_{21}$，$\cdots$ 等等。

作为例子，我们对于均值为0和相关算子为B的 Gauss 测度考虑子空间P_n的构造。如果利用内积

$$(x, y)_+ = (Bx, y)$$

和在此内积下能计算得迹，则全部公式可实质地简化。在内积$(\cdot,\cdot)_+$下，测度μ的矩的型有很简单的形式：当n是奇数时，$S_n^+(z_1, \cdots, z_n) = 0$；而当$n$是偶数时

$$S_n^+(z_1, \cdots, z_n) = \sum \prod_{k=1}^{n/2} (z_{i_k}, z_{j_k})_+,$$

其中和号是对于数$1, 2, \cdots, n$分成$n/2$个偶对(i_k, j_k)的所有可能分法来取的。由等式

$$\begin{aligned}
&S_n^+(z_1, \cdots, z_n) \\
&= i^{-n} \frac{\partial^n}{\partial\alpha_1\cdots\partial\alpha_n} \int \exp\left\{i\left(x, \sum_1^n \alpha_k, z_k\right)\right\} \mu(dx)\bigg|_{\substack{\alpha_1=0\\ \cdots \\ \alpha_n=0}} \\
&= i^{-n} \frac{\partial^n}{\partial\alpha_1\cdots\partial\alpha_n} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum_1^n \alpha_k z_k, \sum_1^n \alpha_k z_k\right)_+\right\}_{\substack{\alpha_1=0\\ \cdots \\ \alpha_n=0}}
\end{aligned}$$

得到最后的公式。在内积$(\cdot,\cdot)_+$下将用Sp_+表示迹，引入由公式

$$\mathrm{Sp}_+^2 H(z_1, \cdots, z_{n-2}) = \sum_k H(e_k, e_k, e_1, \cdots, z_{n-2})$$

所定义的由$\tilde{\Phi}^n$到$\tilde{\Phi}^{n-2}$的映象，其中$\{e_k\}$是在内积$(\cdot,\cdot)_+$下某个规范正交基。我们将相继地构造出算子V_{nk}和内积$\langle\cdot,\cdot\rangle_n$。首先计算

$$\mathrm{Sp}_+(H_n \times H_k * S_{n+k}^+).$$

当$n+k$是奇数时这量等于0。设$n+k=2m$。我们指出，为计算$\mathrm{Sp}_+(H_{n+k} * S_{n+k}^+)$，其中$H_{n+k}$是$n+k$线性型，需要将自变量$H_{n+k}$划分为各种可能的偶对，然后对每个偶对进行卷积(即用规

范正交基中同样的向量代替自变量的这一偶对并按基求和）且相加这些结果．设自变量 $H_n \times H_k$ 划分成偶对，使包含 H_n 和 H_k 的有 s 个偶对．按余下的偶对分别卷积每个型，我们得

$$(\mathrm{Sp}_+^2)^{\frac{n-s}{2}} H_n \text{ 和 } (\mathrm{Sp}_+^2)^{\frac{k-s}{2}} H_k.$$

这些分法的数目是

$$C_n^s k(k-1)\cdots(k-s+1)(n-s-1)!!(k-s-1)!!$$
$$= \frac{n!k!}{s!(n-s)!!(k-s)!!}.$$

于是，令

$$\frac{k-s}{2} = j, \qquad \frac{n-k}{2} = r,$$

得

$$\mathrm{Sp}_+(H_n \times H_k * S_{n+k}^+)$$
$$= \sum_{j<\frac{k}{2}} \frac{n!k!}{s!(n-s)!!(k-s)!!} \mathrm{Sp}_+\{(\mathrm{Sp}_+^2)^{j+r} H_n * (\mathrm{Sp}_+^2)^j H_k\}.$$

利用这式可以确定

$$V_{2n,0} H_{2n} = -(2n-1)!!(\mathrm{Sp}_+^2)^n H_{2n},$$
$$V_{2n+1,1} H_{2n+1} = -(2n+1)!!(\mathrm{Sp}_+^2)^n H_{2n+1}.$$

其次，

$$A_{2n,2}(H_{2n}, H_2) = \frac{(2n)!}{(2n-2)!!} \mathrm{Sp}_+((\mathrm{Sp}_+^2)^{n-1} H_{2n} \times H_2)$$
$$+ (2n-1)!!(\mathrm{Sp}_+^2)^n H_{2n}(\mathrm{Sp}_+^2 H_2) - A_{2n,0}(H_{2n}, V_{2,0} H_2)$$
$$= \frac{(2n)!}{(2n-2)!!} \mathrm{Sp}_+((\mathrm{Sp}_+^2)^{n-1} H_{2n} * H_2).$$

于是

$$V_{2n,2} = -\frac{(2n)!}{(2n-2)!!2} (\mathrm{Sp}_+^2)^{n-1} H_{2n}.$$

用归纳法可验证

$$A_{2n,2k}(H_{2n}, H_{2k}) = \frac{(2n)!}{(2n-2k)!!} \mathrm{Sp}_+((\mathrm{Sp}_+^2)^{n-k} H_{2n} \times H_{2k}),$$

$$\langle H_{2k}, \widetilde{H}_{2k}\rangle_{2k} = (2k)!\,\mathrm{Sp}_+ H_{2k} * \widetilde{H}_{2k}$$

且因此有

$$V_{2n,2k} H_{2n} = -\frac{(2n)!}{(2n-2k)!!(2k)!}(\mathrm{Sp}_+^2)^{n-k} H_{2n}.$$

同样地

$$V_{2n+1,2k+1} H_{2n+1} = -\frac{(2n+1)!}{(2n-2k)!!(2k+1)!}(\mathrm{Sp}_+^2)^{n-k} H_{2n+1}.$$

因此，最后得

$$\langle H_n, \widetilde{H}_n\rangle_n = n!\,\mathrm{Sp}_+ H_n * \widetilde{H}_n,$$

$$V_{nk} H_n = \begin{cases} 0, & n+k \text{ 是奇数}, \\ -\dfrac{n!}{(n-k)!!k!}(\mathrm{Sp}_+^2)^{\frac{n-k}{2}} H_n, & n+k \text{ 是偶数}. \end{cases}$$

现在研究可测多项式在 $\mathscr{L}_2[\mu]$ 处处稠密的问题. 下引理给出一个充分条件.

引理 如果测度 μ 的特征泛函 $\varphi(z)$ 使对每个 z，函数 $\varphi(tz)$ 在 0 的某个邻域中是 t 的解析函数，则可测多项式的集合在 $\mathscr{L}_2[\mu]$ 中稠密.

证. 用 $\mathscr{P}$ 表示所有可测多项式的集合的闭包. 我们证明 $e^{i(z,x)}$ 作为 x 的函数属于 $\mathscr{P}$. 为此只要证明对实变数的多项式的某个序列 $q_n(t)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int |e^{i(z,x)} - q_n((z,x))|^2 \mu(dx) = 0 \tag{11}$$

就够了.

用 $F(t)$ 表示分布函数

$$F(\lambda) = \mu(\{x: (z,x) < \lambda\}).$$

式 (11) 等价于下式:

$$\lim_{n\to\infty}\int |e^{i\lambda} - q_n(x)|^2 dF(\lambda) = 0. \tag{12}$$

由于

$$\varphi(2t) = \int e^{it\lambda} dF(\lambda),$$

所以由这函数在 0 的邻域的解析性，对某个 $\delta > 0$

$$\int e^{\delta|\lambda|}dF(\lambda)<\infty.$$

设 $\mathscr{L}$ 是复值函数 $g(\lambda)$ 满足

$$\int |g(\lambda)^2|^2 dF(\lambda)<\infty$$

并有内积

$$\int g_1(\lambda)\overline{g_2(\lambda)}dF(\lambda)$$

的空间. 设 $\mathscr{L}'$ 是所有多项式的集合在 $\mathscr{L}$ 的闭包，并设 $g(\lambda)$ 是函数 $e^{i\lambda}$ 在 $\mathscr{L}'$ 上的投影. 那末对所有 $n\geqslant 0$

$$\int (e^{i\lambda}-g(\lambda))\lambda^n dF(\lambda)=0.$$

当 $|t|<\frac{\delta}{2}$ 时，利用不等式

$$\left|\sum_1^m \frac{(i\lambda t)^n}{n!}\right|\leqslant e^{\lambda|t|},$$

$$2\left|(e^{i\lambda}-g(\lambda)\sum_1^m \frac{(i\lambda t)^n}{n!}\right|\leqslant |e^{i\lambda}-g(\lambda)|^2+e^{|\lambda|\delta},$$

得

$$0=\lim_{m\to\infty}\int (e^{i\lambda}-g(\lambda))\sum_{n=1}^m \frac{(i\lambda t)^n}{n!}dF(\lambda)$$

$$=\int (e^{i\lambda}-g(\lambda))e^{i\lambda t}dF(\lambda).$$

对 t 微分这关系式，我们发现当 $|t|<\frac{\delta}{2}$ 时

$$\int (e^{i\lambda}-g(\lambda))e^{i\lambda t}\lambda^n dF(\lambda)=0.$$

于是，当 $|t|<\frac{\delta}{2}$ 且 $|u|<\frac{\delta}{2}$ 时

$$0=\int (e^{i\lambda}-g(\lambda))e^{i\lambda t}\sum_{n=0}^\infty \frac{(i\lambda u)^n}{n!}dF(\lambda)$$

$$=\int (e^{i\lambda}-g(\lambda))e^{i\lambda t+i\lambda u}dF(\lambda),$$

或当 $|t|<\delta$ 时

$$0=\int(e^{i\lambda}-g(\lambda))e^{i\lambda t}dF(\lambda).$$

继续上述论证，我们得，对所有 t

$$\int(e^{i\lambda}-g(\lambda))e^{i\lambda t}dF(\lambda)=0.$$

令 $t=-1$，我们得

$$\int(e^{i\lambda}-g(\lambda))e^{-i\lambda}dF(\lambda)=0,$$

连同等式

$$\int(e^{i\lambda}-g(\lambda))\overline{g(\lambda)}dF(\lambda)=0$$

一起就得出式

$$\int|e^{i\lambda}-g(\lambda)|^2dF(\lambda)=0,$$

由此得(12).

我们来证明，任一可测有界函数属于集合 $\mathscr{P}$. 设 $f(x)$ 是这样的函数. 选取紧集 K，使 $\mu(\mathscr{X}-K)<\varepsilon$. 函数 $f(x)$ 在 K 上一致连续，且因此对每个 $\varepsilon>0$ 可以找到 $\delta>0$，使当 $|x-y|<\delta$ 时 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

设 N 是 K 中的 δ 网的有限维子空间，在 N 上的投影算子表为 P, K' 是 K 在 N 上的投影. 在 N 上存在一三角多项式 $T(x)$，使当 $x\in K'$ 时 $|f(Px)-T(x)|<\varepsilon$ 且按绝对值它不超过 $\sup\limits_x|f(x)|$. 容易证明，

$$\int|f(x)-T(Px)|^2\mu(dx)=O(\varepsilon).$$

因此，除三角多项式外，还有全体有界连续函数属于集合 $\mathscr{P}$. 因为所有有界连续函数构成 $\mathscr{L}_2[\mu]$ 中的稠密集，所以 $\mathscr{L}_2[\mu]\subset\mathscr{P}$. 引理得证.

现在我们引进一个例子来说明，即使在实直线上也存在这样的测度，对该测度所有平方可测多项式在 $\mathscr{L}_2[\mu]$ 不稠密. 设在 $\mathscr{R}'$ 上用密度

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{2}\log^2 x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

定义测度 μ. 考虑 $\mathscr{L}_2[\mu]$ 中函数 $g(x)$:

$$g(x)=\begin{cases}\exp\{\varepsilon\log^2 x\}\sin\pi(1-2\varepsilon)\log x, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\ \varepsilon<\frac{1}{4}.\end{cases}$$

对所有整数 k 下等式成立:

$$\int x^k g(x)f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{kt}e^{-\frac{1}{2}(1-2\varepsilon)t^2}\sin\pi(1-2\varepsilon)t\,dt$$

$$=\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{(k+i\pi(1-2\varepsilon))t-\frac{1}{2}(1-2\varepsilon)t^2\}dt$$

$$-\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{(k-i\pi(1-2\varepsilon))t-\frac{1}{2}(1-2\varepsilon)t^2\}dt$$

$$=\frac{1}{2i\sqrt{1-2\varepsilon}}\left(\exp\left\{\frac{(k+i\pi(1-2\varepsilon))^2}{2(1-2\varepsilon)}\right\}\right.$$

$$\left.-\exp\left\{\frac{(k-i\pi(1-2\varepsilon))^2}{2(1-2\varepsilon)}\right\}\right)=0.$$

因此,函数 $g(x)$ 正交于所有多项式.

§3. 可 测 映 象

设 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 是两个 Hilbert 空间,分别有 Borel 集的 σ 代数 $\mathfrak{U}$ 和 $\mathfrak{B}$. 定义在 $\mathfrak{U}$ 可测集 D_k 上取值于 $\mathscr{Y}$ 的函数 $R(x)$ 如果对所有 $B\in\mathfrak{B}$, $R^{-1}(B)\in\mathfrak{U}$, 则称 $R(x)$ 为 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的可测映象. 如果 $\mu(D_k)=1$, 这样的映象将称为 μ-可测或关于测度 μ 可测. 其次,在本节中可测映象始终理解为关于相应的测度的可测映象. 如果映象 R 是 μ 可测,用

$$\nu(B)=\mu^{-1}(R^{-1}(B))$$

定义 ν, 则映象 R 将测度 μ 变换为 $(\mathscr{Y},\mathfrak{B})$ 上的测度 ν. 按测度 ν 计算积分可归结为按测度 μ 计算积分; 对任意 $\mathfrak{B}$ 可测函数

$f(y)$

$$\int f(y)\gamma(dy) = \int f(R(x))\mu(dx),$$

只要这些积分中有一个有定义.在各种应用中,从测度 μ 的已知的特征确定测度 ν 的特征(特征函数或矩函数),是一个重要的问题.

由 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的连续映象是可测映象的最简单例子. 下面的定理表明了连续映象和可测映象之间的联系.

定理 对任一 μ 可测映象 $R(x)$ 均可找到连续映象序列 $R_n(x)$, 使

$$R(x) = \lim_{n\to\infty} R_n(x) \quad (\mathrm{mod}\,\mu).$$

证. 只要证明对任意 $\varepsilon > 0$ 可找到由 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的连续映象 $\bar{R}(x)$, 使

$$\mu(\{x: |\bar{R}(x) - R(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon.$$

用 γ 表示在映象 R 下 μ 变换成的 $(\mathscr{Y}, \mathfrak{B})$ 上的测度. 设 K 是 $\mathscr{Y}$ 中的紧集,使

$$\gamma(\mathscr{Y} - K) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

用 K' 表示在映象 R 下 K 的原象. 那末

$$\mu(\mathscr{X} - K') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

设 N 是 K 中的 $\frac{\varepsilon}{2}$ 网, 且是 $\mathscr{Y}$ 中的有限维线性子空间, $\mathscr{Y}_1, \cdots, \mathscr{Y}_m$ 是 N 中的基. 那末对所有 $x \in K$

$$\left| R(x) - \sum_1^m (R(x), y_k) y_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 $(R(x), y_k)$ 是按测度 μ 的可测函数, 所以存在连续函数 $\varphi_k(x)$, 使

$$\mu\left(\left\{x: |\varphi_k(x) - (R(x), y_k)| > \frac{\varepsilon}{2m}\right\}\right) < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

那末

$$\mu\left(\left\{x: \left| R(x) - \sum_1^m \varphi_k(x) y_k \right| > \varepsilon\right\}\right)$$

$$< \left(\left\{x:\ \left|R(x)-\sum_{1}^{m}(R(x),y_k)y_k\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$$

$$+\sum_{1}^{m}\mu\left(\left\{x:\ |(R(x),y_k)-\varphi_k(x)|>\frac{\varepsilon}{2m}\right\}\right).$$

余下只要注意到映象

$$\bar{R}(x)=\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(x)y_k$$

是连续的. 定理得证.

在研究由 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的可测映象时只要研究由 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$ 的可测映象就够了,因为由 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的每一可测映象可表为由 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$ 的可测映象和由 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的连续映象的复合.

多项式映象 现考虑 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$ 的映象. 映象 R 称为是多项式的,如果对任意 z, $(R(x),z)$ 是 x 的多项式. 如果对任意 z 表示式 $(R(x),z)$是 n 次齐次多项式型,那末称 $R(x)$ 为 n 次齐次多项式映象. 在研究齐次多项式映象时,下面所考虑的某些标准映象起着重要作用.

用 $\mathscr{X}^{0k}$ 表示K线性对称连续型 S 的空间, S 要求满足条件

$$\mathrm{Sp}S*S<\infty.$$

有内积

$$(S,T)=\mathrm{Sp}S*T$$

的空间 $\mathscr{X}^{0k}$ 是可分 Hilbert 空间. 用 $\mathfrak{B}^k$ 表示在 $\mathscr{X}^{0k}$ 中的 Borel 集的 σ 代数. 考虑由关系式

$$x\overset{T}{\longleftrightarrow}T_x(z_1,\cdots,z_k)=\prod_{j=1}^{k}(z_j,x)$$

所定义的 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$ 的映象. 这映象是连续的,这因为

$$\mathrm{Sp}(T_{x_1}-T_{x_2})*(T_{x_1}-T_{x_2})$$

$$=\sum_{i_1,\cdots,i_k}\left(\prod_{j=1}^{k}(x_1,e_{i_j})-\prod_{j=1}^{k}(x_2,e_{i_j})\right)^2$$

$$=\sum_{i_1,\cdots,i_k}\left\{\sum_{l=1}^{k}\prod_{j=1}^{l-1}(x_1,e_{i_j})(x_1-x_2,e_{i_l})\prod_{j=l+1}^{k}(x_2,e_{i_j})\right\}^2$$

$$\leqslant k^2|x_1 - x_2|^2 \max_{l \leqslant k} \{|x_1|^{2l-2} + |x_2|^{2l-2}\}.$$

于是，它是可测的. 利用式

$$\mu^{0k}(A) = \mu(T^{-1}(A))$$

在 $\mathscr{X}^{0k}$ 上引进测度 μ^{0k}，测度 μ^{0k} 称为测度 μ 的 k 次幂. 注意 μ^{0k} 是在概率空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ 上取值于 $\mathscr{X}^{0k}$ 的随机变量 T_x 的分布.

用 $\varphi_k(T)$ 表示测度 μ^{0k} 的特征泛函. 因为

$$\mathrm{Sp}\, T_x * S = S(x, \cdots, x),$$

所以

$$\varphi_k(S) = \int e^{i\,\mathrm{Sp}\,T*S} \mu^{0k}(dT) = \int e^{iS(x,\cdots,x)} \mu(dx),$$

因此，$\varphi_k(S)$ 由测度 μ 所确定，从而也就由测度 μ 的特征泛函 $\varphi(z)$ 所确定. 现来讨论由 $\varphi(z)$ 计算 $\varphi_k(S)$ 的一些方法. 设 $V_{u_1,\cdots,u_k}$ 是 $\mathscr{X}^{0k}$ 中形为

$$V_{u_1,\cdots,u_k}(z_1, \cdots, z_k) = \prod_1^k (u_j, z_j)$$

的型. 那末

$$\varphi_k(V_{u_1,\cdots,u_k}) = \int \exp\left\{i \prod_1^k (x, u_j)\right\} \mu(dx).$$

为计算右边的积分，注意 $\varphi(t_1u_1 + \cdots + t_ku_k)$ 是变量 $(x, u_1), \cdots, (x, u_k)$ 的联合特征函数，且

$$\int \exp\left\{is \prod_1^k (x, u_j)\right\} \mu(dx)$$

是在概率空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ 上变量 $\prod_{j=1}^k (x, u_j)$ 的特征函数. 如果函数 $\varphi(t_1u_1 + \cdots + t_ku_k)$ 关于 $t_1, \cdots, t_k$ 绝对可积，则

$$\varphi_k(V_{u_1,\cdots,u_k}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^k \int \cdots \int \exp\{is_1 \cdots s_k - is_1t - \cdots$$

$$- is_kt_k\} \varphi(t_1u_1 + \cdots + t_ku_k) dt_1 \cdots dt_k ds_1 \cdots ds_k. \qquad (1)$$

如果利用某些通常用的步骤计算 (1) 的积分（例如，在积分号下引

入因子 $\exp\{-\varepsilon\Sigma t_j^2\}$，然后在 $\varepsilon\to 0$ 时取极限），则式(1)对任意特征泛函 φ 是正确的。

考虑联合特征泛函

$$\varphi_{k,1}(T, z)=\int \exp\{iT(x,\cdots,x)+i(z,x)\}\mu(dx).$$

设

$$\int |x|^k\mu(dx)<\infty.$$

那末对 $\mathscr{X}^{0k}$ 中的任意型 S 如下关系式成立：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Sp}d_z^k\varphi_{k,1}(T, z)*S\\&\quad=i^k\int S(x,\cdots,x)\exp\{iT(x,\cdots,x)+i(z,x)\}\mu(dx),\end{aligned}$$

其中 $d_z^k\varphi_{k,1}(T,z)$ 是函数 $\varphi_{k1}(T,z)$ 关于 z 的 k 次微分(这微分是 k 线性型)。另一方面，

$$\begin{aligned}&i\int S(x,\cdots,x)\exp\{iT(x,\cdots,x)+i(z,x)\}\mu(dx)\\&\qquad=\mathrm{Sp}d_T\varphi_{k,1}(T,z)*S,\end{aligned}$$

其中 $d_T\varphi_{k,1}(T,z)$ 是函数 $\varphi_{k,1}(T,z)$ 关于 T 的一次微分。

因此，满足微分方程

$$i^{k-1}d_T\varphi_{k,1}(T,z)=d_z^k\varphi_{k,1}(T,z). \tag{2}$$

还要指出，$\varphi_{k,1}(V_{u_1,\cdots,u_k},z)$ 可按式(1)计算，只要在(1)的右边以 $\varphi(z+t_1u_1+\cdots+t_ku_k)$ 代替 $\varphi(t_1u_1+\cdots+t_ku_k)$ 即可。

设 V 是由 $\mathscr{X}^{0k}$ 到 $\mathscr{X}$ 的任一可测线性映象。复合映象

$$\mathscr{X}\xrightarrow{T}\mathscr{X}^{0k}\xrightarrow{V}\mathscr{X}$$

将称为 k 次可测多项式映象。设 $R(x)$ 是这样的映象。那末对每个 z $(R(x),z)$ 是 k 次齐次多项式或者是这些多项式依测度 μ 的极限。

事实上，如果 $R(x)=VT_x$，其中 V 是由 $\mathscr{X}^{0k}$ 到 $\mathscr{X}$ 的可测线性映象，则 $(R(x),z)=V_z^*(T_x)$，其中 V^* 是 V 的共轭映象(参见§1)(它将 $\mathscr{X}$ 上的可测线性泛函变换为 $\mathscr{X}^{0k}$ 上的可测线

性泛函)，V_z^* 是 $\mathscr{X}^{0k}$ 上的泛函，它是 $\mathscr{X}$ 上的泛函 $(z, \cdot)$ 的象，$V_z^*(S)$ 是泛函 V_z^* 作用于 $S \in \mathscr{X}^{0k}$ 的值.

如果 V_z^* 是连续泛函，则 $V_z^*(T_x)$ 是 k 次齐次多项式. 如果 V_z^* 还是定义在 $\mathscr{X}^{0k}$ 上的连续线性泛函 g_n 依测度 μ^{0k} 的极限，则依测度 μ $g_n(T_x) \to V_z^*(T_x)$，而 $g_n(T_x)$ 是 k 次齐次多项式. 反之，设 $R(x)$ 是由 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$ 的齐次多项式映象. 用 S_z 表示满足

$$(R(x), z) = S_z(x, \cdots, x)$$

的 k 线性型. 如果 T_x 是 $\mathscr{X}^{0k}$ 中由等式

$$T_x(z_1, \cdots, z_k) = (x, z_1)\cdots(x, z_k)$$

所确定的元素，则 $(R(x), z) = \mathrm{Sp} S_z * T_x$. 显然，$S_z$ 是 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}^{0k}$ 的线性映象，以 U 表示它：$S_z = U_z$. 则

$$(R(x), z) = \mathrm{Sp} U_z * T_x = (z, U^* T_x),$$

其中 U^* 是 U 的共轭算子. 因此 $R(x) = U^* T_x$，其中 U^* 是由 $\mathscr{X}^{0k}$ 到 $\mathscr{X}$ 的连续线性映象.

现设 $R(x)$ 是 k 阶连续映象 $R_n(x)$ 依测度 μ 的极限. 那末 $R_n(x) = V_n T_x$ 且 $R_n(x)$ 按测度 μ 几乎处处收敛. 因此存在由空间 $\mathscr{X}^{0k}$ 到 $\mathscr{X}$ 的可测线性映象 V 使 $V_n T$ 依测度 μ^{0k} 收敛于 V 且 $R(x) = V T_x$.

利用函数 $\varphi_k(T)$ 容易求得测度 ν 的特征函数，ν 是在 k 次可测多项式映象 $R(x)$ 下由测度 μ 变换得到的：

$$\nu(A) = \mu(R^{-1}(A)),$$

事实上，

$$\varphi_T(z) = \int e^{i(z, R(x))} \mu(dx) = \int e^{i(z, V T_x)} \mu(dx)$$
$$= \int e^{i(V^* z, T)} \mu^{0k}(dT) = \varphi_k(V_z^*). \tag{3}$$

用多项式的正交系展开可测映象 设测度 μ 使全体多项式的集合在 $\mathscr{L}_2[\mu]$ 中稠密，而 $R(x)$ 是由 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$ 的可测映象，满足条件

$$\int |R(x)|^2 \mu(dx) < \infty.$$

那末对每一 $z\in\mathscr{X}$，表示式 $(R(x),z)$ 可按 §2 所构造的正交子空间 $\mathscr{P}_k$ 展开：

$$(R(x),\ z)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(z,\ x),$$

其中 $P_k(z,\ x)\in\mathscr{P}_k$. 显然，$P_k(z,\ x)$ 线性地依赖于 z. 在 $\mathscr{X}$ 中取某一规范正交基 $\{e_k\}$. 那末

$$\int\sum_{i=1}^{\infty}|P_k(e_i,\ x)|^2\mu(dx)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\int(R(x),\ e_i)^2\mu(dx)$$

$$=\int|R(x)|^2\mu(dx).$$

因此，级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}P_k(e_i,\ x)e_i=R_x(x)$$

依测度 μ 收敛，且

$$P_k(z,x)=\sum_{i=1}^{\infty}P_k(e_i,\ x)(z,\ e_i)=(R_k(x),\ z).$$

因此，在上述假设下可测映象 $R(x)$ 可表为

$$R(x)=\sum_{k=1}^{\infty}R_k(x),$$

其中每个映象 R_k 是 k 次可测多项式映象和级数在均方意义下收敛. 当 $k\neq i$ 时映象 R_k 和 R_i 在下述意义下正交：对每一有界算子 B 等式

$$\int(BR_k(x),\ R_i(x))\mu(dx)=0$$

成立. 事实上，因为当 $k\neq i$ 时 $(R_k(x),\ z)$和$(R_i(x),\ z)$ 正交，所以

$$\int(BR_k(x),\ R_i(x))\mu(dx)$$

$$=\int\sum_{j=1}^{\infty}(BR_k(x),\ e_j)(e_j,\ R_i(x))\mu(dx)$$

$$=\int\sum_{j=1}^{\infty}(R_k(x),\ Be_j)(R_i(x),\ e_j)\mu(dx)=0.$$

因此

$$\int |R(x)|^2\mu(dx) = \sum_{k=1}^{\infty}\int |R_k(x)|^2\mu(dx)$$

和

$$\int (R(x), z)^2\mu(dx) = \sum_{k=1}^{\infty}\int (R_k(x), z)^2\mu(dx). \qquad (4)$$

式 (4) 给出了计算测度 ν 的相关算子的可能性，ν 是在映象 $R(x)$ 下由测度 μ 变换得到.

§4. 变换测度的某些特征的计算

在这一节给出的结果使我们能确定由给定的测度通过可测映象获得的测度的特征泛函和某些其它的特征. 一些类似的结果在前面已遇到过. 例如，在第七章 §3 就曾得到过变换测度关于原来的测度的密度公式，在本章 §1 已给出了从已知测度通过可测线性变换得到的测度的特征泛函公式，而在 §3 得到了从已知测度通过可测齐次多项式变换所得的测度的特征泛函的类似公式. 当然下面所提供的结果对解决在概率测度的可测变换理论所遇到的所有问题是不够的. 然而对很多重要的应用问题根据这些结果可以建立关于解的计算算法.

变换群 设在 Hilbert 空间 $\mathscr{X}$ 中给出依赖于实参数 t 由微分方程

$$\frac{d}{dt} R_t(x) = \mathscr{G}(R_t(x)) \qquad (1)$$

所确定的变换群 $R(t)$，其中 $\mathscr{G}(x)$ 是 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$ 的连续映象，它保证在满足对所有 $x \in \mathscr{X}$，$R_0(x) = x$ 的初始条件下，方程 (1) 有唯一解. 那末对所有 t，$R_t(x)$ 也是 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$ 的连续映象. 设 μ 是 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 上某一概率测度，而 ν_t 是由测度 μ 通过映象 $R_t(x)$ 得到的. 用 $\varphi_t(z)$ 和 $\varphi(z)$ 分别表示测度 ν_t 和 μ 的特征泛函，那末

$$\varphi_t(z) = \int e^{i(z,R_t(x))}\mu(dx). \tag{2}$$

设

$$\int |\mathscr{G}(R_t(x))|\mu(dx) < \infty.$$

那末在 (2) 的右边的积分可按 t 微分且

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(z) = i\int (z, \mathscr{G}(R_t(x)))e^{i(z,R_t(x))}\mu(dx)$$

$$= i\int (z, \mathscr{G}(x))e^{i(z,x)}\nu_t(dx).$$

对于 $\mathscr{G}(x)$ 附加某些假设后，后一等式的右边可以用 $\varphi_t(z)$ 表示出. 设

$$\mathscr{G}(x) = \mathscr{G}_1(x) + \mathscr{G}_2(x),$$

其中 $\mathscr{G}_1(x)$ 是多项式映象,而 $\mathscr{G}_2(x)$ 假定有如下表示:

$$\mathscr{G}_2(x) = \int e^{i(u,x)}\rho(du), \tag{3}$$

其中 $\rho(du)$ 是定义在 $(\mathscr{X},\mathfrak{B})$ 上某个取值于$\mathscr{X}$具有有界变差的可数可加集函数. 那末,如果

$$(\mathscr{G}_1(x), z) = \sum_{k=0}^{n} H_k^z(x,\cdots,x),$$

其中 $H_k^z(x_1,\cdots,x_k)$ 是连续 k 线性型,则

$$\int (\mathscr{G}_1(x), z)e^{i(z,x)}\nu_t(dx) = \sum_{k=0}^{n} i^{-k}\mathrm{Sp}d^k\varphi_t(z) * H_k^z.$$

另一方面,

$$\int (z, \mathscr{G}_2(x))\, e^{i(z,x)}\nu_t(dx)$$

$$= \iint e^{i(u,x)}e^{i(z,x)}(z, \rho(du))\nu_t(dx)$$

$$= \int\left[\int e^{i(u+z,x)}\nu_t(dx)\right](z, \rho(du))$$

$$= \int \varphi_t(u+z)(z, \rho(du)).$$

因此,在上述假设下 $\varphi_t(z)$ 满足如下积分-微分方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(z) = i\sum_{k=0}^{n} i^{-k}\mathrm{Sp}d^k\varphi_t(z) * H_k^* + i\int\varphi_t(u+z)(z, \rho(du)). \quad (4)$$

接近于线性的变换 如果变换接近于线性，借助于取值于 $\mathscr{X}$ 的有界变差的可数-可加函数的 Fourier 变换，可以利用映象的表示式确定变换测度的特征泛函. 设 $R(x) = Vx + \varepsilon\mathscr{G}_2(x)$，其中 V 是连续线性算子，ε 是足够小的数，而 $\mathscr{G}_2$ 是按 (3) 所表示. 那末 $\mathscr{G}_2$ 有界且

$$\varphi_\nu(z) = \int e^{i(z,x)}\nu(dx) = \int e^{i(z, Vx+\varepsilon\mathscr{G}_2(x))}\mu(dx)$$

$$= \int\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k\varepsilon^k(z, \mathscr{G}_2(x))^k}{k!}e^{i(z,Vx)}\mu(dx)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k\varepsilon^k}{k!}\int(z, \mathscr{G}_2(x))^k e^{i(V^*z,x)}\mu(dx).$$

利用 (3)，得

$$(z, \mathscr{G}_2(x))^k = \left[\int e^{i(u,x)}(z, \rho(du))\right]^k$$

$$= \int\cdots\int e^{i(u_1+\cdots+u_k, x)}(z, \rho(du_1))\cdots(z, \rho(du_k)).$$

因此，

$$\int(z, \mathscr{G}_2(x))^k e^{i(V^*z,x)}\mu(dx)$$

$$= \int\cdots\int\varphi(V^*z + u_1 + \cdots + u_k) \times (z, \rho(du_1))\cdots(z, \rho(du_k)).$$

最后，我们得

$$\varphi_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k\varepsilon^k}{k!}\underbrace{\int\cdots\int}_{k\text{次}}\varphi(V^*z + u_1 + \cdots + u_k) \times (z, \rho(du_1))\cdots(z, \rho(du_k)). \quad (5)$$

注意，在我们的假设下，这级数对所有 ε 收敛且是关于 ε 的整解析函数. 如果令 $i\varepsilon = \lambda$ 和假定 $\lambda > 0$，$(z, \rho(du))$ 是非负测度，公

式(5)可得到本质的简化. 设 $\pi_z(du)$ 是 $\mathscr{X}$ 中有无穷可分和特征泛函是

$$\int e^{i(z^*,u)}\pi_z(du) = \exp\left\{\lambda\int(e^{i(z^*,u)}-1)(z,\rho(du))\right\}$$

的测度. 那末

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\int\cdots\int}_{k\text{次}}\varphi(V^*z+u_1+\cdots+u_k)$$
$$\times(z,\rho(du_1))\cdots(z,\rho(du_k)) = \int\varphi(V^*z+x)\pi_z(dx).$$

显然,测度 ρ 可以不在 $\mathscr{X}$ 本身上给出,而是在它的某个扩张上给出,在其上函数 $\varphi(z)$ 可以按连续性扩张.

对偶公式和其它按小参数幂的展开式 在 Hilbert 空间中计算各种按测度的积分(特别按对应于平方可积过程的测度的积分)时,利用按一个测度的积分归结为按另一个测度的积分的十分简单的公式有时是方便的. 设 ξ 和 η 是两个取值于 $\mathscr{X}$ 的独立随机变量, μ 和 ν 是这些变量的分布, φ_μ 和 φ_ν 是它们的特征函数. 用两种可能的途径计算积分

$$\mathbf{E}e^{i(\xi,\eta)} = \iint e^{i(x,y)}\mu(dx)\nu(dy)$$

(一种先对 μ 然后对 ν, 另一种反之),我们得

$$\int\varphi_\nu(x)\mu(dx) = \int\varphi_\mu(y)\nu(dy). \tag{6}$$

这公式称为对偶公式. 这公式的一个特殊情形是:

$$\int e^{-\frac{1}{2}(Bx,x)}\mu(dx) = \int\varphi_\mu(y)\nu(dy),$$

其中 ν 是有相关算子 B 的 Gauss 测度. 当测度 ν 是一无穷可分分布时,公式(6)十分便于应用. 设 $h(x)$ 是形为 $\frac{1}{i}\log\varphi_\nu(z)$ 的泛函,其中 ν 是无穷可分分布. 引入具有特征泛函

$$e^{ith(z)} = \mathbf{E}e^{i(z,\eta_t)}$$

的随机变量族 η_t. 那末 $\mathbf{E}e^{ith(\xi)}$ (其中 ξ 是取值于 $\mathscr{X}$ 具有分布 μ 的随机变量)可按公式(6)计算:

$$\mathbf{E}e^{ith(\xi)} = \mathbf{E}\varphi_\mu(\eta_t). \tag{7}$$

这公式仅对 $t>0$ 是正确的;对负数 t(或在 Laplace 变换情形对复值 t)可以利用所得的表示式按 t 的解析延拓.

如果知道变量 ξ_ε 的特征泛函按幂数 ε 的展开式,则为得到随机变量 ξ_ε 的泛函的特征函数按小参数 ε 的幂数的展开式,可以利用对偶公式. 设

$$\mathbf{E}e^{i(z,\xi_\varepsilon)} = \varphi_\varepsilon(z) = \Sigma\varepsilon^k x_k(z), \tag{8}$$

和要求计算 $h(\xi_\varepsilon)$ 的特征函数,其中 h 满足公式(7). 那末

$$\mathbf{E}e^{ith(\xi_\varepsilon)} = \Sigma\varepsilon^k\mathbf{E}\chi_k(\eta_t).$$

作为这公式应用的例子,我们考察 $h(x)=(Bx,x)$ 时的情况,其中 B 是正定算子. 我们有等式

$$t^2(Bx,x) = \log\mathbf{E}e^{t(x,\eta)},$$

其中 η 是有相关算子 B 的 Gauss 随机变量(我们要指出,B 是可以定义在空间 $\mathscr{H}$ 的某一扩张中). 因此

$$\mathbf{E}\,e^{is(B\xi_\varepsilon,\xi_\varepsilon)} = \mathbf{E}e^{\sqrt{is}(\xi_\varepsilon,\eta)} = \mathbf{E}\,\varphi_\varepsilon\left(\sqrt{\frac{s}{i}}\,\eta\right).$$

如果 $\varphi_\varepsilon(tz)$ 是 t 的整解析函数,最后的公式是正确的. 如果在这个公式中以 $s=it$ 代入,那末得到变量 $(B\xi_\varepsilon,\xi_\varepsilon)$ 的 Laplace 变换:

$$\mathbf{E}e^{-t(B\xi_\varepsilon,\xi_\varepsilon)} = \mathbf{E}\varphi_\varepsilon(\sqrt{t}\,\eta) = \Sigma\varepsilon^k\mathbf{E}\chi_k(\sqrt{t}\,\eta).$$

设依赖于正参数 ε 的随机变量族 ξ_ε 满足当 $\varepsilon\to 0$ 时,依概率 $\xi_\varepsilon\to 0$. 其次,设对变量 $\xi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\xi_\varepsilon$ 的特征泛函 $\varphi_\varepsilon(z)$ 展开式(8)成立. 再次,设函数 $h(x)$ 可表成

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x),$$

其中 $P_k(x)$ 是 k 次齐次多项式,H_k 是生成它的 k 线性型. 在展式(8)可以逐项无穷次可微的假定下,我们对变量 $\frac{1}{\varepsilon}h(\xi_\varepsilon)$ 的特征泛函求幂数 ε 的展开式. 我们有

$$\mathbf{E}\exp\left\{\frac{is}{\varepsilon}h(\bar{\xi}_\varepsilon)\right\}=\mathbf{E}\exp\left\{\frac{is}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}P_k(\xi_\varepsilon)\right\}$$

$$=\mathbf{E}\exp\left\{is\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k-1}P_k(\xi_\varepsilon)\right\}$$

$$=\mathbf{E}\exp\{isP_1(\xi_\varepsilon)\}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[is\sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^{k-1}P_k(\xi_\varepsilon)\right]^n$$

$$=\mathbf{E}\exp\{isP_1(\xi_\varepsilon)\}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\sum_{k=0}^{2n}Q_{nk}(\xi_\varepsilon)r_{nk}(is).$$

此处 $Q_{nk}(x)$ 是 k 次齐次多项式，$r_{nk}(t)$ 是次数不高于 $k/2$ 的数值(实值)多项式．这多项式由关系式

$$\sum_{k=0}^{2n}Q_{nk}(x)r_{nk}(t)=\frac{\partial^n}{\partial\varepsilon^n}\exp\left\{t\sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^{k-1}P_k(x)\right\}\Bigg|_{\varepsilon=0}$$

唯一确定．设 $P_1(x)=(a,x)$，其中

$$a\neq 0,\qquad Q_{nk}(x)=T_{nk}(x,\cdots,x),$$

其中 T_{nk} 是 k 线性型．那末

$$\mathbf{E}\exp\{isP_1(\xi_\varepsilon)\}Q_{nk}(\xi_\varepsilon)=\mathbf{E}e^{is(\xi_\varepsilon,a)}T_{nk}(\xi_\varepsilon,\cdots,\xi_\varepsilon)$$

$$=i^{-k}\mathrm{Sp}d^k\varphi_\varepsilon(sa)*T_{nk}=i^{-k}\sum_m\varepsilon^m\mathrm{Sp}d^k\chi_m(sa)*T_{nk}.$$

于是，

$$\mathbf{E}\exp\left\{\frac{is}{\varepsilon}h(\bar{\xi}_\varepsilon)\right\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\sum_{k=0}^{2n}r_{nk}(is)i^{-k}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m\mathrm{Sp}d^k\chi_m(sa)*T_{nk}.\tag{9}$$

将有相同次数 ε 的系数合并在一起，重写展开式(9)．同样地，可以得到有余项估计的有限展开式，只要代替(8)中的级数而取有余项的展开式，和将 $h(x)$ 表示为

$$h(x)=\sum_{k=1}^{N}P_k(x)+o(T_{N+1}(x)),$$

T_{N+1} 是 $N+1$ 次齐次多项式．

如果变换 $R(x)$ 表为

$$R(x)=\sum_{k=1}^{\infty}R_k(x), \tag{10}$$

其中 $R_k(x)$ 是 k 阶齐次多项式变换，为求得变换测度的特征泛函,可以利用类似于(9)的公式. 设 V_k 是 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}^{0k}$ 的线性映象,它将 z 变为由多项式 $(R_k(x), z)$ 产生的型 $V_k(z)$. 那末

$$\int e^{i(z,R(x))}\mu(dx)$$

$$=\int e^{i(V_k z,x)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(i\sum_{k=2}^{\infty}(V_k(z,x,\cdots,x))\right)^n\mu(dx).$$

如果用 φ_ν 表示测度 ν 的特征函数,那末

$$\varphi_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{Sp}d^k\varphi_\mu(V_1 z)*T_k^z, \tag{11}$$

其中 T_k^z 是形为

$$T_k^z=\sum_j\sum_{n_1+2n_2+\cdots+jn_j=k}\frac{i^{n_1+\cdots+n_j}}{n_1!\cdots n_j!}V_1^{0n_1}(z)\cdots V_j^{0n_j}(z)^{1)} \tag{12}$$

的 k 线性型. 如果测度 μ 满足条件：对所有 m 和 t

$$\int e^{t\left|\sum\limits_m^{\infty}R_k(x)\right|}\mu(dx)<\infty,$$

则分解式(11)有意义.

正交多项式的一个应用 设 μ 是某一个使正交多项式 $P_k(H_k, x)$ 被构造出的测度（参见§2). 我们来研究这个事实怎样帮助我们求得由测度 μ 通过变换 $R(x)$ 得到的测度 ν 的特征泛函 φ_ν. 假设已经有函数 $e^{i(z,R(x))}$ 按正交多项式展开成级数：

$$e^{i(z,k(x))}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(H_k^z,x).$$

那末

$$\varphi_\nu(z)=\int e^{i(z,R(x))}\mu(dx)=P_0(H_0^z).$$

1) 用 V^{0k} 表示 $\underbrace{V\cdots V}_{k次}$.

因此展开 $e^{i(z,R(x))}$ 的问题不比求 $\varphi_\nu(z)$ 更简单. 当 ν 是关于 μ 绝对连续和密度

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x)=\rho(x)$$

属于 $\mathscr{L}_2[\mu]$ 时，利用正交多项式更为自然. 设已经知道 $\rho(x)$ 按正交多项式的展开

$$\rho(x)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(H_k,x).$$

那末

$$\varphi_\nu(z)=\int e^{i(z,x)}\rho(x)\mu(dx)$$

$$=\int e^{i(z,x)}\sum_{k=0}^{\infty}P_k(H_k,x)\mu(dx)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int e^{i(z,x)}P_k(H_k,x)\mu(dx).$$

显然，

$$\int e^{i(z,x)}Q(x)\mu(dx)$$

(Q 是某一多项式)容易用 $\varphi_\mu(z)$ 表示为形如

$$\sum\frac{1}{i^k}\operatorname{Sp}d^k\varphi_\mu(z)*H^k$$

的微分算子. 因此可以认为函数

$$\chi_k(H_k,z)=\int e^{i(z,x)}P_k(H_k,x)\mu(dx)$$

被确定，所以 $\varphi_\nu(z)$ 可用这些函数由式

$$\varphi_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\chi_k(H_k,z)\tag{13}$$

表示出.

在第七章 § 3 已经给出变换测度关于原来的测度的密度的表示式. 这个密度用函数 $\rho(a,x)$ 来表示，$\rho(a,x)$ 是位移测度 μ_a 关于原来测度 μ 的密度.

现给出求 $\rho(a, x)$ 按正交多项式展开的方法．设

$$\rho(a, x)=\sum_{k=0}^{\infty} P_k(H_k^a, x), \tag{14}$$

其中 H_k^a 是依赖于 a 的某个 k 线性型． 那末对 $\mathscr{P}_l$ 中的任意多项式 $P_l(H_l, x)$（参见 §2）满足关系式

$$\begin{aligned}\int P_k(H_k, x) P_k(H_k^a, x) \mu(dx) &= \int P_k(H_k, x) \rho(a, x) \mu(dx)\\ &= \int P_k(H_k, x+a) \mu(dx)=S_a(H_k).\end{aligned}$$

我们应用 Taylor 定理展开多项式 $P_k(H_k, x+a)$ 和利用成为正交多项式的级数所得到多项式的每一个的展式，容易计算 $\tilde{\Phi}^k$ 上的线性泛函 $S_a(H_k)$．显然，在 $\tilde{\Phi}^k$ 上的线性泛函 $S_a(H_k)$ 可表成内积

$$S_a(H_k)=\langle H_k, H_k^a\rangle_k$$

（参见 § 2）．由此关系式 H_k^a 被唯一确定，然后函数 $\rho(a, x)$ 由公式 (14) 所确定． 为使 $\rho(a, x)$ 存在和属于 $\mathscr{L}_2[\mu]$，充分必要条件是级数 (14) 收敛，即满足不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle H_k^a, H_k^a\rangle_k<\infty.$$

注　　释

在下面的注释中，包含有关本书所讨论的问题的一些参考文献．在这里，我们并不打算给出随机过程论的一个完整的文献目录或阐明它的基本思想的历史．在许多情形中，我们没有援引那些难以搞清楚的原始著作，而只是给读者指出较近出版的教科书和专著，在这些著作中含有所讨论问题的文献目录．

第　一　章

§1．这一节的叙述是基于现在已被普遍接受的用集合论语言给出的概率论公理化体系，这一体系是 A. H. Колмогоров 于1929年提出且在他的专著[29]，[102]中叙述．有关在本书中用到的测度和积分理论的结果可参看下列著作：A. H. Колмогоров 与 C. B. Фомин [37]，P. Halmos [66]，И. И. Гихман 与 A. B. Скороход [14]，J. Neveu [44] 以及 P. A. Meyer [106].

§2．一般的0-1律是由 A. H. Колмогоров [29] 建立的．

§3．条件概率和条件数学期望的理论是由 A. H. Колмогоров [29] 引入的，J. Doob[21] 进一步发展了这个理论．还可以参看 M. Loéve [40] 和 J. Neveu [44].

§4．基本定理是属于 A. H. Колмогоров [29]的．

第　二　章

§2．许多作者都讨论过鞅论，但这理论的系统化应归功于 J. Doob [21]．他首先推出了鞅的基本不等式，证明了关于极限存在的定理，引入了半鞅的概念并得到了其它一些结果．更多有关鞅的知识可以在上面援引过的一些书——J. Doob [21]，M. Loéve [40] 和 P. A. Meyer [106] 中找到．

§3．这一节的基本思想和结果是属于 A. H. Колмогоров 与

A. Я. Хинчин [81] 以及 A. H. Колмогоров [100] 的. 在 J. Doob [21], M. Loéve [40] 和 A. B. Скороход [60] 中对独立随机变量序列作了更详尽的讨论.

§4. 有限状态 Марков 链是由 A. A. Марков [42] (在 1906 年) 引入并加以研究的. Марков 链和 Марков 过程的一般定义是属于 A. H. Колмогоров [31] 的. 在 E. Б. Дынкин 的专著 [23], [24] 中发展了更一般的观点.

§5. 可数状态 Марков 链首先在 A. H. Колмогоров [104], [30], W. Doeblin [85] 的著作中加以研究,随后许多作者对此又作了进一步的研究. 参看 W. Feller [65], K. L. Chung [72], E. Б. Дынкин 与 A. A. Юшкевич [25], J. S. Kemeny, J. L. Snell 与 A.W. Knapp [98].

§6. 许多作者都研究过随机游动并得到了大量的结果. 参看 W. Feller [65], E. Б. Дынкин 与 A. A. Юшкевич [25], A. B. Скороход 与 H. П. Слободенюк [61] 以及 F. Spitzer [63].

§7. Б. B. Гнеденко [16] 首先讨论了一维格子点分布的局部极限定理. 参看 Б. B. Гнеденко 与 A. H. Колмогоров [18], И. A. Ибрагимов 与 Ю. B. Линник [26] 以及 A. B. Скороход 与 H. П. Слободенюк [61].

§8. 遍历定理的产生与统计力学问题有关. 参看 A. Я. Хинчин 的有关这方面的书 [69]. 第一个遍历定理是属于 J. Von Neumann 与 G. Birkhoff 的,它是遍历理论深入发展的出发点. 在 E. Hopf 的专著 [70] 中含有遍历理论的第一个发展时期的一个综述. A. H. Колмогоров [32] 给出 Birkhoff-Хинчин 定理的一个简单的证明. 在 P. Halmos [67], K. Jacobs [95] 和 P. Billingsley [77] 等书中讨论了遍历理论的进一步发展.

第 三 章

§1. 中心极限定理的多维推广首先是由 C. H. Бернштейн [76] 指出的. B. de Finneti [90] 开始系统地研究独立增量过

程. А. Н. Колмогоров [101] 找出了当二阶矩为有限时独立增量过程的特征函数，而 P. Lévy [105] 则得到了一般情形的相应结果(二者均是一维情形). 关于 Марков 过程的一般定义还可参看第 2 章 § 4 的注释.

§ 2 和 § 3. Е. Е. Слуцкий 和 А. Н. Колмогоров 首先讨论了构造随机等价于已给过程，且其样本函数满足一定正则性条件的随机过程的可能性 (参看 Е. Е. Слуцкий 的文章 [62]). 许多关于随机函数公理化定义的各种说法和进一步发展的本质结果是属于 J. Doob 的. 早期的参考材料可以在他的专著 [21] 中找到. § 2 和 § 3 的基本定理是属于 J. Doob [21] 的. 还可参看 Е. Е. Слуцкий [62].

§ 4. 形式上稍弱一点的定理 1 是被 Н. Н. Ченцов [71] 证明的. J. H. Kinney [99] (对于 Марков 过程) 证明了定理 2. P. Lévy [105] 证明了随机连续的独立增量过程没有第二类间断点. J. Doob [21] 讨论了鞅的样本函数的性质.

§ 5. Е. Б. Дынкин [22] 和 J. H. Kinney [99] (对于 Марков 过程) 各自独立地证明了定理 2. 定理 6 的稍弱一点的提法是属于 А. Н. Колмогоров 的，它首先发表在 Е. Е. Слуцкий 的文章 [62] 中. Ю. К. Беляев [3, 75] 研究了 Gauss 过程的局部性质. 还可参看 H. Cramer 与 M. R. Leadbetter 的专著 [84].

第　四　章

§ 1 和 § 2. 广义平稳过程这一概念是由 А. Я. Хинчин [68] 引入的，在同一篇文章中还指出了广义平稳过程的相关函数的谱表示. F. Riesz 和 G. Herglotz 在 1911 年得到了正定序列的谱表示，而 S. Bochner [4] 在 1932 年得到了正定函数的谱表示. J. L. Schönberg 的文章 [111] 包含有 Euclidean 空间和 Hilbert 空间中的齐次迷向随机场的谱表示.

§ 3. Е. Е. Слуцкий [113] 和 M. Loéve [40].

§ 4. H. Cramér [82] 提出了随机积分理论，А. Н. Колмогоров

[35] 则首先阐明了随机积分，谱表示和 Hilbert 空间理论的方法之间的关系. 还可参看 J. Doob [21].

§5. 定理1是属于 K. Karhunen [96] 的，定理2是属于 H. Cramér [82] 的.

§6. 利用滤过理论不难得到平稳过程的谱分解 (A. Blanc-Lapierre 与 Fortet [7]). 借助 И. М. Гельфанд 和 K. Ito 提出的广义随机过程理论 (И. М. Гельфанд 与 Н. Я. Виленкин [10], K. Ito [94]) 可以建立更一般的随机过程线性变换理论.

§7. 关于平稳序列情形的基本结果是 A. H. Колмогоров [35] 得到的，关于连续时间平稳过程的结果则是属于 K. Karhunen [97] 的(参看 J. Doob [21] 和 Ю. А. Розанов [52]).

§8. A. H. Колмогоров [35] 给出了(平稳序列的)线性预测问题的一般提法，它和 Hilbert 空间几何的关系以及把它归结为函数论问题. N. Wiener [116] 发展了连续时间过程的线性预测和滤过问题的有效解法. A. M. Яглом 的方法连同大量的例子可以在他本人的综述性文章 [74] 中找到.

§9. 关于平稳序列的分解定理以及确定的和非确定的过程这两概念是属于 H. Wold 的. 根据平稳序列的过去进行预测的问题的一般解是 A. H. Колмогоров [35] 得到的. 对于连续时间的过程来说，这问题的一般解则是 M. G. Krein [38], [39] 得到的. Ю. А. Розанов [50], N. Wiener 与 P. Masani [117] 讨论了向量值平稳序列的预测问题. 关于连续时间过程的预测问题的详细论述可在 J. Doob [21] 和 Ю. А. Розанов [52] 等书中找到.

第　五　章

在 N. Wiener 的文章 [115] 中首先实现了构造函数空间中的测度. A. H. Колмогоров [29] 提出了构造这种测度的一般方法. 在 A. H. Колмогоров, E. Mourier [107], Ю. В. Прохоров [47] 和 K. R. Parthasarathy [108] 等文章中研究了 Banach 空

间和完备距离空间中的测度.

§3. 从在其上存在以给定的正定函数为特征泛函的测度的空间出发进行扩张是属于 L. Gross [92] 的. §3 的定理是属于 E. Mourier [107] 的.

§5 的定理是 В. В. Сазонов [55] 和 Р. А. Минлос [43]证明的.Hilbert 空间中的广义测度是 Ю. А. Далецкий [19] 引入的.

А. М. Вершик [6] 建立了线性空间中 Gauss 测度的一般理论，他还研究了对这些测度可测的线性泛函和二次泛函. K. Ito [93] 构造了多重随机积分. Ю. А. Розанов [54] 找出了平稳 Gauss 过程的线性泛函和二次泛函的一般形式.

第 六 章

§1. 定理 1 条件的充分性的证明属于 Ю. В. Прохоров [47].

§2. Hilbert 空间中测度的弱紧性条件是 K. R. Parthasarathy [108] 建立的.

§3. 无穷可分分布的一般形式以及取值于 Hilbert 空间的独立随机变量和的分布收敛于这样的分布的条件是 S. R. S. Varadhan [114] 得到的. Н. П. Канделаки 与 В. В. Сазонов [27] 研究了收敛于 Gauss 分布的条件. 在 K. R. Parthasarathy 的书 [108] 中对这些结果有相当详细的论述.

§4. M. Donsker [86] 首先开始研究随机过程的一般极限定理，他的结果在定理 4 中叙述. 定理 1—3 是属于 Ю. В. Прохоров 的.

§5. 没有第二类间断点过程的第一极限定理是 И. И. Гихман [12] 证明的. А. Н. Скороход [57] 研究了 $D_{[0,1]}$ 空间和这空间中过程的极限定理. А. Н. Колмогоров [35] 和 Ю. В. Прохоров [47] 讨论了 $D_{[0,1]}$ 空间中的收敛性. Н. Н. Ченцов [71] 得到了一个有趣的极限定理，将这定理略加改变就是定理 3. А. В. Скороход [57], [58], [59] 研究了独立增量过程和 Марков 过

程的收敛性。M. Donsker [87] 和 И. И. Гихман [13] 考虑了极限定理在统计问题中的应用。

第 七 章

在 И. И. Гихман 与 А. В. Скороход 的文章 [15] 中讨论了函数空间中测度的绝对连续性的各种一般问题。

§ 2. В. Н. Судаков [64] 讨论了有容许位移的处处稠密集的测度。T. S. Pitcher 研究了容许位移的集合的构造。定理 4 在 А. М. Вершик 的文章 [7] 中有叙述。

§ 3. R. H. Cameron 与 W. T. Martin [79], [80] 研究了在各种不同的变换下 Wiener 测度的绝对连续性。在非线性变换下 Hilbert 空间中 Gauss 测度的绝对连续性的某些结果可以在 В. В. Баклан 与 А. Д. Шаташвил 的文章 [2] 中找到。

§ 4. 绝对连续性条件和在位移下 Gauss 测度的密度公式是 U. Grenander [91] 得到的。Ja. Hajek, J. Feldman 和 Ю. А. Розанов 的文章 [9], [88], [89], [53] 中得到了 Gauss 测度的绝对连续性和奇异性的一般条件。

§ 5. 定理 1 和定理 2 属于 Ю. А. Розанов。在他的书 [54] 中叙述了这方面的基本结果。

§ 6. И. В. Гирсанов [11], А. В. Скороход [59] 讨论了某些 Марков 过程类的绝对连续变换。在 И. И. Гихман 与 А. В. Скороход 的文章 [15] 中给出了对应于独立增量过程和 Марков 过程的测度的绝对连续性一般定理。

第 八 章

§ 1. 在 Г. Е. Шилов 与 Фан Дык Тань 的书 [73] 中研究了可测的线性算子和线性泛函。

§ 2. 在 K. Ito 的文章 [93] 中构造了 Wiener 过程的多项式正交系。在 N. Wiener 的书 [8] 中指出了这些多项式的各种应用。А. М. Вершик [6] 构造了 Gauss 测度的正交多项式。

参考文献

[1] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», 1966.

[2] Баклан В. В., Шаташвили А. Д., Переворения гауссівських мір при нелінейних перетвореннях в гільбертовому просторі, *Доповіді АН УРСР*, **9**(1965), 1115—1117.

[3] Беляев Ю. К., Локальные свойства выборочных функций стационарных гауссовских процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, **5** (1960), 128—131.

[4] Bochner S., Lectures on Fourier integrals, Princeton, 1959.

[5] Бершик А. М.,К теории нормальных Динамических систем, *ДАН* **144** (1962), 9—12.

[6] Вершик А. М., Общая теория гауссовских мер в линейных пространствах, *ДАН*, **19** (1964), 210—212.

[7] Вершик А. М., Двойственность в теории меры в линейных протранствах, *ДАН*, **170** (1966), 497—500.

[8] Wiener N., Nolinear problems in random theory, M. I.T. and J. Wiley 1958.

[9] Hajek J., On a property of normal distribution of a stochastic process, Czechoslovak Math. J. 8(1958), 610—618.

[10] Гельфан И. М.. Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, физматгиз, 1961.

[11] Гирсанов И. В., О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры, *Теория вероятн. и ее* примен., **5** (1960), 314—330.

[12] Гихман И. И., Об одной теореме А. Н. Колмогорова, *Научн.зап. Киевск. ун-та*, *Матем. сб.*, **7** (1953), 76—94.

[13] Гихман И. И., Процессы Маркова в задачах математической статистики, *Укр. Матем. Журн.*,**6** (1954), 28—36.

[14] Гихман. И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, физматгиз, 1965.

[15] Гихман И. И., Скороход А. В., О плотносях вероятностных мер в функчиональных пространствах, *УМН*, **21** (1966), 83—152.

[16] Гнеденко Б. В., О локальной теореме для предельных устойчивых распределений, *УМЖ*,**1** (1949), 3—15.

[17] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, изд. з-е, физматгиз, 1961 (概率论教程,丁寿田译).

[18] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные теоремы для сумм

независмых случайных величин, Гостехиздат, 1949 (相互独立随机变数之和的极限定理,王寿仁译).

[19] Даленкий Ю.Л., Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения, *УМН*, **22**(1967), 3—54.

[20] Dunford, N., Schwartz J. T., Linear operators I. II. New York, 1958, 1962.

[21] Doob J. L., Stochastic processes, N. Y., J. Wiley, 1953.

[22] Дынкин Е. Б., Критерий непрерывности и отсутствия разрывов второго рода для траекторий марковского случайного процесса, *Изв.АН СССР, сер. Матем.*, **16** (1952), 563—572.

[23] Дынкин. Е. Б., Основания теории марковских процессов, физматгиз, 1959 (马尔科夫过程论基础,王梓坤译).

[24] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, Физматгиз, 1963.

[25] Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А., Теоремы и задачи о процессых Маркова, «Наука», 1967.

[26] Ибргимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины. «Наука», 1965.

[27] Канделаки Н. П., Сазонов В. В., К центральной предельной теореме для случайных элементов, принимающих значения из гильбертова пространства, *Теория вероятн. и ее примен.*, **9** (1964), 48—52.

[28] Колмогоров А. Н., Общая теория меры и исчисления вероятностей, *Труды комм, акад., разд. матем.*, **1** (1929), 8—21.

[29] Колмогоров А.Н., Основные понятия теории вероятностей, онти, 1936. (概率论基本概念,丁寿田译)

[30] Колмогоров А. Н., Цепи Маркова со счетным числом возможных состояний, *Бюлл. МГУ*, **1**, № 3(1937), 1—16.

[31] Колмогоров А. Н., Об аналитических методых в теории вероятностей, *УМН* **5** (1938), 5—41. (伊藤清著《随机过程》的中译本附录:概率论的解析方法(郑绍濂译))

[32] Колмогоров А. Н., Упрощенное доказательство эргодической теоремы Биркгофа-Хинчина, *УМН* (1938), 52—56.

[33] Колмогоров А. Н., Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений, *ДАН*, **26** (1940), 6—9.

[34] Колмогоров А. Н., Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве, *ДАН*, **26** (1940), 115—118.

[35] Колмогоров А. Н., Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве, *Бюлл. МГУ*, **2**, № 6(1941), 1—40. (希尔伯特空间中的平稳序列,郑绍濂编校,陶宗英,何声武,汪嘉冈译).

[36] Колмогоров А. Н., О сходимости скорохода, *Теория вероятн. и ее примен.*, **1** (1956), 239—247.

[37] Колмогоров А. Н., Фомин. С., В.,Элементы теории функций и функционального анализа, изд. 2-е «Наука», 1968. (函数论与泛函分析初步,卷一,董延闿译).

[38] Крейн М. Г., Об одной интерполяционной проблеме А. Н. Колмого-

рова, *ДАН*, **46** (1944), 306—309.

[39] Крейн М. Г., Об основной аппроксимационной задаче теории экстраполяции и фильтрации стационарных случайных процессов, *ДАН*, **94** (1954), 13—16.

[40] Loéve M., Probability Theory, 2nd Ed. Princeton, N. J., D. Van Nostrand, 1960 (概率论,卷一 梁文骐译).

[41] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, «Наука», 1965 (泛函数分析概要,杨从仁译).

[42] Марков А. А., Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга, *Изв. физ.-матем. о-ва при Казанском ун-те* (2), **15** (1906), 135—156.

[43] Минлос Р. А., Обобщенные случайные процессы и их продолжение до меры, *Труды Моск. матем. о-ва*, **8** (1959), 497—518.

[44] Nevue J., Mathematical Foundations of the Calculus of Probability. San Francisco, Holden-Day, 1965.

[45] Пинскер М. С., Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов, М., 1960.

[46] Привалов И.. И., Граничные свойства аналитических функций, Гостехиздат, 1950 (解析函数的边界性质、吴亲仁译).

[47] Прохоров Ю. В., Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, *Теория вероятн. и ее примен.*, **1** (1956), 177—238.

[48] Прохоров Ю. В., Сазонов В. В., Некоторые результаты, связанные с теоремой Бохнера, *Теория вероятн. и ее примен*,. **6** (1961), 87—93.

[49] Прохоров Ю.В., Фиш М., Характеристическое свойство нормального распределения в гильбертовом пространстве, *Теория вероятн. и ее примен.*, **2** (1957), 475—477.

[50] Розанов Ю.А., Спектральная теория многомерных стационарных процессов с дискретным временем, *УМН*, **13**, № 2(1958), 93—142.

[51] Розанов Ю. А., О плотности одной гауссовской меры относительно другой.*Теория вероятн. и ее примен.*, **7**(1962), 84—89.

[52] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, Физматгиз, 1963.

[53] Розанов Ю. А., О плотности гауссовских распределений и интегральных уравнениях Винера-Хопфа, *Теория вероятн. и ее примен.*, **11** (1966), 170—179.

[54] Розанов Ю. А., Гауссовсие бесконечномерные распределения, *Тр. матем. ин-та им. Стеклова*, **CVIII** (1968), 1—136.

[55] Сазонов В. В., Замечание о характеристических функционалах, *Теория вероятн. и ее примен.*, **3** (1958), 201—205.

[56] Скороход А. В., Предельные теоремы для случайных процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, **1**(1956), 289—319.

[57] Скороход А. В., Предельные теоремы для случайных процессов с независимымм приращениями, *Теория вероятн. и ее примен.*, **2**(1957), 145—177.

[58] Скороход А. В., Предельные теоремы для процессов Маркова, *Теория вероятн. и ее примен.* 3(1958), 217—264.
[59] Скороход А. В., Исследования по теории случайных процессов, Изд. Киев. ун-та, 1961.
[60] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, Физматгиз, 1963.
[61] Скороход А. В., Слободенюк Н. П., Предельные теоремы для случайных блужданий, Наукова думка, 1970.
[62] Слуцкий Е. Е., Несколько предложений к теории случайных функций, *Тр. Ср.-Аз. ун-та. сер. матем.*, (5). **31** (1949), 3—15.
[63] Spitzer F., Principles of random walk, Princeton, N. J., D van Nostrand 1964.
[64] Судаков В. Н., Линейные множества с квазиинвариантной мерой, *ДАН*, **127** (1959), 524—525.
[65] Feller W., A introduction to probability theory and its application. N. Y., J. Wiley. Vol. 1(1957), Vol. II, 1966 (概率论及其应用,(上、下册), 胡迪鹤、刘文等译).
[66] Halmos P. R., Measure theory. Princeton. N. J., D. Van Nostrand, 1950(测度论,王建华译).
[67] Halmos P. R., Lectures on ergodic theory. *J. Math. Soc. Japan*, No.3(1956).
[68] Хинчин А. Я., Теория корреляции стационарных случайных процессов, *УМН*, **5** (1938), 42—51.
[69] Хинчин А. Я., Математические основания статистической механики. Гостехиздат, 1943.
[70] Хопф Е., Эргодическая теория, *УМН*, **4**, № 1 (1949), 113—182.
[71] Ченцов Н.Н., Слабая сходимость случайных процессов с траекториями без разрывов второго рода. *Теория вероятн. и ее примен.*, **1** (1956), 154—161.
[72] Chung K. L., Markov chains with stationary transition probabilites, Berlin Göttingen Heidelberg, Springer, 1960.
[73] Шилов Г. Е., Фан Дык Тань, Интеграл, мера и производная на линейных пространствах, «Наука», 1967.
[74] Яглом А. М., Введение в теориюстационарных случайных функций *УМН*, **7**, № 5(1955), 3—168. (平稳随机函数导论, 梁之舜译, 数学进展, 1 (1), 1956).
[75] Belayev Ju. K., Continuity and Hölder's conditions for sample functions of stationary Gaussian processes. *Proc. Vourth Berk. Symp. on Math. Stat. and Probability*, **2**, (1961), 23—33.
[76] Bernstein S., Sur léxtension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dependentes, *Math. Ann.*, **97** (1926) 1—59 (俄译本: УМН 10 (1944), 65—114).
[77] Billingsley P., Ergodic Theory and Information. N. Y., 1965.
[78] Blanc-Lapierre A., Fortet R., Théorie des fonctions aléatoires, Paris, 1953.
[79] R. H. Cameron, W. T. Martin, Transfor-mations of Wiener integrals under

a general class trasformation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **58** (1945), 184—219.

[80] R. H. Cameron, W. T. Martin, Transformations of wiener integrals by nonlinear transformation, *Trans, Amer. Math. Soc.*, **66**(1949), 253—288.

[81] Chintschin A., Ja., Kolmogoroff A. N., Ueber konvergenz von Reihen deren Glieder durch den Zufalle bestimmt werden, *Матем. СБ.*, **32** (1925), 668—677.

[82] Cramér H., On the theorie of random processes, *Ann. Math.* **41** (1940), 215—230.

[83] Cramèr H., On stochastic processes whose trajectories have no discontinuities of the second kind, *Ann. di Mathmatica* (iv), **71** (1966), 85—92.

[84] Cramér H., Leadbetter M. R., Stationary and lated stochastic processes, N. I., 1967.

[85] Doeblin W., Sur les proprietés asymtotiques de mouvement régis par certains types de chaines simples, *Bull. Math. Soc. Roum. Sci.*, **39** (1937), No 1, 57—115, No 2, 3—61.

[86] Donsker M., An invariance principle for certain probability limit theorems, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **6** (1951), 1—12.

[87] Donsker M., Kolmogoroff-Smirnov theorems, *Ann. Math. Stat.*, **23** (1952), 277—281.

[88] J. Feldman, Equivalence and perpendicularity of Gaussian processes, Pacif. *Journ. Math.*, **8** (1958), 699—708.

[89] J. Feldman, Some classes of equivalent Gaussian processes on interval, *Pacif. Journ Math.*, **10** (1960), 1211—1220.

[90] Finneti B., Sulle funzioni a incremento aleatorio, Rend. Accad. Naz. Lincei, *Cl. Sci. Fis-Mat. Nat.*, (6), **10** (1929), 163—168.

[91] Grenander U., Stochastic processes and statistical inference, Ark. Mat., Vol. 1(1950), 195—277 (随机过程与统计推断,王寿仁译).

[92] Gross. L., Harmonic analysis on Hilbert space, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **46** (1963), 1—62.

[93] Ito. K., Multiple Wiener integral, *Jorn. Math Soc. Japan.*, **3**(1951), 157—169.

[94] Ito K., Stationary random distribution, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto*, **28** (1954), 209—223.

[95] Jacobs K., Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodenthorie, Springer Verlag, 1960.

[96] Karhunen K., Ueber lineare Methoden in der Wahrscheinlichtrechnung, *Ann. Acad. Sci Fennicae, Ser. A, Math. Phys.*, **37** (1947), 3—79.

[97] Karhunen K., Über die Struktur stationären zuiäliger Funktionen, *Ark. Math.*, **1**(1950), 141—160.

[98] Kemeny J. G., Snell J. L., Knapp A. W., Denumerable Markov chains, Van Nostrand, N.-Y.-L. 1966.

[99] Kinney J. H., Continuity properties of sample functions of Markov processes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953) 280—302.

[100] Kolmogoroff A., Ueber die Summen durch den Zufall bestimter unabhängiger Grossen. *Math. Ann.*, **99** (1928), 309—319; **100** (1929), 484—488.

[101] Kolmogoroff A., Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo, *Atti Accad. Lincei*, **15** (1932), 805—808; 866—869.

[102] Kolmogoroff A., Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin, 1933.

[103] Kolmogoroff A., La transformation de Laplace dans les linèaires, *Compt. Rend. Acad. Sci.*, (Paris) **200** (1935), 1717.

[104] Kolmogoroff A. Anfangsgründe der Theorie der Markoffschen Ketten mit unendlichen vielen möglichen Zuständen, **1**(1936), 607—610.

[105] Lèvy P., Sur les integrales dont les éléments sont des variables alèatoires independentes, *Ann. Scuola Norm. Pisa*, **2**, No. 3(1964), 337—366.

[106] Meyer P. A., Probability and Potentials. USA, 1966.

[107] Mourier E., Eléments aléatoires dans un espace de Banach, *Ann. Inst. He Poincaré*, **13** (1953).

[108] Parthasarathy K. R., Probability Measures on Metric Space, Academic Press N. -Y. -L. 1967.

[109] Pitcher T. S., The admissible mean values of stochastic process, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **108** (1963), 538—546.

[110] Prohorov Ju. V., The method of characteristic functionals, *Proc. 4th Berkley Symp.*, **2**(1961), 403—419.

[111] Schönlerg J. L., Metric spaces and completely monotone functions, *Ann. Math.*, **39** (1938), 811—841.

[112] Skorohod A. V., On the densities of probability measures in functional space. *Proc 5th Berkely symp.*,**2** (1965), 163—182.

[113] Slutsky E. E., Sur les functions éventuelles continues, intègrables et derivables dans les sens stochastique, *Comptes Rendus Acad. Sci.*, **187** (1928), 370—372.

[114] Varadhan S. R. S., Limit theorems. for sums of independent random variables with values in a Hilbert space, *Sankhya* **24** (1962), 213—238.

[115] Wiener N., Differential space, *J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech.*, **2**(1923), 131—174.

[116] Wiener N., Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, N. Y., 1949.

[117] Wiener N., Masany P., Prediction theory of multivariate stochastic processes, *Acta Math.* **98** (1957), 111—150; **99**(1958), 93—137.

索　　引

七 画

八 画

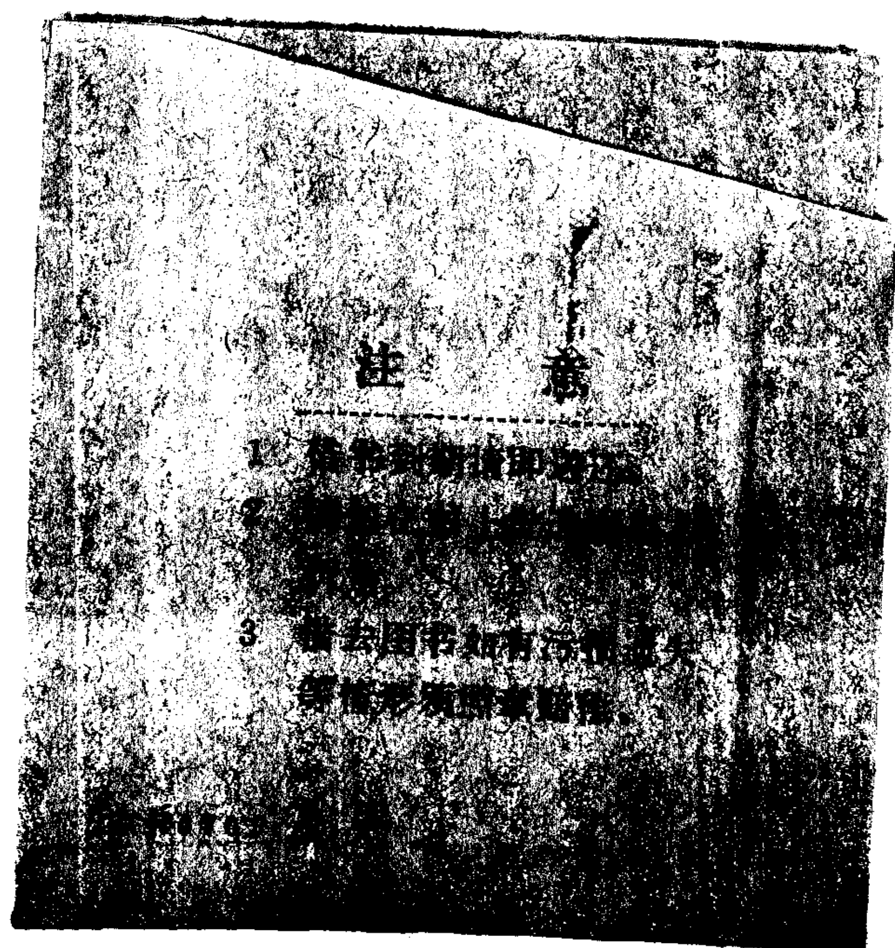
九 画

十　画

十一画

十二画

十三画


注　意

目　录

引　　论

马尔科夫过程在随机过程论中占有特殊的地位. 这是因为在马尔科夫过程的定义中本质上使用了概率论的概念，而正是这些概念使概率论从一般测度论中分离出来，成为一门独立的学科. 以独立性概念为基础的概率论的直观，在马尔科夫过程论中体现得最完整.

马尔科夫过程论的另一个重要特点，是它可以用不多的构造性的特征量,来描述过程的全部有穷维分布,从而可以计算过程各种泛函的分布.

注意,对于其它一般过程类(高斯过程类除外),通常只能确定概率为 0 或 1 的事件.

最后，马尔科夫过程的一个最重要的特点就是它发展的进化性：过程现时的状态完全决定它将来的概率状态. 因此，在很多场合,如果适当地扩充过程的相空间,就可以把所要研究的过程化为马尔科夫过程. 另一方面，由过程发展的进化性可以导出递推关系式(对离散时间情形)或进化方程(对连续时间情形),从而决定过程的概率特征.

当前，在随机过程论中很大程度上是研究各种马尔科夫过程类.

作为马尔科夫链的推广产生了马尔科夫过程的概念. 马尔科夫链是一种试验序列,最初由 A. A. 马尔科夫所研究. 和 Bernoulli 概型不同,对马尔科夫所研究的序列，将来试验中事件出现的概率依赖于过去试验的结果. A. H. Колмогоров 在《概率论的解析方法》(1931 年)一文中提出了马尔科夫过程的一般概念. 在这篇文章中 A. H. Колмогоров 研究了随机决定体系，也就是现时状态能完全决定将来概率状态的体系：这些体系是由函数

$P(s, x, t, B)$ 描述的，其中 $P(s, x, t, B)$ 是《体系在时刻 s 处于状态 x，而在时刻 $t(t>s)$ 的状态属于 $B\in\mathfrak{B}$》的概率，$\mathfrak{B}$ 是相空间 $\mathscr{X}$ 的子集的 σ 代数. $P\{s, x, t, B\}$ 称做转移概率. 由全概率公式和随机决定性可知，转移概率满足下列关系式:

$$P(s, x, t, B)=\int_{\mathscr{X}} P(s, x, u, dy) P(u, y, t, B). \qquad (s<u<t), \tag{1}$$

其中 $\mathscr{X}$ 是体系的相空间. 上式称做 Колмогоров-Chapman 方程.

这里首先出现的一个问题,就是讨论方程(1)的各类解的问题.

当相空间 $\mathscr{X}$ 由有穷或可列个点 $x_1, x_2, \cdots$ 组成时，转移概率由一组函数 $p_{ij}(s, t)=P(s, x_i, t, \{x_j\})$ 所决定，其中 $\{x_j\}$ 是一个点 x_j 所组成的集合. A. H. Колмогоров 证明了，在一定的条件下函数 $p_{ij}(s, t)$ 满足下列微分方程组

$$\frac{dp_{ij}(s, t)}{ds}=\sum_k a_{ik}(s) p_{kj}(s, t),$$

$$\frac{dp_{ij}(s, t)}{dt}=\sum_k p_{ik}(s, t)\, a_{kj}(t).$$

A. H. Колмогоров 所研究的另一个重要的过程类，是有转移概率密度 $p(s, x, t, y)$ 而相空间是有穷维欧几里得空间的过程类. 当函数 $p(s, x, t, y)$ 满足一定条件时(这些条件与体系运动的连续性的直观概念相对应)，A. H. Колмогоров 得到了函数 $p(s, x, t, y)$ 的下列偏微分方程:

$$\frac{\partial p(s, x, t, y)}{\partial s}+\sum_k a_k(s, x) \frac{\partial p(s, x, t, y)}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{i,k} b_{ik}(s, x) \frac{\partial^2 p(s, x, t, y)}{\partial x_i \partial x_k}=0,$$

$$\frac{\partial p(s, x, t, y)}{\partial t}+\sum_k \frac{\partial}{\partial y_k}\left[a_k(t, y) p(s, x, t, y)\right] - \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial y_i y_k}\left[b_{ik}(t, y) p(s, x, t, y)\right]=0.$$

A. H. Колмогоров 还给出了欧几里得空间中更一般过程的

方程．这些过程的状态可能连续地变化，也可能跳跃地变化．对所有上述情形，A. H. Колмогоров 成功地把非线性函数方程(1)化为更常见的进化型线性微分方程(对中断过程，是积分-微分方程)．这时，过程的本身由相应方程的系数来表征．而这些系数具有简单的概率含意，并且是过程的无穷小特征．

И. Г. Петровский 和 A. Я. Хинчин 曾利用马尔科夫过程来构造扩散的概率模型．后来，这种过程被称做扩散过程．结果表明，由 A. H. Колмогоров 所引进的过程的无穷小特征，不仅可以确定转移概率而且还能计算过程的各种泛函的分布(过程到达某区域的时间以及在到达区域边界时过程值的分布等)．

A. H. Колмогоров 的思想是马尔科夫过程数学理论的基础，并且指出了研究的总的方向：研究过程的无穷小特征，构造对应于给定无穷小特征的转移概率．

然而，A. H. Колмогоров 所引进的过程的无穷小特征并不是在任何情况下都存在的，而且即使存在也不是都能唯一地决定过程的．因此，W. Feller 提出的运用伴随转移概率的算子半群理论的思想是很有成效的．算子半群理论适用于时间齐次过程，也就是转移概率 $P(s, x, t, B)$ 仅依赖于时间变量之差 $t-s$ 的过程，即 $P(s, x, t, B)=P(t-s, x, B)$．这一限制并非实质性的．因为，只要适当地改变相空间，就可以很容易地把任意马尔科夫过程化为齐次马尔科夫过程．

设 $\mathscr{F}_{\mathscr{X}}$ 为所有 $\mathfrak{B}$ 可测的有界实函数的空间．由

$$\mathbf{T}_t f(x)=\int f(y) P(t, x, dy),\ f \in \mathscr{F}_{\mathscr{X}},\ t>0,$$

所定义的算子 $\mathbf{T}_t$ 的族称做伴随转移概率 $P(t, x, B)$ 的半群．该半群完全决定转移概率．另一方面，在很多情形下半群唯一地决定于它的无穷小算子 $\mathbf{A}$，其中

$$\mathbf{A} f(x)=\lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbf{T}_t f(x)-f(x)}{t},$$

只要对所有 $x \in \mathscr{X}$ 右侧的极限存在．W. Feller 提出把无穷小算

子 **A** 看作过程的无穷小特征. 他利用半群方法论述了闭区间上的全部扩散过程. 这时过程的无穷小算子具有如下形式:

$$\mathbf{A}f = a\frac{df}{dx} + \frac{1}{2}b\frac{d^2f}{dx^2},$$

其中 a 和 b 就是 Колмогоров 方程中的那些系数. 算子 **A** 的定义域依赖于过程在边界点上的状态,并由满足一定附加(边界)条件的全体二次可微函数组成. W. Feller 和 A. Д. Вентцель 论述了各种可能的附加条件.

E. Б. Дынкин 通过对过程轨道的研究,改进了 W. Feller 的纯解析方法. 他引进了现在普遍使用的马尔科夫过程的一般定义,详细地研究了过程的强马尔科夫性(即关于不依赖于将来的随机时间, 过程的马尔科夫性仍然成立). E. Б. Дынкин 定义了强马尔科夫过程的特征算子 $\mathfrak{U}$. 如果 $\mathfrak{U}$ 的定义域为 $\mathscr{D}_{\mathfrak{U}}$, 则在一些十分自然的条件下有 $\mathscr{D}_A \subset \mathscr{D}_{\mathfrak{U}}$, 并且当 $f \in \mathscr{D}_A$ 时有 $\mathbf{A}f = \mathfrak{U}f$.

和无穷小算子比较, 特征算子的优越性在于: 为计算特征算子, 只需知道在流出初始点任意小的邻域之前(包括流出的瞬时)轨道的状态. 所以,在很多场合(例如, 对跳跃过程和直线上的连续过程)可以很容易地算出特征算子. 因而,如果特征算子已知,则为求无穷小算子,只需找出它的定义域 $\mathscr{D}_A$. $\mathscr{D}_A$ 是 $\mathscr{D}_{\mathfrak{U}}$ 的收缩,从而可以利用一定的附加(边界)条件将 $\mathscr{D}_A$ 从 $\mathscr{D}_{\mathfrak{U}}$ 中划分出来. 可见, 在一般情形下也要出现与区间上的扩散过程类似的情形.

刻画与给定的特征算子相对应的无穷小算子定义域的一般性问题尚未解决. 结果表明, 该问题的解决与对过程的调和函数和过分函数的研究有关,过程的这两种函数由 G. A. Hunt 所研究. 另一方面, E. Б. Дынкин 引进的可乘泛函和可加泛函, 对于构造过程的各种变换(这些变换可以大大简化对过程的研究)起着十分重要的作用. 而这些概念又与过分函数的概念有密切的联系. 对过程的过分函数以及对可加泛函和可乘泛函的研究, 是当前马尔科夫过程一般理论的重要组成部分. 在《马尔科夫过程论基础》

和《马尔科夫过程》这两部专著中，Е. Б. Дынкин 首次相当完整地阐述了这一理论.

在发展一般理论的同时，对各种专门的马尔科夫过程类进行了详细的研究. 每一个马尔科夫过程类描述一种具有更为独特性质的体系的模型. 下面列举最重要的马尔科夫过程类.

独立增量过程是重要的一类马尔科夫过程，即这样一类过程 $\xi(t)$：对任意 n 和 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，变量

$$\xi(0),\ \xi(t_1) - \xi(0), \cdots,\ \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$$

相互独立. 这类过程可以看作连续时间的随机徘徊，最初用来描述布朗运动. 这种类型的一般过程是作为(空间)均匀随机介质中任意体系的进化模型而应用的. B. Finetti, А. Н. Колмогоров 和 P. Levy 的工作全面论述了随机连续的独立增量过程. 从一般理论的角度来看，独立增量过程就是空间齐次马尔科夫过程.

除对独立增量过程分布的解析论述之外，还研究了过程样本函数的性质. P. Levy 证明了随机连续的独立增量过程没有第二类间断点. А. Я. Хинчин 研究了独立增量过程的局部增长，特别是证明了著名的重对数定律.

为描述生物群体的数量，F. Galton 和 H. W. Watson 提出一类随机过程. 在概括这类过程的基础上，А. Н. Колмогоров 和 Н. А. Дмитриев 引进了一个特别的可列状态马尔科夫过程类，并称之为分枝过程. 后来，在生物学和物理学中，在描述具有个体(质点)的出现、消失和蜕变的体系时，这类过程得到了广泛的应用. 分枝过程在每一时刻的状态决定于体系中每种类型质点的个数(例如，生物群体每种性别的个数). 每个质点可以蜕变：或完全消失，或裂变为任意数量任何可能类型的其它质点. 如果体系中现有的每个质点以后的演化不依赖于它的年龄以及其它质点的演化，则这样的过程就是马尔科夫分枝过程. 灭绝概率或每种类型的一个质点在无穷小的时间段内蜕变为质点群体的概率，是过程的无穷小特征. 利用这些特征，可以列出体系中质点个数的母函数的微分方程.

当 $t\to\infty$ 时，对体系中质点个数渐近行为的研究，其中包括求全部质点从体系中消失（退化）的概率，以及求质点个数无限增长（暴发）的概率，是很有意义的.

为了更精确地描述现实中的体系，自然应考虑质点蜕变的概率依赖于质点年龄的分枝过程. 这一点是可以做到的，为此只需引进这样一个相空间：质点在相空间中可以变动位置，并且质点蜕变的概率与它在相空间中的位置有关. 这样便得到马尔科夫分枝过程的一般定义，它的状态既取决于每种类型质点的个数，也取决于它们在某一相空间的位置；并且每个质点在相空间中的运动是由一个马尔科夫过程来描述的，该过程的转移概率只依赖于质点的类型.

如果不是用个数而是用质量来表征质点的类型，并且假设质量可以连续地变化，就可以得到分枝过程另一有趣的推广. 开展对一般分枝过程研究的时间尚不很久，而且在这一理论中仅得到了一些初步的结果. 这些结果涉及求过程的无穷小特征，以及根据这些特征来构造过程等.

包括应用在内的大量文献涉及排队论的问题. 服务系统有下列一些特征：输入事件流，服务线的条数，每条服务线对每个事件的服务时间. 如果输入事件流是 Poisson 流，而服务时间服从指数分布，则这样的服务系统由可列状态马尔科夫过程来描述. 我们用一个专门的马尔科夫过程类，即所谓半马尔科夫过程来描述更为一般的服务系统. 半马尔科夫过程有可列个状态，而且由一个状态到另一状态的转移概率依赖于过程在该状态的逗留时间. 如果把半马尔科夫过程的状态连同过程在该状态的逗留时间二者同看成某一体系的状态，则这个体系就成为马尔科夫体系. 在半马尔科夫过程理论中，根据应用特点提出来的基本问题是：计算转移概率，求其在相空间中的平稳分布，确定应用遍历性定理的条件.

具有离散随机扰动的一般过程是半马尔科夫过程的自然推广. 这类过程在接连出现的两个随机扰动之间是马尔科夫过程. 随机扰动的作用，在于过程（以非马尔科夫的方式）突然改变它在

相空间中的状态. 这时，过程的状态连同上次随机扰动出现以来的时间二者构成一个马尔科夫过程.

第二卷的全部内容都是马尔科夫过程论. 在这一卷中，既阐述了一般理论，也论述了最重要的马尔科夫过程类. 但扩散过程除外，我们把它留到第三卷再做详细研究.

在第一章中给出马尔科夫过程、马尔科夫随机函数以及强马尔科夫过程的一般定义；建立强马尔科夫性准则；研究马尔科夫过程的可乘泛函和子过程；研究样本函数的性质. 在叙述一般理论之前，先介绍广义马尔科夫过程，即不依赖于过程样本函数概念的那部分基本理论. 这里导出了各种过程的 Колмогоров 方程.

第二章讲齐次马尔科夫过程. 本章中引进伴随马尔科夫过程的半群、过程的预解式和生成算子；证明 Hille-Yosida 定理，即伴随给定生成算子的半群的存在性定理. 第二章以相当大的篇幅研究紧空间和局部紧空间的 Feller 过程；找出了给定的算子是局部紧空间上 Feller 过程特征算子的条件；描述具有给定特征算子的全部过程. 研究马尔科夫过程的可加泛函. 描述了 Feller 过程的所有连续可加泛函；研究了时间的随机替换.

第三章研究跳跃过程. 给出一般定义，研究跳跃过程的构造；研究可列状态齐次过程、半马尔科夫过程、具有半马尔科夫随机扰动的过程以及有离散随机扰动的一般过程.

第四章研究独立增量过程. 研究过程样本函数的性质，局部增长和在无穷的增长. 对于一维过程得到了过程基本泛函的分布：首达某一水平的时间和通过该水平的跃度的分布以及过程的上确界、下确界和过程值的联合分布. 此外还论述了过程的一些非负的连续可加泛函类.

第五章是马尔科夫分枝过程. 研究具有有限种类型的质点的分枝过程、有连续质量的过程和有分枝的一般马尔科夫过程.

正文中很多地方没有引证原始文献，但在书末附注中一定程度地作了介绍. 在参考文献中作者尽量列入与书中所提到问题有关的马尔科夫过程的全部主要文献.

第一章　马尔科夫过程的一般定义和性质

§1. 广义马尔科夫过程

定义　“无后效”过程的思想是马尔科夫过程概念的基础．设想有一个可以处于不同状态的体系(或质点)．该体系可能的状态组成一个集合 $\mathscr{X}$，即所谓体系的相空间．假设体系随时间而进化．我们以 x_t 表示它在时刻 t 的状态．如果 $x_t \in B$，其中 $B \subset \mathscr{X}$，则说体系在时刻 t 位于集合 B 中．设想体系的发展具有随机性，也就是说，它在时刻 t 的状态一般不是唯一地决定于它在时刻 s $(s < t)$ 以前的状态，而是随机的，需要用概率的规律来描述．记 $P(s, x, t, B)$ 为在 $x_s = x$ 的条件下事件 $\{x_t \in B\}$ $(s < t)$ 的概率．

称函数 $P(s, x, t, B)$ 为所考察体系的转移概率．所谓无后效体系是指这样的体系：在时刻 s $(s < t)$ 以前体系的运动完全已知的条件下，它在时刻 t 位于集 B 中的概率等于 $P(s, x, t, B)$．因而这个概率只依赖于体系在时刻 s 的状态．在以后各节中将要给出完全严格的定义．现在我们只引进这一概念的简单的、然而对一系列问题已够用的定义．

记 $P(s, x, u, y, t, B)$ 为在 $x_s = x$，$x_u = y$ $(s \leqslant u \leqslant t)$ 的条件下事件 $\{x_t \in B\}$ 的条件概率．由条件概率的一般性质有

$$P(s, x, t, B) = \int_{\mathscr{X}} P(s, x, u, y, t, B) P(s, x, u, dy). \quad (1)$$

对于无后效体系 $P(s, x, u, y, t, B) = P(u, y, t, B)$．这时，等式 (1) 化为

$$P(s, x, t, B) = \int_{\mathscr{X}} P(u, y, t, B) P(s, x, u, dy),$$

$$(s < u < t). \quad (2)$$

(2) 式称做 Колмогоров-Chapman 方程. 它可以作为无后效过程,也就是以后所说的马尔科夫过程的定义的基础.

设 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 是一可测空间. 如果函数 $P(x, B)$, $x \in \mathscr{X}$, $B \in \mathfrak{B}$, 满足下列条件:

a) 对固定的x, $P(x, B)$是$\mathfrak{B}$上的测度,并且 $P(x, \mathscr{X}) \leqslant 1$,

b) 对固定的 B, $P(x, B)$ 是 x 的$\mathfrak{B}$可测函数

则称 $P(x, B)$为 半随机核;如果对所有 $x \in \mathscr{X}$ $P(x, \mathscr{X}) = 1$, 则称$P(x, B)$为随机核.

在更为一般的场合, 当函数 $P(x, B)$ 的自变量 x 在不同于$\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$的另一可测空间$\{\mathscr{X}_0, \mathfrak{B}_0\}$ 取值时, 仍使用这些术语.

设 $\mathscr{I}$ 是有穷或无穷半区间. 满足 Колмогоров-Chapman 方程的半随机(随机)核族

$$\{P_{st}(x, B) = P(s, x, t, B), s < t, (s, t) \in \mathscr{I} \times \mathscr{I}\}$$

称做马尔科夫半随机(随机)核族.

定义 1 称下列对象的全体为广义马尔科夫过程:

a) 可测空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$,

b) 实数轴上的区间(半区间,线段) $\mathscr{I}$,

c) 马尔科夫随机核族

$$\{P_{st}(x, B), s < t, (s, t) \in \mathscr{I} \times \mathscr{I}\}.$$

核族 $P_{st}(x, B) = P(s, x, t, B)$ 称为马尔科夫过程的转移概率, 空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 称为体系的相空间; $\mathscr{I}$ 中的点视为时间, 而把 $P_{st}(x, B) = P(s, x, t, B)$ 的值看作"在时刻s($s < t$) 体系位于相空间中点 x 的条件下, 它在时刻 t 位于集 B" 的条件概率.

以后,我们假设核 $P_{st}(x, B)$ 在 $s = t$ 时也有定义. 这时, 自然规定

$$P_{tt}(x, B) = \chi(B, x),$$

其中 $\chi(B, x)$是集 B 的示性函数: 当 $x \in B$, $\chi(B, x) = 1$, 而当 $x \bar{\in} B$, $\chi(B, x) = 0$.

显然, 如果这样定义核 $P_{tt}(x, B)$, 则当 $u = s$ 或 $u = t$ 时等式 (2) 一定成立.

Колмогоров-Chapman 方程表明，核 $P_{st}(x, B)$ 是 $P_{su}(x, B)$ 和 $P_{ut}(x, B)$ $(s \leqslant u \leqslant t)$ 的卷积. 关于核的卷积的定义见本书第一卷.

中断马尔科夫过程 以后，我们不但要研究由随机核决定的马尔科夫过程，而且还要研究由半随机核决定的马尔科夫过程. 这时，关系式 $P(s, x, t, \mathscr{X}) < 1$ 自然地解释为：体系有可能从相空间中消失. 这里，如果 $x_s = x$，则规定它在时间区间 $(s, t]$ 上消失的概率 $\tilde{p}(s, x, t)$ 等于 $1 - P(s, x, t, \mathscr{X})$. 由 Колмогоров-Chapman 方程知，$\tilde{p}(s, x, t)$ 作为 t 的函数不减. 事实上，当 $h > 0$ 时，

$$P(s, x, t+h, \mathscr{X}) = \int P(s, x, t, dy) P(t, y, t+h, \mathscr{X})$$

$$\leqslant \int P(s, x, t, dy) = P(s, x, t, \mathscr{X}).$$

能这样来解释关系式 $P(s, x, t, \mathscr{X}) < 1$ 的根据如下. 体系从相空间中消失，可以看成它落入某一状态 $\mathfrak{b}$，$\mathfrak{b} \bar{\in} \mathscr{X}$. 把相空间 $\mathscr{X}$ 扩充，给它补充一个新点 $\mathfrak{b}$，并且把扩充后的相空间记作 $\mathscr{X}_{\mathfrak{b}}$. 在 $\mathscr{X}_{\mathfrak{b}}$ 中引进 σ 代数 $\mathfrak{B}_{\mathfrak{b}}$，它由属于 $\mathfrak{B}$ 的所有集 B 和形如 $B \cup \{\mathfrak{b}\}$，$B \in \mathfrak{B}$，的集组成. 对 $x = \mathfrak{b}$，$B \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{b}}$，补定义函数 $P(s, x, t, B)$：当 $x \neq \mathfrak{b}$ 时，令

$$\tilde{P}(s, x, t, B) = P(s, x, t, B \backslash \{\mathfrak{b}\}) + \chi(B, \mathfrak{b}) \tilde{p}(s, x, t),$$

而当 $x = \mathfrak{b}$ 时，令

$$\tilde{P}(s, \mathfrak{b}, t, B) = \chi(B, \mathfrak{b}).$$

引理 1 随机核族 $\tilde{P}(s, x, t, B)$ $(s \in \mathscr{I}, t \in \mathscr{I}, s < t)$，$x \in \mathscr{X}_{\mathfrak{b}}$，$B \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{b}}$，是马尔科夫随机核族.

为证明引理只需要验证，$\tilde{P}$ 满足 Колмогоров-Chapman 方程. 有

$$\tilde{P}(s, \mathfrak{b}, t, B) = \tilde{P}(s, \mathfrak{b}, u, \{\mathfrak{b}\}) \tilde{P}(u, \mathfrak{b}, t, B)$$

$$= \int_{\mathscr{X}_{\mathfrak{b}}} \tilde{P}(s, \mathfrak{b}, u, dx) \tilde{P}(u, x, t, B),$$

$$B \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{b}}, s < u < t.$$

如果 $B \in \mathfrak{B}$, $x \in \mathscr{X}$, 则

$$\tilde{P}(s, x, t, B) = P(s, x, t, B) = \int_{\mathscr{X}} P(s, x, u, dy)$$

$$\cdot P(u, y, t, B) = \int_{\mathscr{X}_{\mathfrak{b}}} \tilde{P}(s, x, u, dy)\ \tilde{P}(u, y, t, B).$$

现设 $x \in \mathscr{X}$, $B_0 \in \mathfrak{B}$, $B = B_0 \cup \{\mathfrak{b}\}$. 那末

$$\tilde{P}(s, x, t, B) = P(s, x, t, B_0) + \tilde{P}(s, x, t, \{\mathfrak{b}\})$$

$$= \int_{\mathscr{X}_{\mathfrak{b}}} \tilde{P}(s, x, u, dy)\tilde{P}(u, y, t, B_0) + \tilde{P}(s, x, t, \{\mathfrak{b}\}).$$

但

$$\tilde{P}(s, x, t, \{\mathfrak{b}\}) = 1 - P(s, x, t, \mathscr{X})$$

$$= 1 - \int_{\mathscr{X}} P(s, x, u, dy) P(u, y, t, \mathscr{X})$$

$$= 1 - \int_{\mathscr{X}_{\mathfrak{b}}} P(s, x, u, dy) P(u, y, t, \mathscr{X})$$

$$= \int_{\mathscr{X}_{\mathfrak{b}}} \tilde{P}(s, x, u, dy)\tilde{P}(u, y, t, \{\mathfrak{b}\}).$$

所以

$$\tilde{P}(s, x, t, B_0 \cup \{\mathfrak{b}\}) = \int_{\mathscr{X}_{\mathfrak{b}}} \tilde{P}(s, x, u, dy)\tilde{P}(u, y, t, B_0)$$

$$+ \int_{\mathscr{X}_{\mathfrak{b}}} \tilde{P}(s, x, u, dy)\tilde{P}(u, y, t, \{\mathfrak{b}\})$$

$$= \int_{\mathscr{X}_{\mathfrak{b}}} \tilde{P}(s, x, u, dy)\ \tilde{P}(u, y, t, B_0 \cup \{\mathfrak{b}\}).$$

引理得证.

如上所证，可以相当容易地把马尔科夫半随机核族化为马尔科夫随机核族. 尽管如此，由于相空间补充了一个新点，它的拓扑结构发生了变化. 所以，区别这两种情形有时还是有意义的.

定义 2 由相空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$、时间区间 $\mathscr{I}$ 和 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 中的马尔科夫半随机核族 $\{P_{st}(x, B), s < t, (s, t) \in \mathscr{I} \times \mathscr{I}\}$ 所组成的对象的全体，称做**中断广义马尔科夫过程**. ["中断"二字是

指体系从相空间中消失(过程中断)的可能性.]而若 $P_{st}(x, \mathscr{X}) \equiv 1$，则称这样的过程是**不中断**的.

马尔科夫过程的流入律 因为这一节只考虑广义马尔科夫过程,所以常将“广义”二字省略.

回忆上面给出的(中断或不中断)马尔科夫过程的定义,可见它们一般并不以事件 $\{x_t \in B\}$ 的概率有定义为前提.

然而，如果在 $\mathfrak{B}$ (或 $\mathfrak{B}_b$) 上给出一个概率测度 q_s，并且令 $P\{x_s \in B\} = q_s(B)$，则根据概率论的一般公式,当 $t > s$时，事件 $\{x_t \in B\}$ 的概率 $q_t(B)$ 应由下面的等式来定义:

$$q_t(B) = P\{x_t \in B\} = \int P(s, x, t, B) q_s(dx). \tag{3}$$

这个定义就下面的理解是合理的.

根据(3)式算出 q_u 和 $q_t(s < u < t)$，然后在(3)中令 $s = u$，$q_s = q_u$，再重新计算 q_t. 那末，用不同方法算出的测度 q_t 相同. 确切地说就是：对给定的 t, s 和 $q_s = q_u$，如果把按(3)式求 q_t 的运算记作 $q_t = F_t(s, q)$，则对任意 $u \in (s, t)$ 有

$$q_t = F_t(u, q_u) = F_t(u, F_u(s, q)). \tag{4}$$

这一命题的证明要用到一个简单的引理.

设 $\{\mathscr{X}_i, \mathfrak{B}_i\}$ $(i = 1, 2)$ 是两个可测空间，m 是 $\mathfrak{B}_1$ 上的测度，$q(x, B)$ $(x \in \mathscr{X}_1, B \in \mathfrak{B}_2)$ 是半随机核.

令

$$q(B) = \int_{\mathscr{X}_1} q(x, B) m(dx).$$

显然，$q(B)$ 是 $\mathfrak{B}_2$ 上的测度,并且 $q(B) \leqslant m(\mathscr{X}_1)$.

引理 2 如果测度 m 有穷，则对任意有界并且 $\mathfrak{B}_2$ 可测的函数 $f(y)$ 有

$$\int_{\mathscr{X}_1} m(dx) \int_{\mathscr{X}_2} f(y) q(x, dy) = \int_{\mathscr{X}_2} f(y) q(dy). \tag{5}$$

证. 记 K 为使(5)成立的函数类. 那末，K 包含属于 $\mathfrak{B}_2$ 的集合的示性函数，并且是线性的，从而它包含所有简单函数. 其次，K 关于单调序列的极限运算封闭;因而它包含所有非负的和有

界的 $\mathfrak{B}_2$ 可测函数．引理得证．

利用已证明的引理，容易验证(4)式．事实上，由 Колмогоров-Chapman 方程：

$$F_t(u, F_u(s, q)) = \int P(u, y, t, B) q_u(dy)$$
$$= \int q(dx) \int P(u, y, t, B) P(s, x, u, dy)$$
$$= \int P(s, x, t, B) q(dx) = F_t(s, q).$$

由上面证明的事实可见，如果 $\mathscr{I}$ 中有最小元素 a，并且随意给出一个概率测度 $q_a: q_a(B) = \mathbf{P}\{x_a \in B\}$，则可以由 (3) 式得到随机元素 x_t 在以后所有时刻的分布． 如果 $\mathscr{I}$ 中没有最小元素，为对所有 $t \in \mathscr{I}$ 给出 x_t 的分布，则显然必须在 $\mathfrak{B}$ 上给出这样一族概率分布 $\{q_t, t \in \mathscr{I}\}$，使它的任意两个测度都满足 (3) 式．

定义 3 称 $\mathfrak{B}$ 上的概率测度族$\{q_t, t \in \mathscr{I}\}$为**广义马尔科夫过程的流入律**，如果它和转移概率有 (3) 式的关系．

前面的论述表明，如果 $\mathscr{I}$ 有最小元素 a，则 $\mathfrak{B}$ 上的测度族

$$q_t(B) = \int P(a, x, t, B) q(dx)$$

(其中 q 为 $\mathfrak{B}$ 上的任意概率测度) 是马尔科夫过程的流入律．

由转移概率产生的算子 转移概率可以与两个算子族相联系．

记 $\mathscr{M} = \mathscr{M}(\mathfrak{B})$ 为 $\mathfrak{B}$ 上所有有穷测度的全体． 令 $m_{ts} = \mathbf{T}_{ts}^* m$，其中

$$m_{ts}(B) = \int P(s, y, t, B) m(dy), \quad s \leqslant t, \ B \in \mathfrak{B}. \tag{6}$$

显然，$\mathbf{T}_{ts}^*$ 是把 $\mathscr{M}$ 映入 $\mathscr{M}$ 的算子．由 Колмогоров-Chapman 公式可以得出算子 $\mathbf{T}_{ts}^*$ 的简单复合律．

设 $s < u < t$．利用方程 (2) 和引理 2，得

$$m_{ts}(B) = \int_{\mathscr{X}} m(dx) \int P(u, y, t, B) P(s, x, u, dy)$$

$$=\int_{\mathscr{X}}\left(\int_{\mathscr{X}} P(s, x, u, dy)\, m(dx)\right) P(u, y, t, B)$$

$$=\int_{\mathscr{X}} m_{us}(dy) P(u, y, t, B),$$

又可以写成

$$\mathbf{T}_{ts}^{*}=\mathbf{T}_{tu}^{*}\mathbf{T}_{us}^{*}\ (s<u<t). \tag{7}$$

从而，作为区间 $[s, t]$ 的函数，算子族 $\mathbf{T}_{ts}^{*}$ 在一定意义上是区间的有向可乘函数．这里，区间的可乘函数的方向是指(对应于区间的给定分割的)乘积因子的两个可能的排列顺序之一．

现在要引进的另一个算子族，它作用于全体有界 $\mathfrak{B}$ 可测函数空间． 记该空间为 $b(\mathfrak{B})$，它的全体非负函数记作 $b(\mathfrak{B})_{+}$． 令 $\mathbf{T}_{st}f=f_{st}$，其中

$$f_{st}=\int f(y) P(s, x, t, dy).$$

由转移概率关于 x 的 $\mathfrak{B}$ 可测性知，函数 $f_{st}(x)$ 为 $\mathfrak{B}$ 可测． 其次，如果在 $b(\mathfrak{B})$ 中引进范数：$\|f\|=\sup|f(x)|$，则显然 $\|f_{st}\|\leqslant\|f\|$.

因而，算子 $\mathbf{T}_{st}$ 把 $b(\mathfrak{B})$ 和 $b(\mathfrak{B})_{+}$ 变换为它自身．当 $s<u<t$ 时，利用 Колмогоров-Chapman 公式和引理 2，得

$$\begin{aligned} f_{st}(x) &= \int f(y) P(s, x, t, dy) \\ &= \int f(y) \int P(s, x, u, dz) P(u, z, t, dy) \\ &= \int f_{ut}(z) P(s, x, u, dz) \end{aligned}$$

或

$$\mathbf{T}_{st}=\mathbf{T}_{su}\mathbf{T}_{ut} \qquad (s<u<t). \tag{8}$$

因而，算子 $\mathbf{T}_{st}$ 也构成区间的(不可交换的)可乘函数，但是它的方向性与 $\mathbf{T}_{ts}^{*}$ 不同．

如果 $P_{st}(x, \mathscr{X})=1$，则

$$\mathbf{T}_{st}1=1;$$

一般 $\mathbf{T}_{st}1\leqslant 1$．因为 $P_{ss}(x, B)=\chi(B, x)$，所以

$$\mathbf{T}_{ss}f=f \text{ 或 } \mathbf{T}_{ss}=\mathbf{I},$$

其中 $\mathbf{I}$ 是单位算子.

定义 4 马尔科夫过程称为齐次的，如果 $\mathscr{I}=[0,\infty)$，并且核 $P_{st}(x,B)$ 作为变量 (s,t) 的函数仅依赖于差 $t-s$:

$$P_{st}(x,B)=P_{t-s}(x,B)\qquad(t>s).$$

对于齐次马尔科夫过程，Колмогоров-Chapman 方程具有如下形式:

$$P_{u+v}(x,B)=\int P_u(x,dy)P_v(y,B),\ u>0,\ v>0.\qquad(9)$$

核族 $\{P_t(x,B),t>0\}$ 又称做齐次马尔科夫过程的转移概率.

对齐次情形，算子 $\mathbf{T}^*_{t+s,s}$ 和 $\mathbf{T}_{s,s+t}$ 都不依赖于 s. 因此，用由

$$\mathbf{T}^*_t m(B)=\int P_t(x,B)m(dx),$$

$$\mathbf{T}_t f(x)=\int f(y)P_t(x,dy)$$

所决定的单参数算子族 $\{\mathbf{T}^*_t,t>0\}$ 和 $\{\mathbf{T}_t,t>0\}$ 来代替两个参数的算子族 $\{\mathbf{T}^*_{ts},t>s>0\}$ 和 $\{\mathbf{T}_{st},0<s<t\}$ 更为适宜. 这样，复合公式 (7) 和 (8) 就具有如下形式:

$$\mathbf{T}^*_{u+v}=\mathbf{T}^*_u\mathbf{T}^*_v,\ \mathbf{T}_{u+v}=\mathbf{T}_u\mathbf{T}_v;$$

这说明，算子族 $\{\mathbf{T}^*_t,t>0\}$，$\{\mathbf{T}_t,t>0\}$ 在相应的空间中组成算子半群(见第二章).

Колмогоров 方程 可以指出马尔科夫过程论的下面一些最重要的问题:

a) 确定具有各种独特性质的重要马尔科夫过程类(模型)，并用转移概率族来描述它们;

b) 全面地、构造性地描述对应于已知马尔科夫过程类的转移概率;

c) 研究各种马尔科夫过程类的转移概率的渐近性质.

当然，上面的提法是很一般和很不确切的，而实际的研究领域是十分广泛的. 在这一节我们只能涉及它的个别环节. 这里所引进的定义和结果是初步的，其目的在于说明一般问题的提法和后

面将要得到的有关结果.

马尔科夫过程的分类，首先是它们按相空间的分类. 从这个角度来看，最简单的过程是有限和可列状态马尔科夫过程. 这时，如果给转移概率加上一些解析上的限制，则可以使 Колмогоров-Chapman 方程线性化，由此得到常微分方程组（即所谓 Колмогоров 向前微分方程和向后微分方程），在一些场合它们完全决定转移概率.

在更为一般的相空间中，可以这样来定义广义马尔科夫过程，使它的转移概率具备某些性质，而且这些性质反映体系在相空间中运动特点的直观概念. 根据这种观点可以定义如下一些过程类.

a）跳跃过程. 这类过程对应这样的体系：体系落入相空间的某点之后，在一个随机的正时间区间之内逗留于该点，随后由一个跳跃随机地落入空间另外一点；然后体系在此又渡过一个随机时间区间，等等.

b）具有离散随机扰动的过程. 这种过程本身就是动态体系，其轨道在随机时刻呈现具有随机跃度第一类间断点.

c）扩散过程. 这是指有穷维线性空间中的过程，它们在短时间区间上的行为类似于连续独立增量过程.

d）有穷维空间中在短时间区间上、可以用任意独立增量过程逼近的马尔科夫过程.

在定义各种广义马尔科夫过程类时，通常是以前面提到的、关于 Колмогоров-Chapman 方程线性化的思想为出发点. 这就是给转移概率附加一些条件，使它的非线性方程（2）可以化为线性方程. 后者是积分-微分方程，或者是抛物型偏微分方程，或是既包含一阶和二阶偏导数又有积分项的方程. 下面将要对于某些马尔科夫过程类导出这种方程. 现在我们指出推导这些方程的方法的一般思想.

设 $\mathscr{I}=[0,t^*)$. 固定某个 $t\in\mathscr{I}$，记 $\mathscr{D}$ 为满足下列条件的函数类：$f(x)\in b(\mathfrak{B})$，对每个 $s\in(0,t)$，$x\in\mathscr{X}$，存在极限

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{\mathbf{T}_{s-h,s}f(x)-f(x)}{h}=\mathbf{A}_s f(x)$$

和

$$\lim_{h\downarrow 0}\mathbf{T}_{t-h,t}f(x)=f(x).$$

这里 $\mathbf{A}_s$ 是定义在 $\mathscr{D}$ 上、依赖于 $s\in(0,t)$ 的算子. 显然, $\mathscr{D}$ 是线性空间,而 $\mathbf{A}_s$ 是线性算子.

令

$$f(s,x)=\mathbf{T}_{st}f(x),\quad s\in[0,t].$$

假设 $\mathbf{T}_{st}f(x)\in\mathscr{D}$. 那末,对函数 $f(s,x)$ 的左导数有

$$\frac{\partial f(s,x)}{\partial s}=\lim_{h\downarrow 0}\frac{f(s-h,x)-f(s,x)}{-h}$$

$$=-\lim_{h\downarrow 0}\frac{\mathbf{T}_{s-h,s}f(s,x)-f(s,x)}{h}=-\mathbf{A}_s f(s,x).$$

在很多场合,由此可推出导数 $\frac{\partial f(s,x)}{\partial s}$ 的存在性,因而它满足方程

$$\frac{\partial f(s,x)}{\partial s}=-\mathbf{A}_s f(s,x),\ s\in(0,t). \tag{10}$$

还应根据 $\mathscr{D}$ 的定义给出方程的边界条件

$$\lim_{s\uparrow t}f(s,x)=f(x). \tag{11}$$

当 $\chi(B,x)\in\mathscr{D}$ 时,令 $f(x)=\chi(B,x)$. 可见 $f(s,x)=P(s,x,t,B)$ 满足方程

$$\frac{\partial P(s,x,t,B)}{\partial s}=-\mathbf{A}_s[P(s,x,t,B)],\ s\in[0,t],$$

$$\lim_{s\uparrow t}P(s,x,t,B)=\chi(B,x).$$

甚至当 $\chi(B,x)\bar{\in}\mathscr{D}$ 时,函数类 $\mathscr{D}$ 仍然可以是相当广泛的,以致使 $\mathbf{T}_{st}f(x)$ ($f\in\mathscr{D}$) 的值唯一地决定转移概率 $P(s,x,t,B)$. 如果类 $\mathscr{D}$ 关于函数的有界逐点收敛在 $b(\mathfrak{B})$ 中处处稠密,则上述情形成立. 这时,如果对任意 $f\in\mathscr{D}$ 方程(10)—(11)解的存在性和唯

一性定理成立，则它们(在区间 $(0, t)$ 上)唯一决定转移概率，并且可以用来实际求出函数 $P(s, x, t, B)$ 或者研究它的性质.

方程 (10)—(11) 称为 Колмогоров **向后方程**.

类似的讨论也适用于算子族 $\{\mathbf{T}^*_{ts}, t \geqslant s \geqslant 0\}$.

记 $W = W(\mathfrak{B})$ 为 $\mathfrak{B}$ 上全体有穷负荷的空间，即 $\mathfrak{B}$ 上全体有穷完全可加集函数的集合；记 $\mathscr{D}^*$ 为 W 的子集，它由满足下列条件的负荷 $q(B)$ 组成：对任意 $(t, B) \in [s, t^*) \times \mathfrak{B}_0$ (其中 $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$, s 固定)存在极限

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbf{T}^*_{t+h,t} q(B) - q(B)}{h} = \mathbf{A}^*_t q(B),$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \mathbf{T}^*_{s+h,s} q(B) = q(B).$$

令 $q(t, B) = \mathbf{T}^*_{ts} q(B)$. 如果对 $q(B)$ 有 $q(t, B) \in \mathscr{D}^*$, 则一阶导数 $\frac{\partial q(t, B)}{\partial t}$ 存在，并且

$$\frac{\partial q(t, B)}{\partial t} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{q(t+h, B) - q(t, B)}{h}$$
$$= \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbf{T}^*_{t+h,t} q(t, B) - q(t, B)}{h},$$

于是 $q(t, B)$ 满足方程

$$\frac{\partial q(t, B)}{\partial t} = \mathbf{A}^*_t q(t, B), \tag{12}$$

$$\lim_{t \downarrow s} q(t, B) = q(B). \tag{13}$$

如果 $\chi(B, x) \in \mathscr{D}^*$, 则当 $q(B) = \chi(B, x)$ 时，方程 (12)—(13) 化为

$$\frac{\partial P(s, x, t, B)}{\partial t} = \mathbf{A}^*_t [P(s, x, t, B)],$$

$$\lim_{t \downarrow s} P(s, x, t, B) = \chi(B, x).$$

称方程 (12)—(13) 为 Колмогоров **向前方程**. 关于这些方程及其应用可以作与 Колмогоров 向后方程类似的说明.

下面我们将给出部分马尔科夫过程类的算子 $\mathbf{A}_s$ 和 $\mathbf{A}_t^*$ 的形式.

有穷或可列状态过程 设 $\mathscr{X}$ 是由有限或可数个点组成的空间，$\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{X}$ 的全体子集类. 我们用 $i, j, k, \cdots$ 表示空间 $\mathscr{X}$ 的点. 考虑在 $\mathscr{X}$ 中取值的不中断广义马尔科夫过程. 令

$$p_{ij}(s, t) = P(s, i, t, \{j\}).$$

显然，对任意 $B \subset \mathscr{X}$，概率 $p_{ij}(s, t)$ 决定转移概率

$$P(s, i, t, B) = \sum_{j \in B} p_{ij}(s, t).$$

下列各式显然:

$$p_{ij}(s, t) \geqslant 0, \ \sum_{j \in \mathscr{X}} p_{ij}(s, t) = 1, \ p_{ij}(s, s) = \delta_{ij}.$$

设 $f(j)$ 是 $\mathscr{X}$ 上的任意有界函数. 这时，算子 $\mathbf{T}_{st}$ 由下面的式子给出

$$f_{st}(i) = \mathbf{T}_{st} f(i) = \sum_{j \in \mathscr{X}} p_{ij}(s, t) f(j).$$

如果 m 是 $\mathfrak{B}$ 上的任意测度，$m(j) = m(\{j\})$，则算子 $\mathbf{T}_{ts}^*$ 决定于下列关系式

$$m_{ts}(j) = \mathbf{T}_{ts}^* m(\{j\}) = \sum_{i \in \mathscr{X}} m(i) p_{ij}(s, t).$$

这时，Колмогоров-Chapman 方程具有如下形式:

$$p_{ij}(s, t) = \sum_{k \in \mathscr{X}} p_{ik}(s, u) p_{kj}(u, t) \qquad (s \leqslant u \leqslant t).$$

可以把上面的式子写得更精炼些. 假设 $\mathscr{X}$ 的元素按某种方式排成一个序列. 以 $P(s, t)$ 表示以 $p_{ij}(s, t)$ 为元的矩阵，f 表示以 $f(i)$ 为分量的列向量；类似，m 是列向量，分量为 $m(i)$；$P^*(s, t)$ 是矩阵 $P(s, t)$ 的转置，m^* 是行向量（单行矩阵，即单列矩阵的转置）. 那末

$$\mathbf{T}_{st} f = P(s, t) f, \ \mathbf{T}_{ts}^* m = m^* P^*(s, t),$$

$$P(s, t) = P(s, u) P(u, t), \ (s \leqslant u \leqslant t).$$

Колмогоров-Chapman 方程表明，矩阵 $P(s, t)$ 是区间 (s, t) 的可

乘函数.

集 $\mathscr{D}$ 由所有满足下列条件的序列 $\{f(j), j\in\mathscr{X}\}$ 组成：对任意 $i\in\mathscr{X}$，$s\in(0, t)$，存在极限

$$(\mathbf{A}_s f)(i)=\lim_{h\downarrow 0}\sum_{j\in\mathscr{X}}\frac{p_{ij}(s-h, s)-\delta_{ij}}{h}f(j),$$

并且

$$\lim_{h\downarrow 0}\sum_{j\in\mathscr{X}}p_{ij}(t-h, t)f(j)=f(i).$$

这里，当 $i=j$ 时 $\delta_{ij}=1$，而当 $i\neq j$ 时 $\delta_{ij}=0$.

例如，如果对每对 $(i, j)\in\mathscr{X}\times\mathscr{X}$ 和 $s\in(0, t]$ 存在有穷极限

$$a_{ij}(s)=\lim_{h\downarrow 0}\frac{p_{ij}(s-h, s)-\delta_{ij}}{h}, \tag{14}$$

则 $\mathscr{D}$ 包含满足条件 $\sum\limits_{j\in\mathscr{X}}|f(j)|<\infty$ 的所有序列 $f(j)$，这时

$$(\mathbf{A}_s f)(i)=\sum_{j\in\mathscr{X}}a_{ij}(s)f(j). \tag{15}$$

在很多场合上面的说明是不够的，需要进一步阐述．为此我们指出，如果极限 (14) 存在，则

$$a_i(s)=a_{ii}(s)\leqslant 0,\ a_{ij}(s)\geqslant 0 \qquad (i\neq j).$$

由不等式

$$\frac{1-p_{ii}(s-h, s)}{h}\geqslant\sum_{j\in J}\frac{p_{ij}(s-h, s)}{h}$$

(J 是有穷下标集，$i\bar{\in}J$) 可见

$$\sum_j{}^{(i)}a_{ij}(s)\leqslant a_i(s), \tag{16}$$

其中 $\sum\limits_j{}^{(i)}$ 表示对所有 $j\in\mathscr{X}\backslash\{i\}$ 求和．在充分规则的场合，例如当级数

$$\sum_j{}^{(i)}\frac{p_{ij}(s-h, s)}{h}$$

对任意 $s\geqslant 0$ 关于 $h>0$ 一致收敛时，可以把不等式 (16) 化为

等式

$$\sum_j^{(i)} a_{ij}(s) = a_i(s). \tag{17}$$

引理 3 如果对任意 $(i,j)\in\mathscr{X}\times\mathscr{X}$ 和 $s>0$ 极限 (14) 存在，而且等式 (17) 成立，则 $\mathscr{D}$ 包含所有有界序列 $\{f(j), j\in\mathscr{X}\}$.

证. 注意，由引理的条件可知，级数 (15) 绝对收敛. 不失一般性，可以假设 $\sup|f(j)|\leqslant 1$. 考虑差

$$\Delta = \sum_{j\in\mathscr{X}} \frac{p_{ij}(s-h,s)-\delta_{ij}}{h} f(j) - \sum_{j\in\mathscr{X}} a_{ij}(s) f(j).$$

对任意 $\varepsilon>0$ 存在一个有穷集 $J\subset\mathscr{X}$，使 $i\in J$，并且

$$\sum_{j\in\mathscr{X}\setminus J} a_{ij}(s) = -\sum_{j\in J} a_{ij}(s) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

现在有不等式

$$|\Delta| \leqslant \left|\sum_{j\in J}\left[\frac{p_{ij}(s-h,s)-\delta_{ij}}{h} - a_{ij}\right]\right| + \sum_{j\in\mathscr{X}\setminus J}\frac{p_{ij}(s-h,s)}{h} + \frac{\varepsilon}{4}.$$

选择一个 $h_0>0$，使对任意 $h\in(0,h_0)$ 上式右侧第一项小于 $\varepsilon/4$. 这时

$$\sum_{j\in\mathscr{X}\setminus J}\frac{p_{ij}(s-h,s)}{h} = \sum_{j\in J}\left(\frac{\delta_{ij}-p_{ij}(s-h,s)}{h} + a_{ij}(s)\right) - \sum_{j\in J} a_{ij}(s) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因而，当 $h\in(0,h_0)$ 时 $|\Delta|<\varepsilon$. 引理得证.

为得到上述过程的 Колмогоров 向后方程，我们加强关于存在极限 (14) 的要求，引进更强的条件，即要求存在极限

$$\lim_{s_1\uparrow s, s_2\downarrow s} \frac{p_{ij}(s_1,s_2)-\delta_{ij}}{s_2-s_1} = a_{ij}(s). \tag{18}$$

我们指出，仿照引理 3 可以证明下面的命题：如果对所有 j，极限 (18) 在 s 点存在，并且等式 (17) 成立，则级数

$$\sum_{j\in\mathscr{X}} \frac{p_{ij}(s_1, s_2)-\delta_{ij}}{s_2-s_1} \tag{19}$$

关于 s_1 和 s_2，$s_1<s<s_2$，$s_2-s_1<h_0$，一致收敛.

定理 1 如果对任意 $(i, j, s)\in\mathscr{X}\times\mathscr{X}\times(0, t)$ 极限(18)存在并满足等式(17)，则概率 $p_{ij}(s, t)$ 对 $s(0<s<t)$ 可微，并且满足下列微分方程组（Колмогоров 向后方程）

$$-\frac{\partial p_{ij}(s, t)}{\partial s}=\sum_{x\in\mathscr{X}} a_{ik}(s)p_{kj}(s, t). \tag{20}$$

证. 因为

$$-\frac{\partial p_{ij}(s, t)}{\partial s}=\lim_{s_1\uparrow s, s_2\downarrow s}\frac{p_{ij}(s_1, t)-p_{ij}(s_2, t)}{s_2-s_1}$$

$$=\lim_{s_1\uparrow s, s_2\downarrow s}\sum_{k\in\mathscr{X}}\frac{p_{ik}(s, t)-\delta_{ik}}{s_2-s_1}p_{kj}(s_2, t),$$

所以由上面提到的级数(19)的一致收敛性，有

$$-\frac{\partial p_{ij}(s, t)}{\partial s}-\sum_{k\in\mathscr{X}} a_{ik}(s)p_{kj}(s, t)$$

$$=\lim_{s_1\uparrow s, s_2\downarrow s}\sum_{x\in\mathscr{X}}\left[\frac{p_{ik}(s_1, s_2)-\delta_{ik}}{s_2-s_1}-a_{ik}(s)\right]p_{kj}(s_2, t)$$

$$+\lim_{s_2\downarrow s}\sum_{k\in\mathscr{X}} a_{ik}(s)[p_{kj}(s_2, t)-p_{kj}(s, t)]=0.$$

定理得证.

现在来推导 Колмогоров 向前方程. 我们只限于考虑状态有限的情形（$\mathscr{X}$ 由有限个点组成）. 假设极限(18)存在. 那末(17)式自然成立.

设

$$m_j(t)=\sum_{k\in\mathscr{X}} m_k(t)p_{kj}(s, t),\ t>s.$$

那末当 $t_1<t<t_2$ 时，

$$\frac{m_j(t_2)-m_j(t_1)}{t_2-t_1}=\sum_{k\in\mathscr{X}} m_k(t_1)\frac{p_{kj}(t_1, t_2)-\delta_{kj}}{t_2-t_1}\rightarrow$$

$$\sum_{k\in\mathscr{X}} m_k(t)a_{kj}(t).$$

因而

$$\frac{\partial m_j(t)}{\partial t}=\sum_{k\in\mathscr{X}} m_k(t)a_{kj}(t),\ t>s. \tag{21}$$

特别

$$\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial t}=\sum_{k\in\mathscr{X}} p_{ik}(s,t)a_{kj}(t),\ t>s. \tag{22}$$

在状态有限的场合,方程组(20)或(22)是线性常微分方程组.在关于函数 $a_{kj}(s)$ 的相当宽的条件下，它有唯一解满足初始条件 $p_{kj}(s,s)=\delta_{kj}$. 因而，这时每个 Колмогоров 方程组都唯一决定转移概率.

广义跳跃过程 在充分正则的场合可以预料到，可列状态马尔科夫过程是下面一种过程的模型：在一个随机时间区间内动点处于初始状态，之后按一定的概率规律转移到另外一个可能的状态,并在一个随机时间区间内逗留于该状态中,然后又转移到新的状态,等等.

可以在任意相空间内考虑类似的过程；称它们为跳跃马尔科夫过程.

在相空间 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 中考虑广义马尔科夫过程，它的转移概率为 $P(s,x,t,B)$, $s<t,(s,t)\in\mathscr{I}\times\mathscr{I}$. 假设 σ 代数 $\mathfrak{B}$ 包含 $\mathscr{X}$ 的单点子集. 我们只考虑不中断过程.

定义 5 广义马尔科夫过程称为跳跃的，如果对任意 $(s,x,B)\in\mathscr{I}\times\mathscr{X}\times\mathfrak{B}$ 存在极限

$$\lim_{t\downarrow s}\frac{P(s,x,t,B)-\chi(B,x)}{t-s}=\bar{a}(s,x,B), \tag{23}$$

而且对固定的 (s,x), $\bar{a}(s,x,B)$ 是 $\mathfrak{B}$ 上的有限负荷.

广义跳跃马尔科夫过程称为规则的，如果在(23)式中关于 $(s,x,B)\in[0,t]\times\mathscr{X}\times\mathfrak{B}$ 的收敛是一致的，并且当 (x,B) 固定时，函数 $\bar{a}(s,x,B)$ 关于 (x,B) 对 $s\in[0,t]$ 一致连续，其中 t 是 $\mathscr{I}$ 中的任意数.

我们指出,函数 $\bar{a}(s, x, B)$ 具有如下性质:

$$\bar{a}(s, x, \mathscr{X}) = 0,$$

$$\bar{a}(s, x, B) = \lim_{t \downarrow s} \frac{P(s, x, t, B)}{t - s} \geqslant 0, \ x \bar{\in} B,$$

$$\bar{a}(s, x, \{x\}) = -\bar{a}(s, x, \mathscr{X} \setminus \{x\})$$

$$= \lim_{t \downarrow s} \frac{P(s, x, t, \{x\}) - 1}{t - s} \leqslant 0,$$

其中 $\{x\}$ 是一个点 x 的单点集. 可以把这些式子联立为

$$\bar{a}(s, x, B) = -a(s, x)\chi(B, x) + a(s, x, B),$$

其中

$$a(s, x) = -\bar{a}(s, x, \{x\}), \ a(s, x, B) = \bar{a}(s, x, B \setminus \{x\}),$$

而 $a(s, x, B)$ 是 $\mathfrak{B}$ 上的有限测度, $a(s, x, \{x\}) = 0$.

对于规则跳跃过程,由 (23) 式的一致收敛性可见, $\bar{a}(s, x, B)$ 是 $\mathfrak{B}$ 上的有限负荷.

事实上,由函数 $a(s, x, B)$ 的定义可以直接看出,它是 $\mathfrak{B}$ 上的非负可加集函数. 现在设 $B_n \subset B_{n+1}$, $B_n \in \mathfrak{B}$, $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $x \bar{\in} B$. 那末

$$a(s, x, B) = \lim_{t \downarrow s} \frac{P(s, x, t, B)}{t - s} = \lim_{t \downarrow s} \lim_{n \to \infty} \frac{P(s, x, t, B_n)}{t - s}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \lim_{t \downarrow s} \frac{P(s, x, t, B_n)}{t - s} = \lim_{n \to \infty} a(s, x, B_n);$$

因为 (23) 式关于 B 为一致收敛,所以可以变更极限顺序. 从而函数 $a(s, x, B)$ 的完全可加性得证.

我们再指出规则跳跃马尔科夫过程的一个性质: 对每个 $t \in \mathscr{I}$ 存在这样一个常数 K, 使对所有 $(s, x, B) \in [0, t] \times \mathscr{X} \times \mathfrak{B}$ 有

$$|\bar{a}(s, x, B)| \leqslant K.$$

从现在起,我们在这一节中只考虑规则跳跃过程.

令

$$\Pi(t, x, B) = \begin{cases} \dfrac{a(t, x, B)}{a(t, x)}, & \text{当 } a(t, x) > 0, \\ \chi(B, x), & \text{当 } a(t, x) = 0. \end{cases}$$

对固定的 (t, x), $\Pi(t, x, B)$ 是 $\mathfrak{B}$ 上的概率测度. 不难看出它的概率意义. 由(23)可见,当 $\Delta t \to 0$, $\varepsilon \to 0$ 时,

$$P(t, x, t + \Delta t, \{x\}) = 1 - (a(t, x) + \varepsilon)\Delta t.$$

因而,精确到高阶无穷小, $a(t, x)\Delta t$ 是"在时刻 t 动点处于状态 x, 而在时刻 $t + \Delta t$ 它已不在该状态"的概率. 其次,当 $a(t, x) \neq 0$ 时,

$$\Pi(t, x, B) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t, x, t + \Delta t, B \setminus \{x\})}{P(t, x, t + \Delta t, \mathscr{X} \setminus \{x\})}.$$

这样, $\Pi(t, x, B)$ 可视为"体系在时刻 t 处于状态 x 并在同一时刻离开此状态, 通过一个跳跃落入集 B"的条件概率. 之所以能解释函数 $\Pi(t, x, B)$, 在第三章 § 1 将得到证明.

关系式(23)可以化为

$$\begin{aligned} P(s, x, t, B) = [1 - a(s, x)(t - s)]\chi(B, x) \\ + [a(s, x, B) + r(s, x, t, B)](t - s), \end{aligned} \tag{24}$$

其中 $r(s, x, t, B)$ 是某一个函数,当 $t \downarrow s$ 时,它关于 (s, x, B), $s \in [0, t]$, 一致收敛于 0.

特别,由上式可见,对任意 $u \in \mathscr{I}$ 有

$$|P(s, x, t, B) - \chi(B, x)| \leqslant K_1(t - s), \tag{25}$$

其中 K_1 是常数, 不依赖于 $(s, x, t, B) \in [0, u] \times \mathscr{X} \times [0, u] \times \mathfrak{B}$.

现在我们来推导跳跃过程的 Колмогоров 方程. 先推导向前方程.

设 s 固定 $(t > s)$, m 是 $\mathfrak{B}$ 上的任意概率测度,而 $m_t(B) = \mathbf{T}^*_{ts} m(B)$, 其中 $\mathbf{T}^*_{ts}$ 是前面定义的算子. 如果 $t_2 > t_1 > s$, 则

$$m_{t_2}(B) - m_{t_1}(B) = \int_{\mathscr{X}} m_{t_1}(dx)\,[P(t_1, x, t_2, B) - \chi(B, x)].$$

因此，由不等式 (25) 可见

$$\sup_B |m_{t_2}(B) - m_{t_1}(B)| \leqslant K_1(t_2 - t_1).$$

其次，由 (24) 可知

$$m_{t_2}(B) - m_{t_1}(B) = (t_2 - t_1)\int_{\mathscr{X}} [\bar{a}(t_1, x, B) + r(t_1, x, t_2, B)]\, m_{t_1}(dx). \tag{26}$$

现在令 $t_2 \downarrow t$, $t_1 \uparrow t$. 那末

$$\begin{aligned}
&\sup_{(x,B)} \left| \frac{m_{t_2}(B) - m_{t_1}(B)}{t_2 - t_1} - \int_{\mathscr{X}} \bar{a}(t, x, B) m_t(dx) \right| \\
&\leqslant \sup_{(x,B)} | r(t_1, x, t_2, B)| \\
&\quad + \sup_{(x,B)} \left| \int_{\mathscr{X}} [\bar{a}(t_1, x, B) - \bar{a}(t, x, B)]\, m_{t_1}(dx) \right| \\
&\quad + \sup_{(x,B)} \left| \int_{\mathscr{X}} \bar{a}(t, x, B)[m_{t_1}(dx) - m_t(dx)] \right| \\
&\leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + K \sup_B | m_{t_1}(B) - m_t(B)|,
\end{aligned}$$

其中

$$\varepsilon_1 = \sup_{(x,B)} | r(t_1, x, t_2, B)| \to 0, \ t_1 \uparrow t, \ t_2 \downarrow t,$$

$$\varepsilon_2 = \sup_{(x,B)} |\bar{a}(t_1, x, B) - \bar{a}(t, x, B)| \to 0, \ t_1 \uparrow t.$$

由 (26) 还可看到，当 $t_1 \uparrow t$ 时，$\sup_B |m_{t_1}(B) - m_t(B)| \to 0$. 从而，我们证明了下面的定理.

定理 2 对于规则跳跃过程，当 $t > s$ 时，$\mathbf{T}^*_{ts}(B)$ 作为自变量 t 的函数可微，而且

$$\frac{dT^*_{ts} m}{dt} = \mathbf{A}^*_t \mathbf{T}^*_{ts} m, \tag{27}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^*_t m(B) &= \int_{\mathscr{X}} \bar{a}(t, y, B) m(dy) \\
&= -\int_B a(t, y) m(dy) + \int_{\mathscr{X}} a(t, y, B)\, m(dy).
\end{aligned}$$

可以把 (27) 式写为

$$\frac{dm_t(B)}{dt} = -\int_B a(t, y)m_t(dy) + \int_{\mathscr{X}} a(t, y, B)m_t(dy).$$

$$(28)$$

设 $m(B) = \chi(B, x)$，得 $m_t(B) = P(s, x, t, B)$. 由定理 2 得下面的推论。

系 规则跳跃过程的转移概率 $P(s, x, t, B)$ 对 t 可微，并且

$$\frac{\partial P(s, x, t, B)}{\partial t} = -\int_B a(t, y)P(s, x, t, dy) + \int_{\mathscr{X}} a(t, y, B)P(s, x, t, dy). \quad (29)$$

由 (23) 式可以得到微分方程 (28) 和 (29) 的初始条件

$$\lim_{t\downarrow s} m_t(B) = m(B), \lim_{t\downarrow s} P(s, x, t, B) = \chi(B, x). \quad (30)$$

如果方程 (29) 对于相应的初始条件有唯一解，则解该方程即可得到所考察过程的转移概率。

现在我们来推导 Колмогоров 向后方程。

设 t 固定，$f(x) \in b(\mathfrak{B})$，$\|f\| = \sup_x |f(x)|$，而

$$f_s(x) = \mathbf{T}_{st} f(x) = \int_{\mathscr{X}} f(y)P(s, x, t, dy), \quad s < t.$$

设 $s_1 < s < s_2 < t$. 那末

$$\begin{aligned} f_{s_2}(x) - f_{s_1}(x) &= \int [f_{s_2}(x) - f_{s_1}(y)] P(s_1, x, s_2, dy) \\ &= (s_2 - s_1) \int [f_{s_2}(x) - f_{s_1}(y)] [\bar{a}(s_1, x, dy) \\ &\quad + r(s_1, x, s_2, dy)]. \end{aligned}$$

由此可见

$$\sup_{\mathscr{X}} |f_{s_2}(x) - f_{s_1}(x)| \leqslant 2(s_2 - s_1) \left[K + 2 \sup_{(x,B)} |r(s_1, x, s_2, B)|\right]. \quad (31)$$

其次，考虑到 $\bar{a}(s, x, \mathscr{X}) = 0$，有不等式

$$\left\| \frac{f_{s_2}(x) - f_{s_1}(x)}{s_2 - s_1} + \int f_s(y) \bar{a}(s, x, dy) \right\|$$

$$\leqslant \left\| \int [f_s(y) - f_{s_2}(y)]\,\bar{a}(s, x, dy) \right\|$$

$$+ \left\| \int f_{s_2}(y) [\bar{a}(s, x, dy) - \bar{a}(s_1, x, dy)] \right\|$$

$$+ \left\| \int [f_{s_2}(x) - f_{s_2}(y)]\; r(s_1, x, s_2, dy) \right\|;$$

而由不等式 (31) 可知，上式不大于

$$2\|f\|(s_2 - s)[K + 2\sup_{(x,B)} |r(s_1, x, s_2, B)|]$$

$$+ \|f\| 2 \sup_{(x,B)} |\bar{a}(s, x, B) - \bar{a}(s_1, x, B)|$$

$$+ 2\|f\| \cdot 2 \sup_{(x,B)} |r(s_1, x, s_2, B)|.$$

由关于跳跃过程规则性的假设可知，当 $s_1 \uparrow s$, $s_2 \downarrow s$ 时，上式趋向于 0. 于是，我们证明了下面的定理.

定理 3 对于规则广义跳跃过程，函数 $f_s(x) = \mathbf{T}_{st} f(x)$, $s < t$. (关于 x 一致)对 s 可微，并且满足方程

$$\frac{\partial f_s(x)}{\partial s} = -\int f_s(y)\bar{a}(s, x, dy)$$

$$= a(s, x)\,[f_s(x) - \int f_s(y) \Pi(s, x, dy)],\ s < t \tag{32}$$

和边界条件

$$\lim_{s \uparrow t} f_s(x) = f(x). \tag{33}$$

方程 (32) 是规则跳跃过程的 Колмогоров 向后方程. 前面引进的算子 $\mathbf{A}_s$ 现在具有如下形状

$$\mathbf{A}_s f(x) = a(s, x)[-f(x) + \int f(y) \Pi(s, x, dy)].$$

系 规则跳跃过程的转移概率对 $s(s < t)$ 可微，并且满足方程

$$\frac{\partial P(s, x, t, B)}{\partial s} = a(s, x)[P(s, x, t, B)$$

$$- \int P(s, y, t, B) \Pi(s, x, dy)] \tag{34}$$

和边界条件

$$\lim_{s\uparrow t}P(s, x, t, B) = \chi(B, x).$$

现在我们来证明，在一定的条件下函数 $a(t, x)$ 和 $a(t, x, B)$ 唯一决定规则广义马尔科夫过程．首先讨论在相应的边界条件下方程 (29) 和 (32) 的解的问题．

设 $\mathscr{I} = [0, t^*)$．按照对跳跃过程规则性的要求，对函数 $a(t, x)$ 和 $a(t, x, B)$ 加下列条件：

a) 对固定的 $(t, x)\in\mathscr{I}\times\mathscr{X}$，函数 $a(t, x, B)$ 是 $\mathfrak{B}$ 上的测度，而且 $a(t, x, \{x\}) = 0$，$a(t, x) = a(t, x, \mathscr{X})$；

b) 对固定的 (x, B)，函数 $a(t, x, B)$，$t\in\mathscr{I}$，关于 (x, B) 对 t 一致连续；而当 (t, B) 固定时，它是 x 的 $\mathfrak{B}$ 可测函数．

记 $W = W(\mathfrak{B})$ 是定义在可测空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 上的、全体有限完全可加函数（有限负荷）$w(B)$ 的空间．在 W 中定义距离 $\rho(w_1, w_2)$ 如下：

$$\rho(w_1, w_2) = \|w_1(B) - w_2(B)\|, \quad w_i\in W,$$

其中

$$\|w(B)\| = \sup\{|w(B)|, B\in\mathfrak{B}\}.$$

不难看出，W 是完全赋范空间．我们把方程 (28) 和 (29) 看成是空间 W 中的方程，而且对 (28) 式左侧的导数也作相应的解释．

我们再引进一个在 W 中取值的连续函数 $\breve{w} = \breve{w}_t = w_t(B)$，$t\in[s, t^*]$ 的空间 $\mathscr{C}^w[s, t^*]$，它的范数 $|||\breve{w}||| = \max\{\|\breve{w}_t\|, t\in[s, t^*]\}$．

定理 4 如果函数 $a(t, x, B)$ 满足条件 a) 和 b)，则方程组 (28) 和 (30) 在 $\mathscr{C}^w$ 中有唯一解．如果 $m(B)$ 是测度，则这个解也是测度．

证．注意，由条件 b) 可知函数 $a(t, x)$ 关于 (t, x) 一致有界，$a(t, x)\leqslant K<\infty$．在 $\mathscr{C}^w[s, t^*]$ 中引进函数 $q_t(B)$：

$$q_t(B) = \int_B \exp\left\{\int_s^t a(\theta, x)d\theta\right\} m_t(dx).$$

在 W 中，如果函数 m_t 可微，则 q_t 也可微，反过来也对，并且

$$\frac{dq_t(B)}{dt} = \int_B a(t, x)q_t(dx)$$

$$+ \int_B \exp\left\{\int_s^t a(\theta, x)d\theta\right\} \frac{dm_t}{dt}(dx).$$

若用方程 (28) 右侧替换 $\frac{dm_t}{dt}$，则得

$$\frac{dq_t(B)}{dt} = \int_B \int_{\mathscr{X}} \exp\left\{\int_s^t [a(\theta, x) - a(\theta, y)]d\theta\right\}$$

$$\cdot a(t, y, dx) q_t(dy) = \int_{\mathscr{X}} b(t, y, B) q_t(dy),$$

其中

$$b(t, y, B) = \int_B \exp\left\{\int_s^t [a(\theta, x) - a(\theta, y)]d\theta\right\}$$

$$\cdot a(t, y, dx).$$

因而，方程 (28)，(30) 和下列方程等价

$$q_t(B) = m(B) + \int_s^t\int_{\mathscr{X}} b(\theta, y, B)q_\theta(dy)d\theta, \ t \in [s, t^*], \quad (35)$$

其中 $b(t, y, B)$ 一致有界，$b(t, y, B) \leqslant K_1$，而且对固定的 (t, y) 它是 B 的测度．由等式

$$(\mathbf{Q}^* w)_t(B) = m(B) + \int_s^t\int_{\mathscr{X}} b(\theta, y, B)w_\theta(dy)d\theta$$

在 $\mathscr{C}^w$ 中所定义的算子 $\mathbf{Q}^*$ 满足下列关系式

$$\|(\mathbf{Q}^*\breve{w}')_t - (\mathbf{Q}^*\breve{w}'')_t\| \leqslant 2K_1(t - s)|||\breve{w}' - \breve{w}''|||,$$

$$\|(\mathbf{Q}^{*n}\breve{w}')_t - (\mathbf{Q}^{*n}\breve{w}'')_t\| \leqslant (2K_1)^n \frac{(t - s)^n}{n!}|||\breve{w}' - \breve{w}''|||,$$

其中 $\mathbf{Q}^{*n}$ 表示算子 $\mathbf{Q}^*$ 的 n 次幂．因此，算子 $\mathbf{Q}^*$ 的某次幂是压缩算子．由压缩映射原理可知，方程 (35) 在 $\mathscr{C}^w$ 中有唯一解．可以用逐次逼近法求此解．所以，如果 $m(B)$ 是测度，则 $q_t(B)$ 也是测度、定理得证．

可以同样讨论方程 (32)．经替换

$$f_s(x) = \exp\left\{-\int_s^t a(\theta, x)d\theta\right\} g_s(x)$$

方程 (32) 可以化为较简单的等价方程

$$\frac{\partial g_s(x)}{\partial s} = -\int_{\mathscr{X}} g_s(y) \exp\left\{\int_s^t [a(\theta, x) - a(\theta, y)] d\theta\right\} \cdot a(s, x, dy), \quad s < t,$$

其边界条件为 $g_t(x) = f(x)$. 而此方程又等价于方程

$$g_s(x) = f(x) + \int_s^t \int_{\mathscr{X}} g_v(y) \exp\left\{\int_v^t [a(\theta, x) - a(\theta, y)] d\theta\right\} \cdot a(v, x, dy) dv. \tag{36}$$

记 $\mathscr{C}^{b(\mathfrak{B})}[0, t]$ 为连续函数 $\check{f} = f_s = f_s(x)$ 的空间: s 是自变量, $b(\mathfrak{B})$ 是 f_s 的值域; $\check{f}$ 的范数 $|||\check{f}||| = \sup\{|f_s(x)| : (s, x) \in [0, t] \times \mathscr{X}\}$. 设**Q**是 $\mathscr{C}^{b(\mathfrak{B})}[0, t]$ 上的线性算子:

$$(\mathbf{Q}\check{g})_s(x) = f(x) + \int_s^t \int_{\mathscr{X}} g_v(y) \exp\left\{\int_v^t [a(\theta, x) - a(\theta, y)] \cdot d\theta\right\} a(v, x, dy) dv.$$

它把空间 $b(\mathfrak{B})$ 中非负函数的集合映入它自身,而且

$$\|(\mathbf{Q}\check{g}')_s - (\mathbf{Q}\check{g}'')_s\| \leqslant K_2(t - s)|||\check{g}' - \check{g}''|||,$$

$$\|(\mathbf{Q}^n\check{g}')_s - (\mathbf{Q}^n\check{g}'')_s\| \leqslant K_2^n \frac{(t - s)^n}{n!} |||\check{g}' - \check{g}''|||,$$

其中 $K_2 = Ke^{Kt}$. 因此, 算子 **Q** 的某次幂是压缩算子, 而方程 (36) (从而方程 (32)) 在 $\mathscr{C}^{b(\mathfrak{B})}[0, t]$ 中有唯一解, 满足边界条件 (33).

定理 5 如果函数 $a(t, x, B)$ 满足条件 a) 和 b), 则方程 (32)—(33) 有唯一解. 特别, 此时函数 $a(t, x, B)$ 唯一决定过程的转移概率.

注. 可以用逐步逼近法来求方程 (36) 的解. 因此, 方程 (32)—(33) 的解可表为

$$f_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_s^{(n)}(x),$$

其中

$$f_s^{(0)}(x)=\exp\left\{-\int_s^t a(\theta,x)d\theta\right\}f(x),$$

$$f_s^{(n+1)}(x)=\int_s^t\int_{\mathscr{X}} f_v^{(n)}(y)\exp\left\{-\int_s^v a(\theta,x)d\theta\right\}$$
$$\cdot a(v,x,dy)dv.$$

特别,可以得到转移概率 $P(s,x,t,B)$ 的如下表达式:

$$P(s,x,t,B)=\sum_{n=0}^{\infty}P^{(n)}(s,x,t,B), \tag{37}$$

其中

$$P^{(0)}(s,x,t,B)=\exp\left\{-\int_s^t a(\theta,x)d\theta\right\}\chi(B,x), \tag{38}$$

$$P^{(n+1)}(s,x,t,B)=\int_s^t\int_{\mathscr{X}} P^{(n)}(v,y,t,B)$$
$$\cdot\exp\left\{-\int_s^v a(\theta,x)d\theta\right\}a(v,x,dy)dv,$$
$$n=0,1,2,\cdots. \tag{39}$$

在第三章 §1 中将要说明,函数 $P^{(n)}(s,x,t,B)$ 有简单的概率意义. 那里还将说明,在比上述情形更一般的条件下,如何根据已给函数 $a(s,x,B)$ 来构造马尔科夫过程.

所得结果可用于可列状态过程. 这时,空间 $\mathscr{X}$ 由可列多个点组成,故只考虑向单点集的转移概率就可以了. 设 $p_{ij}(s,t)=P(s,i,t,\{j\})$, $i,j\in\mathscr{X}$. 代替 $a(s,x,B)$, 我们考虑函数 $a(s,i,j)$,

$$a(s,i,j)=\lim_{t\downarrow s}\frac{p_{ij}(s,t)}{t-s},\ i\neq j.$$

它和前面引进的函数 $a_{ij}(s)$ 相同. 这时, 条件 a) 和 b) 取下列形式:

a) $$a(t,i)=\sum_{j\in\mathscr{X}}a(t,i,j),$$

其中

$$a(s, i) = \lim_{t \downarrow s} \frac{1 - p_{ii}(s, t)}{t - s};$$

b) $a(t, i, j)$ 在 $[0, t^*]$ 上关于 (i, j) 对 t 一致连续.

如果这些条件成立，则可列状态马尔科夫过程的 Колмогоров 向前方程和向后方程有唯一解，此解可由上述公式来求出.

例如，

$$p_{ij}(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}(s, t),$$

其中

$$p_{ij}^{(0)}(s, t) = \exp\left\{-\int_s^t a_i(\theta)d\theta\right\}\delta_{ij},$$

$$p_{ij}^{(n+1)}(s, t) = \int_s^t \sum_{k \in \mathscr{X}} p_{kj}^{(n)}(v, t) \exp\left\{-\int_s^v a_i(\theta)d\theta\right\} \cdot a_{ik}(v)dv, \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{40}$$

独立增量过程 设 $\mathscr{X}$ 是度量向量空间，$\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{X}$ 的 Borel 集的 σ 代数. 记 $B + x\ (B \subset \mathscr{X}, x \in \mathscr{X})$ 为集 B 关于 x 的推移: $B + x = \{y: y = z + x,\ z \in B\}$. 考虑 $\mathfrak{B}$ 上的概率测度族 $\mathbf{P}_{st}(\cdot)(s \geqslant 0, t > s)$，满足下列条件:

a) 对任意 $B \in \mathfrak{B}$，$\mathbf{P}_{st}(B - x)$ 是 x 的 $\mathfrak{B}$ 可测函数;

b) 如果 $s < u < t$，则

$$\mathbf{P}_{st}(B) = \int_{\mathscr{X}} \mathbf{P}_{ut}(B - y)\mathbf{P}_{su}(dy). \tag{41}$$

不难验证，对任意有界 $\mathfrak{B}$ 可测函数 $f(x)$，等式

$$\int_{\mathscr{X}} f(x + y)\, \mathbf{P}_{st}(dy) = \int_{\mathscr{X}} f(y)\mathbf{P}_{st}(dy - x)$$

成立(对 $\mathfrak{B}$ 可测集的示性函数等式显然). 所以，由 (41) 可见

$$\mathbf{P}_{st}(B - x) = \int_{\mathscr{X}} \mathbf{P}_{ut}(B - y)\, \mathbf{P}_{su}(dy - x).$$

故如令 $P(s, x, t, B) = \mathbf{P}_{st}(B - x)$，则函数 $P(s, x, t, B)$ 就是转移概率. 它具有空间齐性. 这就是说，对所有 $y \in \mathscr{X}$

$$P(s, x + y, t, B + y) = P(s, x, t, B),$$

相反，如果转移概率具有上述性质，则 $P(s, x, t, B) = \mathbf{P}_{st}(B - x)$.

设 $q(B)$ 是 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 上的任意概率测度．考虑分布族 $\{P_{t_1, \cdots, t_n}, 0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n, n = 1, 2, \cdots\}$，其中 $P_{t_1, \cdots, t_n}(B^{(n)})$ 是 $\{\mathscr{X}^n, \mathfrak{B}^n\}$ 上的分布，由下式给出 $(B^{(n)} \in \mathfrak{B}^n)$:

$$P_{t_1, \cdots, t_n}(B^{(n)}) = \int_{\mathscr{X}} \left\{\int_{B^{(n)}} P(0, x_0, t_1, dx_1) P(t_1, x_1, t_2, dx_2) \cdots \cdot P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n)\right\} q(dx_0).$$

不难验证，上述分布族决定独立增量过程．这就是说，如果把 $P_{t_1, \cdots, t_n}$ 看成是随机元素序列 $\xi(t_1), \cdots, \xi(t_n)$ 的联合分布，则对任意 $t_1, t_2, \cdots, t_n (0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n)$ 随机向量 $\xi(0)$, $\xi(t_1) - \xi(0), \cdots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ 相互独立。

事实上，如果 $f_k(x) (k = 0, 1, \cdots, n)$ 是任意有界 $\mathfrak{B}$ 可测函数，则

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E} f_0(\xi(0)) f_1(\xi(t_1) - \xi(0)) \cdots f_n(\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})) \\
&= \int_{\mathscr{X}} \cdots \int_{\mathscr{X}} f_0(x) f_1(x_1 - x) \cdots f_n(x_n - x_{n-1}) q(dx) \\
&\quad \times P_{0t_1}(dx_1 - x) P_{t_1 t_2}(dx_2 - x_1) \cdots P_{t_{n-1} t_n}(dx_n - x_{n-1}) \\
&= \int_{\mathscr{X}} \cdots \int_{\mathscr{X}} f_n(y_n) f_{n-1}(y_{n-1}) \cdots f_1(y_1) f_0(x) \\
&\quad P_{t_{n-1} t_n}(dy_n) \cdots \times P_{0t_1}(dy_1) q(dx) \\
&= \mathbf{E} f_0(\xi(0)) \mathbf{E} f_1(\xi(t_1) - \xi(0)) \cdots \mathbf{E} f_n \\
&\quad (\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})),
\end{aligned}$$

由此可知，随机向量 $\xi(0), \xi(t_1) - \xi(0), \cdots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ 相互独立。

在第一卷第三章§1中，对于 $\mathscr{X}$ 是有穷维空间 ($\mathscr{X} = \mathscr{R}^m$)，而独立增量过程随机连续并且具有空间齐性（即 $\mathbf{P}_{st}(B) = \mathbf{P}_{t-s}(B)$）的情形，曾全面刻划了满足(41)式的测度族 $\{\mathbf{P}_{st}\}$ 的结构．具体地说，在这些条件下画分布 $P_t(B)$ 的特征函数 $J(t, u)$ 可表为

$$J(t,u)=\int_{\mathscr{R}^m}e^{i(u,x)}P_t(dx)$$

$$=\exp\left\{t\left[i(a,u)-\frac{1}{2}(bu,u)\right.\right.$$

$$+\int_{\mathscr{R}^m}\left(e^{i(u,z)}-1-\frac{i(u,z)}{1+|z|^2}\right)$$

$$\left.\left.\cdot\frac{1+|z|^2}{|z|^2}\Pi(dz)\right]\right\},\qquad(42)$$

其中 $a\in\mathscr{R}^m$, b 是从 $\mathscr{R}^m$ 到 $\mathscr{R}^m$ 的一非负定对称映射，Π是 $\mathfrak{B}$ 上的有穷测度，$\Pi\{0\}=0$. 注意，上式可化为

$$J(t,u)=\exp\left\{t\left[i(a,u)-\frac{1}{2}(bu,u)+\int_S(e^{i(u,z)}\right.\right.$$

$$-1-i(u,z))\Pi(dz)$$

$$\left.\left.+\int_{\mathscr{R}^m\setminus S}(e^{i(u,z)}-1)\Pi(dz)\right]\right\},\qquad(43)$$

其中 S 是 $\mathscr{R}^m$ 中以原点为中心的球，向量 a 和测度Π的含意不同于上式(它未必有穷)，但是仍然满足$\Pi\{0\}=0$ 和下列条件：

$$\int_S|z|^2\Pi(dz)<\infty,\ \Pi(\mathscr{R}^m\setminus S)<\infty.$$

当$\Pi\equiv 0$时，过程是高斯过程. 这时，b 称为过程的方差算子（或方差矩阵). 而若 $a=0$, $b=0$, $\Pi(\mathscr{R}^m)=q<\infty$, 则过程称做广义 Poisson 过程. 这时，$P_t(B)$ 与 $\nu(t)$ 个独立同分布随机向量之和的分布相同；它们之中每个随机向量的分布为 $\frac{1}{q}\Pi(B)$, 而 $\nu(t)$ 是以 q 为参数(强度)的 Poisson 过程.

令

$$f_s(x)=\int_{\mathscr{R}^m}f(y)P(s,x,t,dy)$$

$$=\int_{\mathscr{R}^m}f(x+y)P_{st}(dy),\ s<t.$$

显然，如果 $f(x)$ 是二次连续可微函数，而且它连同一阶和二阶偏导数有界，则函数 $f_s(x)$ 具有同样的性质. 由等式

$$\frac{f_{s-h}(x)-f_s(x)}{h}=\int_{\mathscr{R}^m}[f_s(x+y)-f_s(x)]\frac{1}{h}P_{s-h,h}(dy),$$

以及第一卷第三章§1证明定理3时所得到的结果可知，导数 $\frac{\partial f_s(x)}{\partial s}$ 存在，并且满足方程

$$\frac{\partial f_s(x)}{\partial s}=(a,\nabla)f_s(x)+\frac{1}{2}(b\nabla,\nabla)f_s(x)$$
$$+\int_{\mathscr{R}^m\setminus S}[f_s(x+z)-f_s(x)]\Pi(dz)$$
$$+\int_S[f_s(x+z)-f_s(x)-(z,\nabla)f_s(x)]\Pi(dz),\tag{44}$$

其中 a, b, Π, S 的含意和(43)式相同；∇f 是函数 f 的梯度，

$$(a,\nabla)f=\sum_{k=1}^{m}a_k\frac{\partial f(x)}{\partial x_k},\ (b\nabla,\nabla)f$$
$$=\sum_{k,j=1}^{m}b_{kj}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k\partial x_j};$$

a_k 是向量 a 在 $\mathscr{R}^m$ 的某一基底中的分量，b_{kj} 是上述同一基底中映射矩阵 b 的元.

对于任意随机连续的独立增量过程，在第四章将通过其它方法得到类似的结果.

广义弱可微马尔科夫过程 在有穷维空间中研究马尔科夫过程时，自然要研究和独立增量过程具有同样局部结构的过程类. 对这类过程可以给出很一般的定义.

我们引进分布 $P(s, x, t, B)$ 的特征函数

$$J(s,x,t,u)=\int_{\mathscr{R}^m}e^{i(u,y)}P(s,x,t,dy),$$
$$s<t,\ J(s,x,s,u)=1.$$

广义马尔科夫过程称为弱可微的，如果在点 $s=t$，函数 $J(s, x, t, u)$ 在 u 的有限变化域内对 s 一致可微，也就是说，对所有 $x\in\mathscr{R}^m$，$t\in(0, t^*)$，极限

$$g(t,x,u)=\lim_{s\uparrow t}\frac{f(s,x,t,u)-1}{t-s}$$

为关于 u，$|u|\leqslant A$ 的一致收敛，其中 A 任意.

由前面提到的、第一卷第三章 § 1 定理 3 的结果可知，如果马尔科夫过程弱可微，则存在向量 $a(s,x)\in\mathscr{R}^m$，以及将 $\mathscr{R}^m$ 变为自身的非负定对称映射 $b(s,x)$ 和 $\mathfrak{B}$ 上的测度 $q(s,x,B)$，使对任意二次连续可微函数 $f(x)$，$x\in\mathscr{R}^m$，当 $f(x)$ 及其一阶和二阶偏导数有界时，下列等式成立：

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_s f(x)&=\lim_{h\downarrow 0}\frac{\mathbf{T}_{s-h,s}f(x)-f(x)}{h}\\&=(a(s,x),\nabla)f(x)+\frac{1}{2}(b(s,x)\nabla,\nabla)f(x)\\&\quad+\int_{\mathscr{R}^m\setminus S}[f(x+z)-f(x)]\,q(s,x,dz)\\&\quad+\int_S[f(x+z)-f(x)-(z,\nabla)\\&\quad\times f(x)]q(s,x,dz),\end{aligned}\tag{45}$$

而且 $q(s,x,\{0\})=0$，$q(s,x,\mathscr{R}^m\setminus S)<\infty$，

$$\int_S|z|^2q(s,x,dz)<\infty.$$

特别，如果 $q(s,x)=q(s,x,\mathscr{R}^m)<\infty$，则(45)式可写作

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_s f(x)&=(\tilde{a}(s,x),\nabla)f(x)+\frac{1}{2}(b(s,x)\nabla,\nabla)f(x)\\&\quad-\left[q(s,x)f(x)-\int_{\mathscr{R}^m}f(x+z)q(s,x,dz)\right].\end{aligned}\tag{46}$$

如果 $\tilde{a}_j(s,x)\equiv 0$，$b_{jk}(s,x)\equiv 0$ $(j,k=1,\cdots,m)$，则由上面的结果可知，相应的马尔科夫过程是跳跃过程.

在一般情形下，对 (46) 式可以作如下说明. 以 $\xi(t)$ 表由已给马尔科夫过程所描绘的体系的状态. 假设 $\xi(s)=x$. 那末精确到高阶无穷小可以把 $\Delta\xi(s)=\xi(s+\Delta s)-x$ 表为：$\Delta\xi(s)=\Delta\xi_1+\Delta\xi_2+\Delta\xi_3$，其中 $\Delta\xi_1$ 是位移 $\Delta\xi$ 的非随机分量，并且可以表为 $\Delta\xi_1=\tilde{a}(s,x)\Delta s$；$\Delta\xi_2$ 对应于以 $b(s,x)\Delta s$ 为方

差阵的 Wiener 过程的位移；最后，$\Delta\xi_3$ 以概率 $1-q(s,x)\Delta s$ 等于 0，而以概率 $q(s,x)$ 等于一分布为 $q(s,x,B)/q(s,x)$ 的随机向量．这里 $\Delta\xi_2$ 和 $\Delta\xi_3$ 独立．

如果 (45) 式中 $q(s,x,B)\equiv 0$，则相应的马尔科夫过程称做**扩散过程**．这时，位移 $\Delta\xi(s)$ 的主部由非随机项 $a(s,\xi(s))\Delta s$（移动向量）和振动项组成，其中振动项服从 m 维高斯分布，均值向量等于 0，协方差阵为 $b(s,\xi(s))\Delta s$．

扩散过程在马尔科夫过程的理论和应用中起重要作用，它将在第三卷中详细研究．这里只限于给出它的一个稍为不同的定义及其 Колмогоров 方程的严格推导．

定义 6 广义马尔科夫过程称为**扩散过程**，如果下列条件成立：

1）对任意 $x\in\mathscr{R}^m$，$\varepsilon>0$，关于 $t(s<t\leqslant t^*)$ 一致有

$$P(s,x,t,\overline{S_\varepsilon(x)})=o(t-s),\tag{47}$$

其中 $\overline{S_\varepsilon(x)}$ 是以 x 为中心以 ε 为半径的球的补集；

2）存在取值于 $\mathscr{R}^m$ 的函数 $a(s,x)$ 和把 $\mathscr{R}^m$ 变为它自身的线性非负定对称算子 $b(s,x)((s,x)\in[0,t^*]\times\mathscr{R}^m)$，使对任意 $x\in\mathscr{R}^m$ 和 $\varepsilon>0$，关于 $s(s<t)$ 一致有

$$\int_{S_\varepsilon(x)}(y-x)P(s,x,t,dy)=a(s,x)(t-s)+o(t-s),\tag{48}$$

$$\int_{S_\varepsilon(x)}(z,y-x)^2P(s,x,t,dy)=(b(s,x)z,z)(t-s)+o(t-s).\tag{49}$$

向量 $a(s,x)$ 称为**移动向量**，算子 $b(s,x)$ 称为马尔科夫过程的**扩散算子**．

在 $\mathscr{R}^m$ 中选取一个基底．向量 $a(s,x)$ 在这个基底中的分量记作 $a_i(s,x)$，$i=1,\cdots,m$，而在同一基底中算子矩阵 $b(s,x)$ 的元记作 $b_{ij}(s,x)$，$i,j=1,\cdots,m$．

定理 6 如果函数 $a(s,x)$，$b(s,x)$ 连续，而 $f(x)$ 是有界连续函数，使

$$u(s, x) = \int_{\mathscr{R}^m} f(y) P(s, x, t, dy)$$

有连续偏导数 $\frac{\partial u(s, x)}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x_i \partial x_j}$, 则 $u(s, x)$ 有连续偏导数 $\frac{\partial u(s, x)}{\partial s}$, 并且满足方程

$$-\frac{\partial u(s, x)}{\partial s} = (a(s, x), \nabla) u(s, x) + \frac{1}{2}(b(s, x)\nabla, \nabla) u(s, x) \tag{50}$$

和边界条件

$$\lim_{s \uparrow t} u(s, t) = f(x). \tag{51}$$

证. 设 $s_1 \leqslant s \leqslant s_2 < t$. 因为函数有界,所以

$$u(s_1, x) - u(s_2, x) = \int_{\mathscr{R}^m} [u(s_2, y) - u(s_2, x)] P(s_1, x, s_2, dy) = \int_{S_\varepsilon(x)} [u(s_2, y) - u(s_2, x)] \cdot P(s_1, x, s_2, dy) + o_\varepsilon(s_2 - s_1),$$

其中对任意固定 $\varepsilon > 0$, $\frac{o_\varepsilon(s_2 - s_1)}{s_2 - s_1} \to 0$. 根据 Taylor 公式可知,

$$u(s_2, y) - u(s_2, x) = (y - x, \nabla) u(s_2, x) + \frac{1}{2}(y - x, \nabla)^2 u(s_2, x) + r(x, y, s_2),$$

并且当 $y \in S_\varepsilon(x)$ 时, $|r(x, y, s_2)| \leqslant |y - x|^2 \omega_\varepsilon$, 其中当 $\varepsilon \to 0$ 时,有

$$\omega_\varepsilon = \sup_{i, j, s_2, y \in S_\varepsilon(x)} \left| \frac{\partial^2 u(s_2, x + \theta(y - x))}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u(s_2, x)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \to 0.$$

由此得等式

$$u(s_1, x) - u(s_2, x) = [(a(s_2, x), \nabla) u(s_2, x) + \frac{1}{2}(b(s_2, x)\nabla, \nabla) u(s_2, x) + R'](s_2 - s_1), \tag{52}$$

其中$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lim\limits_{s_2-s_1\downarrow 0}R'=0$. 在 (52) 式两侧同除以 s_2-s_1，然后对 $s_2\downarrow s$, $s_1\uparrow s$ 求极限. 由于该式右侧前三项对 s_2 连续,即得方程(50).

由下式和 $f(x)$ 的连续性可以得到边界条件 (51):

$$u(s,x)-f(x)=\int_{S_\varepsilon(x)}[f(y)-f(x)]\cdot P(s,x,t,dy)+o_\varepsilon(t-s),$$

其中 $\varepsilon>0$ 是任意小的数. 定理得证.

现在假设存在概率密度，即存在一个函数 $p(s,x,t,y)$，使得对任意 Borel 集 B

$$P(s,x,t,B)=\int_B p(s,x,t,y)dy,$$

这里积分对 $\mathscr{R}^m$ 上的 Lebesgue 测度进行. 这时 Колмогоров-Chapman 方程可写为

$$p(s,x,t,y)=\int_{\mathscr{R}^m}p(s,x,u,z)p(u,z,t,y)dz,\ s<u<t. \tag{53}$$

如果 $p(s,x,t,y)$作为 (t,y) 的函数充分光滑，则它满足 Колмогоров 向前方程,又叫做 Focker-Planck 方程.

定理 7 如果(47),(48),(49)关于 x 一致成立，并且有连续导数

$$\frac{\partial p(s,x,t,y)}{\partial t},\ \frac{\partial[a_i(t,y)p(s,x,t,y)]}{\partial x_i},$$
$$\frac{\partial^2[b_{ij}(t,y)p(s,x,t,y)]}{\partial x_i\partial x_j},$$

则对 $(t,y)\in(s,t^*)\times\mathscr{R}^m$，函数 $p(s,x,t,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial p(s,x,t,y)}{\partial t}=-(\nabla,a(t,y)p(s,x,t,y))+\frac{1}{2}(\nabla,\nabla b(t,y)p(s,x,t,y)). \tag{54}$$

证. 设 $g(x)$ 是任意二次连续可微函数，并且在某一紧致集以外为 0. 仿照上一定理的证明可以断定,关于 x 一致有

$$\lim_{t_2\downarrow t, t_1\uparrow t} \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int g(y)p(t_1, x, t_2, y)dy - g(x)\right]$$

$$= (a(t, x), \nabla)g(x) + \frac{1}{2}(b(t, x)\nabla, \nabla)g(x).$$

根据定理的条件和上式可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int p(s, x, t, y)g(y)dy$$

$$= \lim_{t_1\uparrow t, t_2\downarrow t} \frac{1}{t_2 - t_1}\int [p(s, x, t_2, y)-p(s, x, t_1, y)]g(y)dy$$

$$= \lim_{t_1\uparrow t, t_2\downarrow t}\int p(s, x, t_1, y) \times \left[\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{\mathscr{R}^m} p(t_1, y, t_2, z)\right.$$

$$\left.\cdot\, g(z)dz - g(y)\right]dy = \int p(s, x, t, y)[(a(t, y), \nabla)g(y)$$

$$+ \frac{1}{2}(b(t, y)\nabla, \nabla)g(y)]dy.$$

对上式作分部积分,得

$$\int \frac{\partial}{\partial t} p(s, x, t, y)g(y)dy$$

$$= -\int [(\nabla, p(s, x, t, y)a(t, y))$$

$$+ \frac{1}{2}(\nabla, \nabla p(s, x, t, y)b(t, y))]g(y)dy.$$

由于函数 $g(y)$ 的任意性,由上式即得方程 (54). 定理得证.

§2. 马尔科夫随机函数

定义和简单性质 在第一卷中引进了马尔科夫过程的定义. 在这一节里我们以更一般的形式重述这一定义. 但是,凡是以前称为马尔科夫过程的地方,这里称马尔科夫函数. 这是因为,习惯上所谓马尔科夫过程指的不是一个过程,而是指以一定方式相联系的随机过程的全体. 按照下面所用的术语,马尔科夫随机函数只不过是和所说的马尔科夫过程相对应的、全部随机过程中的一

个.

在这一节里只限于给出和不中断马尔科夫过程相对应的定义.

设 $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$ 是一概率空间. 考虑定义在 $\mathscr{I}$ 上取值于某一可测空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 的随机函数 $\xi(t, \omega)$ (或 $\xi(t)$), $t \in \mathscr{I}$, $\omega \in \Omega$. 这里 $\mathscr{I}$ 是实数轴(其中包括点 $+\infty$ 和 $-\infty$)的子集(即 $\mathscr{I} \subset [-\infty, +\infty]$). 记 $\xi_\omega(t)$ 为随机函数 $\xi(t, \omega)$ 的 ω 截口(即固定 ω, 视其为 t 的函数), 或(在不至引起误解时)简记为 $\xi(t)$;记 $\xi_t(\omega)$ 或 ξ_t 为它的 t 截口(即固定 t, 视其为 ω 的函数).

如果 $\{\mathfrak{S}_t, t \in \mathscr{I}\}$ 是一 σ 代数流(即对任意 $t, t_1, t_2 \in \mathscr{I}$, $\mathfrak{S}_t \subset \mathfrak{S}$, 当 $t_1 < t_2$ 时, $\mathfrak{S}_{t_1} \subset \mathfrak{S}_{t_2}$), 而(对每个 $t \in \mathscr{I}$)ξ_t 为 $\mathfrak{S}_t$ 可测, 则说随机函数 $\xi(t, \omega)$ **适应** σ 代数流 $\mathfrak{S}_t$.

定义 1 称取值于 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 的随机函数 $\xi(t, \omega)$, $t \in \mathscr{I}$, **关于 σ 代数流** $\{\mathfrak{S}_t, t \in \mathscr{I}\}$ **为马尔科夫函数**($\mathfrak{S}_t$ **马尔科夫函数**), 如果它适应 σ 代数流 $\{\mathfrak{S}_t, t \in \mathscr{I}\}$, 并且对所有 s 和 t, $s \leqslant t$($s, t \in \mathscr{I}$), 及 B($B \in \mathfrak{B}$) 有

$$\mathbf{P}\{\xi(t) \in B | \mathfrak{S}_s\} = \mathbf{P}\{\xi(t) \in B | \xi(s)\} (\bmod \mathbf{P}). \tag{1}$$

条件 (1) 等价于下列条件: 对任意 s, t, S($s < t$, $s, t \in \mathscr{I}$, $S \in \mathfrak{S}_s$) 下列等式成立:

$$\int_S \mathbf{P}\{\xi(t) \in B | \xi(s)\} d\mathbf{P} = \mathbf{P}\{[\xi(t) \in B] \cap S\}. \tag{2}$$

关于条件 (1) 的概率意义在第一卷中已有说明. 简而言之, 条件 (1) 表明, 对于随机元素来说, σ 代数流 $\mathfrak{S}_u$($u \leqslant s$) 描绘试验流所能提供的信息, 和在时刻 s 对随机函数值的一次观测所提供的信息,二者是相同的.

由马尔科夫函数的定义可知, 如果 $t_i \in \mathscr{I}$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant t$, 则

$$\mathbf{P}\{\xi(t) \in B | \xi(t_1), \cdots, \xi(t_n)\} = \mathbf{P}\{\xi(t) \in B | \xi(t_n)\} (\bmod \mathbf{P}). \tag{3}$$

此外, 设 $\{\mathfrak{F}_t, t \in \mathscr{I}\}$ 是一 σ 代数流, $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{S}_t$, $t \in \mathscr{I}$, 而

$\xi(t)$ 为 $\mathfrak{F}_t$ 可测．那末，$\mathfrak{S}_t$ 马尔科夫函数同时也是 $\mathfrak{F}_t$ 马尔科夫函数．

引进下列记号：

$$\mathfrak{N}_t^s = \sigma\{\xi(u),\ u \in \mathscr{I},\ s \leqslant u \leqslant t\},$$
$$\mathfrak{N}^s = \sigma\{\xi(u),\ u \in \mathscr{I},\ u \geqslant s\},$$
$$\mathfrak{N}_t = \sigma\{\xi(u),\ u \in \mathscr{I},\ u \leqslant t\}.$$

由以前所述可知，马尔科夫函数都是 $\mathfrak{N}_t$ 马尔科夫函数．这种情形最为重要，但是在解决一系列问题时，必须用更广的 σ 代数（例如，用它的完备化）来代替 σ 代数 $\mathfrak{N}_t$．

定理 1 设 $\xi(t), t \in \mathscr{I}$，是取值于 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 的随机函数，并且适应 σ 代数流 $\{\mathfrak{S}_t, t \in \mathscr{I}\}$．下列命题等价：对任意 $s, t \in \mathscr{I}(s < t)$，

a）对所有 $B \in \mathfrak{B}$

$$\mathbf{P}\{\xi(t) \in B \mid \mathfrak{S}_s\} = \mathbf{P}\{\xi(t) \in B \mid \xi(s)\} \pmod{\mathbf{P}}; \tag{4}$$

b）对任意有界 $\mathfrak{B}$ 可测函数 $f(x)(x \in \mathscr{X})$

$$\mathbf{E}\{f(\xi(t)) \mid \mathfrak{S}_s\} = \mathbf{E}\{f(\xi(t)) \mid \xi(s)\} \pmod{\mathbf{P}}; \tag{5}$$

c）对任意有界 $\mathfrak{N}^t$ 可测随机变量 η

$$\mathbf{E}\{\eta \mid \mathfrak{S}_t\} = \mathbf{E}\{\eta \mid \xi(t)\} \pmod{\mathbf{P}}; \tag{6}$$

d）对任意 $A \in \mathfrak{N}^t$ 和 $C \in \mathfrak{S}_t$

$$\mathbf{P}\{A \cap C \mid \xi(t)\} = \mathbf{P}\{A \mid \xi(t)\}\mathbf{P}\{C \mid \xi(t)\} \pmod{\mathbf{P}}. \tag{7}$$

证．假设 a）成立．记 K_1 为使 b）成立的 $\mathfrak{B}$ 可测函数的全体．由 a）可知，K_1 包含 $\mathfrak{B}$ 可测集的示性函数；由条件数学期望的性质可知，K_1 是线性的，并且对非负函数的单调非降序列的极限封闭．所以，K_1 包含所有 $\mathfrak{B}$ 可测的非负函数和 $\mathfrak{B}$ 可测的有界函数．

现证由 b）可以推出 c）．注意（5）式的下列特殊情形：如果 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant t$，则

$$\mathbf{E}\{f(\xi(t)) \mid \xi(t_1), \xi(t_2), \cdots, \xi(t_n)\} = \mathbf{E}\{f(\xi(t)) \mid \xi(t_n)\}. \tag{8}$$

记 K_2 为使（6）成立的随机变量 η 的全体．K_2 是线性的，并且对非负随机变量的单调非降序列的极限封闭．

设 $f_k(x)$ 是有界 $\mathfrak{B}$ 可测函数 $(k=1,2,\cdots,n)$，$t\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$. 那末

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left\{\prod_{k=1}^{2} f_k(\xi(t_k))|\mathfrak{F}_t\right\}\\
&=\mathbf{E}\{f_1(\xi(t_1))\mathbf{E}[f_2(\xi(t_2))|\mathfrak{F}_{t_1}]|\mathfrak{F}_t\}\\
&=\mathbf{E}\{f_1(\xi(t_1))\mathbf{E}[f_2(\xi(t_2))|\xi(t_1)]|\mathfrak{F}_t\}\\
&=\mathbf{E}\{f_1(\xi(t_1))\mathbf{E}[f_2(\xi(t_2))|\xi(t_1)]|\xi(t)\}\\
&=\mathbf{E}\{\mathbf{E}[f_1(\xi(t_1))f_2(\xi(t_2))|\xi(t),\xi(t_1)]|\xi(t)\}\\
&=\mathbf{E}\left\{\prod_{k=1}^{2} f_k(\xi(t_k))|\xi(t)\right\}.
\end{aligned}
$$

以下利用数学归纳法. 假设

$$
\mathbf{E}\left\{\prod_{k=1}^{n} f_k(\xi(t_k))|\mathfrak{F}_t\right\}=\mathbf{E}\left\{\prod_{k=1}^{n} f_k(\xi(t_k))|\xi(t)\right\}.
$$

通过类似的推导可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left\{\prod_{k=1}^{n+1} f_k(\xi(t_k))|\mathfrak{F}_t\right\}\\
&=\mathbf{E}\left\{f_1(\xi(t_1))\mathbf{E}\left[\prod_{2}^{n+1} f_k(\xi(t_k))|\mathfrak{F}_{t_1}\right]\mathfrak{F}_t\right\}\\
&=\mathbf{E}\left\{f_1(\xi(t_1))\mathbf{E}\left[\prod_{2}^{n+1} f_k(\xi(t_k))|\xi(t_1)\right]\mathfrak{F}_t\right\}\\
&=\mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left[\prod_{k=1}^{n+1} f_k(\xi(t_k))\,\Big|\,\xi(t),\xi(t_1)\right]\Big|\,\xi(t)\right\}\\
&=\mathbf{E}\left\{\prod_{k=1}^{n+1} f_k(\xi(t_k))\,\Big|\,\xi(t)\right\}.
\end{aligned}
$$

从而，对于形如 $\eta=\prod_{k=1}^{n} f_k(\xi(t_k))$（其中 f_k 是任意 $\mathfrak{B}$ 可测函数）的随变量 η 证得 (6) 式. 特别，K_2 包含形如 $D=\bigcap_{k=1}^{n}\{\omega:\xi(t_k)\in B_k\}$（其中 $B_k\in\mathfrak{B}$，$t_k\geqslant t$）的集合的示性函数及其线性组合. 因

为任意有界 $\mathfrak{N}^t$ 可测函数都可以用 $\mathbf{P}$ 几乎处处收敛的这样一些函数序列来逼近，所以 K_2 包含所有有界 $\mathfrak{N}^t$ 可测函数.

现在来证明，由 c) 可以推出 d). 如果 $A\in\mathfrak{N}^t$, $C\in\mathfrak{S}_t$, $D=\{\omega:\xi(t)\in B\}$, 则

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A\cap C\cap D)&=\int_{C\cap D}\mathbf{P}\{A\mid\mathfrak{S}_t\}d\mathbf{P}\\&=\int_{\Omega}\chi(C)\chi(D)\mathbf{P}\{A\mid\xi(t)\}d\mathbf{P}\\&=\int_{\Omega}\mathbf{E}\{\chi(C)\chi(D)\mathbf{P}[A\mid\xi(t)]\mid\xi(t)\}d\mathbf{P}\\&=\int_{\Omega}\chi(D)\mathbf{P}\{A\mid\xi(t)\}\mathbf{E}\{\chi(C)\mid\xi(t)\}d\mathbf{P}.\end{aligned}$$

由此得等式

$$\mathbf{P}(A\cap C\cap D)=\int_D\mathbf{P}\{A\mid\xi(t)\}\mathbf{P}\{C\mid\xi(t)\}d\mathbf{P},$$

而 (7) 式是它的推论.

最后证明，由 d) 推出 a). 事实上，对任意 $C\in\mathfrak{S}_t$, $A\in\mathfrak{N}^t$, 有

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A\cap C)&=\int_{\Omega}\mathbf{P}(A\cap C\mid\xi(t))d\mathbf{P}\\&=\int_{\Omega}\mathbf{P}(A\mid\xi(t))\mathbf{P}(C\mid\xi(t))d\mathbf{P}\\&=\int_{\Omega}\mathbf{E}\{\mathbf{P}(A\mid\xi(t))\chi(C)\mid\xi(t)\}d\mathbf{P}.\end{aligned}$$

因而

$$\mathbf{P}(A\cap C)=\int_{\Omega}\mathbf{P}(A\mid\xi(t))\chi(C)d\mathbf{P}=\int_C\mathbf{P}(A\mid\xi(t))d\mathbf{P}.$$

由此可见，$\mathbf{P}(A\mid\mathfrak{S}_t)=\mathbf{P}(A\mid\xi(t))(\mathrm{mod}\,\mathbf{P})$. 定理证完.

注. 对于 $\mathfrak{N}_t$ 马尔科夫函数，等式 (7) 关于计时方向对称："将来"和"过去"作用相同. 这就是说，对给定的 $\xi(t)$, σ 代数 $\mathfrak{N}_t$ 和 $\mathfrak{N}_t$ 条件独立. 这种对称性在马尔科夫过程的原定义中并未明显地表现出来.

转移概率 条件概率 $\mathbf{P}\{\xi(t)\in B\mid\xi(s)\}$ 是 s, $\xi(s)$, t 以及 B 的函数. 确切地说，存在一自变量 x 的 $\mathfrak{B}$ 可测函数 $\varphi(s, x, t,$

B)，使

$$\mathbf{P}\{\xi(t)\in B|\xi(s)\}=\varphi(s,\xi(s),t,B)\ (\mathrm{mod}\mathbf{P}).$$

这时，对于任何可数个两两不相交的集 $B_n(B_n\in\mathfrak{B})$ 有

$$\varphi\left(s,\xi(s),t,\bigcup_1^\infty B_n\right)=\sum_1^\infty\varphi(s,\xi(s),t,B_n)\ (\mathrm{mod}\mathbf{P}).$$

因为使此等式不成立的点 $\omega\in\Omega$ 的集合依赖于集合序列 $\{B_n\}$ 的选择，所以对固定的 s,t 和 ω，一般不能断定函数 $\varphi(s,\xi(s),t,\cdot)$ 是 $\mathfrak{B}$ 上的测度．然而，存在重要而且相当一般的情形，使上述论断成立．例如，由第一卷第一章 § 3 的定理 3 可见：

如果 $\mathscr{X}$ 是完全可分度量空间，$\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{X}$ 的 Borel 子集的 σ 代数，则存在这样的函数 $P(s,x,t,B)$ $(s,t\in\mathscr{I},x\in\mathscr{X},B\in\mathfrak{B})$：对固定的 s,t 和 B，它是 x 的 $\mathfrak{B}$ 可测函数；它是 $\mathfrak{B}$ 上的测度，使

$$\mathbf{P}\{\xi(t)\in B|\xi(s)\}=\mathbf{P}\{s,\xi(s),t,B\}\ (\mathrm{mod}\mathbf{P}).\tag{9}$$

假设满足 (9) 式的函数 $P(s,x,t,B)$ 存在．那末不难验证，可以通过对测度 $P(s,x,t,\cdot)$ 的积分来求形如 $f(\xi(t_1),\xi(t_2),\cdots,\xi(t_n))$ 的随机变量的数学期望．首先有

$$\mathbf{E}\{f(\xi(t))|\xi(s)\}=\int f(x)P(s,\xi(s),t,dx)\tag{10}$$

(见第一卷第一章 § 3 定理 2)．

在作进一步的推导时，要用到条件数学期望的下列性质．

引理 1 设 $f(x_1,x_2)$ 是有界的 $\mathfrak{B}_1\times\mathfrak{B}_2$ 可测函数，其中 $x_i\in\mathscr{X}_i$，$\{\mathscr{X}_i,\mathfrak{B}_i\}$ 是可测空间；设 ξ_i 是在 $\{\mathscr{X}_i,\mathfrak{B}_i\}$ 中取值的随机元素，其中 ξ_1 为 $\mathfrak{F}$ 可测．那末

$$\mathbf{E}\{f(\xi_1,\xi_2)|\mathfrak{F}\}=\mathbf{E}\{f(x_1,\xi_2)|\mathfrak{F}\}|_{x_1=\xi_1}(\mathrm{mod}\mathbf{P})$$

(见第一卷，第一章 § 3)．

由这个引理、等式 (10) 和马尔科夫函数的定义可知，当 $s\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$ 时，下列等式成立：

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\{f(\xi(t_1),\xi(t_2),\cdots,\xi(t_n))|\mathfrak{S}_s\}\\&\quad=\mathbf{E}\{\mathbf{E}[f(\xi(t_1),\xi(t_2),\cdots,\xi(t_n))|\mathfrak{S}_{t_{n-1}}]|\mathfrak{S}_s\}\end{aligned}$$

$$= \mathbf{E}\{\int f(\xi(t_1), \cdots, \xi(t_{n-1}), x_n) P(t_{n-1},$$

$$\xi(t_{n-1}), t_n, dx) | \mathfrak{S}_s\}. \tag{11}$$

从而

$$\mathbf{E}\{f(\xi(t_1), \xi(t_2), \cdots, \xi(t_n)) | \xi(s)\}$$
$$= \int P(s, \xi(s), t_1, dx_1) \int P(t_1, x_1, t_2, dx_2) \cdots$$
$$\int f(x_1, x_2, \cdots, x_n) P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n). \tag{12}$$

特别,若在 (12) 中令 $n = 2$, $f(x_1, x_2) = \chi(B, x_2)$, 则得

$$P(s, \xi(s), t_2, B) = \int P(s, \xi(s), t_1, dx)$$
$$\cdot P(t_1, x_1, t_2, B) (\mathrm{mod} \mathbf{P}).$$

在许多场合,可以认为函数 $P(s, x, t, B)$ 相当好,以致在把 $\xi(s)$ 换成 x($x \in \mathscr{X}$ 任意)之后,上面的等式仍然成立. 于是概率 $P(s, x, t, B)$ 满足 Колмогоров-Chapman 方程:

$$P(s, x, t_2, B) = \int P(t_1, x_1, t_2, B) P(s, x, t_1, dx_1). \tag{13}$$

注意,对马尔科夫函数 $\xi(t)$ 有

$$P(s, \xi(s), t, \mathscr{X}) = 1,$$
$$P(s, \xi(s), s, B) = \chi(B, \xi(s)) (\mathrm{mod} \mathbf{P}),$$

其中 $\chi(B, x)$ 是集合 B 的示性函数.

定义 2 函数 $P(s, x, t, B)$ 称为马尔科夫函数的转移概率,如果它满足 (9), 并且具有下列性质:

a) $P(s, x, t, \mathscr{X}) = 1$; (14)

b) 作为 x 的函数,它 $\mathfrak{B}$ 可测;

c) 当 $s \leqslant t_1 \leqslant t_2$ 时,它满足 Колмогоров-Chapman 方程.

注意,以后我们还要讨论条件 (14) 不成立的情形.

§ 3. 马尔科夫过程

定义 前面给出的马尔科夫函数的定义,在许多情形下是不

够用的．首先需要研究的理论概率对象有时是一组相互联系的随机过程．例如，在刻画某体系在它的相空间运动(或进化)时，就会出现这样的情形：运动可以在任意时刻自相空间的任意一点开始，并且要研究一切可能的运动．

为了研究这样的对象，需要引进马尔科夫过程的概念，现概括地表述如下．假设已给一时间 t 和基本事件 ω 的函数 $\xi(t,\omega)$ 以及一概率测度族 $\{\mathbf{P}_{s,x}\}$：$\xi(t,\omega)$ 取值于体系的相空间，而每一个测度 $\mathbf{P}_{s,x}$ 决定在时刻 s 自点 x 开始的运动的概率性质．由过程的马尔科夫性(或无后效性)知下面的描述是合理的：如果体系在时刻 s 位于点 x，则它以后的进化完全决定于测度 $\mathbf{P}_{s,x}$，而不依赖时刻 s 以前关于体系运动的补充信息．

此外，在马尔科夫过程的定义中，最好明显的分出体系的一个特别状态，使它对应于体系从相空间消失的情形(体系"流向无穷"或"灭绝")．

从现在起到这一章的末尾(本节的最后一小节除外)，总设时间区间 $\mathscr{I}=[0,\infty)$．

这样，假设已知：

a) 可测空间 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$，点 $\mathfrak{b}\bar{\in}\mathscr{X}$；$\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ (或 $\mathscr{X}$) 称为**体系(过程)的相空间**；令 $\mathscr{X}_{\mathfrak{b}}=\mathscr{X}\cup\{\mathfrak{b}\}$，记 $\mathfrak{B}_{\mathfrak{b}}$ 为 $\mathscr{X}_{\mathfrak{b}}$ 中包含 $\mathfrak{B}$ 和单点集 $\{\mathfrak{b}\}$ 的最小 σ 代数；

b) 可测空间 $\{\Omega,\mathfrak{S}\}$ 和 σ 代数族 $\{\mathfrak{S}_t^s,\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant\infty\}$：$\mathfrak{S}_t^s\subset\mathfrak{S}_v^u\subset\mathfrak{S}$，$0\leqslant u\leqslant s\leqslant t\leqslant v$；记 $\mathfrak{S}_t^0\equiv\mathfrak{S}_t$，$\mathfrak{S}_\infty^s\equiv\mathfrak{S}^s$；

c) $\mathfrak{S}^s$ 上的概率测度 $\mathbf{P}_{s,x}$，$(s,x)\in[0,\infty)\times\mathscr{X}_{\mathfrak{b}}$；

d) 定义在 $[0,\infty)\times\Omega$ 上、取值于 $\mathscr{X}_{\mathfrak{b}}$ 的函数 $\xi(t,\omega)$，它具有下列性质：如果对某一对 (t_0,ω_0) 有 $\xi(t_0,\omega_0)=\mathfrak{b}$，则对所有 $t>t_0$ 有 $\xi(t,\omega)=\mathfrak{b}$．

有时对于 $t=\infty$ 补定义 $\xi(t,\omega)$ 的值是适宜的．为此我们规定 $\xi(\infty,\omega)=\mathfrak{b}$．以后，有时把 $\xi(t,\omega)$ 写为 $\xi(t)$，ξ_t 或 $\xi_t(\omega)$．由 a)—d) 所表征的一组对象简记为 $\{\xi(t,\omega),\mathfrak{S}_t^s,\mathbf{P}_{s,x}\}$．

设 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 和 $\{\Omega,\mathfrak{S}\}$ 为任意可测空间．以 $\mathfrak{S}|\mathfrak{B}$ 表从

$\{\Omega, \mathfrak{S}\}$ 到 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 的可测映射的全体.

定义 1 称对象组 $\{\xi(t, \omega), \mathfrak{S}_t^s, \mathbf{P}_{s,x}\}$ 为马尔科夫过程，如果

1) 对每个 $t\in[0, \infty)$, $\xi_t(\omega)\in\mathfrak{S}_t^s|\mathfrak{B}_b$,

2) 对任意固定的 $s, t, B(0\leqslant s\leqslant t, B\in\mathfrak{S})$ 作为 x 的函数 $P(s, x, t, B)=\mathbf{P}_{s,x}\{\xi(t)\in B\}$ 为 $\mathfrak{B}$ 可测,

3) 对所有 $s\geqslant 0$, $x\in\mathscr{X}_b$, $\mathbf{P}_{s,x}\{\xi(s)\in\mathscr{X}\backslash x\}=0$,

4) 对所有 s, t, u, $0\leqslant s\leqslant t\leqslant u<\infty$, $x\in\mathscr{X}_b$ 和 $B\in\mathfrak{B}_b$, 有

$$\mathbf{P}_{s,x}\{\xi(u)\in B|\mathfrak{S}_t^s\}=\mathbf{P}_{t,\xi(t)}\{\xi(u)\in B\}.$$

前面已经指出，当 $t\geqslant s$ 时，如果在时刻 s 体系位于 x，则应把 $\mathbf{P}_{s,x}$ 看成决定它在相空间中运动的概率规律;条件 4) 表示过程的马尔科夫性; 条件 3) 表示 $\xi(s)=x$ 或 $\xi(s)=\mathfrak{b}$ $(\mathrm{mod}\mathbf{P}_{s,x})$. 按说条件

$$\mathbf{P}_{s,x}\{\xi(s)=x\}=1 \tag{1}$$

是比较自然的. 但是，在一些问题中我们希望马尔科夫过程的轨道是右连续的. 为此,不得不设想比 (1) 更一般的条件.

满足条件 (1) 的马尔科夫过程称为正规的.

当 $x=\mathfrak{b}$ 时，由条件 3) 和函数 $\xi(t)$ 的性质可知，对 $t\geqslant s$ 有

$$\mathbf{P}_{s,\mathfrak{b}}\{\xi(t)=\mathfrak{b}\}=1.$$

这意味着，$\mathfrak{b}$ 是过程的吸收状态: 体系在相空间中运动直到它"灭绝"(或从相空间消失)为止;这时它落入状态 $\mathfrak{b}$，并从此永远停留在该状态. 如果集 $\{t: \xi(t, \omega)=\mathfrak{b}\}$ 不空,则令

$$\zeta(\omega)=\inf\{t: \xi(t, \omega)=\mathfrak{b}\},$$

否则令 $\zeta(\omega)=\infty$. 因为 $\{\zeta(\omega)>t\}=\{\xi(t)\neq\mathfrak{b}\}\in\mathfrak{S}_t$, 故 $\zeta(\omega)$ 关于 $\{\mathfrak{S}_t\}$ 是随机时间. 这时

$$\xi(t)\begin{cases}\neq\mathfrak{b}, & 当\ t<\zeta(\omega),\\ =\mathfrak{b}, & 当\ t>\zeta(\omega).\end{cases}$$

定义 2 随机时间 ζ 称为马尔科夫过程的生存时间.

仍以 $\mathfrak{N}_t^s$ 表示随机元素 $\xi(u)$ $(u\in[s, t], s\leqslant t)$ 产生的 σ

代数，而 $\mathfrak{N}^s = \mathfrak{N}^s_\infty$，$\mathfrak{N}_s = \mathfrak{N}^s_s$. 假设 η 为 $\mathfrak{N}^s$ 可测随机变量. 记 $\mathbf{E}_{s,x}\eta$ 为随机变量 η 对测度 $\mathbf{P}_{s,x}$ 的数学期望(如果它存在).

引理 1 如果 η 是有界（非负）$\mathfrak{N}^s$ 可测随机变量，则 $\mathbf{E}_{s,x}\eta$ 是自变量 x 的 $\mathfrak{B}$ 可测函数.

证. 由函数 $P(s, x, t, B)$ 对 x 的 $\mathfrak{B}$ 可测性即可推出引理的结论，这可用标准方法证明之. 使引理结论成立的随机变量组成线性单调类. 因此，只需对形如 $f(\xi(t_1), \cdots, \xi(t_n))$ 的随机变量证明引理，其中 $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n < t$，而 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是有界 $\mathfrak{B}^n$ 可测函数. 由逼近定理可知，为此可以只局限于形如 $\prod_{k=1}^{n} f_k(x_k)$ 的函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$，其中 $f_k(x) \in b(\mathfrak{B})$. 当 $n = 1$ 时，有

$$g(x) = \int f_1(y) P(s, x, t, dy).$$

函数 $g(x)$ 为 $\mathfrak{B}$ 可测：因为满足此条件的函数 g 的集合是线性的，并且对单调非负函数序列的极限封闭，而且由引理的条件知，它包含 $\mathfrak{B}$ 可测集的示性函数. 为结束证明，现在只需利用数学归纳法和 § 2 的 (12) 式. 由此

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{s,x}\left(\prod_{k=1}^{n} f_k(\xi(t_k))\right) = \int & P(s, x, t_1, dy_1) f(y_1) \\ & \times \int P(t_1, y_1, t_2, dy_2) f(y_2) \cdots \\ & \times \int P(t_{n-1}, y_{n-1}, t_n, dy_n) f(y_n).\end{aligned}$$

由马尔科夫过程的定义可知，对任意 x，概率空间 $\{\Omega, \mathfrak{S}^s, \mathbf{P}_{s,x}\}$ 上的函数 $\xi(t, \omega)$ 关于 σ 代数流 $\{\mathfrak{S}^s_t\}$ 是马尔科夫随机函数，其中 $t \geqslant s$.

除此之外，设 q 是 $\mathfrak{B}_b$ 上的任一概率测度. 对任意 $C \in \mathfrak{N}^s$ 令

$$\mathbf{P}_{s,q}(C) = \int_{\mathscr{X}_b} \mathbf{P}_{s,x}(C) q(dx). \tag{2}$$

由引理 1 可知此定义合理. 显然，$\mathbf{P}_{s,q}(C)$ 是 $\mathfrak{N}^s$ 上的测度. 其

次，如果 $s\leqslant t\leqslant u$，$C\in\mathfrak{N}_t^s$ 和 $B\in\mathfrak{B}_b$，则

$$\mathbf{P}_{s,q}(\{\xi(u)\in B\}\cap C)=\int_{\mathscr{X}_b}\mathbf{P}_{s,x}(\{\xi(u)\in B\}\cap C)q(dx)$$
$$=\int_{\mathscr{X}_b}\int_C\mathbf{P}_{t,\xi(t)}(\{\xi(u)\in B\})d\mathbf{P}_{s,x}q(dx)$$
$$=\int_C\mathbf{P}_{t,\xi(t)}(\{\xi(u)\in B\})d\mathbf{P}_{s,q},$$

其中最后一个等式成立是根据 § 1 引理 2. 由此可见

$$\mathbf{P}_{s,q}(\{\xi(u)\in B\}|\mathfrak{N}_t^s)=\mathbf{P}_{t,\xi(t)}(\{\xi(u)\in B\})\ (\mathrm{mod}\mathbf{P}_{s,q}).$$

引理 2 假设 q 是 $\mathfrak{B}_b$ 上的任一测度，$q(\mathscr{X}_b)=1$. 那末，函数 $\xi(t,\omega)$，$t\geqslant s$，关于 σ 代数流 $\{\mathfrak{N}_t^s, t\geqslant s\}$ 是概率空间 $\{\Omega,\mathfrak{N}^s,\mathbf{P}_{s,q}\}$ 上的马尔科夫随机函数，取值于 $\mathscr{X}_b$.

在某些场合，要求函数 $P(s,x,t,B)$ 有更强的可测性.

记 $\mathscr{T}_t$ 为 $[0,t]$ 上 Borel 集的 σ 代数.

定义 3 称马尔科夫过程为弱可测的，如果对任意 $t>0$，作为 $(s,x)\in[0,t]\times\mathscr{X}$ 的函数，$P(s,x,t,B)(t\geqslant s)$ 为 $\mathscr{T}_t\times\mathfrak{B}$ 可测.

引理 3 如果马尔科夫过程弱可测，则

a) 对任意 $\mathscr{T}_t\times\mathfrak{B}$ 可测函数 $f(s,x)$，函数 $g(s,x)=\mathbf{E}_{s,x}f(s,\xi_t)$ 为 $\mathscr{T}_t\times\mathfrak{B}$ 可测;

b) 对任意 $\mathfrak{N}^t$ 可测随机变量 η，函数 $g(s,x)=\mathbf{E}_{s,x}\eta$ 为 $\mathscr{T}_t\times\mathfrak{B}$ 可测.

证. 仿照引理 1 的证明，只需对形如 $f(s,x)=h(s)\chi(B,x)$ 的函数 f 来验证命题 a)，其中 h 是有界的 $\mathscr{T}_t$ 可测函数，$B\in\mathfrak{B}$. 用与引理的证明相同的方法即可得命题 b).

基本 σ 代数的完备化 在马尔科夫过程的定义中要求函数 $\xi_t(\omega)\in\mathfrak{S}_t^s|\mathfrak{B}_b$ $(s\leqslant t)$. 在有些场合重要的是使 $\xi_t(\omega)$ 为到空间 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}'_b\}$ 里的可测映射，其中 $\mathfrak{B}'$ 是比 $\mathfrak{B}$ 更广的 σ 代数；或者使对 $\mathfrak{N}_t^s$ 中的集成立的关系式，对于更广的集合类也成立. 在这一小节中我们将要证明，可以适当地扩张 σ 代数 $\mathfrak{S}_t^s$ 和 $\mathfrak{N}_t^s$，同时保留它们在马尔科夫过程的定义和性质中的作用；特别，这时 $\xi_t(\omega)$ 是

到$\{\mathscr{X}_b, \mathfrak{B}_b^*\}$的可测映射，其中$\mathfrak{B}^*$（一般）是$\sigma$代数$\mathfrak{B}$的本质的扩张.

我们回忆σ代数关于某一测度的完备化的含意. 设$\mathfrak{F}$是一σ代数，q是它上面的测度. 说$\mathfrak{F}$**关于测度**q**是完备的**（q**完备的**），如果由$A \subset B$, $B \in \mathfrak{F}$和$q(B)=0$可知$A \in \mathfrak{F}$.

如果σ代数$\mathfrak{F}$不完备，则可以通过如下方法使其完备化. 我们这样来定义集组$\mathfrak{F}^q$：如果F_1和F_2属于$\mathfrak{F}$，$F_1 \subset A \subset F_2$，而且$q(F_2 \setminus F_1)=0$，则令$A \in \mathfrak{F}^q$.

容易证明，集组$\mathfrak{F}^q$是q完备σ代数. 可以这样来表征$\mathfrak{F}^q$中的集：$A \in \mathfrak{F}^q$当且仅当存在$B \in \mathfrak{F}$，使$A \Delta B$是$\mathfrak{F}$的一零测集的子集.

设Q'是一测度族. 令

$$\mathfrak{F}^{Q'} = \bigcap_{q \in Q'} \mathfrak{F}^q.$$

称$\mathfrak{F}^{Q'}$为σ代数$\mathfrak{F}$**关于测度族**Q'**的完备化**. 如果$\mathfrak{F}^Q=\mathfrak{F}$，则说$\sigma$代数$\mathfrak{F}$是$Q'$**完备的**.

也可以这样来叙述$\mathfrak{F}^{Q'}$的定义：$F \in \mathfrak{F}Q'$当且仅当对任意$q \in Q'$可以找到一个集合$F_q \in \mathfrak{F}$，使$F \Delta F_q \in \mathfrak{F}^q$，并且$q(F \Delta F_q)=0$.

引理 4 实函数f为$\mathfrak{F}^{Q'}$可测，当且仅当对任意$q \in Q'$存在这样两个$\mathfrak{F}$可测函数f_1和f_2，使$f_1 \leqslant f \leqslant f_2$，并且$q\{f_2 - f_1 > 0\}=0$.

引理条件的充分性显然. 对于$\mathfrak{F}^{Q'}$可测集的示性函数，可以直接由$\mathfrak{F}^{Q'}$的定义得出它的必要性. 另一方面，满足引理条件的函数f的全体是线性单调系. 因而它包含所有$\mathfrak{F}^{Q'}$可测函数.

如果Q'是$\mathfrak{F}$上有穷测度的全体，则称$\mathfrak{F}^{Q'}$中的集为σ**代数**$\mathfrak{F}$**产生的普遍可测集**.

记$\mathfrak{F}^*$为$\mathfrak{F}$产生的普遍可测集的σ代数.

以后还要用到比σ代数关于给定测度族的完备化稍为复杂一些的概念.

定义 4 设 $\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathscr{X}$ 子集的 σ 代数，Q 是 $\mathfrak{S}$ 上一有穷测度族，$\mathfrak{F}\subset\mathfrak{S}^{Q}$.

设 $\tilde{\mathfrak{F}}$ 是 F 集合类. 称 $\tilde{\mathfrak{F}}$ 为 σ 代数 $\mathfrak{F}$ 关于测度族 Q' 在 $\mathfrak{S}^{Q'}$ 中的完备化，如果对每个测度 q，存在集 $F_q\in\mathfrak{S}^{Q'}$，使

$$F\Delta F_q\in\mathfrak{S}^{Q'},\ q(F\Delta F_q)=0.$$

引理 5 设 $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{S}$. 那末 $F\in\tilde{\mathfrak{F}}$，当且仅当对任意测度 $q\in Q'$ 存在 $S_q\in\mathfrak{S}$，使 $q(S_q\Delta F)=0$.

证. 如果 F 满足引理的条件，则根据定义 $F\in\tilde{\mathfrak{F}}$. 另一方面，如果 $F\in\tilde{\mathfrak{F}}$，则对任意 $q\in Q'$ 存在 $F_q\in\mathfrak{S}^{Q'}$，使 $q(F\Delta F_q)=0$. 此外，对给定的 q 和 $F_q\in\mathfrak{S}^{Q'}$ 存在 $S_q\in\mathfrak{S}$，使 $q(S_q\Delta F_q)=0$. 因为 $S_q\Delta F\subset(S_q\Delta F_q)\cup(F_q\Delta F)$，故 $q(F\Delta S_q)=0$. 引理得证.

在相空间 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 中考虑某一马尔科夫过程 $\{\xi(t,\omega),\mathfrak{S}_t^s,\mathbf{P}_{s,x}\}$. 记 $\mathfrak{B}^*$ 为 σ 代数 $\mathfrak{B}_b$ 所产生的普遍可测集的 σ 代数. 设 $\bar{\mathfrak{S}}^s$ 是 $\mathfrak{S}^s$ 关于测度族 $\{\mathbf{P}_{u,x},x\in\mathscr{X},u\leqslant s\}$ 的完备化，而 $\bar{\mathfrak{S}}_t^s$ 是 $\mathfrak{S}_t^s$ 关于该测度族在 $\bar{\mathfrak{S}}^s$ 中的完备化，显然，当 s 增大时，$\bar{\mathfrak{S}}^s$ 和 $\bar{\mathfrak{S}}_t^s$ 单调不增，而当 t 增大时，$\bar{\mathfrak{S}}_t^s$ 单调不降. 类似，记 $\tilde{\mathfrak{N}}^s$ 为 $\mathfrak{N}^s$ 关于测度族 $\{\mathbf{P}_{u,q},q\in Q',u\leqslant s\}$ 的完备化，其中 Q' 是 $\mathfrak{B}_b^*$ 上有穷测度的全体；$\tilde{\mathfrak{N}}_t^s$ 是 $\mathfrak{N}_t^s$ 关于上述测度族在 $\tilde{\mathfrak{N}}^s$ 中的完备化. 显然 $\bar{\mathfrak{S}}_t^s\supset\tilde{\mathfrak{N}}_t^s$. 不难看出，在 $\tilde{\mathfrak{N}}^s$ 和 $\tilde{\mathfrak{N}}_t^s$ 的定义中，可以用测度族 $\{\mathbf{P}_{s,q},q\in Q'\}$ 来代替测度族 $\{\mathbf{P}_{u,q},q\in Q',u\leqslant s\}$.

引理 6 如果 η 是有界 $\tilde{\mathfrak{N}}^s$ 可测随机变量，则 $\mathbf{E}_{s,x}\eta$ 是 x 的 $\mathfrak{B}_b^*$ 可测函数.

证. 设 q 是 $\{\mathscr{X}_b,\mathfrak{B}_b\}$ 上的一任意测度. 那末，对于给定的有界 $\tilde{\mathfrak{N}}^s$ 可测随机变量 η，可以找到两个有界 $\mathfrak{N}^s$ 可测随机变量 η_1 和 η_2，$\eta_1\leqslant\eta\leqslant\eta_2$，使 $\mathbf{E}_{s,q}(\eta_2-\eta_1)=0$（引理 4）. 因为

$$\int(\mathbf{E}_{s,x}\eta_2-\mathbf{E}_{s,x}\eta_1)\,q(dx)=\mathbf{E}_{s,q}(\eta_2-\eta_1)=0,$$

$$\mathbf{E}_{s,x}\eta_2-\mathbf{E}_{s,x}\eta_1\geqslant 0,$$

$$\mathbf{E}_{s,x}\eta_1\leqslant\mathbf{E}_{s,x}\eta\leqslant\mathbf{E}_{s,x}\eta_2,\ \mathbf{E}_{s,x}\eta_i\in b(\mathfrak{B}_b),\ i=1,2,$$

故由引理1知 $\mathbf{E}_{s,x}\eta$ 为 $\mathfrak{B}_b^*$ 可测随机变量.

引理7 设 $\{\mathscr{X}_i, \mathfrak{B}_i\}$ 是可测空间, Q' 是 $\mathfrak{B}_i$ 上的测度族, $i=1,2$. 如果 $f\in\mathfrak{B}_1|\mathfrak{B}_2$,并且对任意测度 $q\in Q'_1$ 有 $qf^{-1}\in Q'_2$, 则 $f\in\mathfrak{B}_1^{Q'_1}|\mathfrak{B}_2^{Q'_2}$.

证. 需要证明, 对任意集 $\tilde{B}\in\mathfrak{B}_2^{Q'_2}$ 有 $f^{-1}(\tilde{B})\in\mathfrak{B}_1^{Q'_1}$. 设 $q\in Q'_1$. 那末 $q'=qf^{-1}\in Q'_2$, 并且存在集 $A_{q'}$, $B_{q'}$ 和 $C_{q'}\in\mathfrak{B}_2$, 使

$$C_{q'}\backslash A_{q'}\subset\tilde{B}\subset C_{q'}\cup B_{q'},\quad q'(A_{q'})=q'(B_{q'})=0.$$

设 $C_q=f^{-1}(C_{q'})$, $A_q=f^{-1}(A_{q'})$, $B_q=f^{-1}(B_{q'})$. 那末,

$$C_q\backslash A_q\subset f^{-1}(\tilde{B})\subset C_q\cup B_q,\quad q(A_q)=q(B_q)=0.$$

从而引理得证.

系. $\xi_t(\omega)\in\tilde{\mathfrak{N}}_t^s|\mathfrak{B}_b^*$.

定理1 如果 $\eta\in b(\tilde{\mathfrak{N}}^t)$, $t>s$, 则

$$\mathbf{E}_{s,x}\{\eta|\bar{\mathfrak{S}}_t^s\}=\mathbf{E}_{t,\xi(t)}\eta.$$

证. 由引理6和引理7的系可知, $\mathbf{E}_{t,\xi(t)}\eta$ 为 $\tilde{\mathfrak{N}}_t^s$ 可测, 从而为 $\bar{\mathfrak{S}}_t^s$ 可测随机变量. 因此,只需证明,对任意集 $C\in\bar{\mathfrak{S}}_t^s$ 成立等式

$$\int_C\eta d\mathbf{P}_{s,x}=\int_C\mathbf{E}_{t,\xi(t)}\eta d\mathbf{P}_{s,x}.\tag{3}$$

至于(3)式,则只需要证明对所有 $C\in\mathfrak{S}_t^s$ 成立(因为对任何测度 $\mathbf{P}_{s,x}$, $\bar{\mathfrak{S}}_t^s$ 中的集和 $\mathfrak{S}_t^s$ 中相应的集只相差一 $\mathbf{P}_{s,x}$ 零测子集).

在 $\mathfrak{B}_b^*$ 上定义一测度 q: $q(B)=\mathbf{P}_{s,x}\{\xi(t)\in B\}$. 那末,对于有界的 $\tilde{\mathfrak{N}}^t$ 可测随机变量 η 有

$$\mathbf{E}_{t,q}\eta=\int\mathbf{E}_{t,y}\eta q(dy)=\mathbf{E}_{s,x}\mathbf{E}_{t,\xi(t)}\eta.$$

设 $\zeta\in b(\mathfrak{N}^t)$, $\{\omega:\eta\neq\zeta\}\subset A\in\mathfrak{N}^t$, $\mathbf{P}_{s,q}(A)=0$, 则

$$\mathbf{E}_{s,x}\mathbf{E}_{t,\xi(t)}|\eta-\xi|=\int\mathbf{E}_{t,y}|\eta-\zeta|q(dy)=0.$$

因此, 只要对随机变量 ζ 证明(3). 但由马尔科夫过程的一般性质可知它是成立的.

系 对象组 $\{\xi(t,\omega),\ \mathfrak{S}_t^s,\ \mathbf{P}_{s,x}\}$ 是马尔科夫过程，$\{\mathscr{X},\ \mathfrak{B}_b^*\}$ 是它的相空间．

在很多场合，下面的命题，即所谓 0—1 律是很有用的．

定理 2 设 $B\in\mathfrak{N}_s^s$. 那末 $\mathbf{P}_{s,x}(B)=0$ 或 1.

定理的证明十分简单． 因为 $B\in\mathfrak{S}_s$，而且 $B\in\mathfrak{N}^s$，故由 σ 代数 $\mathfrak{S}^s$ 和 $\mathfrak{N}^s$ 的条件独立性可知（见 § 2 (7)）: $\mathbf{P}_{s,x}(B)=\mathbf{P}_{s,x}(B\cap B)=\mathbf{P}_{s,x}(B)\cdot\mathbf{P}_{s,x}(B)$，而这当且仅当 $\mathbf{P}_{s,x}(B)=0$ 或 1 时才成立．

对任意 σ 代数流 $\{\mathfrak{F}_t,\ t\geqslant 0\}$，记

$$\mathfrak{F}_{t+}=\bigcap_{\delta>0}\mathfrak{F}_{t+\delta}.$$

有时，过程不但关于族 $\{\mathfrak{S}_t^s\}$ 是马尔科夫的，而且关于族 $\{\mathfrak{S}_{t+}^s\}$ 也是马尔科夫的．例如，标准马尔科夫过程（见 § 6)，或满足 § 4 定理 7 的条件的过程，都属于这种情形．

这时，如果 $B\in\mathfrak{N}_s^s$，则 $B\in\mathfrak{S}_{s+}^s$，$B\in\mathfrak{N}^s$．此外，仿照上一定理可以得到它更强的结果．

定理 2a 如果过程关于 σ 代数族 $\{\mathfrak{S}_{t+}^s\}$ 是马尔科夫的，则对 $B\in\mathfrak{N}_{s+}^s$，$\mathbf{P}_{s,x}(B)$ 或等于 0 或等于 1．

下面的引理和所提到的问题有一定的联系，并且在以后将要用到．

引理 8 如果 $\xi(t,\omega)$ 关于 $\{\mathfrak{N}_{t+}^s\}$ 是马尔科夫过程，则对任意 $s,\ t(0\leqslant s\leqslant t)\ \widetilde{\mathfrak{N}}_{t+}^s=\widetilde{\mathfrak{N}}_t^s$.

证． 根据引理的条件，对于任意随机变量 $\eta\in b(\mathfrak{N}^t)$ 和 $\mathfrak{B}_b$ 上的任何测度，有

$$\mathbf{E}_{s,q}\{\eta\,|\,\widetilde{\mathfrak{N}}_{t+}^s\}=\mathbf{E}_{t,\xi(t)}\eta=\mathbf{E}_{s,q}\{\eta\,|\,\mathfrak{N}_t^s\}. \tag{4}$$

如果 $\eta=\prod_{j=1}^{n}f_j(\xi(t_j))$，其中 $f_j(x)\in b(\mathfrak{B}_b)$，$s\leqslant t_1<\cdots<t_i\leqslant t<t_{i+1}<\cdots<t_n$，则 $(\mathrm{mod}\,\mathbf{P}_{s,q})$

$$\mathbf{E}_{s,q}\{\eta\,|\,\mathfrak{N}_{t+}^s\}=\prod_{j=1}^{i}f_j(\xi(t_j))\mathbf{E}_{s,q}\Big\{\prod_{j=i+1}^{n}f_j(\xi(t_j))\,|\,\mathfrak{N}_t^s\Big\}$$

$$= \mathbf{E}_{s,q}\{\eta | \mathfrak{N}_t^s\}. \tag{5}$$

通过极限过渡可以断定，该式对任意随机变量 $\eta \in b(\mathfrak{N}^s)$ 成立。

把 $\eta = \chi(C)$ 代入(5),其中 $C \in \mathfrak{N}_{t+}^s$. 由此可见，$\chi(C)$ 只在 $\mathbf{P}_{s,q}$ 零测集上区别于 $\mathfrak{N}_t^s$ 可测函数. 所以 $C \in \widetilde{\mathfrak{N}}_t^s$, 从而 $\mathfrak{N}_{t+}^s \subset \widetilde{\mathfrak{N}}_t^s$. 另一方面，不难验证 $\widetilde{(\mathfrak{N}_{t+}^s)} = \widetilde{(\mathfrak{N}_t^s)}_+$. 所以 $\widetilde{(\mathfrak{N}_{t+}^s)} \subset \widetilde{\mathfrak{N}}_t^s$. 于是引理得证.

随机等价马尔科夫过程 在很多场合，希望所研究的过程具有这样或那样的"好"性质. 如果原过程不具备这些性质,则可以用别的、和它没有本质差别的过程来代替它. 例如,在用一个过程代替（替换）另一个过程时,所谓非本质性是指不改变它的相空间和转移概率. 为此,我们引进如下重要定义.

定义 5 称相空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 中两个马尔科夫过程 $\{\xi(t, \omega), \mathfrak{S}_t^s, \mathbf{P}_{s,x}\}$ 和 $\{\tilde{\xi}(t, \tilde{\omega}), \tilde{\mathfrak{S}}_t^s, \tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\}$ 是**随机等价的**，如果对任意 s、t, $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, $B \in \mathfrak{B}$

$$\mathbf{P}_{s,x}\{\xi(t, \omega) \in B\} = \tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\{\tilde{\xi}(t, \tilde{\omega}) \in B\}.$$

在这之前，我们已经研究过一种把给定马尔科夫过程变为等价过程的变换. 就是用较广的 σ 代数族 $\{\bar{\mathfrak{S}}_t^s\}$ ($\mathfrak{S}_t^s \subset \bar{\mathfrak{S}}_t^s$), 或是用较窄的 σ 代数族来代替 $\mathfrak{S}_t^s$. 这时,马尔科夫过程定义中的所有关系都保持不变. 向较窄 σ 代数族的转换总是可能的，为此只需简单的压缩测度 $\mathbf{P}_{s,x}$ 的定义域. 扩张 σ 代数族 $\mathfrak{S}_t^s$ 却是一个不很确定的问题. 以前研究过的 σ 代数 $\mathfrak{S}_t^s$ 的完备化，就是这种变换的一个例子.

现在我们来研究，通过改变基本事件空间来实现的马尔科夫过程的变换. 可以把这种变换大体描述如下.

假设在基本事件空间 Ω 上有一马尔科夫过程 $\{\xi(t, \omega), \mathfrak{S}_t^s, \mathbf{P}_{s,x}\}$, $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 是它的相空间. 考虑集 $\tilde{\Omega}$ 到 Ω 的一单值映射 z. 象通常一样,记 $z^{-1}(S)$ 为集 $S \subset \Omega$ 的一切逆象的集合,而以 $\tilde{\mathfrak{S}}_t^s = z^{-1}(\mathfrak{S}_t^s)$ 表形如 $\tilde{S} = z^{-1}(S)$ 的所有 $\tilde{S}$ 的集组,其中 $S \in \mathfrak{S}_t^s$. 显然

$\tilde{\mathfrak{S}}_t^s$ 是 σ 代数. 在 $\tilde{\mathfrak{S}}_t^s$ 上定义一集函数 $\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}$:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}(z^{-1}S)=\mathbf{P}_{s,x}(S).$$

这个定义并非总是有意义的,因为 $\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}(\tilde{S})$ 一般不唯一确定. 显然,如果定义合理,则 $\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}$ 是概率测度.

引理 9 测度 $\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}$ 在 $\tilde{\mathfrak{S}}_t^s$ 上唯一的必要和充分条件是,对任意 (s,x) 和使 $z^{-1}(U)=\tilde{\Omega}$ 的任何集 $U\in\mathfrak{S}^s$, 有 $\mathbf{P}_{s,x}(U)=1$.

由

$$1=\mathbf{P}_{s,x}(\Omega)=\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}(\tilde{\Omega})=\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}(z^{-1}(U))=\mathbf{P}_{s,x}(U)$$

直接得引理条件的必要性.

为证充分性,假设 $S=z^{-1}(S_1)=z^{-1}(S_2)$. 那末

$$z^{-1}(S_1\backslash S_1\cap S_2)=z^{-1}(S_1)\backslash z^{-1}(S_1)\cap z^{-1}(S_2)=\phi.$$

所以 $\mathbf{P}_{s,x}(S_1\backslash S_1\cap S_2)=0$. 由此可见 $\mathbf{P}_{s,x}(S_1)=\mathbf{P}_{s,x}(S_1\cap S_2)$. 因为在上述推导中可以交换 S_1 和 S_2 的位置,故 $\mathbf{P}_{s,x}(S_1)=\mathbf{P}_{s,x}(S_2)$, 从而 $\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}$ $(\tilde{S})$的定义的唯一性得证.

现在令 $\tilde{\xi}(t,\tilde{\omega})=\xi(t,z(\tilde{\omega}))$. 不难证明下面的定理.

定理 3 如果满足引理 9 的条件, 则对象组 $\{\tilde{\xi}(t,\tilde{\omega}),\tilde{\mathfrak{S}}_t^s,\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\}$ 是马尔科夫过程,它和过程 $\{\xi(t,\omega),\mathfrak{S}_t^s,\mathbf{P}_{s,x}\}$ 有相同的转移概率.

系 设 $\tilde{\Omega}\subset\Omega$. 当 $\omega\in\tilde{\Omega}$ 时,令 $z(\omega)=\omega$, $\tilde{\xi}(t,\omega)=\xi(t,\omega)$ (当 $\omega\bar{\in}\tilde{\Omega}$ 时,映射 z 没有定义). 那末, $z^{-1}(S)=\{\omega:\omega\in S\cap\tilde{\Omega}\}$, $\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}(S\cap\tilde{\Omega})=\mathbf{P}_{s,x}(S)$, 其中 $S\in\mathfrak{S}^s$.

由引理 9 和定理 3 可知,如果对所有 $(s,x)\in[0,\infty)\times\mathscr{X}$ 和任意 $U\in\mathfrak{S}^s$, $U\supset\tilde{\Omega}$, 有 $\mathbf{P}_{s,x}(U)=1$, 则 $\{\tilde{\xi}(t,\tilde{\omega}),\tilde{\mathfrak{S}}_t^s,\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\}$ 是马尔科夫过程. 它和过程 $\{\xi(t,\omega),\mathfrak{S}_t^s,\mathbf{P}_{s,x}\}$ 的转移概率相同.

对于上述情形,我们说通过收缩基本事件空间由过程 $\xi(t,\omega)$ 得到过程 $\tilde{\xi}(t,\tilde{\omega})$. $\tilde{\Omega}$ 是它的基本事件空间,而 σ 代数 $\tilde{\mathfrak{S}}_t^s$, $t\in[s,\infty)$, 由全体 $\tilde{S}$ 形集组成,其中 $\tilde{S}=S\cap\tilde{\Omega}$, $S\in\mathfrak{S}_t^s$.

马尔科夫过程的变换的另一个重要例子, 是用泛函型空间来代替基本事件空间. 它和上述变换的区别, 在于映射 z 不再是单

值的(但逆映射 z^{-1} 是单值的). 为简便计(实际上这并不失普遍性),我们只考虑以 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 为相空间的不中断过程. 设 $\mathscr{I}$ 是非负半轴 $[0, \infty)$. 记 $\mathscr{X}^{\mathscr{I}}$ 为从 $\mathscr{I}$ 到 $\mathscr{X}$ 的全体映射的空间; $\mathscr{N}_t$(相应地 $\mathscr{N}^s$, $\mathscr{N}_t^s$) 是包含底的坐标为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的所有柱集的最小 σ 代数*),其中 $t_k \leqslant t$ (相应地 $t_k \geqslant s$, $t_k \in [s, t]$), $k = 1, 2, \cdots, n$. 设 $\mathscr{N} = \sigma\{\mathscr{N}_t, t \in \mathscr{I}\}$. 记 $x(\cdot)$ 为空间 $\mathscr{X}^{\mathscr{I}}$ 的元素, $x(t)$ 为它在 t 点的值 $(t \in \mathscr{I})$. 对 $\tilde{S} \in \mathscr{N}^s$ 令 $\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}(\tilde{S}) = \mathbf{P}_{s,x}(S)$, 其中 $S = \{\omega: \xi_\omega(\cdot) \in \tilde{S}\}$. 显然 $S \in \mathfrak{N}^s$. 令 $\tilde{\xi}(t, x(\cdot)) = x(t)$ $(x(\cdot) \in \mathscr{X}^{\mathscr{I}})$. 由 $\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}$ 的定义知对任意 $B^{(n)} \in \mathfrak{B}^n$ 有

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\{(\tilde{\xi}_{t_1}, \tilde{\xi}_{t_2}, \cdots, \tilde{\xi}_{t_n}) \in B^{(n)}\} \\
&\quad = \mathbf{P}_{s,x}\{(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \cdots, \xi_{t_n}) \in B^{(n)}\}.
\end{aligned}
$$

由此可见, $\{\tilde{\xi}(t, x(\cdot)), \mathscr{N}_t^s, \tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\}$ 是马尔科夫过程,它和过程 $\{\xi(t, \omega), \mathfrak{S}_t^s, \mathbf{P}_{s,x}\}$ 有相同的转移概率.

称过程 $\{\tilde{\xi}(t, x(\cdot)), \mathscr{N}_t^s, \tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\}$ 为马尔科夫过程的**典型表现**. 如果对过程的典型表现作基本 σ 代数的扩张和基本事件空间的压缩,则可以得到与原过程随机等价的新马尔科夫过程. 我们称其为**具有泛函型基本事件空间的马尔科夫过程**.

因此,具有泛函型基本事件空间的马尔科夫过程由下列对象给出: $\mathscr{L}$ ——定义在 $\mathscr{I}$ 上取值于 $\mathscr{X}$ 的函数的空间; $\mathfrak{L}_t^s$——包含 $\mathscr{L}$ 中底的坐标属于线段 $[s, t]$ 的所有柱集的 σ 代数族**).至于随变量族 $\xi_t(x(\cdot))$, 则它自然由下式给出: $\xi_t(x(\cdot)) = x(\cdot)$, $x(\cdot) \in \mathscr{L}$.

---

*) 记

$$C_{t_1,\cdots,t_n}(B^{(n)}) = \{\omega: (\xi_{t_1}(\omega), \cdots, \xi_{t_n}(\omega)) \in B^{(n)}\},$$

其中 $B^{(n)} \in \mathfrak{B}^n$. $\mathscr{N}_t$ 是包含形如 $C_{t_1,\cdots,t_n}(B^{(n)})$ 的所有柱集的最小 σ 代数,其中 $t_k \leqslant t$, $k = 1, 2, \cdots, n$. $\mathscr{N}^s$ 和 $\mathscr{N}_t^s$ 的含义类似. ——译者注

**) 记

$$C_{t_1,\cdots,t_n}(B^{(n)}) = \{\omega: (\xi_{t_1}(\omega), \cdots, \xi_{t_n}(\omega)) \in B^{(n)}\}.$$

对任意 $s < t$, $\mathfrak{L}_t^s$ 是包含形如 $C_{t_1,\cdots,t_n}(B^{(n)})$ 的所有柱集的 σ 代数, 其中 $B^{(n)} \in \mathfrak{B}$, $t_k \in [s, t]$, $k = 1, \cdots, n$. ——译者注

为便于引用，现将上面的结果归纳如下.

定理 4 任何马尔科夫过程都有典型表现. 马尔科夫过程和具有泛函型基本事件空间 $\mathscr{L}$ 的马尔科夫过程，二者随机等价的必要和充分条件是，对任意 $(s, x) \in \mathscr{I} \times \mathscr{X}$ 和任何 U: $U \in \mathfrak{S}^s$, $U \supset \{\omega: \xi_\omega(\cdot) \in \mathscr{L}\}$, 有 $\mathbf{P}_{s,x}(U) = 1$.

由转移概率构造马尔科夫过程 在这一节的最后，我们研究具有给定转移概率的马尔科夫过程的存在性问题.

具有给定转移概率、在完全可分度量空间取值的马尔科夫函数存在性的有关定理，在第一卷中大体上就有了. 那里的证明也适用于马尔科夫过程. 在这里我将扼要的重复这一证明，并且作一些必要的补充. 不失普遍性，可以局限于考虑不中断过程.

设 $\Omega = \mathscr{X}^{\mathscr{I}}$ 是定义在 $\mathscr{I}$ 上取值于 $\mathscr{X}$ 的全体函数 $\omega = x(\cdot)$ 的空间，其中 $\mathscr{I}$ 是广义实轴 $[-\infty, +\infty]$ 的子集. 在 $\mathscr{I} \times \Omega$ 上定义函数 $\xi_t = f(t, \omega)$: 当 $\omega = x(\cdot)$ 时，令 $\xi_t = f(t, \omega) = x(t)$.

象前面一样引进 σ 代数族 $\mathscr{N}_t$, $\mathscr{N}^s$ 和 $\mathscr{N}_t^s$. 它们是包含底的坐标为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的所有柱集的最小 σ 代数，其中对 $\mathscr{N}_t$, $\mathscr{N}^s$ 和 $\mathscr{N}_t^s$ 分别有 $t_k \leqslant t$, $t_k \geqslant s$ 和 $t_k \in [s, t]$, $t_k \in \mathscr{I}$, $k = 1, 2, \cdots, n$. 设 $\mathscr{N} = \sigma\{\mathscr{N}_t, t \in \mathscr{I}\}$.

定理 5 假设下列条件成立:

1) $\mathscr{X}$ 是完全可分度量空间，$\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{X}$ 中 Borel 集的 σ 代数;

2) $P(s, x, t, B) = \mathbf{P}_{s,x}(x, B)$ 是 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 中的马尔科夫随机核族;

3) $q = \{q_t(B), t \in \mathscr{I}\}$ 是关于转移概率 $P(s, x, t, B)$ 的流入律.

那末

a) 在 $\{\Omega, \mathscr{N}\}$ 上存在一测度 $\mathbf{P}^{(q)}$, 使 $\{\xi(t, \omega), t \in \mathscr{I}\}$ 是 $\mathscr{N}_t$ 马尔科夫函数，$P(s, x, t, B)$ 是它的转移概率，而 q 是它的流入律;

b) 在 $\{\Omega, \mathscr{N}^s\}$ 上存在一不依赖于流入律 q 的测度族 $\{\mathbf{P}_{s,x}(\cdot), x\in\mathscr{X}\}(s\in\mathscr{I})$，使对任意 $C\in\mathscr{N}^t$, $B\in\mathfrak{B}(s\leqslant t)$，有

$$\mathbf{P}^{(q)}(C|\mathscr{N}_t)=\mathbf{P}_{t,\xi(t)}(C), \tag{6}$$

$$\mathbf{P}_{s,x}(C|\mathscr{N}_t^s)=\mathbf{P}_{t,\xi(t)}(C), \tag{7}$$

$$\mathbf{P}_{s,x}\{\xi(t)\in B\}=P(s, x, t, B). \tag{8}$$

证. 令 $P(s, x, t, B)=\chi(B, x)$. 对任意 $t_k\in\mathscr{I}(k=1, 2, \cdots, n)$, $s\in\mathscr{I}$, $s\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n$, 设

$$\mathbf{P}^{(s,x)}_{t_1,\cdots,t_n}(B^{(n)})=\int\cdots\int\chi_{B^{(n)}}(x_1,\cdots,x_n)P(s, x, t_1, dx_1)\times\cdots P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n), \tag{9}$$

而

$$\mathbf{P}^{(q)}_{t_1,\cdots,t_n}(B^{(n)})=\int\mathbf{P}^{(s,x)}_{t_1,\cdots,t_n}(B^{(n)})q_s(dx), \tag{10}$$

其中 $B^{(n)}\in\mathfrak{B}^n$.

由 Колмогоров-Chapman 方程可见分布族 $\{\mathbf{P}^{(q)}_{t_1,\cdots,t_n}, t_1<\cdots<t_n, t_j\in\mathscr{I}\}$ 和 $\{\mathbf{P}^{(s,x)}_{t_1,\cdots,t_n}, t_1<\cdots<t_n, t_j\in\mathscr{I}\}$ 都满足相容性条件. 而由流入律的性质可知,分布 $\mathbf{P}^{(q)}_{t_1,\cdots,t_n}$ 不依赖于 $s(s\leqslant t_1, s\in\mathscr{I})$. 由 Колмогоров 定理知,它们在概率空间 $\{\Omega, \mathscr{N}, \mathbf{P}^{(q)}\}$ 和 $\{\Omega, \mathscr{N}^s, \mathbf{P}_{s,x}\}$ 上分别有某种表现. 这时由定义有

$$\mathbf{P}^{(q)}\{(\xi(t_1),\cdots,\xi(t_n))\in B^{(n)}\}=\mathbf{P}^{(q)}_{t_1,\cdots,t_n}(C_{t_1,\cdots,t_n}(B^{(n)})),$$

其中 $C_{t_1,\cdots,t_n}(B^{(n)})$ 表示 Ω 中以 $B^{(n)}$ 为底的柱集,而 $B^{(n)}$ 的坐标为 $t_1,\cdots,t_n$. 设 $t_i\leqslant t_{i+1}$, $i=1, 2,\cdots, n+m-1$. 因为

$$\int_{B_1^{(n)}}\mathbf{P}^{(t_n,x_n)}_{t_{n+1},\cdots,t_{n+m}}(B_2^{(m)})d\mathbf{P}^{(q)}_{t_1,\cdots,t_n}=\mathbf{P}^{(q)}_{t_1,\cdots,t_{n+m}}(B_1^{(n)}\times B_2^{(m)}), \tag{11}$$

所以

$$\mathbf{P}^{(q)}\{C_{t_{n+1},\cdots,t_{n+m}}(B_2^{(m)})|\sigma\{\xi(t_1),\cdots,\xi(t_n)\}\}=\mathbf{P}^{(t_n,\xi(t_n))}_{t_{n+1},\cdots,t_{n+m}}(B_2^{(m)}).$$

特别

$$\mathbf{P}^{(q)}\{\xi(t_{n+1})\in B|\sigma\{\xi(t_1),\cdots,\xi(t_n)\}\}$$

$$= P(t_n, \xi(t_n), t_{n+1}, B). \tag{12}$$

满足等式

$$\int_F P(t_n, \xi(t_n), t_{n+1}, B) d\mathbf{P}^{(q)} = \mathbf{P}^{(q)}(C_{t_{n+1}}(B) \cap F)$$

的全体 F 组成单调类 $\mathfrak{F}$，而由 (12) 它包含底的坐标不大于 t_{n+1} $(t_n \leqslant t_{n+1})$ 的所有柱集．所以，$\mathfrak{F} = \mathscr{N}_{t_{n+1}}$，而且

$$\mathbf{P}^{(q)}\{\xi(t) \in B \mid \mathscr{N}_s\} = P(s, \xi(s), t, B).$$

这证明，过程 $\xi(t)$，$t \in \mathscr{I}$，是 $\mathscr{N}_t$ 马尔科夫函数，$P(s, x, t, B)$，$s \leqslant t$，是它的转移概率．根据定义分布族 $q_t(\cdot)$ 是过程 $\xi(t)$ 的流入律．(11) 式可化为

$$\mathbf{P}^{(q)}(C \cap A) = \int_A \mathbf{P}_{t,\xi(t)}(C) d\mathbf{P}^{(q)},$$

其中 C 是 $\mathscr{N}^t$ 中的柱集，而 A 是 $\mathscr{N}_t$ 中的柱集．因为测度可以唯一地从柱集开拓到最小 σ 代数，故上式对任意 $A \in \mathscr{N}_t$ 和 $C \in \mathscr{N}^t$ 都成立．从而，$\mathbf{P}^{(q)}\{C \mid \mathscr{N}_t\} = \mathbf{P}_{t,\xi(t)}(C)$．最后只剩下证明(7)，(8) 两式．它们可以从已证的结果得到，因为当对应于开始分布 $q_s(B) = \chi(B, x)$ 的流入律给定时，$\mathbf{P}_{s,x}$ 可视为转移概率在 $t \in \mathscr{I} \cap [s, \infty]$ 的值集上产生的测度．定理得证．

§4. 强马尔科夫过程

在很多场合，重要的是在用随机时刻代替固定时刻 t 时，要求马尔科夫过程的无后效性

$$\mathbf{P}_{s,x}\{\xi(u) \in B \mid \mathfrak{S}_t^s\} = \mathbf{P}_{t,\xi(t)}\{\xi(u) \in B\} \quad (s \leqslant t \leqslant u)$$

仍然成立．

一般并不是这样．但是可以指出相当宽的条件，使过程具备上述性质，或者可以适当选择它的随机等价过程，使之具有这种性质．例如，离散时间的过程都具备这种性质．以前我们曾称之为过程的强马尔科夫性（第一卷，第一章 §4，定理 3）．下面是相应的结果．

设 $\xi(t)$ 是相空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 中离散时间齐次马尔科夫链 ($t=0, 1, 2, \cdots$); τ 是定义在 Ω_τ 上的随机时间; $\mathfrak{F}_\tau$ 是由 τ 所产生的 σ 代数; $D \in \mathfrak{F}_\tau$, $D \subset \Omega_\tau$. 那末, 对任意 t_k 和 $B_k \in \mathfrak{B}$ ($k=1, 2, \cdots, r$)

$$\mathbf{P}^{(x)}\left\{D \bigcap_{k=1}^{r} [\xi(t_k+\tau) \in B_k]\right\}$$

$$= \int_{\mathscr{X}} \mathbf{P}^{(y)}\left(\bigcap_{k=1}^{r} [\xi(t_k) \in B_k]\right) \mathbf{P}^{(\tau)}(x, D, dy),$$

其中

$$\mathbf{P}^{(\tau)}(x, D, A) = \mathbf{P}^{(x)}(D \cap [\xi(\tau) \in A]).$$

如果随机时间有穷, 则由此可见, 对任意 x, 随机序列 $\xi(t+\tau)$, $t=0, 1, \cdots$, 是马尔科夫链. 它和序列 $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, 有相同的转移概率, 而且对给定的 $\xi(\tau)$, 由变量 $\{\xi(t), t \geqslant \tau\}$ 所产生的 σ 代数中的事件不依赖于 $\mathfrak{F}_\tau$.

本节在一些补充条件下, 对于连续时间马尔科夫过程将要证明类似的结果. 并且顺便引进一些重要概念, 证明一些定理. 这些结果不仅对强马尔科夫性, 而且对随机过程论的其它问题也都是很有用的.

马尔科夫时间 以后, 随机时间对于马尔科夫过程起重要作用. 现在回忆随机时间的定义和性质 (第一卷, 第二章 § 2), 并且证明后面要用到的一些新命题.

在可测空间 $\{\Omega, \mathfrak{F}\}$ 上考虑 σ 代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t \in [a, \infty]\}$. 令 $\mathfrak{F}_\infty = \mathfrak{F}$. 在 $[a, \infty]$ 上取值的随机变量 τ 称为**随机时间**(关于 σ 代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t \in [a, \infty]\}$), 如果对所有 $t \in [a, \infty]$ 有 $\{\tau \leqslant t\} \in \mathfrak{F}_t$.

显然, τ 是随机时间, 当且仅当对任意 $t \in [a, \infty]$ 有 $\{\tau > t\} \in \mathfrak{F}_t$. 如果 τ 是随机时间, 则 $\{\tau = t\} \in \mathfrak{F}_t (t \in [a, \infty])$.

在这一节我们要研究各种不同的随机时间, 如果不特别说明, 则认为它们都是关于同一 σ 代数流的. 对于两个随机时间 τ_1 和 τ_2, $\tau_1 + \tau_2$, $\min(\tau_1, \tau_2)$, $\max(\tau_1, \tau_2)$ 也都是随机时间.

对每一随机时间 τ，有一个（由随机变量 τ 产生的）σ 代数 $\mathfrak{F}_\tau$ 和它相对应。$\mathfrak{F}_\tau$ 由所有这样的集 A 组成：$A \in \mathfrak{F}$，对任意 $t \in [a, \infty]$ 有 $A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathfrak{F}_t$。不难验证：

a）随机变量 τ 为 $\mathfrak{F}_\tau$ 可测；

b）如果 $\tau_1 \leqslant \tau_2$，则 $\mathfrak{F}_{\tau_1} \subset \mathfrak{F}_{\tau_2}$；

c）如果 τ_1 和 τ_2 是两个随机时间，则事件 $\{\tau_1 < \tau_2\}$，$\{\tau_1 \leqslant \tau_2\}$，$\{\tau_1 = \tau_2\}$ 同属于 $\mathfrak{F}_{\tau_1}$ 和 $\mathfrak{F}_{\tau_2}$。

现在我们对给定的 σ 代数流 $\{\mathfrak{F}_t,\ t \in [a, \infty]\}$ 引进 σ 代数 $\mathfrak{F}_{t+}(t < \infty)$ 和 $\mathfrak{F}_{t-}(t > a)$：$\mathfrak{F}_{t+}$ 是包含在所有 $\mathfrak{F}_s(s > t)$ 之中的最小 σ 代数，而 $\mathfrak{F}_{t-}$ 是包含所有 $\mathfrak{F}_s(s < t)$ 的最小 σ 代数。显然

$$\mathfrak{F}_{t-} \subset \mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_{t+}, \quad \mathfrak{F}_{t+} = \bigcap_{s > t} \mathfrak{F}_s.$$

令 $\mathfrak{F}_{a-} = \mathfrak{F}_a$，$\mathfrak{F}_{\infty+} = \mathfrak{F}_\infty$。那末 $\{\mathfrak{F}_{t-},\ t \in [a, \infty]\}$ 和 $\{\mathfrak{F}_{t+},\ t \in [a, \infty]\}$ 也是 σ 代数流。

称 σ 代数流 $\{\mathfrak{F}_t,\ t \in [a, \infty]\}$ 为**右连续的**，如果对所有 $t \in [a, \infty]$ 有 $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_{t+}$。不难验证，$\sigma$ 代数流 $\{\mathfrak{F}_{t+},\ t \in [a, \infty]\}$ 右连续。

引理 1 随机变量 τ 关于 $\{\mathfrak{F}_{t+},\ t \in [a, \infty]\}$ 是随机时间，当且仅当对一切 $t \in [a, \infty)$ 有 $\{\tau < t\} \in \mathfrak{F}_t$。

由下列关系式即可得引理的结论：

$$\{\tau \leqslant t\} = \bigcap_n \left\{\tau < t + \frac{1}{n}\right\}, \quad \{\tau < t\} = \bigcup_n \left\{\tau \leqslant t - \frac{1}{n}\right\}.$$

引理 2 如果 τ_n，$n = 1, 2, \cdots$，关于 $\{\mathfrak{F}_t,\ t \in [a, \infty]\}$ 是随机时间，则 $\sup \tau_n$ 关于同一 σ 代数流也是随机时间；而 $\inf \tau_n$，$\underline{\lim} \tau_n$ 和 $\overline{\lim} \tau_n$ 关于 σ 代数流 $\{\mathfrak{F}_{t+},\ t \in [a, \infty]\}$ 均为随机时间。如果 σ 代数流 $\{\mathfrak{F}_t,\ t \in [a, \infty]\}$ 右连续，而 $\tau = \inf \tau_n$，则 $\mathfrak{F}_\tau = \bigcap_n \mathfrak{F}_{\tau_n}$。

证．由等式 $\{\sup \tau_n \leqslant t\} = \bigcap_n \{\tau_n \leqslant t\}$ 得第一个结论。因

为 $\{\inf\tau_n < t\} = \bigcup_n \{\tau_n < t\}$，故由引理 2 知，$\inf\tau_n$ 关于 $\{\mathfrak{F}_{t+}\}$ 是随机时间．对于 $\overline{\lim}\tau_n = \inf_m \sup_{n\geq m} \tau_n$ 和 $\underline{\lim}\tau_n = \sup_m \inf_{n\geq m} \tau_n$，可以用类似的方法证明之．

最后，如果 $\tau = \inf\tau_n$，$\mathfrak{F}_{t+} = \mathfrak{F}_t$，则由 $\mathfrak{F}_\tau \subset \mathfrak{F}_{\tau_n}$ 可见 $\mathfrak{F}_\tau \subset \bigcap_n \mathfrak{F}_{\tau_n}$．另一方面，如果 $A \in \mathfrak{F}_{\tau_n}$，则 $A \cap \{\tau < t\} = \bigcup_n (A \cap \{\tau_n < t\}) \in \mathfrak{F}_t$．由此可见 $A \cap \{\tau \leqslant t\} = \bigcap_n \left(A \cap \left\{\tau < t + \frac{1}{n}\right\}\right) \in \mathfrak{F}_{t+} = \mathfrak{F}_t$，即 $\mathfrak{F}_\tau \supset \bigcap_n \mathfrak{F}_{\tau_n}$．从而 $\mathfrak{F}_\tau = \bigcap_n \mathfrak{F}_{\tau_n}$．

设 $\{\xi(t, \omega), \mathfrak{S}_t^s, \mathbf{P}_{s,x}\}$ 是一马尔科夫过程．称在 $[s, \infty]$ 上取值，关于 σ 代数流 $\{\mathfrak{S}_t^s, t \geqslant s\}$ ($\{\mathfrak{N}_t^s, t \geqslant s\}$ 或 $\{\tilde{\mathfrak{N}}_t^s, t \geqslant s\}$) 的随机时间为 $\mathfrak{S}_t^s$($\mathfrak{N}_t^s$-或 $\tilde{\mathfrak{N}}_t^s$-) 马尔科夫时间；如果明确知道是关于哪个 σ 代数流而言，则简称为马尔科夫时间．记 $\mathfrak{S}_\tau^s$ 为 $\mathfrak{S}_t^s$ 马尔科夫时间产生的 σ 代数．

循序可测函数　在这一小节中引进与可测函数理论有关的一些概念，并证明可测函数的某些性质．以后，它们在随机过程论，其中包括在马尔科夫过程论中会有用处．

设 $\mathscr{T}^a$ 是 $[a, \infty)$ 上 Borel 集的 σ 代数；$\mathscr{T}_t^s$ 是 $\mathscr{T}^a$ 的压缩，它是由 $[s, t]$ 的子集组成的．记 $\mathscr{T}_t = \mathscr{T}_t^a$．设 $\{\Omega, \mathfrak{F}\}$ 和 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 是两个可测空间；以 $\mathfrak{F}|\mathfrak{B}$ 表从 $\{\Omega, \mathfrak{F}\}$ 到 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 的所有可测映射的全体．

我们说函数 $x(t, \omega)$ ($t \in [a, \infty)$, $\omega \in \Omega$) 为 Borel 可测，如果 $x(\cdot, \cdot) \in (\mathscr{T}^a \times \mathfrak{F})|\mathfrak{B}$．记 x_t 或 $x_t(\omega)$ 为函数 $x(t, \omega)$ 的 t 截口．由测度论知，如果 $x(\cdot, \cdot) \in (\mathscr{T} \times \mathfrak{F})|\mathfrak{B}$，则对任意 $t \in [a, \infty)$ 有 $x_t(\omega) \in \mathfrak{F}|\mathfrak{B}$．在很多场合往往需要假设函数有更强的可测性．

假设，在 $\{\Omega, \mathfrak{F}\}$ 上有一 σ 代数流 $\mathfrak{F}_t (a \leqslant t \leqslant \infty)$．仍然称对象组 Ω, $\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{F}_t$ 为可测空间，并且记作 $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t\}$．

定义 1 称取值于 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 的函数 $x(t, \omega)$ 关于空间 $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t\}$ 循序可测(或 $\mathfrak{F}_t$ 循序可测),如果对任意 $s(s \in [a, \infty))$ 它在集 $[a, s] \times \Omega$ 上的压缩为 $\mathscr{T}_s \times \mathfrak{F}_s$ 可测,即如果对所有 $B \in \mathfrak{B}$和 $s \in [a, \infty)$ 有

$$\{(t, \omega): x(t, \omega) \in B, t \in [a, s]\} \in \mathscr{T}_s \times \mathfrak{F}_s.$$

注. 由定义可知 $x_t(\omega) \in \mathfrak{F}_t | \mathfrak{B}$, 也就是说,函数族 $\{x_t(\omega), t \geqslant a\}$ 适应 σ 代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant a\}$.

下面的定理提供了循序可测函数的一个重要而简单的例子.

定理 1 设 $\mathscr{X}$ 是度量空间,而函数 $x(t, \omega)$ 具有下列性质:

a) 族 $\{x_t(\omega), t \geqslant a\}$ 适应 $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant a\}$;

b) 对固定的 ω, 函数 $x_\omega(t)$ 右连续.

那末,函数 $x(t, \omega)$ 为 $\mathfrak{F}_t$ 循序可测.

证. 设 $a = t_1^n < t_2^n < \cdots < t_n^n = s$. 如果 $t \in [t_{k-1}^n, t_k^n)$, $x_n(s, \omega) = x(s, \omega)$, 则令 $x_n(t, \omega) = x(t_k^n, \omega)$. 显然,函数 $x_n(t, \omega)$ 为 $\mathscr{T}_s \times \mathfrak{F}_s$ 可测,其中 $(t, \omega) \in [a, s] \times \Omega$. 因为当 $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_k (t_k^n - t_{k-1}^n) = 0$ 时,函数 $x_n(t, \omega)$ 在每一点 $(t, \omega) \in [a, u] \times \Omega$ 都收敛于 $x(t, \omega)$, 故对每个 s, $x(t, \omega)$ 也 $\mathscr{T}_s \times \mathfrak{F}_s$ 可测. 定理得证.

在研究随机变量的复合的性质时,常要用到循序可测的概念. 首先回忆关于随机变量的复合的下列熟知结果.

引理 3 设 $\{\mathscr{I}, \mathscr{T}\}$, $\{\Omega, \mathfrak{F}\}$, $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 是任意三个可测空间. 如果 $f = f(t, \omega)$, $\varphi_i = \varphi_i(t, \omega)$, $i = 1, 2$, 而且

$$f \in \mathscr{T} \times \mathfrak{F} | \mathfrak{B}, \ \varphi_1 \in \mathscr{T} \times \mathfrak{F} | \mathscr{T}, \ \varphi_2 \in \mathscr{T} \times \mathfrak{F} | \mathfrak{F},$$

则

$$g = f(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathscr{T} \times \mathfrak{F} | \mathfrak{B}.$$

证. 记K是这样一些C集的全体: $C \in \mathscr{T} \times \mathfrak{F}$, $\{(t, \omega): (\varphi_1, \varphi_2) \in C\} \in \mathscr{T} \times \mathfrak{F}$. K是σ代数,它包含所有形如 $J \times F$ 的集合,其中 $J \in \mathscr{T}$, $F \in \mathfrak{F}$. 所以 $K = \mathscr{T} \times \mathfrak{F}$. 从而,如果 $C = \{(t, \omega): f(t, \omega) \in \mathfrak{B}\}$, 则由 $C \in \mathscr{T} \times \mathfrak{F}$ 和刚证明的结果可见

$$\{(t, \omega): f(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathfrak{B}\} = \{(t, \omega): (\varphi_1, \varphi_2) \in C\} \in \mathscr{T} \times \mathfrak{F},$$

系 设 $x(t, \omega)((t, \omega) \in [a, \infty) \times \Omega)$ 为 $\mathfrak{F}_t$ 循序可测函数,取值于 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$; $\varphi = \varphi(\omega) \in \mathfrak{F}_t | \mathscr{T}_t$. 那末 $x_\varphi = x(\varphi(\omega), \omega) \in \mathfrak{F}_t | \mathfrak{B}$.

下面的命题和上面的结果稍有不同,但是证明方法相似,故其证明可以省略.

设 φ 是在 $\{\mathscr{Y}, \mathfrak{L}\}$ 中取值的函数,依赖于一族自变量 $x_z: z \in Z$, $x_z \in \mathscr{X}$, 即 $\varphi = \varphi(x_z, z \in Z)$. 记 $\mathfrak{B}^Z$ 为全体映射 $g(Z \xrightarrow{g} \mathscr{X})$ 所组成的空间中,包含形如

$$\{g: g(z_1) \in B_1, \cdots, g(z_n) \in B_n, B_k \in \mathfrak{B}, z_k \in Z\}$$

的所有集合的最小 σ 代数.

引理 4 如果 $\varphi \in \mathfrak{B}^Z | \mathfrak{L}$, 而函数 $x^z(t, \omega)$, $z \in Z$, 关于 σ 代数族 $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant a\}$ 循序可测, 则函数 $\Phi(t, \omega) = \varphi(x^z(t, \omega), z \in Z)$ 为 $\mathfrak{F}_t$ 循序可测.

在下面一些定理中要研究可测函数的复合的特殊情形, 它们在随机过程论中起着重要作用. 它们与某些随机过程的可测性有关,而这些过程是由其它过程经时间的随机替换而得来的.

引理 5 设 $x(t, \omega)$ 为 $\mathfrak{F}_t$ 可测函数, τ 关于 $\{\mathfrak{F}_t, t \in [a, \infty)\}$ 是有穷随机时间. 记 $\tau_t = \min\{\tau, t\}$. 那末,函数 $x_{\tau_t}(\omega) = x(\tau_t, \omega)$ 为 $\mathfrak{F}_{\tau_t}$ 可测,而 $x_\tau(\omega) = x(\tau, \omega)$ 为 $\mathfrak{F}_\tau$ 可测.

证. 由引理 3 的系可知,函数 x_{τ_t} 为 $\mathfrak{F}_t$ 可测. 因为

$$\{x_{\tau_t} \in B\} \cap \{\tau_t \leqslant u\} = \{x_{\tau_{\min(t,u)}} \in B\} \cap \{\tau_t \leqslant u\} \in \mathfrak{F}_u$$

(由引理 3 的系可知, 该式右侧的第一个集合属于 $\mathfrak{F}_{\min(t,u)}$, 而第二个集属于 $\mathfrak{F}_u$), 所以 x_{τ_t} 为 $\mathfrak{F}_{\tau_t}$ 可测. 由 $\mathfrak{F}_{\tau_t} \subset \mathfrak{F}_\tau$ 和 $x_\tau = \lim_{t \to \infty} x_{\tau_t}$ 可知, x_τ 为 $\mathfrak{F}_\tau$ 可测. 引理得证

定理 2 设 $x(t, \omega)$ 为 $\mathfrak{F}_t$ 可测; $\tau_t = \tau(t, \omega)$, $t \geqslant a$, 是一有穷 $\mathfrak{F}_t$ 随机时间族, 而且 $\tau_\omega(t)$ 是 t 的右连续单调不减函数. 那末,函数 $x_\tau(t, \omega) = x(\tau(t, \omega), \omega)$ 关于 $\{\mathfrak{F}_{\tau_t}, t \geqslant a\}$ 循序可测.

证. 首先注意到,根据上一引理,对固定的 t, 函数 $x_\tau(t, \omega)$

为 $\mathfrak{F}_{\tau_t}$ 可测. 此外,由 τ_t 的单调性可知,随 t 增大 σ 代数 $\mathfrak{F}_{\tau_t}$ 单调非降. 其次,因为(象任意随机时间一样)τ_t 为 $\mathfrak{F}_{\tau_t}$ 可测,所以由定理 1 可知函数 $\tau(t,\omega)$ 为 $\mathfrak{F}_{\tau_t}$ 循序可测:

设 $A\in\mathscr{T}^a\times\mathfrak{F}_{\tau_u}$. 现在来证

$$A'=\{(t,\omega):\ (\tau(t,\omega),\omega)\in A,\ t\in[a,u]\}\in\mathscr{T}_u\times\mathfrak{F}_{\tau_u}. \quad (1)$$

如果 $A=J\times C$, 其中$J\in\mathscr{T}^a$, $C\in\mathfrak{F}_{\tau_u}$, 则

$$A'=\{(t,\omega):\tau(t,\omega)\in J,\ t\in[a,u]\}\cap\{[a,u]\times C\}\in\mathscr{T}_u\times\mathfrak{F}_{\tau_u},$$

因为 $\tau(t,\omega)$ 为 $\mathfrak{F}_{\tau_t}$ 循序可测. 显然,使 $A'\in\mathscr{T}_u\times\mathfrak{F}_{\tau_u}$ 的全体 A 组成 σ 代数. 所以,(1) 式对所有 $A\in\mathscr{T}^a\times\mathfrak{F}_{\tau_u}$ 成立. 为证明定理只需验证: 对任意 $s\geqslant a$

$$\{(t,\omega):x_\tau(t,\omega)\in B,\ t\in[a,s]\}\in\mathscr{T}_s\times\mathfrak{F}_{\tau_s}.$$

把该式左侧的集合记作 D'. 注意到

$$D'=\{(t,\omega):(\tau(t,\omega),\omega)\in D,\ t\in[a,s]\},$$

其中

$$D=\{(u,\omega):x(u,\omega)\in B,\ u\leqslant\tau(s,\omega)\}.$$

由 (1) 可见只需证 $D\in\mathscr{T}^a\times\mathfrak{F}_{\tau_s}$. 令 $D=D_1\cup D_2$, 其中

$$D_1=\{(u,\omega):x(u,\omega)\in B,\ u<\tau(s,\omega)\},$$

$$D_2=\{(u,\omega):x(u,\omega)\in B,\ u=\tau(s,\omega)\}.$$

注意到

$$D_1=\bigcup_r\{(u,\omega):\ x(u,\omega)\in B,\ u\in[a,r]\}\cap\{[a,r]\times[r<\tau(s,\omega)]\}, \quad (2)$$

其中 r 为有理数.这时,由函数 $x(t,\omega)$ 的循序可测性知 $\{(u,\omega):x(u,\omega)\in B,\ u\in[a,r]\}\in\mathscr{T}_r\times\mathfrak{F}_r$. 为说明 (2) 式右侧的每一项都属于 $\mathscr{T}\times\mathfrak{F}_{\tau_s}$, 只需验证: 如果 $D_3\in\mathscr{T}_r\times\mathfrak{F}_r$, 则

$$D_3\cap([a,r]\times\{r<\tau(s,\omega)\})\in\mathscr{T}^a\times\mathfrak{F}_{\tau_s}. \quad (3)$$

先设 $D_3=T\times C$, 其中 $T\in\mathscr{T}^a_r$, $C\in\mathfrak{F}_r$. 这时 $D_3\cap([a,r]\times\{r<\tau(s,\omega)\})=T\times[C\cap\{r<\tau(s,\omega)\}]$. 因为

$$(C\cap\{r<\tau(s,\omega)\})\cap\{\tau_t\leqslant c\}\begin{cases}\in\mathfrak{F}_c, & 若\ c\geqslant r,\\ =\phi, & 若\ c<r,\end{cases}$$

故 $(C\cap\{r<\tau(s,\omega)\})\in\mathfrak{F}_{\tau_s}$. 这表明(3)式对形如 $D_3=T\times C$ 的 D_3 成立. 因为使(3)式成立的所有集 D_3 组成 σ 代数，所以它对所有 $D_3\in\mathscr{T}_r\times\mathfrak{F}_r$ 成立. 于是 $D_1\in\mathscr{T}^a\times\mathfrak{F}_{\tau_s}$ 得证. 最后，我们把 D_2 表为

$$D_2=\{(u,\omega):x_{\tau_s}\in B,u\geqslant a\}$$
$$\cap\{(u,\omega):u-\tau(s,\omega)=0,u\geqslant a\}.$$

由引理5可见，该式右侧的第一个集合属于 $\mathscr{T}^a\times\mathfrak{F}_{\tau_s}$; 因为两个函数 u 和 $\tau(s,\omega)$ 均 $\mathscr{T}^a\times\mathfrak{F}_{\tau_s}$ 可测，所以第二个集合也属于 $\mathscr{T}^a\times\mathfrak{F}_{\tau_s}$. 定理得证.

现在来重述所得到的结果，使其能用于随机过程论中.

取值于 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 的随机过程 $\xi(t)(t\geqslant a)$ 称为 $\mathfrak{F}_t$ **循序可测的**，如果作为变量 (t,ω) 的函数 $\xi(t,\omega)$ 为 $\mathfrak{F}_t$ 循序可测.

定理3 设过程 $\xi(t)$ 为 $\mathfrak{F}_t$ 循序可测.

a) 如果 τ 关于 $\{\mathfrak{F}_t,t\geqslant a\}$ 是有穷随机时间，则 $\xi_\tau=\xi(\tau,\omega)$ 是在 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 中取值的 $\mathfrak{F}_\tau$ 可测随机元素.

b) 如果 $\tau_t=\tau(t,\omega)$ $(t\geqslant a)$ 关于 $\{\mathfrak{F}_t,t\geqslant a\}$ 是有穷随机时间族，并且对固定的 ω, $\tau(t,\omega)$ 对 t 为右连续增函数，则随机过程 $\eta(t)=\xi(\tau_t,\omega)$ 为 $\mathfrak{F}_{\tau_t}$ 循序可测.

我们说，经时间的随机替换 $t\to\tau_t$ 由过程 $\xi(t)$ 得到过程 $\eta(t)=\xi(\tau_t,\omega)$.

强马尔科夫过程 设 $\{\xi(t,\omega),\mathfrak{S}_t^s,\mathbf{P}_{s,x}\}$ 是马尔科夫过程，$\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 是它的相空间. 根据§3定理1的系，可以认为 $\bar{\mathfrak{S}}_t^s=\mathfrak{S}_t^s$, $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}^*$ (在这一小节中我假设两个等式成立).

马尔科夫过程称为**循序可测的**，如果对任意 $s,t(0\leqslant s<t<\infty)$ 函数 $\xi(u,\omega)$, $u\in[s,t]$, $\omega\in\Omega$, 为 $\mathscr{T}_t^s\times\mathfrak{S}_t^s$ 可测.

定义2 称马尔科夫过程为**强马尔科夫的**，如果

a) 对固定的 B, 转移概率 $P(s,x,t,B)$ 关于 (s,t,x) 为 $\mathscr{T}\times\mathfrak{B}_1\times\mathscr{T}$ 可测函数，其中 $0\leqslant s\leqslant t<\infty$, $x\in\mathscr{X}_1$,

b) 它循序可测.

c) 对任意 $s\geqslant 0$, $t\geqslant 0$, $f(x)\in b(\mathfrak{B}_b)$ 和任意马尔科夫时间 τ, 等式

$$\mathbf{E}_{s,x}\{f(\xi_{t+\tau})|\mathfrak{S}_\tau^s\}=\mathbf{E}_{\tau,\xi_\tau}f(\xi_{t+\tau}) \tag{4}$$

成立.

等式 (4) 是"将来不依赖过去"的加强形式. 这里, 如果令 $\tau=u=$ 常数, 则等式 (4) 就是马尔科夫性的条件 (§3, 定义 1 的条件 4).

现在我们来进一步说明等式右侧的含义.

令

$$g(x,s,t)=\mathbf{E}_{s,x}f(\xi_t)\quad(0\leqslant s\leqslant t). \tag{5}$$

那末

$$\mathbf{E}_{\tau,\xi_\tau}f(\xi_{t+\tau})=g(\xi_\tau,\tau,t+\tau). \tag{6}$$

为等式 (4) 成立,必须使随机变量 (6) 为 $\mathfrak{S}_\tau^s$ 可测. 因为根据假设马尔科夫过程循序可测, 故为此只要求函数 $g(x,s,x)$ 为 $\mathfrak{B}_b\times\mathscr{T}\times\mathscr{T}$ 可测就够了. 由强马尔科夫性定义的条件 a) 容易看出, 上述论断确实成立.

在有些场合, 用下面的两个条件来代替强马尔科夫性定义中的条件 a) 和 b) 更为适宜,此即:

a′) 对固定的 (t,B), 转移概率 $P(s,x,t,B)$ 为 $\mathscr{T}_t\times\mathfrak{B}_b$ 可测,

b′) 对任意 $s\geqslant 0$, 函数 $\xi(t,\omega)\,(t\geqslant s)$ 为 $\mathfrak{N}_t^s$ 循序可测.

现在来证明,由条件 a′), b′) 可以推出条件 a) 和 b). 关于 b) 显然. 为证 a) 先证明下面的引理.

引理 6 设 $\{\mathscr{U},\mathfrak{S}_{\mathscr{U}}\}$, $\{\mathscr{V},\mathfrak{S}_{\mathscr{V}}\}$, $\{\Omega,\mathfrak{S}\}$ 均为可测空间; 对固定的 $v\in\mathscr{V}$, $\mathbf{P}_v(B)$ 是 $\mathfrak{S}$ 上的测度,而对固定的 $B\in\mathfrak{S}$, 它关于 $v(v\in\mathscr{V})$ 为 $\mathfrak{S}_{\mathscr{V}}$ 可测函数; $h(u,\omega)\in b\{\mathfrak{S}_{\mathscr{U}}\times\mathfrak{S}\}$. 那末, 函数

$$g(u,v)=\int_\Omega h(u,\omega)\,d\mathbf{P}_v$$

为 $\mathfrak{S}_{\mathscr{U}} \times \mathfrak{S}_{\mathscr{V}}$ 可测.

证. 使引理的结论成立的全体函数 $h(u, \omega)$ 组成线性单调类（记作 H）. 它包含形如 $C \times B(C \in \mathfrak{S}_{\mathscr{U}}, B \in \mathfrak{S}_{\mathscr{V}})$ 的集合的示性函数,因为这时 $g(u, v) = \chi_C(u)\mathbf{P}_v(B)$. 从而,$H$包含所有非负的（和所有有界的）$\mathfrak{S}_{\mathscr{U}} \times \mathfrak{S}$ 可测函数.

引理 7 设 $f \in b(\mathfrak{B}_b)$; 马尔科夫过程 $\xi(t, \omega)$ 满足条件 a′) 和 b′). 那末,由 (5) 式所定义的函数 $g(x, s, t)$ 为 $\mathfrak{B}_b \times \mathscr{T} \times \mathscr{T}$ 可测.

证. 固定某一 $u \geqslant 0$. 在

$$g(x, s, t) = \int f(\xi(t, \omega))\mathbf{P}_{s,x}(d\omega)$$

之中, $f(\xi(t, \omega))$, $t \geqslant u$, 为 $\mathscr{T}^u \times \mathfrak{N}^u$ 可测,而对固定的 $B \in \mathfrak{N}^u$, 函数 $\mathbf{P}_{s,x}(B)$ 关于 (s, x) 为 $\mathscr{T}_u \times \mathfrak{B}_b$ 可测(§ 3 引理 3). 由引理 6 知, 函数 $g(x, s, t)$ 为 $\mathfrak{B}_b \times \mathscr{T}_u \times \mathscr{T}^u$ 可测, 其中 $s \in [0, u]$, $t \in [u, \infty)$. 另一方面, 如果A是直线上的 Borel 集, 则

$$\begin{aligned}
&\{(x, s, t): s \leqslant t, g(x, s, t) \in A\} \\
&= \bigcup_{u \in R} \{(x, s, t): s \leqslant u \leqslant t, g(x, s, t) \in A\} \\
&\quad \cup \{(x, s, s): g(x, s, s) \in A\},
\end{aligned} \tag{7}$$

其中R是非负有理数的集合. 因为 $g(x, s, s) = f(x)$, 故集 $\{(x, s, s): g(x, s, s) \in A\}$ 为 $\mathfrak{B}_b \times \mathscr{T} \times \mathscr{T}$ 可测. 同样,由以前所述可以断定,(7) 式右侧的其它项也如此. 引理得证.

注意,由强马尔科夫性定义的条件 a) 可以得到下面的结果.

引理 8 设 $P(s, x, t, B)$ 是自变量 (s, x, t) 的 $\mathscr{T} \times \mathfrak{B}_b \times \mathscr{T}$ 可测函数,而 $f \in b(\mathfrak{B}_b^n)$. 那末,函数

$$h(x, s, t_1, t_2, \cdots, t_n) = \mathbf{E}_{s,x} f[\xi(t_1), \cdots, f(\xi_n)],$$
$$s \leqslant \min(t_1, \cdots, t_n),$$

为 $\mathfrak{B} \times (\mathscr{T})^{n+1}$ 可测.

证. 根据条件当 $n = 1$ 时命题成立. 用数学归纳法来证明

一般情形．设 $n=m$ 时命题成立．为证明它对 $n=m+1$ 成立，可以只限于考虑形如 $f(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1})=\prod_k^{m+1} f_k(x_k)$ 的函数，并且设 $t_1=\min(t_1, t_2, \cdots, t_{m+1})$．这时有

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_{s,x}f[\xi(t_1), \cdots, \xi(t_{m+1})]\\&\quad=\mathbf{E}_{s,x}\left[\{f_1[\xi(t_1)]\mathbf{E}_{t_1,\xi(t_1)}\left\{\prod_{k=2}^{m+1} f_k[\xi(t_k)]\right\}\right]\\&\quad=\mathbf{E}_{s,x}\{f_1[\xi(t_1)]h_1[\xi(t_1), t_1, t_2, \cdots, t_{m+1}]\},\end{aligned}$$

其中 $h_1(x, s, t_2, \cdots, t_{m+1})=\mathbf{E}_{s,x}\prod_{k=2}^{m+1} f_k[\xi(t_k)]$．根据归纳法的假设 $h_1(x, s, t_2, \cdots, t_{m+1})$ 是 $\mathfrak{B}_b\times(\mathscr{T})^{m+1}$ 可测函数．根据引理6，由此可见

$$\begin{aligned}h(x, s, t_1, \cdots, t_{m+1})=&\int f_1(y)h_2(y, t_1, \cdots, t_{m+1})\\&\cdot P(s, x, t_1, dy)\end{aligned}$$

是 $\mathfrak{B}_b\times(\mathscr{T})^{m+2}$ 可测函数．引理得证．

下面的结果对于检验强马尔科夫定义的条件 (4) 往往是很有用的．

在表述这一结果之前，先作一点说明，并且以后总假设它成立．我们说定，把每一个数值函数 $f\in b(\mathfrak{B})$ 都看成是 $b(\mathfrak{B}_b)$ 中的函数，其中 $f(\mathfrak{b})=0$．

定理 4 满足定义中条件 a) 和 b) 的马尔科夫过程为强马尔科夫过程的必要和充分条件是：对任意 $f\in b(\mathfrak{B})$ 和 $\mathfrak{S}_t^s$ 马尔科夫时间 τ，等式

$$\mathbf{E}_{s,x}f(\xi_{t+\tau})=\mathbf{E}_{s,x}\mathbf{E}_{\tau,\xi_\tau}f(\xi_{t+\tau}) \tag{8}$$

成立．

证．必要性显然．为证条件 (8) 的充分性，首先注意到，如果 (4) 式对 $b(\mathfrak{B})$ 中任意函数成立，则它对 $b(\mathfrak{B}_b)$ 中任意函数也成立，因为任何函数 $f\in b(\mathfrak{B}_b)$ 都可表为 $f=c+f_0$，其中 $f_0\in b(\mathfrak{B}_b)$．现在设 $B\in\mathfrak{S}_t^s$ 是任意的．令

$$\tau' = \begin{cases} \tau, & \text{若 } \omega \in B, \\ \infty, & \text{若 } \omega \bar{\in} B. \end{cases}$$

因为 $\{\tau' \leqslant t\} = \{\tau \leqslant t\} \cap B \in \mathfrak{S}_t^s$, 故 τ' 是 $\mathfrak{S}_t^s$ 马尔科夫时间.有

$$\mathbf{E}_{s,x} f(\xi_{t+\tau'}) = \mathbf{E}_{s,x} \chi_B f(\xi_{t+\tau}) + f(\mathfrak{b}) \mathbf{P}_{s,x}(\bar{B}),$$

$$\mathbf{E}_{s,x} \mathbf{E}_{\tau',\xi_{\tau'}} f(\xi_{t+\tau'}) = \mathbf{E}_{s,x} \chi_B \mathbf{E}_{\tau,\xi_\tau} f(\xi_{t+\tau}) + f(\mathfrak{b}) \mathbf{P}_{s,x}(\bar{B}).$$

由这些等式并考虑到 (8), 得

$$\mathbf{E}_{s,x} \chi_B f(\xi_{t+\tau}) = \mathbf{E}_{s,x} \chi_B \mathbf{E}_{\tau,\xi_\tau} f(\xi_{t+\tau}).$$

由此可见 (4) 式成立.

现证,可以将 (4) 式推广到任意多个形如 $\xi(\tau + t_k)$ 的变量的函数.

定理 5 设 $\xi(t, \omega)$ 是强马尔科夫过程, 而 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in b(\mathfrak{B}_b^n)$. 那末,对任意马尔科夫时间 τ 和任意正 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 有

$$\mathbf{E}_{s,x}\{f[\xi(\tau + t_1), \xi(\tau + t_2), \cdots, \xi(\tau + t_n)] | \mathfrak{S}_\tau^s\}$$
$$= \mathbf{E}_{\tau,\xi(\tau)} f[\xi(\tau + t_1), \xi(\tau + t_2), \cdots, \xi(\tau + t_n)]. \quad (9)$$

证. 设 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. 对 $n = 1$ (9) 式成立. 假设它对 $n = m$ 成立,证它对 $n = m + 1$ 也成立. 首先,由归纳法的假设,对任意 $y \in \mathscr{X}$ 下列等式成立

$$\mathbf{E}_{s,x}\{f[y, \xi(\tau + t_2), \cdots, \xi(\tau + t_{m+1})] | \mathfrak{S}_{\tau+t_1}^s\}$$
$$= h_1[y, \xi(\tau + t_1), \tau + t_1, \tau + t_2, \cdots, \tau + t_{m+1}],$$

其中 $h_1(y, x, s, t_2, \cdots, t_{m+1}) = \mathbf{E}_{s,x} f[y, \xi(t_2), \cdots, \xi(t_{m+1})]$. 注意,根据引理 6 当 $s \leqslant t_2$ 时; $h_1(y, x, s, t_2, \cdots, t_{m+1})$ 关于 (y, x, s) 为 $\mathfrak{B}_b^2 \times \mathscr{T}$ 可测. 其次,由 §2 引理 2 可知

$$\mathbf{E}_{s,x}\{f[\xi(\tau + t_1), \cdots, \xi(t + t_{m+1})] | \mathfrak{S}_\tau^s\}$$
$$= \mathbf{E}_{s,x}\{\mathbf{E}_{s,x}\{f[y, \xi(\tau + t_2), \cdots, \xi(\tau + t_{m+1})]$$
$$| \mathfrak{S}_{\tau+t_1}^s\} | \mathfrak{S}_\tau^s\}_{y=\xi(\tau+t_1)} = \mathbf{E}_{s,x}\{h_1[\xi(\tau + t_1),$$
$$\xi(\tau + t_1), \tau + t_1, \tau + t_2, \cdots, \tau + t_{m+1}] | \mathfrak{S}_\tau^s\}$$
$$= \mathbf{E}_{s,x}\{h_1[\xi(\tau + t_1), \xi(\tau + t_1), u + t_1, u + t_2, \cdots,$$
$$u + t_{m+1}] | \mathfrak{S}_\tau^s\}_{u=\tau}$$
$$= h_2(\xi(\tau), \tau, \tau + t_1, \cdots, \tau + t_{m+1}).$$

因为对固定的 $t_1, \cdots, t_{m+1}$，函数 $h_1(y, y, t_1, \cdots, t_{m+1})$ 关于 y 为 $\mathfrak{B}$ 可测，故由强马尔科夫性的定义可知，

$$\begin{aligned} h_2(x, s, t_1, \cdots, t_{m+1}) &= \mathbf{E}_{s,x} h_1[\xi(t_1), \xi(t_1), t_1, \cdots, t_{m+1}] \\ &= \mathbf{E}_{s,x}\{\mathbf{E}_{t_1,\xi(t_1)} f[\xi(t_1), \cdots, \xi(t_{m+1})]\} \\ &= \mathbf{E}_{s,x} f[\xi(t_1), \cdots, \xi(t_{m+1})]. \end{aligned}$$

因此定理得证。

在关于马尔科夫过程的某些补充条件下，由强马尔科夫过程的定义可以得到更强的结果。如果某一(马尔科夫)随机时间看成"现在"，则这些结果也表征着"将来不依赖于过去"。

定理 6 设 $\mathscr{X}$ 是度量空间，$\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{X}$ 中 Borel 集 σ 代数；$\xi(t)$ 是右连续强马尔科夫过程；τ 是任意有穷马尔科夫时间。那末，对任意函数 $f(x_1, \cdots, x_m) \in b(\mathfrak{B}_b^m)$ 和有穷 $\mathfrak{S}_\tau^s$ 可测随机变量 $\eta_k, \eta_k \geqslant \tau, k = 1, 2, \cdots, m$，下列等式成立

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_{s,x}\{f[\xi(\eta_1), \xi(\eta_2), \cdots, \xi(\eta_m)] \mid \mathfrak{S}_\tau^s\} \\ &\quad = \mathbf{E}_{\tau,\xi(\tau)} f[\xi(\eta_1), \cdots, \xi(\eta_m)]. \end{aligned} \tag{10}$$

证. 要求证明，对任意 $S \in \mathfrak{S}_\tau^s$ 有

$$\begin{aligned} &\int_S f[\xi(\eta_1), \xi(\eta_2), \cdots, \xi(\eta_m)] d\mathbf{P}_{s,x} \\ &\quad = \int_S g[\xi(\tau), \tau, \eta_1, \cdots, \eta_m] d\mathbf{P}_{s,x}, \end{aligned} \tag{11}$$

其中，$g(x, s, t_1, \cdots, t_m) = \mathbf{E}_{s,x} f[\xi(t_1), \cdots, \xi(t_m)]$，而且 $g(\xi(\tau), \tau, \eta_1, \cdots, \eta_m)$ 为 $\mathfrak{S}_\tau^s$ 可测。注意，函数 $g(x, s, t_1, \cdots, t_m)$ 为 $\mathfrak{B}_b \times (\mathscr{T})^{m+1}$ 可测(引理 8)；由定理的条件知，变量 $\tau, \eta_1, \cdots, \eta_m$ 均为 $\mathfrak{S}_\tau^s$ 可测；由马尔科夫时间的性质，$\xi(\tau)$ 为 $\mathfrak{S}_\tau^s$ 可测。由此可见，随机变量 $g[\xi(\tau), \tau, \eta_1, \cdots, \eta_m]$ 也 $\mathfrak{S}_\tau^s$ 可测。至于等式 (11)，只需证验它对连续函数 f 成立。设 $S_{k_1\cdots k_m}^n = \bigcap_{j=1}^{m}\left\{\eta_j - \tau \in \left[\frac{k_j}{n}, \frac{k_j+1}{n}\right)\right\}$。集 $S_{k_1\cdots k_m}^n$ 为 $\mathfrak{S}_\tau^s$ 可测。当 $\eta_j \in \left[\frac{k_j}{n} + \tau, \frac{k_j+1}{n} + \tau\right)$ 时，令 $\eta_j^n = \frac{k_j+1}{n} + \tau$。那末 $0 \leqslant \eta_j^n - \eta_j < \frac{1}{n}$。另一方

面，由强马尔科夫性的定义和定理 5 可知

$$\int_{S\cap S^n_{k_1\cdots k_m}} f\left[\xi\left(\tau+\frac{k_1+1}{n}\right),\ \xi\left(\tau+\frac{k_2+1}{n}\right),\cdots,\right.$$
$$\left.\xi\left(\tau+\frac{k_m+1}{n}\right)\right] d\mathbf{P}_{s,x}=\int_{S\cap S^n_{k_1\cdots k_m}} g\left[\xi(\tau),\ \tau,\right.$$
$$\left.\tau+\frac{k_1+1}{n},\ \cdots,\ \tau+\frac{k_m+1}{n}\right] d\mathbf{P}_{s,x}.$$

把这些等式对 $k_j=0,1,2,\cdots,j=1,2,\cdots,m$ 相加，得

$$\int_S f[\xi(\eta_1^n),\ \xi(\eta_2^n),\ \cdots,\ \xi(\eta_m^n)]d\mathbf{P}_{s,x}$$
$$=\int_S g(\xi(\tau),\ \tau,\ \eta_1^n,\cdots,\ \eta_m^n)d\mathbf{P}_{s,x}. \tag{12}$$

因为 $\eta_j^n\downarrow\eta_j$，故由 $\xi(t)$ 的右连续性知，$\xi(\eta_j^n)\to\xi(\eta_j)\ (\mathrm{mod}\mathbf{P}_{s,x})$，$j=1,2,\cdots,m$. 由 $g(x,s,t_1,\cdots,t_m)$ 的定义容易看出，它关于自变量 $t_1,\cdots,t_m$ 的全体也右连续. 所以，当 $n\to\infty$时，可以在 (12) 中取极限，经取极限由 (12) 得 (11). 定理得证.

强马尔科夫性准则 我们证明，在很多重要的场合，马尔科夫过程要么是强马尔科夫过程，要么可以用与之等价的强马尔科夫过程来代替它. 这时，要用到转移概率产生的算子半群之预解式的概念. 在第二章我们将要详细研究这一概念，它在齐次马尔科夫过程的理论中起着重要作用. 在这一小节只给出定义.

设 $f(x,t)\in b(\mathfrak{B}\times\mathscr{T})$. 和前面类似，假设函数 $f(x,t)$ 是定义在 $\mathscr{X}_b\times[0,\infty]$ 上的，其中设 $f(\mathrm{b},t)=0$; 把 $b(\mathfrak{B}\times\mathscr{T})$ 看成 $b(\mathfrak{B}_b\times\mathscr{T})$ 的相应的子空间. 考虑函数 $h(x,s,t)=\mathbf{E}_{s,x}f[\xi(s+t),s+t]$. 不难看出，如果函数 $P(s,x,t,B)$ 关于自变量 $(s,x,t),s\leqslant t$，可测，则函数 $h(x,s,t)$ 为 $\mathfrak{B}\times(\mathscr{T})^2$ 可测. 事实上，只需对形如 $f(x,t)=f_1(x)g(t)$ $(f_1\in b(\mathfrak{B}),\ g\in b\ (\mathscr{T}))$ 的函数 $f(x,t)$ 来验证. 这时 $h(x,s,t)=g(s+t)h_1(x_1,s,t)$，而由上述事实知 $h_1(x,s,t)=\mathbf{E}_{s,x}f_1[\xi(s+t)]$ 为 $\mathfrak{B}\times(\mathscr{T})^2$ 可测函数. 所以 $h(x,s,t)$ 具有同样性质. 特别，对固定的 (x,s)，$h(x,s,t)$ 对 t 为 $\mathscr{T}$ 可测函数.

令

$$(\mathbf{R}_\lambda f)(x,s)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}_{s,x}f[\xi(s+t),s+t]dt,\ \lambda>0. \quad (13)$$

由上面刚说明的事实可知,对任意 $\lambda>0$,$(\mathbf{R}_\lambda f)(x,s)$ 是 $\mathfrak{B}\times\mathscr{T}$ 可测和有界的函数. 因而,在加于转移概率的适当条件下,算子 $\mathbf{R}_\lambda$ 把 $b(\mathfrak{B}\times\mathscr{T})$ 变为它自身.

定义 3 算子族 $\mathbf{R}_\lambda$ 称为算子族 $\mathbf{T}_{st}$. 的预解式(关于算子族 $\mathbf{T}_{st}$ 见 § 1).

注意

$$(\mathbf{R}_\lambda f)(x,s)=\mathbf{E}_{s,x}\int_0^\infty e^{-\lambda t}f[\xi(s+t),s+t]dt. \quad (14)$$

定理 7 设 $\mathscr{X}$ 是度量空间,$\mathfrak{B}$ 是空间 $\mathscr{X}$ 中普遍可测集的 σ 代数;$\{\xi(t,\omega),\mathfrak{S}_t^s,\mathbf{P}_{s,x}\}$ 是相空间 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 中的马尔科夫过程,满足下列条件:

a) 转移概率 $P(s,x,t,B)$ 是自变量 (s,x) 的 $\mathscr{T}\times\mathfrak{B}$ 可测函数,

b) 对任意 (s,x),样本函数 $\xi_\omega(t)$,$t\geqslant s$,右连续 $(\bmod \mathbf{P}_{s,x})$,

c) 对任意 (s,x) 和 $\mathscr{X}$ 上的任意有界函数 $f(x)$,当 $t\geqslant s$ 时,样本函数 $(\mathbf{R}_\lambda f)[\xi(t),t]$ 在 $[0,\zeta)$ 上右连续 $(\bmod \mathbf{P}_{s,x})$.

那末,$\{\xi(t,\omega),\mathfrak{S}_{t+}^s,\mathbf{P}_{s,x}\}$ 是强马尔科夫过程.

证. 对 $t=\infty$ 补定义 $\xi(\infty,\omega)=b$. 注意,由定理 1 知,马尔科夫过程 $\xi(t,\omega)$,$t\geqslant s$,为 $\mathfrak{N}_t^s$ 循序可测. 所以,由定理的条件 a) 和引理 7 可以看出,函数 $P(s,x,t,B)$ 对变量 (s,t,x) 为 $\mathscr{T}\times\mathfrak{B}\times\mathscr{T}$ 可测.

设 τ 是任意 $\mathfrak{S}_{t+}^s$ 马尔科夫时间. 令

$$\tau^n=\begin{cases} s+\dfrac{k+1}{2^n}, & \text{若 } \tau\in\left[s+\dfrac{k}{2^n},\ s+\dfrac{k+1}{2^n}\right), \\ \infty, & \text{若 } \tau=\infty. \end{cases}$$

则对每个 ω,$\tau^n\downarrow\tau$,并且 τ^n 是 $\mathfrak{S}_t^s$ 马尔科夫时间. 所以,对任意连续并且有界的函数 $f(x)$,$x\in\mathscr{X}$,有

$$\mathbf{E}_{s,x}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}f[\xi(t+\tau)]\,dt = \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_{s,x}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}f[\xi(t+\tau^n)]\,dt$$

$$= \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_{s,x}\sum_{k=1}^{\infty}\chi_k\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}f\left[\xi\left(t+s+\frac{k}{2^n}\right)\right]dt \quad (\lambda>0),$$

其中 χ_k 是事件 $\{\tau^n = s + k/2^n\}$ 的示性函数. 因为 χ_k 是 $\mathfrak{S}^s_{s+k/2^n}$ 可测随机变量,故由过程的马尔科夫性得等式

$$\mathbf{E}_{s,x}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}f[\xi(t+\tau)]\,dt$$

$$= \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_{s,x}\sum_{k=1}^{\infty}\chi_k\mathbf{E}_{s+\frac{k}{2^n},\,\xi\left(s+\frac{k}{2^n}\right)}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}f\left[\xi\left(t+s+\frac{k}{2^n}\right)\right]dt$$

$$= \lim_{n}\mathbf{E}_{s,x}(\mathbf{R}_\lambda f)(\xi(\tau^n),\tau^n). \tag{15}$$

由定理的条件, 函数 $(\mathbf{R}_\lambda f)(\xi(t),t), t\geqslant s$,在 $[0,\zeta)$ 上右连续 $(\mathrm{mod}\,\mathbf{P}_{s,x})$, 而在 $[\zeta,\infty]$ 上等于 0. 也就是说, 它在整个区间 $[0,\infty]$ 右连续. 因为 $\tau^n\downarrow\tau$, 故 (15) 式右侧有极限,等于

$$\mathbf{E}_{s,x}(\mathbf{R}_\lambda f)(\xi(\tau),\tau).$$

另一方面,该式可写为

$$\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\mathbf{E}_{s,x}\{\mathbf{E}_{u,y}f[\xi(u+t)]\,|_{u=\tau,y=\xi(\tau)}\}\,dt. \tag{16}$$

因为函数 $\mathbf{E}_{s,x}f[\xi(t+\tau)]$ 和 $\mathbf{E}_{s,x}\mathbf{E}_{\tau,\xi(\tau)}f[\xi(t+\tau)]$ 有界, 并且对 t 右连续, 所以, 比较 (16) 和 (15) 两式的左侧,由 Laplace 变换的唯一性定理得

$$\mathbf{E}_{s,x}f[\xi(t+\tau)] = \mathbf{E}_{s,x}\mathbf{E}_{\tau,\xi(\tau)}f[\xi(t+\tau)]. \tag{17}$$

这个式子是对有界函数证明的. 由此可见, 它对任意有界 Borel 函数成立. 再利用 § 3 引理 4 就不难证明,它对任意有界普遍可测函数成立. 引用定理4,即可完成证明.

注 1. 定理的条件成立,如果马尔科夫过程右连续,而且它的转移概率满足条件: 对任意 $t>s$, 函数 $F(s,x)=\mathbf{E}_{s,x}f[\xi(t)]$ 对 s 右连续,对 x 连续(即当 $s'\downarrow s, y\to x$ 时, 有 $\lim F(s',y)=F(s,x)$).

注 2. 如果 $\mathscr{X}$ 局部紧并且可分,则定理 7 的条件 c) 可以减

弱为，只要求它对在紧致集上不等于0的任意一函数 $f(x)$ 成立。

注 3. 如果定理的条件成立，则过程关于 $\tilde{\mathfrak{N}}_t^s$ 是马尔科夫的。

§5. 可乘泛函

可乘泛函和半随机核 设 $\{\xi(t, \omega), \mathfrak{S}_t^s, \mathbf{P}_{s,x}\}$ 是相空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 中的一马尔科夫过程.

定义 1 实随机变量族 $\{\mu_t^s, 0 \leqslant s \leqslant t < \infty\}$ 称为马尔科夫过程的可乘泛函，如果对所有 $s, t(0 \leqslant s \leqslant t < \infty)$：

a) 随机变量 μ_t^s 为 $\tilde{\mathfrak{N}}_t^s$ 可测，

b) 对任意 $(s, x) \in [0, \infty) \times \mathscr{X}$ 和任意 $t \in [s, u]$，有 $\mu_t^s \mu_u^t = \mu_u^s (\bmod \mathbf{P}_{s,x})$，

c) $0 \leqslant \mu_t^s \leqslant 1$.

回忆 $\mathfrak{N}_t^s$ 是随机元素 $\xi(u)$, $u \in [s, t]$，产生的 σ 代数，$\tilde{\mathfrak{N}}_t^s$ 是它关于测度族 $\{\mathbf{P}_{s,q}, q \in Q'\}$ 在 $\tilde{\mathfrak{N}}^s$ 中的完备化，其中 Q' 是 $\mathfrak{B}$ 上概率测度的全体(见第 53 页).

由定义可知，μ_t^s 是 t 的单调不增函数.

可乘泛函称为右连续的，如果对所有 $(s, x) \in [0, \infty) \times \mathscr{X}$ 和任意 t，函数 $\mu_t^s (t \geqslant s)$ $\mathbf{P}_{s,x}$ 几乎处处右连续；称它是可测的，如果对任意 s，随机过程 $\{\mu_t^s, t \geqslant s\}$ 为 $\tilde{\mathfrak{N}}_t^s$ 循序可测. 因为 $\mu_s^s = \mu_s^s \mu_s^s = (\mu_s^s)^2$，所以 μ_s^s 只能取 0 和 1 为值. 由 0-1 律可知，$\mathbf{P}_{s,x}\{\mu_s^s = 1\} = 1$ 或 0. 使 $\mathbf{P}_{s,x}\{\mu_s^s = 1\} = 1$ 的点 (s, x) 叫做可乘泛函的不动点. 记 $\mathscr{X}_\mu$ 为可乘泛函的全体不动点的集合，而 $\mathscr{X}_{\mu^s}$ 表示它在时刻 s 的截口.

下面是可乘泛函的例子.

a) 积分型可乘泛函. 设所考察的马尔科夫过程 $\tilde{\mathfrak{N}}_t^s$ 循序可测，而 $f(t, x)$ 是 $\mathscr{T} \times \mathfrak{B}^*$ 可测函数 (前面已说定，这样的函数在 $[0, \infty) \times \mathscr{X}_b$ 上定义，其中 $f(t, b) = 0$). 令

$$\mu_t^s = \exp\left\{-\int_s^t f[u, \xi(u)] du\right\}, \tag{1}$$

其中对任意 s 和 t 假设指数位上的积分有限. 这时，对每一个 t 可乘泛函连续，并且为正. 如果上述积分亦可取 ∞ 为值，则令

$$\tau = \inf\left\{t: t > 0, \int_0^t f[u, \xi(u)]du = \infty\right\},$$

$$\mu_t^s = \chi_{[0,\tau)}(t)\exp\left\{-\int_s^t f[u, \xi(u)]du.\right\}$$

因为 τ 是 $\mathfrak{N}_{t+}^{s}$ 可测马尔科夫时间，所以如补充假设 σ 代数流 $\{\mathfrak{N}_t^s\}$ 右连续，则这样定义的 μ_t^s 就是右连续可乘泛函.

b）对例 a) 可以作如下推广. 实随机变量族 $\{\alpha_t^s, 0 \leqslant s \leqslant t < \infty\}$ 称为**马尔科夫过程的可加泛函**，如果

1）α_t^s 为 $\mathfrak{N}_t^s$ 可测，

2）几乎处处 $\alpha_t^s + \alpha_u^t = \alpha_u^s$ $(s \leqslant t \leqslant u)$.

那末，如果 α_t^s 是非负可加泛函，则 $\mu_t^s = \exp\{-\alpha_t^s\}$ 是可乘泛函.

c) $\mathfrak{N}_t^s$ 随机变量族 $\{\tau_s, s \geqslant 0\}$，$t \geqslant s$，称为**等待时间**，如果在集 $\{\tau_s > t\}$ 上 $\tau_s = \tau_t$. 等待时间 τ_s 可以视为在时刻 s 之后某事件首次出现的时间. 当 $t < \tau_s$ 令 $\mu_t^s = 1$，而当 $t \geqslant \tau_s$ 令 $\mu_t^s = 0$. 显然，μ_t^s 是右连续可乘泛函. 它的不动点集的截口 $\mathscr{X}_{\mu^s}$ 和使 $\mathbf{P}_{s,x}\{\tau_s > s\} = 1$ 的 x 点的集合二者重合.

每一可乘泛函与 $b(\mathfrak{B})$ 中的一算子族 $\mathbf{Q}_{st} = \mathbf{Q}_{st}^{\mu}(0 \leqslant s \leqslant t < \infty)$ 相联系，即

$$\mathbf{Q}_{st}f(x) = \mathbf{E}_{s,x}f(\xi_t)\mu_t^s.$$

我们说，算子族 $\mathbf{Q}_{st}$ 是由可乘泛函 μ_t^s 产生的. 每个算子 $\mathbf{Q}_{st}$ 有一半随机核与之相对应. 事实上，如令

$$Q_{st}(x, B) = Q(s, x, t, B) = \mathbf{E}_{s,x}\chi_B(\xi_t)\mu_t^s,$$

则对固定的 (s, x, t)，$Q(s, x, t, B)$ 是 $\mathfrak{B}$ 上的测度，而对固定的 (s, t, B)，它是 x 的 $\mathfrak{B}$ 可测函数. 容易看出

$$\mathbf{Q}_{st}f(x) = \int_{\mathscr{X}} f(y)Q(s, x, t, dy),$$

$$Q(s, x, t, B) \leqslant P(s, x, t, B), \ B \in \mathfrak{B}. \qquad (2)$$

$\{Q_{st}(x, B), 0 \leqslant s \leqslant t < \infty\}$ 是马尔科夫半随机核族. 事实

上，如果 $s \leqslant u \leqslant t$, $f \in b(\mathfrak{B})$，则

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{st}f(x) &= \mathbf{E}_{s,x}f[\xi(t)]\mu_t^s \\ &= \mathbf{E}_{s,x}\{\mathbf{E}_{u,\xi(u)}f[\xi(t)]\mu_t^u\}\mu_u^s \\ &= \mathbf{E}_{s,x}\{\mathbf{Q}_{ut}f[\xi(u)]\mu_u^s\} = \mathbf{Q}_{su}\mathbf{Q}_{ut}f(x). \end{aligned}$$

注意，算子 $\mathbf{Q}_{ss}$ 一般不唯一。实际上，如果马尔科夫过程 $\xi(t)$ 正规，则

$$\mathbf{Q}_{ss}f(x) = \mathbf{E}_{s,x}f[\xi(t)]\mu_s^s = \chi(\mathscr{X}_{\mu^s}, x)f(x),$$

其中 $\mathscr{X}_{\mu^s}$ 是泛函 μ_t^s 的不动点集在时刻 s 的截口（是这一节的开始引进的）。从而

$$Q_{ss}(x, B) = \chi(\mathscr{X}_{\mu^s} \cap B, x). \tag{3}$$

下一步要证明，在一定条件下，在满足不等式 (2) 的马尔科夫核族 $\{\mathbf{Q}_{st}, 0 \leqslant s \leqslant t < \infty\}$ 和转移概率为 $P(s, x, t, B)$ 的马尔科夫过程的可乘泛函之间，可以建立某种一一对应的关系。

对于进一步的研究，只有在过程轨道落入点 $\mathfrak{b}$ 之前的马尔科夫过程可乘泛函的值才有价值。为此我们引进可乘泛函随机等价的定义。

定义 2 同一马尔科夫过程的两个可乘泛函 μ_t^s 和 ν_t^s 称为随机等价的，如果对任意 $(s, x) \in [0, \infty) \times \mathscr{X}$, $t > s$,

$$\mathbf{P}_{s,x}\{\mu_t^s \neq \nu_t^s, \ \zeta > t\} = 0.$$

以后对随机等价的可乘泛函不予区分。所以，当 $\xi(t) = \mathfrak{b}$ 时，可以设 $\mu_t^s = 0$。考虑到某些需要，当 $t = \infty$ 时，我们补定义 $\mu_\infty^s = 0$。关于这些假设以后就不再特别说明了。显然，随机等价可乘泛函产生同一核族 $\{Q_{st}\}$。反过来也对。

定理 1 给定马尔科夫过程的两个可乘泛函随机等价，当且仅当它们产生同一马尔科夫核族。

证. 假设对任意 $x, s, t (s \leqslant t)$ 和 $f \in b(\mathfrak{B}^*)$，有 $\mathbf{E}_{s,x}f[\xi(t)]\mu_t^s = \mathbf{E}_{s,x}f[\xi(t)]\nu_t^s$。记 H 为使等式 $\mathbf{E}_{s,x}\eta\mu_t^s = \mathbf{E}_{s,x}\eta\nu_t^s$ 成立的随机变量的全体。它是线性单调类。不难验证，H 包含形如 $\eta = f_1[\xi(t_1)]f_2[\xi(t_2)]\cdots f_n[\xi(t_n)]$ 的随机变量。其中 $f_k \in b(\mathfrak{B}^*)$, $s \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant t$。所以 H 包含所有有界 $\mathfrak{N}_t^s$（和 $\widetilde{\mathfrak{N}}_t^s$）可测随

机变量. 由此可见, $\mu_t^s = \nu_t^s (\mathrm{mod}\,\mathbf{P}_{s,x})$. 定理得证.

设有一任意随机核族 $\{Q_{s,t}(x, B) = Q(s, x, t, B), 0 \leqslant s \leqslant t < \infty\}$, 满足不等式 (2). 假设所考虑的马尔科夫过程是正规的. 因为 $P(s, x, t, B) = \chi(B, x)$, 故 $Q(s, x, t, B) = k_s(x)\chi(B, x)$. 由等式 $Q_{ss} * Q_{ss} = Q_{ss}$ 可知, $k_s^2(x) = k(x)$, 所以 $k_s(x)$ 只能取 0 或 1 为值. 令

$$\mathscr{X}_{1s}^{Q} = \{x: k_s(x) = 1\}.$$

显然 $\mathscr{X}_{1s}^{Q} \in \mathfrak{B}^*$. 由等式 $Q_{st} = Q_{ss} * Q_{st} * Q_{tt}$ 不难得出

$$Q(s, x, t, B) = \chi(\mathscr{X}_{1s}^{Q}, x) Q(s, x, t, B \cap \mathscr{X}_{1t}^{Q}). \tag{4}$$

该式表明, 作为 x 的函数一切核 $Q_{st}(x, B)$ 都集中在 $\mathscr{X}_{1s}^{Q}$ 上: 当 $x \bar{\in} \mathscr{X}_{1s}^{Q}$ 时, $Q_{st}(x, B) \equiv 0$.

由等式 (2) 和 Radon-Nikodym 定理可知,对固定的 (s, x, t) 存在 $\mathfrak{B}^*$ 可测函数 $q_{st}(x, y)$, 使

$$Q(s, x, t, B) = \int_B q_{st}(x, y) P(s, x, t, dy). \tag{5}$$

不失普遍性可以设 $0 \leqslant q_{st}(x, y) \leqslant 1$. 此外,如果 σ 代数 $\mathfrak{B}$ 是由可列多个集合产生的,则函数 $q_{st}(x, y)$ 对变量 (x, y) 为 $\mathfrak{B}^* \times \mathfrak{B}^*$ 可测. 事实上, 考虑等式 (5) 在 $B \in \mathfrak{B}$ 集合的组上的收缩. 因为 σ 代数是由可列多个集合产生的, 故可以应用第一卷第二章 §2 的定理 5. 根据此定理

$$q_{st}(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{Q(s, x, t, A_{nk}(y))}{P(s, x, t, A_{nk}(y))}, \tag{6}$$

其中 $A_{nk}(y)$ 是空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 的完全分割系*) 中包含 y 点的集合

---

*) 设 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 是可测空间. 称空间 $\mathscr{X}$ 的分割系列 $\{A_{nk}, k \geqslant 1\}$, $n \geqslant 1$, 为完全的,如果

a) $A_{nk} \in \mathfrak{B}$, $A_{nk} \cap A_{nr} = \phi$, $k \neq r$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk} = \mathscr{X}$, $n = 1, 2, \cdots$;

b) 第 $n+1$ 个分割是第 n 个分割的子分割, 即对任意 j 存在 $k = k(j)$, 使 $A_{n+1j} \subset A_{nk}$;

c) 包含一切 A_{nk}, $k \geqslant 1$, $n \geqslant 1$, 的最小 σ 代数与 $\mathfrak{B}$ 重合.

(见第一卷第二章 §2 定理 4 系 1 之后)——译者注

(见第一卷第二章§2，引理5)．因为(6)式右侧极限号下为 $\mathfrak{B}^* \times \mathfrak{B}^*$ 可测函数，所以 $q_{st}(x, y)$ 也是 $\mathfrak{B}^* \times \mathfrak{B}^*$ 可测函数．其次，由(6)式知，可以假设函数 $q_{st}(x, y)$ 在 $\mathscr{X}^0_{1s} \times \mathscr{X}^0_{1t}$ 之外为0．如果 x 和 y 之一取 $\mathfrak{b}$ 为值，则令 $q_{st}(x, y) = 0$．这样一来 $q_{st}(x, y)$ 的定义域就开拓到 $\mathscr{X}_{\mathfrak{b}} \times \mathscr{X}_{\mathfrak{b}}$ 上．

定理 2 假设有一正规马尔科夫过程 $\xi(t)$ 以及 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 上的一马尔科夫核族 $\{Q_{st}, 0 \leqslant s \leqslant t < \infty\}$，满足不等式(2)．假设下列条件成立：

a) 存在 $\mathscr{X}$ 的一个可列子集系 $\mathfrak{A}$，使 $\sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B}$.

b) 在 $[0, \infty)$ 上存在一处处稠密的可列子集 J，使 $\sigma\{\xi(u), u \in J_t^s\} = \mathfrak{N}_t^s$，其中 $J_t^s = J \cap [s, t]$.

那末存在由 $\{Q_{st}\}$ 产生的、过程 $\xi(t)$ 的可乘泛函．

如果 σ 代数流 $\{\tilde{\mathfrak{N}}_t^s, t \geqslant s\}$ 右连续，并且对所有 (s, x)，函数 $Q(s, x, t, \mathscr{X})$ 在点 $t = s$ 对 t 连续，则可以定义泛函，使之右连续．

证．设 S 为某一序列 $(t_0, t_1, \cdots, t_n)$，其中 $s = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$．令

$$\mu_t^s(S) = q_{t_0 t_1}[\xi(t_0), \xi(t_1)] q_{t_1 t_2}[\xi(t_1), \xi(t_2)] \cdots q_{t_{n-1} t_n}[\xi(t_{n-1}), \xi(t_n)].$$

显然，$\mu_t^s(S)$ 是 $\tilde{\mathfrak{N}}_t^s$ 可测函数，而且 $0 \leqslant \mu_t^s(S) \leqslant 1$．在 $\mathfrak{B}^n$ 上定义核 $Q_S(x, B^{(n)})$ 如下：对 $B^{(n)} = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n$，$B_k \in \mathfrak{B}$，令

$$Q_S(x, B^{(n)}) = \int_{B_n} \cdots \int_{B_1} Q_{t_0 t_1}(x, dy_1) \cdot Q_{t_1 t_2}(y_1, dy_2) \cdots Q_{t_{n-1} t_n}(y_{n-1}, dy_n),$$

然后再利用测度开拓的一般方法，把它补定义到整个 $\mathfrak{B}^n$ 上．核 $Q_S(x, B^{(n)})$ 称为核 $Q_{t_0 t_1}, Q_{t_1 t_2}, \cdots, Q_{t_{n-1} t_n}$ 的直积，它是在第一卷中引进的(第一卷，第二章§4)．对任意函数 $h(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n) \in b(\mathfrak{B}^{n+1})$ 有

$$\int_{\mathscr{X}^n} h(x, x_1, x_2, \cdots, x_n) Q_S(x, d(x_1, \cdots, x_n))$$

$$= \mathbf{E}_{s,x} h[\xi(s), \xi(t_1), \cdots, \xi(t_n)] \mu_t^s(S) \tag{7}$$

(见第一卷,第二章 §4). 特别,当 $f \in b(\mathfrak{B})$ 时,有

$$\int f(y) Q_{st}(x, dy) = \mathbf{E}_{s,x} f[\xi(t)] \mu_t^s(S). \tag{8}$$

容易看出,如果 S_1 是 S 的一个子列,其中包含 s 和 t: $S_1 = \{t_{10}, t_{11}, \cdots, t_{1m}\}$,则对任意形如 $\eta = h[\xi(t_{10}), \cdots, \xi(t_{1m})]$ 的随机变量 η 有

$$\mathbf{E}_{s,x} \eta \mu_t^s(S_1) = \mathbf{E}_{s,x} \eta \mu_t^s(S). \tag{9}$$

特别

$$\mathbf{E}_{s,x}\{\mu_t^s(S) | \sigma_{S_1}\} = \mu_t^s(S_1), \tag{10}$$

其中 σ_{S_1} 是随机元素 $\xi(t_{10}), \xi(t_{11}), \cdots, \xi(t_{1m})$ 产生的 σ 代数. 现在考虑线段 $[s, t]$ 上的递增点列族 S_n, 它们都包含线段的两个端点. 记 $\bigcup_n S_n = J_t^s$. 由 (9) 式可知, 序列 $\{\mu_t^s(S_n), \sigma_{S_n}\}$ 是鞅. 所以对每个 x 以概率 1 存在极限 $\lim \mu_t^s(S_n) = \mu_t^s$. 因为变量 μ_t^s 的定义依赖 x 的选择, 所以 $\mu_t^s(S) = \lim_n \mu_t^s(S_n) \, (\mathrm{mod} \mathbf{P}_{s,x})$, 其中 $x = \xi(s)$.

显然, μ_t^s 为 $\mathfrak{N}_t^s$ 可测,而且可以设 $0 \leqslant \mu_t^s \leqslant 1$. 现在证明, μ_t^s 不依赖于序列 S_n 的选择. 假设 $\{\tilde{S}_n\}$ 是线段 $[s, t]$ 上的另外一点列族, 它和 $\{S_n\}$ 满足相同的条件, 并且 $\tilde{\mu}_t^s = \lim \mu_t^s(\tilde{S}_n)$. 在证明 $\tilde{\mu}_t^s = \mu_t^s (\mathrm{mod} \mathbf{P}_{s,x})$ 时,可以假设 $\tilde{S}_n \supset S_n$ 而不失普遍性. 这时,对任意随机变量 $\eta \in b(\sigma_{S_n})$ 有

$$\mathbf{E}_{s,x} \eta [\mu_t^s(\tilde{S}_n) - \mu_t^s(S_n)] = 0.$$

对任意 $\eta \in b\{\sigma_{S_n}, n = 1, 2, \cdots\} = \mathfrak{N}_t^s$, 当 $n \to \infty$ 时, 在上式中取极限,得

$$\mathbf{E}_{s,x} \eta (\tilde{\mu}_t^s - \mu_t^s) = 0.$$

这说明该式对于任意有界 $\mathfrak{N}_t^s$ 可测随机变量成立. 由此可见

$$\mathbf{P}_{s,x}\{\tilde{\mu}_t^s \neq \mu_t^s\} = 0.$$

对于任意 (s, t), $s < t$, 我们按上述方法构造一随机变量 μ_t^s, 并且令 $\mu_s^s = \chi\{\mathscr{X}_{ss}^0, \xi(s)\}$. 注意, 这时 $\chi(\mathscr{X}_{ss}^0, x) = q_{ss}(x, x)$. 下面证明随机变量族 $\mu_t^s (0 \leqslant s \leqslant t < \infty)$ 是由核族

$\{Q_{st}\}$ 产生的可乘泛函. 因为 $0 \leqslant \mu_t^s \leqslant 1$, 而且 μ_t^s 为 $\mathfrak{N}_t^s$ 可测,故只需验证定义 1 的条件 b). 设 $s < u < t$. 根据以上所述可以假设 $S_n''' = S_n' \cup S_n''$, 其中 S_n''', S_n' 和 S_n'' 分别为定义 μ_t^s, μ_u^s 和 μ_t^u 时所用的线段 $[s, t]$, $[s, u]$ 和 $[u, t]$ 上的点列族. 那末,由定义不难直接看出 $\mu_t^s(S_n''') = \mu_u^s(S_n') \times \mu_t^u(S_n'')$. 在该式两侧同取极限即可得 $\mu_t^s = \mu_u^s \mu_t^u$. 根据以前所述容易验证: $\mu_s^s \mu_t^s = \mu_t^s \mu_t^s = \mu_t^s (\text{mod}\mathbf{P}_{s,x})$. 显然, 如果 $\xi(t) = \mathfrak{b}$, 则 $\mu_t^s = 0$ (因为根据定义 $q_{st}(x, \mathfrak{b}) = 0$). 因而, μ_t^s 是满足前面的补充条件的可乘泛函. 如果在 (7) 式中设 $S = S_n$, 并且令 $n \to \infty$ 取极限,则得

$$\int f(y) Q_{st}(x, dy) = \mathbf{E}_{s,x} f(\xi(t)) \mu_t^s,$$

即 $\{Q_{st}\}$ 是可乘泛函产生的核族. 定理的第一部分得证.

现在假设对任意 (s, t), $\lim\limits_{t \downarrow s} Q_{st}(x, \mathscr{X}) = Q_{ss}(x, \mathscr{X})$. 由等式 $\mathbf{E}_{s,x}\mu_t^s = Q_{st}(x, \mathscr{X})$ 可知 $\lim\limits_{t \downarrow s} \mathbf{E}_{s,x}(\mu_s^s - \mu_t^s) = 0$. 假设 r 只取有理数, 记 $\nu_t^s = \lim\limits_{r \downarrow t} \mu_r^s$. 这个极限显然存在, 而且 ν_t^s 关于 t $(t \geqslant s)$ 右连续. 因为 $\nu_t^s \leqslant \mu_t^s$, 而且

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{s,x}(\nu_t^s - \mu_t^s) &= \lim_{r \downarrow t} \mathbf{E}_{s,x}(\mu_r^s - \mu_t^s) \\ &= \lim_{r \downarrow t} \mathbf{E}_{s,x} \mu_t^s (\mu_r^t - 1) = 0,\end{aligned}$$

所以 $\nu_t^s = \mu_t^s (\text{mod}\mathbf{P}_{s,x})$. 由 σ 代数流 $\{\tilde{\mathfrak{N}}_t^s, t \geqslant s\}$ 的右连续性知, 随机变量 ν_t^s 为 $\tilde{\mathfrak{N}}_t^s$ 可测. 不难验证, ν_t^s 是可乘泛函. 这样,如果定理第二部分的条件成立,则存在右连续可乘泛函,它产生给定的核族. 定理得证.

注 1. 如果 $\mathscr{X}$ 是可分度量空间, $\mathfrak{B}$ 是空间 $\mathscr{X}$ 中的 Borel 集 σ 代数,而过程 $\xi(t)$ 右连续,则定理的条件 a) 和 b) 成立.

注 2. 设 $\mathscr{X}$ 是完全可分度量空间, $\mathscr{E}$ 是取值于 $\mathscr{X}$ 的全体函数 $v = x(t)$, $t \geqslant 0$, 的集合, $\mathscr{N}^s(\mathscr{N}_t^s)$ 是 $\mathscr{E}$ 中包含下列柱集的最小 σ 代数,其中每个柱集底的坐标属于 $[s, \infty)$ (相应地属于 $[s, t]$), $s \leqslant t$.

按照 § 3 定理 5，我们由马尔科夫半随机核族 $\{Q_{st}, 0 \leqslant s < t < \infty\}$ 构造一测度族 $\{\mathbf{Q}_{s,x}, \mathscr{N}^s\}$. 则对任意有界的 $\mathscr{N}_t^s$ 可测函数 $h(v)$，下面的等式成立：

$$\int_{\Phi} h(v) d\mathbf{Q}_{s,x} = \mathbf{E}_{s,x} h[\xi(\cdot)] \mu_t^s. \tag{11}$$

为证明 (11)，先看形如 $h(v) = h[x(t_0), x(t_1), \cdots, x(t_m)]$ 的函数 $h(v)$. 根据刚证明的定理，我们在 (7) 式中设 $S = S_n$，然后令 $n \to \infty$ 取极限. 这样就可以对上述形状的函数 $h(v)$ 得出(11)式. 最后，使用在这种情形下常用的方法可以证明，(11) 式对任意非负和有界 $\mathscr{N}_t^s$ 可测函数 $h(v)$ 成立.

注 3. 在定理证明的第一部分所建立的泛函，也就是在它被修正为右连续的之前，它不但 $\widetilde{\mathfrak{N}}_t^s$ 可测，而且也 $\mathfrak{N}_t^s$ 可测.

一个与可乘泛函相联系的积分方程 在有些问题中，给定的可乘泛函所产生核族 $Q(s, x, t, B)$ 的解析表现是很有用的. 对积分型可乘泛函，可以得出函数 $Q(s, x, t, B)$ 的积分方程.

设

$$\mu_t^s = \exp\left\{-\int_s^t f(u, \xi(u)) du\right\}, \tag{12}$$

其中 $f(t, x)$是 非负 $\mathscr{T} \times \mathfrak{B}$ 可测函数，而 (12) 式中的积分对所有 (s, t)，$0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \zeta$，收敛. 因为对几乎一切 s 有

$$\frac{d\mu_t^s}{ds} = f[s, \xi(s)]\mu_t^s,$$

故

$$\mu_t^s = 1 - \int_s^t f[u, \xi(u)]\mu_t^u du, \quad (t < \zeta).$$

把上式两侧同时乘以 $\chi[B, \xi(t)]$，然后再同对 $\mathbf{P}_{s,x}$ 求积分，得

$$Q(s, x, t, B) = P(s, x, t, B) - \int_s^t \mathbf{E}_{s,x} f[u, \xi(u)] \cdot \mu_t^u \chi[B, \xi(t)] du.$$

由等式

$$\mathbf{E}_{s,x} f[u, \xi(u)] \mu_t^u \chi[B, \xi(t)]$$

$$= \mathbf{E}_{s,x} f[u, \xi(u)] \mathbf{E}_{u,\xi(u)} \chi[B, \xi(t)] \mu_t^u$$
$$= \mathbf{E}_{s,x} f[u, \xi(u)] Q(u, \xi(u), t, B)$$

得核 $Q(s, x, t, B)$ 的积分方程

$$Q(s, x, t, B) = P(s, x, t, B) - \int_s^t f(u, y) Q(u, y, t, B) P(s, x, u, dy).$$

子过程 在相空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 中，考虑定义在同一基本事件空间 $\{\Omega, \mathfrak{S}\}$ 上的两个马尔科夫过程 $\{\xi(t, \omega), \mathfrak{S}_s^t, \mathbf{P}_{s,x}\}$ 和 $\{\tilde{\xi}(t,\omega), \mathfrak{S}_s^t, \mathbf{P}_{s,x}\}$. 它们的生存时间分别记作 ζ 和 $\tilde{\zeta}$.

我们说，通过缩短过程 $\xi(t)$ 的生存时间可以得到 $\tilde{\xi}(t)$，如果对任意 (s, x) 有 $\mathbf{P}_{s,x}\{\tilde{\zeta} \leqslant \zeta\} = 1$，而且当 $t < \tilde{\zeta}$ 时 $\xi(t) = \tilde{\xi}(t)$.

定义 3 马尔科夫过程 $\eta(t)$ 称为过程 $\xi(t)$ 的子过程，如果通过缩短某一马尔过程 $\tilde{\xi}(t)$ 的生存时间可以得到过程 $\eta(t)$，这里 $\tilde{\xi}(t)$ 是和 $\xi(t)$ 随机等价的过程.

设 $Q(s, x, t, B)$ 和 $P(s, x, t, B)$ 分别是过程 $\eta(t)$ 和 $\xi(t)$ 的转移概率. 因为事件 $\{\eta(t) \in B\} \subset \{\xi(t) \in B\}$, $B \in \mathfrak{B}$，所以 $Q(s, x, t, B) \leqslant P(s, x, t, B)$. 下面的定理是定理 2 的直接推论·

定理 3 如果马尔科夫过程 $\xi(t)$ 满足定理 2 的条件，而 $\eta(t)$ 是它的子过程，则过程 $\eta(t)$ 的转移概率 $Q(s, x, t, B)$ 可以由过程 $\xi(t)$ 的某一可乘泛函产生，即存在 $\xi(t)$ 的一可乘泛函，使

$$Q(s, x, t, B) = \mathbf{E}_{s,x} \chi_B[\xi(t)] \mu_s^t. \tag{13}$$

可以证明，在一定意义下逆命题也成立. 这就是说，对马尔科夫过程 $\xi(t)$ 的任意可乘泛函 μ_s^t，都有一子过程 $\eta(t)$ 和它相对应，而且过程 $\eta(t)$ 和过程 $\xi(t)$ 的可乘泛函之间的关系由 (13) 式给出. 为证明这一事实，我们建立一个新的基本事件空间 $\tilde{\Omega}$，并在它上面定义一个和 $\xi(t)$ 随机等价的马尔科夫过程 $\tilde{\xi}(t)$. 结果表明，在这个新空间 $\tilde{\Omega}$ 上，缩短给定马尔科夫过程生存时间变得更为简单. 由此可以得到通过(13)式和可乘泛函相联系的子过程 $\eta(t)$. 首先描述必要的步骤.

假设当 $t=\infty$ 时，过程 $\xi(t)$ 也有定义：$\xi(\infty)=\mathfrak{b}$. 回忆，我们曾经假设当 $t=\infty$ 时，μ_t^s 有定义：$\mu_\infty^s=0$. 其次，我们还假设 Ω 中存在一点 ω^*，使 $\xi(t,\omega^*)\equiv\mathfrak{b}$, $t\geqslant 0$. 假如在 Ω 中不存在这样一点，则可以给它补充一个点，并同时对 σ 代数 $\mathfrak{S}_t^s$ 作相应的扩张：对任意 s,t 假设集 $\{\omega^*\}$ 为 $\mathfrak{S}_t^s$ 可测. 这时对测度作相应的开拓，令 $\mathbf{P}_{s,x}(\omega^*)=0$.

引进一新的基本事件空间 $\tilde{\Omega}=\Omega\times[0,\infty]$，其中的点 $\tilde{\omega}=(\omega,\lambda)$, $\omega\in\Omega$, $\lambda\in[0,\infty]$. 设 $\tilde{\mathfrak{S}}=\mathfrak{S}\times\mathscr{T}_\infty$，其中 $\mathscr{T}_\infty$ 是 $[0,\infty]$ 上 Borel 集的 σ 代数；$\check{\xi}(t)=\check{\xi}(t,\omega)=\xi(t,\omega)$；又设 $\check{\mathfrak{S}}_t^s(\check{\mathfrak{S}}^s)$ 是由 $\tilde{\mathfrak{S}}$ 中所有形如 $S\times[0,\infty]$ 的子集组成的，其中 $S\in\mathfrak{S}_t^s(\in\mathfrak{S}^s)$. 显然，当 $u\leqslant s\leqslant t\leqslant v$ 时，$\check{\mathfrak{S}}_t^s\subset\check{\mathfrak{S}}_v^u$, $\check{\mathfrak{S}}_t^s$ 是 σ 代数，而 $\check{\xi}_t(\tilde{\omega})$ 为 $\check{\mathfrak{S}}$ 可测.

在 $\check{\mathfrak{S}}^s$ 上引进一测度族 $\{\check{\mathbf{P}}_{s,x}\}$：对 $\check{S}=S\times[0,\infty]$，令 $\check{\mathbf{P}}_{s,x}(\check{S})=\mathbf{P}_{s,x}(S)$. 显然，对象组 $\{\check{\xi}(t,\omega),\check{\mathfrak{S}}_t^s,\check{\mathbf{P}}_{s,x}\}$ 是马尔科夫过程，它和过程 $\{\xi(t,\omega),\mathfrak{S}_t^s,\mathbf{P}_{s,x}\}$ 随机等价. 现在我们来定义对过程 $\check{\xi}(t,\omega)$ 的生存时间的压缩. 令

$$\tilde{\xi}(t,\tilde{\omega})=\begin{cases}\check{\xi}(t,\tilde{\omega})=\xi(t,\omega), & \text{若 } t<\lambda,\\ \mathfrak{b} & \text{若 } t\geqslant\lambda.\end{cases}$$

设 $\tilde{\Omega}^s=\Omega\times(s,\infty]$，$\sigma$ 代数 $\tilde{\mathfrak{S}}^s=\mathfrak{S}^s\times\mathscr{T}_\infty^s$. $\tilde{\Omega}^s$ 是 $\tilde{\Omega}$ 的子集. 记 $\tilde{\mathfrak{S}}_t^s$ 为满足下列条件的集合 $\tilde{S}\subset\tilde{\Omega}$ 组成的集组：$\tilde{S}\in\tilde{\mathfrak{S}}^s$, $\tilde{S}\cap\tilde{\Omega}^t=S_1\times(t,\infty]$，其中 $S_1\in\mathfrak{S}_t^s$. 显然，$\tilde{\mathfrak{S}}_t^s$ 是 σ 代数，而且对 $u\leqslant s\leqslant t\leqslant v$ 有 $\tilde{\mathfrak{S}}_t^s\subset\tilde{\mathfrak{S}}_v^u$；取值于 $\{\mathscr{X}_\mathfrak{b},\mathfrak{B}_\mathfrak{b}\}$ 的随机变量 $\tilde{\xi}_t(\omega)$ 为 $\tilde{\mathfrak{S}}_t^s$ 可测 $(s\leqslant t)$.

注意，如果 σ 代数 $\mathfrak{S}_t^s$ 右连续，则 $\tilde{\mathfrak{S}}_t^s$ 也右连续. 事实上，设 $\tilde{S}\in\tilde{\mathfrak{S}}_{t+}^s$，则对任意 n 有 $S\in\tilde{\mathfrak{S}}_{t+\frac{1}{n}}^s$，从而 $\tilde{S}\cap\tilde{\Omega}^{t+\frac{1}{n}}=S_n\times(t+1/n,\infty)$，其中 $S_n\in\mathfrak{S}_{t+\frac{1}{n}}^s$. 显然所有 S_n 都相等. 令 $S_n=S$. 则 $S\in\mathfrak{S}_{t+}^s=\mathfrak{S}_t^s$. 因为 $\tilde{S}\cap\tilde{\Omega}^t=\bigcup_n(\tilde{S}\cap\tilde{\Omega}^{t+\frac{1}{n}})$，故 $\tilde{S}\cap\tilde{\Omega}^t=S\times(t,\infty]$，即 $\tilde{S}\in\tilde{\mathfrak{S}}_t^s$. 因而 $\tilde{\mathfrak{S}}_{t+}^s=\tilde{\mathfrak{S}}_t^s$.

设给定过程 $\{\xi(t,\omega),\mathfrak{S}_t^s,\mathbf{P}_{s,x}\}$ 的一右连续可乘泛函 μ_t^s. 记 Ω_s 为一 ω 集，它满足条件；对每个 $\omega\in\Omega_s$ 和每个 $t(t\geqslant s)$，泛函 μ_t^s

右连续，而 μ_s^s 只取 0 或 1 为值．由假设对所有 x，$\mathbf{P}_{s,x}(\Omega_s)=1$．对每个 $s\geqslant 0$ 和 $\omega\in\Omega_s$，我们在 $(s,\infty]$ 上定义一随机测度 $\alpha_{s\omega}$：$\alpha_{s\omega}(\lambda,\infty]=\mu_\lambda^s(s\leqslant\lambda)$，而 $\alpha_{s\omega}\{s\}=0$，这里 $\{s\}$ 是 s 一个点的集合．由这些条件在 $\mathscr{T}_\infty^s$ 上确定唯一一个测度．当 $\mu_s^s=1$ 时，它是规范的($\alpha_{s\omega}(s,\infty]=1$)，而当 $\mu_s^s=0$ 时有 $\alpha_{s\omega}\equiv 0$．对 $\omega\bar{\in}\Omega_s$ 补定义 $\alpha_{s\omega}$：例如可以令 $\alpha_{s\omega}=0$．不难看出，对任意 $T\in\mathscr{T}_\infty^s$，$\alpha_{s\omega}(T)$ 是 ω 的 $\mathfrak{N}^s$ 可测函数．此外，如果 $\tilde{S}\in\tilde{\mathfrak{S}}^s$，则 $\tilde{S}_\omega=\{\lambda:(\omega,\lambda)\in\tilde{S}\}\in\mathscr{T}_\infty^s$，而且 $\alpha_{s\omega}(\tilde{S}_\omega)$ 是 ω 的 $\mathfrak{N}^s$ 可测函数．事实上，显然一方面满足上述条件的全体 $\tilde{S}$ 集组成 σ 代数，另一方面不难验证，它包含形如 $\tilde{S}=S\times T$ 的所有 $\tilde{S}$ 集，其中 $S\in\mathfrak{S}^s$，$T\in\mathscr{T}^s$．

设 $\mathscr{X}_{\mu^s}$ 是泛函 μ_t^s 的不动点集的截口：$\mathscr{X}_{\mu^s}=\{x:\mathbf{P}_{s,x}\{\mu_s^s=1\}=1\}$．在 $\tilde{\mathfrak{S}}^s$ 上定义一测度 $\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}$：对 $\tilde{S}\in\tilde{\mathfrak{S}}$，令

$$\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\{\tilde{S}\}=\mathbf{E}_{s,x}[\alpha_{s\omega}(\tilde{S}_\omega)],\quad 若\ x\in\mathscr{X}_{\mu^s},$$
$$\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\{\tilde{S}\}=\chi(\tilde{S},\tilde{\omega}^*),\quad 若\ x\bar{\in}\mathscr{X}_{\mu^s},$$

其中 $\tilde{\omega}^*=(\omega^*,0)$．

记 $\tilde{\mathbf{E}}_{s,x}$ 为对概率测度 $\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}$ 求数学期望．注意

$$\tilde{\mathbf{E}}_{s,x}\eta=\mathbf{E}_{s,x}\left\{\int_s^\infty\eta(\omega,\lambda)\alpha_{s,\omega}(d\lambda)\right\},\ x\in\mathscr{X}_{\mu^s},\tag{14}$$

其中 $\eta=\eta(\omega,\lambda)\in b(\tilde{\mathfrak{S}}^s)$．对于集 $\tilde{S}\in\tilde{\mathfrak{S}}^s$ 的示性函数，可以由定义直接推出 (14)式，然后再用标准方法证明它对任意随机变量 $\eta\in b(\tilde{\mathfrak{S}}^s)$ 成立．

记 $\tilde{\zeta}$ 为过程 $\tilde{\xi}(t,\tilde{\omega})$ 的生存时间．虽然还没有证明 $\tilde{\xi}(t,\tilde{\omega})$ 是马尔科夫过程，但生存时间的概念是清楚的．直接由 $\tilde{\xi}(t,\tilde{\omega})$ 的定义可知，如果 $t<\tilde{\zeta}$，则 $\tilde{\zeta}\leqslant\zeta$，而且对 $\tilde{\omega}=(\omega,\lambda)$有 $\xi(t,\omega)=\tilde{\xi}(t,\tilde{\omega})$．

注意，如果 $x\in\mathscr{X}_{\mu^s}$，则 $\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\{\tilde{\xi}(s)=x\}=1$；而若 $x\bar{\in}\mathscr{X}_{\mu^s}$，但 $x\in\mathscr{X}$，则 $\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\{\tilde{\xi}(s)=x\}=0$．因而，对于对象组 $\{\tilde{\xi}(t,\tilde{\omega}),\tilde{\mathfrak{S}}_t^s,\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\}$，马尔科夫过程定义中的正规性条件未必成立．

定理 4 设 μ_t^s 是正规马尔科夫过程 $\{\xi(t,\omega),\mathfrak{S}_t^s,\mathbf{P}_{s,x}\}$ 的右连续可乘泛函．那末，过程 $\{\tilde{\xi}(t,\tilde{\omega}),\tilde{\mathfrak{S}}_t^s,\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\}$ 是过程 $\{\xi(t,$

$\omega), \mathfrak{S}_t^s, \mathbf{P}_{s,x}\}$ 的子过程，而且对所有 $f\in b(\mathfrak{B}^*)$, $s\leqslant t\leqslant\infty$, 有

$$\tilde{\mathbf{E}}_{s,x}f(\tilde{\xi}_t)=\mathbf{E}_{s,x}\{f(\xi_t)\mu_t^s\}, \tag{15}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\{\tilde{\zeta}>t|\tilde{\mathfrak{S}}^s\}=\mu_t^s. \tag{16}$$

对所有 $(s, x)\in[0, \infty]\times\mathscr{X}$, 如果 $\mathbf{P}_{s,x}\{\mu_s^s=1\}=1$, 则子过程 $\tilde{\xi}(t, \tilde{\omega})$ 是正规马尔科夫过程.

证. 先证等式(15). 首先注意到，当 $t\geqslant s$, $f(x)\in b(\mathfrak{B}^*)$ 时，变量 $f(\tilde{\xi}_t)$ 为 $\tilde{\mathfrak{S}}^s$ 可测. 对 $x=\mathfrak{b}$ (15) 式显然，因为 $\mu_t^s\equiv 0(\mathrm{mod}\mathbf{P}_{s,x})$. 同理，当 $x\bar{\in}\mathscr{X}_{\mu^s}$ 时，等式(15)两侧均为 0.

其次，如果 $\lambda<t$, 则对 $x\in\mathscr{X}_{\mu^s}$ 有 $f(\tilde{\xi}_t)=f(\mathfrak{b})=0$. 于是由(14)式和 $\tilde{\xi}(t, \tilde{\omega})$ 的定义可得

$$\tilde{\mathbf{E}}_{s,x}f(\tilde{\xi}_t)=\mathbf{E}_{s,x}\int_t^\infty f(\xi_t)\alpha_{s\omega}(d\lambda)=\mathbf{E}_{s,x}f(\xi_t)\mu_t^s.$$

我们现在来证明 $\{\tilde{\xi}(t, \tilde{\omega}), \tilde{\mathfrak{S}}_t^s, \tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\}$ 是马尔科夫过程.

对任意 $\tilde{S}\in\tilde{\mathfrak{S}}_t^s$, $B\in\mathfrak{B}^*$ 和 $s\leqslant t\leqslant u$, 为证

$$\int_{\tilde{S}}\tilde{\mathbf{E}}_{t,\tilde{\xi}_t}\{\chi_B(\tilde{\xi}_u)\}d\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}=\int_{\tilde{S}}\chi_B(\tilde{\xi}_u)d\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}, \tag{17}$$

首先注意到，当 $x\bar{\in}\mathscr{X}_{\mu^s}$ 时它显然成立，因为这时(17)式两侧都等于 0. 设 $x\in\mathscr{X}_{\mu^s}$. 因为 $\tilde{S}\cap\tilde{\Omega}^t=S\times(t, \omega]$, $\{\tilde{\xi}_u\in B\}\in\tilde{\Omega}^u$, 则 $\{\tilde{\xi}\in B\}\cap\tilde{S}=\{[\xi_u\in B]\cap S\}\times(u, \omega]$. 所以由(15)式可见，(17)式右侧可化为

$$\int_{\tilde{S}}\chi_B(\tilde{\xi}_u)d\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}=\mathbf{E}_{s,x}\chi(\{\xi_u\in B\}\cap S, \omega)\mu_u^s$$
$$=\mathbf{E}_{s,x}\chi(S, \omega)\mu_t^s\mathbf{E}_{t,\xi_t}\chi(\{\xi_u\in B\}, \omega)\mu_u^t.$$

另一方面，如果记

$$F(y)=\tilde{\mathbf{E}}_{t,y}\chi[\{\tilde{\xi}_u\in B\}, \tilde{\omega}]=\mathbf{E}_{t,y}[\{\xi_u\in B\}, \omega]\mu_u^t,$$

并且注意到 $F(\mathfrak{b})=0$, 则(17)式左侧可以化为

$$\tilde{\mathbf{E}}_{s,x}\{\chi(\tilde{S}, \tilde{\omega})F[\tilde{\xi}(t)]\}=\mathbf{E}_{s,x}\{\chi(S, \omega)F[\xi(t)]\mu_t^s\}$$
$$=\mathbf{E}_{s,x}\chi(S, \omega)\mu_t^s\mathbf{E}_{t,\xi_t}\chi[\{\xi_u\in B\}, \omega]\mu_u^t.$$

从而(17)式得证. 它表明

$$\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\{\tilde{\xi}_u\in B|\tilde{\mathfrak{S}}_t^s\}=\tilde{\mathbf{P}}_{t,\tilde{\xi}_t}\{\tilde{\xi}_u\in B\},$$

即过程 $\tilde{\xi}(t, \tilde{\omega})$ 具有马尔科夫性. 由该过程的定义可知 $\tilde{\xi}_t(\tilde{\omega})\in$

$\tilde{\mathfrak{S}}_t^s|\mathfrak{B}_b$，而且 $\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}(\tilde{S})$ 是 x 的可测函数．所以，$\tilde{\xi}(t,\tilde{\omega})$ 是马尔科夫过程．这时，如果 $\mathscr{X}_{\mu^s}=\mathscr{X}$，则 $\tilde{\xi}(t,\tilde{\omega})$ 是正规马尔科夫过程．

为证 (16) 式，注意到

$$\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\{\tilde{\zeta}>t|\check{\mathfrak{S}}_t^s\}=\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\{\tilde{\xi}(t)\in\mathscr{X}|\check{\mathfrak{S}}^s\}.$$

设 $\check{S}\in\check{\mathfrak{S}}^s$，即 $\check{S}=S\times(0,\infty]$，$S\in\mathfrak{S}^s$．那末

$$\int_{\check{S}}\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\{\tilde{\zeta}>t|\check{\mathfrak{S}}^s\}d\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}=\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}(\check{S}\cap\{\tilde{\xi}(t)\in\mathscr{X}\})$$
$$=\check{\mathbf{E}}_{s,x}\chi[\{\tilde{\xi}(t)\in\mathscr{X}\},\tilde{\omega}]\chi(\check{S},\tilde{\omega}).$$

由 (14) 该式又等于

$$\mathbf{E}_{s,x}\left\{\int_s^\infty\chi(\{\tilde{\xi}(t,\omega,\lambda)\in\mathscr{X}\},(\omega,\lambda))\chi(S,\omega)\alpha_{s\omega}(d\lambda)\right\}$$
$$=\mathbf{E}_{s,x}\chi(\{\xi(t,\omega)\in\mathscr{X}\},\omega)\chi(S,\omega)\mu_t^s$$
$$=\mathbf{E}_{s,x}\chi(S,\omega)\mu_t^s=\int_{\check{S}}\mu_t^s d\check{\mathbf{P}}_{s,x},$$

由此得 (16)．定理证完．

注．关于 (16) 式可作如下说明．σ 代数 $\check{\mathfrak{S}}^s$ 实际上提供关于过程 $\xi(t)$，$t\geqslant s$，的行为的全部信息．因此，(在已知上述全部信息的条件下) 过程 $\tilde{\xi}(t)$ 的生存时间大于 t 的条件概率，仅依赖于过程 $\xi(t)$ 在时间区间 $[s,t]$ 上的行为，也就是说不依赖过程 $\xi(t)$ 的“将来”．此外，(粗略地说)在关于过程 $\xi(t)$ 的全部信息已知的条件下，事件“过程 $\tilde{\xi}(t)$ 在时间区间 $(t,t+dt)$ 上‘灭绝’”的条件概率等于 $-d\mu_t^s/\mu_t^s$．

§6. 马尔科夫过程样本函数的性质

这一节研究马尔科夫过程的存在性问题，这时要求它具有给定的转移概率，而且样本函数具有这样或那样的光滑性．

在第一卷中得到的关于随机过程的一系列结果，可以很容易地应用到马尔科夫过程的情况．为此，我们引进马尔科夫函数族的概念．

在不依赖于第一卷结果的情况下，我们来研究在局部紧相空间中构造“标准”马尔科夫过程的可能性问题，并且要求它具备一系列“好”性质。

最后，将要得到可分和循序可测马尔科夫过程存在性的一些结果。

马尔科夫族 初看起来，下面引进的马尔科夫族的概念似乎比马尔科夫过程的概念更广些，但是将要证明，前者可以归结为后者。为简便计，我们仅考虑不中断马尔科夫函数。

定义 1 所谓相空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 中的马尔科夫族 $\{\xi^{s,x}(t), t\geqslant s, s\in[0,\infty), x\in\mathscr{X}\}$，是指定义在概率空间 $\{\Omega^{s,x}, \mathfrak{S}^{s,x}, \mathbf{P}_{s,x}\}$ 上、适应 σ 代数流 $\mathfrak{S}_t^{s,x}$，$t\geqslant s$，的马尔科夫函数族 $\{\xi^{s,x}(t,\omega)\}$，且满足等式

$$\mathbf{P}_{s,x}\{\xi^{s,x}(t)\in B\}=P(s,x,t,B),\ (t\geqslant s,\ B\in\mathfrak{B}),$$

这里 $P(u,y,t,B)$ 是它的公共转移概率：

$$\mathbf{P}_{s,x}\{\xi^{s,x}(t)\in B\,|\,\xi^{s,x}(u)\}=P(u,\xi^{s,x}(u),t,B),\ s\leqslant u\leqslant t.$$

函数 $P(s,x,t,B)$ 称为马尔科夫族的转移概率. 和马尔科夫过程同样，马尔科夫族也有转移概率，它对该族中的函数是公共的。

如果 $\Omega^{s,x}=\Omega$，$\xi^{s,x}(t,\omega)=\xi(t,\omega)$，$\Omega$ 和 $\xi(t,\omega)$ 不依赖于 s, x，而且 $\mathfrak{S}^{s,x}=\mathfrak{S}^s$ 不依赖于 x，则马尔科夫族的定义和马尔科夫过程的定义相同. 另一方面，对每一马尔科夫族，可以通过扩充基本事件空间，使它和有相同转移概率的马尔科夫过程相对应. 为此，我们引进三维点 $\tilde{\omega}=(s,x,\omega)$的空间 $\tilde{\Omega}$，其中 $s\in[0,\infty)$，$x\in\mathscr{X}$，$\omega\in\Omega^{s,x}$. 如果 $\tilde{S}\subset\tilde{\Omega}$，则记 $\tilde{S}_{s,x}$ 为集 $\tilde{S}$ 的 (s,x) 截口：$\tilde{S}_{s,x}=\{\omega:\ (s,x,\omega)\in\tilde{S},\ \omega\in\Omega^{s,x}\}$.

在 Ω 中定义一 σ 代数族 $\tilde{\mathfrak{S}}^s(\tilde{\mathfrak{S}}_u^s, u\geqslant s)$：$\tilde{S}\in\tilde{\mathfrak{S}}^s(\in\tilde{\mathfrak{S}}_u^s, u\geqslant s)$，当且仅当对任意 (t,x)，$0\leqslant t\leqslant s$，$x\in\mathscr{X}$，有 $\tilde{S}_{t,x}\in\mathfrak{S}^{t,x}$ $(\tilde{S}_{t,x}\in\mathfrak{S}_u^{t,x})$. 显然，随 s 的增大 σ 代数 $\tilde{\mathfrak{S}}^s(\tilde{\mathfrak{S}}_u^s, u\geqslant s)$ 单调不增，而且当 $u\geqslant s$ 时 $\tilde{\mathfrak{S}}^s\supset\tilde{\mathfrak{S}}_u^s$.

和以前类似，我们引进记号 $\tilde{\mathfrak{S}}_u\subset\tilde{\mathfrak{S}}_u^0$. 若 $\tilde{\omega}=(s,x,\omega)$，$s\leqslant$

t，则令 $\tilde{\xi}(t, \tilde{\omega}) = \xi^{s,x}(t, \omega)$. 当 $t < s$ 时，函数 $\tilde{\xi}(t, \tilde{\omega})$ 的定义在一定程度上是任意的. 为确定计，当 $t < s$ 时令 $\tilde{\xi}(t, \tilde{\omega}) = x$. 不难验证，若 $t \in [s, v]$，则函数 $\tilde{\xi}(t, \tilde{\omega})$ 为 $\tilde{\mathfrak{S}}_v^t$ 可测. 事实上，如果 $\tilde{S} = \{\tilde{\omega}: \tilde{\xi}(t, \tilde{\omega}) \in B\}$，则对所有 $s \leqslant t \leqslant v$，$\tilde{S}_{s,x} = \{\omega: \xi^{s,x}(t) \in B\} \in \mathfrak{S}_v^{t,x}$.

在每一个 σ 代数 $\tilde{\mathfrak{S}}^t$ 上定义一个测度族 $\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}$: $\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}(\tilde{S}) = \mathbf{P}_{s,x}(\tilde{S}_{s,x})$. 由定义可知

$$\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\{\tilde{\xi}(t, \tilde{\omega}) \in B\} = \mathbf{P}_{s,x}\{\xi^{s,x}(t) \in B\} = P(s, x, t, B).$$

因为，$\tilde{\mathfrak{S}}^t$ 上的测度 $\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}$ 经映射 $(s, x, \omega) \to \omega$ 变为 $\mathfrak{S}^t$ 上的测度 $\mathbf{P}_{s,x}$，所以

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\{\tilde{\xi}(t, \tilde{\omega}) \in B \mid \tilde{\mathfrak{S}}_u^t\} &= \mathbf{P}_{s,x}\{\xi^{s,x}(t, \omega) \in B \mid \mathfrak{S}_u^t\} \\ &= \mathbf{P}_{u,\xi^{s,x}(u)}\{\xi^{s,x}(t, \omega) \in B\} \\ &= P(u, \xi(u), t, B) \\ &= \tilde{\mathbf{P}}_{u,\xi(u)}\{\tilde{\xi}(t, \tilde{\omega}) \in B\}.\end{aligned}$$

这样，我们证明了下面的定理.

定理 1 上面所构造的一组对象 $\{\tilde{\xi}(t, \tilde{\omega}), \tilde{\mathfrak{S}}_t^s, \tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\}$ 是马尔科夫过程，$P(s, x, t, B)$ 是它的转移概率. 这时

$$\tilde{\xi}(t, \tilde{\omega}) = \xi^{s,x}(t, \omega),\ \tilde{\omega} = (s, x, \omega),$$
$$\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}(\tilde{S}) = \mathbf{P}_{s,x}(\tilde{S}_{s,x}).$$

系. 对于任意 (s, x)，假设马尔科夫函数 $\xi^{s,x}(t, \omega)$ 满足下列条件之一：对 $\mathbf{P}_{s,x}$ 几乎所有 $\omega \in \Omega^{s,x}$，函数 $\xi_\omega^{s,x}(t)$

a) 有左极限而且右连续 $(t \geqslant s)$;

b) 对所有 $t \geqslant s$ 连续.

那末，马尔科夫过程相应地具有下列性质：函数 $\xi_\omega(t)\ (t \geqslant s)$ $\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}$ 几乎处处

a) 有左极限而且右连续 $(t \geqslant s)$;

b) 对所有 $t \geqslant s$ 连续.

马尔科夫过程样本函数的性质 由第一卷关于随机过程样本函数的结果，可以从定理 1 直接得到将马尔科夫过程样本函数正则化的一系列推论.

设 $\mathscr{X}$ 是度量空间，$r(x_1, x_2)$ 是它的距离；$U_\varepsilon(x)$ 是 $\mathscr{X}$ 中以 x 为中心 ε 为半径的球，而 $\overline{U}_\varepsilon(x)$ 是它的余集.

定义 2 称度量空间 $\mathscr{X}$ 中的马尔科夫过程在点 t_0 随机连续，如果对任意 $\varepsilon > 0$，$x \in \mathscr{X}$，当 $s \uparrow t_0$，$t \downarrow t_0$ 时有

$$P(s, x, t, \overline{U}_\varepsilon(x)) \to 0.$$

定义 3 称马尔科夫过程是连续的(无第二类间断点的)，如果对任意 $(s, x) \in [0, \infty) \times \mathscr{X}$ 和 $\mathbf{P}_{s,x}$ 几乎所有 ω，它的样本函数对一切 $t \geqslant s$ 连续(相应地无第二类间断点).

设 J 是可列集，它在 $[0, \infty)$ 上处处稠密. 记

$$A_\omega(t, J) = \bigcap_n \left[\left\{x: x = \xi_\omega(u),\ u \in J \cap \left(t - \frac{1}{n},\ t + \frac{1}{n}\right)\right\}\right],$$

这里，对任意集 B，$[B]$ 表示它的闭包. 这样，$A_\omega(t, J)$ 是函数 $\xi_\omega(u)$ 在点 $u = t$ 的极限值的集合，其中极限是对 $u \in J$ 来求的.

此外，我们再引进记号

$$A_\omega^+(t, J) = \bigcap_n \left[\left\{x: x = \xi_\omega(u), u \in J \cap \left(t,\ t + \frac{1}{n}\right)\right\}\right].$$

定义 4 称马尔科夫过程为可分的(右可分的)，如果存在一个在 $[0, \infty)$ 上处处稠密的可列集 J，使对任意 $(s, x) \in [0, \infty) \times \mathscr{X}$ 存在 $N_{s,x} \subset \Omega$，使 $\mathbf{P}_{s,x}(N_{s,x}) = 0$，而且当 $\omega \bar{\in} N_{s,x}$ 时 $\xi_\omega(t) \in A_\omega(t, J)$ (相应地 $\xi_\omega(t) \in A_\omega^+(t, J)$). 这时，称 J 为马尔科夫过程的可分集.

定理 2 设 $\{\xi(t, \omega), \mathfrak{S}_t^s, \mathbf{P}_{s,x}\}$ 是相空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 中的马尔科夫过程，对所有 $t \geqslant 0$ 随机连续. 那末

a) 如果 $\mathscr{X}$ 局部紧而且可分，则存在和 $\xi(t, \omega)$ 随机等价的可分马尔科夫过程.

b) 如果过程 $\xi(t, \omega)$ 可分，而且对所有 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\substack{(s,x) \\ |t-s| < \delta}} P(s, x, t, \overline{U_\varepsilon(x)}) = 0,$$

则它和某过程随机等价,后者的样本函数有左极限并且右连续.

c) 如果过程 $\xi(t, \omega)$ 可分，无第二类间断点，而且对任意 $\varepsilon > 0$, $(s, x) \in [0, \infty) \times \mathscr{X}$ 和 $T > s$, 以及线段 $[s, T]$ 的任意分割 $\{t_{n,k}, k = 0, 1, \cdots, n\}$, 当 $\max_k (t_{n,k+1} - t_{n,k}) \to 0$ 时,有

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}_{s,x}\{r[\xi(t_{n,k}), \xi(t_{n,k+1})] > \varepsilon\} \to 0,$$

则 $\xi(t, \omega)$ 和一连续马尔科夫过程随机等价.

由定理 1 及其系,并利用第一卷第三章的结果，容易证明该定理.

事实上,由(第一卷，第三章 § 2) 定理 2 和定理 5 知,对每一个马尔科夫函数$\{\xi(t, \omega), \mathfrak{S}^s, \mathbf{P}_{s,x}\}, t \geqslant s$, 存在随机等价的可分函数,而且可以选 $[s, \infty) \cap R$ 作为它的可分集,其中 R 是$[0, \infty)$上处处稠密的可列子集. 所以,可以假设 R 不依赖于 (s, x). 但是,这时 R 是定理证明中所构造的过程 $\tilde{\xi}(t, \tilde{\omega})$ 的可分集,从而命题 a) 得证. 由(第一卷,第三章 § 4) 定理 1 的系和定理 4 可得命题 b), 而由上述同一系和(第一卷,第三章 § 5) 定理 1 得命题 c).

标准马尔科夫过程 下面证明,在一定条件下,局部紧可分相空间中的马尔科夫过程随机等价于某一过程，而后者的样本函数具有许多“好”的性质. 和上一小节不同, 这里所用的方法是以鞅论为基础的.

以前我们引进了作用于 $b(\mathfrak{B})$ 到 $b(\mathfrak{B})$ 的算子族 $\{\mathbf{T}_{st}\}$. 现在我们再引进从 $b(\mathscr{T} \times \mathfrak{B})$ 到 $b(\mathscr{T} \times \mathfrak{B})$ 的、伴随转移概率的另一算子族：当 $f = f(t, x) \in b(\mathscr{T} \times \mathfrak{B})$ 时，令

$$\tilde{\mathbf{T}}_t f(s, x) = \int f(s+t, y) P(s, x, s+t, dy)$$
$$= \mathbf{E}_{s,x} f(s+t, \xi_{s+t}).$$

如果在空间 $b(\mathscr{T} \times \mathfrak{B})$ 中引进范数

$$\|f\| = \sup_{t \in [0, \infty), x \in \mathscr{X}} |f(t, x)|,$$

则显然 $\|\tilde{\mathbf{T}}_t f\| \leqslant \|f\|$. 算子族 $\{\tilde{\mathbf{T}}_t\}$ 组成半群,即

$$\tilde{\mathbf{T}}_{t_1+t_2}=\tilde{\mathbf{T}}_{t_1}\tilde{\mathbf{T}}_{t_2}.$$

事实上，

$$\begin{aligned}(\tilde{\mathbf{T}}_{t_1}\tilde{\mathbf{T}}_{t_2}f)(s,x)&=\mathbf{E}_{s,x}(\tilde{\mathbf{T}}_{t_2}f)(s+t_1,\xi_{s+t_1})\\&=\mathbf{E}_{s,x}\mathbf{E}_{s+t_1,\ \xi_{s+t_1}}f(s+t_1+t_2,\xi_{s+t_1+t_2})\\&=\mathbf{E}_{s,x}f(s+t_1+t_2,\xi_{s+t_1+t_2})=\tilde{\mathbf{T}}_{t_1+t_2}f(s,x).\end{aligned}$$

对于以前（§4,(13)）引进的算子 $\mathbf{R}_\lambda$（马尔科夫过程的预解式）下面的等式成立：

$$(\mathbf{R}_\lambda f)(s,x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}(\tilde{\mathbf{T}}_t f)(s,x)dt.$$

下面的引理指出了马尔科夫过程和上鞅之间的联系.

引理 1 设 $f(t,x)\geqslant 0$, $f(t,x)\in b(\mathscr{T}\times\mathfrak{B})$, $g(s,x)=(\mathbf{R}_\lambda f)(s,x)$. 那末,对任意 $s\geqslant 0$, $x\in\mathscr{X}$,

$$\{e^{-\lambda t}g(t,\xi_t),\ \mathfrak{S}_t^s,\ t\geqslant s\}$$

是概率空间 $\{\Omega,\mathfrak{S}^s,\mathbf{P}_{s,x}\}$ 上的非负上鞅.

证. 首先注意到

$$\begin{aligned}e^{-\lambda t}[(\tilde{\mathbf{T}}_t g)(s,x)]&=e^{-\lambda t}\tilde{\mathbf{T}}_t\left\{\int_0^\infty e^{-\lambda u}\tilde{\mathbf{T}}_u f du\right\}(s,x)\\&=e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\lambda u}(\tilde{\mathbf{T}}_{t+u}f)(s,x)du\\&=\int_t^\infty e^{-\lambda u}(\tilde{\mathbf{T}}_u f)(s,x)du\leqslant g(s,x).\end{aligned}\qquad(1)$$

设 $t'>t$, 而 $B\in\mathfrak{S}_t^s$ 是任意的. 由过程 ξ_t 的马尔科夫性可知

$$\begin{aligned}\int_B e^{-\lambda t'}g(t',\xi_{t'})d\mathbf{P}_{s,x}&=\int_B e^{-\lambda t'}\mathbf{E}_{s,x}\{g(t',\xi_{t'})|\mathfrak{S}_t^s\}d\mathbf{P}_{s,x}\\&=\int_B e^{-\lambda t'}\mathbf{E}_{t,\xi_t}g(t',\xi_{t'})d\mathbf{P}_{s,x}.\end{aligned}$$

由 (1) 得

$$\int_B e^{-\lambda t'}g(t',\xi_{t'})d\mathbf{P}_{s,x}\leqslant\int_B e^{-\lambda t}g(t,\xi_t)d\mathbf{P}_{s,x}.$$

由此可见 $e^{-\lambda t}g(t,\xi_t)$ 是上鞅.

以后要用到上鞅的一条简单性质.

引理 2 设 $\{\eta_t,\mathfrak{S}_t,t\in J\}$ 是非负上鞅，J 是有理数集. 那

末

$$\mathbf{P}\{\eta_t > 0, \inf_{s\leqslant t, s\in J} \eta_s = 0\} = 0.$$

证. 定义过程 ζ_t: 当 $t \in J$ 时令 $\zeta_t = \eta_t$; 当 $t \bar{\in} J$ 时，如果(以概率 1)存在极限 $\lim_{r\downarrow t, r\in J} \eta_t$，则令 $\zeta_t = \lim_{r\downarrow t, r\in J} \eta_t$，否则令 $\zeta_t = 0$. 不难验证，ζ_t 关于 σ 代数流 $\{\mathfrak{S}_{t+}\}$ 是可分非负上鞅，其中 $\mathfrak{S}_{t+} = \bigcap_{r>t} \mathfrak{S}_r$. 如果集 $\left\{s: s\in J, s\leqslant t, \zeta_s - \eta_s < \frac{1}{n}\right\}$ 不空，则令

$$\tau_n = \inf\left\{s: \zeta_s - \eta_s < \frac{1}{n}, s\in J, s\leqslant t\right\},$$

否则令 $\tau_n = t$. 变量 τ_n 是 $\mathfrak{S}_{t+}$ 随机时间 $t \geqslant \tau_{n+1} \geqslant \tau_n$，而 $\zeta_{\tau_n} < \frac{1}{n} (\mathrm{mod}\mathbf{P})$. 因而序列 $\zeta(\tau_1), \zeta(\tau_2), \cdots, \zeta(\tau_n), \cdots, \zeta(t)$ 是上鞅. 记 $S_n = \{\tau_n < t\}$. 那末

$$\int_{S_n} \zeta(t) d\mathbf{P} \leqslant \int_{S_n} \zeta(\tau_n) d\mathbf{P} \leqslant \frac{1}{n}.$$

所以在 S 上 $\zeta(t) = 0 (\mathrm{mod}\mathbf{P})$，其中 $S = \bigcap_n S_n$. 引理得证.

定义 5 度量空间中的马尔科夫过程称为拟左连续的(或在 $[0, \zeta)$ 上为拟左连续的)，如果

a) 它循序可测，

b) 当 $\lim \tau_n < \zeta$ 时，对任意 s 和非降 $\{\mathfrak{S}_t^s, t \geqslant s\}$ 马尔科夫时间序列 τ_n 有

$$\lim_n \xi(\tau_n) = \xi(\lim_n \tau_n).$$

如果条件 b) 不仅当 $\lim_n \tau_n < \zeta$ 时成立，而且对满足 $\lim \tau_n < \infty$ 的所有 ω 成立，则说马尔科夫过程在 $[0, \infty)$ 上拟左连续.

定义 6 马尔科夫过程称为标准的，如果

a) 它的相空间 $\mathscr{X}$ 是局部紧可分度量空间，而且当 $\mathscr{X}$ 不是紧致时，并入它的点 b 是无穷远点；当 $\mathscr{X}$ 是紧致时，b 是孤立点，

b) $\mathfrak{B}$ 是空间 $\mathscr{X}$ 中的 Borel 集的 σ 代数，

c) 对所有 s, $t(0 \leqslant s \leqslant t < \infty)$, $\mathfrak{S}_t^s = \mathfrak{S}_{t+}^s = \overline{\mathfrak{S}_t^s}$,

d) 它的样本函数在 $[0, \infty)$ 上几乎必然右连续，而且在 $[0, \zeta)$ 上有左极限，

e) 它是强马尔科夫过程，

f) 它在 $[0, \zeta)$ 上拟左连续.

我们来证明标准马尔科夫过程的下列性质.

引理 3 如果 $\xi(t)$ 是标准马尔科夫过程,则集 $B(\omega)=\{\xi(s): 0 \leqslant s \leqslant t, t < \zeta\}$ 几乎必然位于某一紧致集中.

证. 考虑紧致集序列 $\{K_n\}$: $K_n \subset \operatorname{Int}(K_{n+1})$, $\bigcup_1^\infty K_n = \mathscr{X}$. 设 $\zeta_n = \inf\{t: \xi(t) \bar{\in} K_n\}$. 因为 $\mathscr{X}_b \backslash K_n$ 是开集,而 $\xi_\omega(t)$ 右连续,故事件 $\{\tau_n \leqslant t\} = \bigcup_{t_n \leqslant t, t_n \in J} \{\xi(t_n) \in \mathscr{X}_b \backslash K_n\}$, 从而它 $\mathfrak{S}_t^s$ 可测.

设 $\tau = \lim \tau_n$. 由拟左连续性知当 $\tau < \zeta$ 时几乎处处 $\xi(\tau_n) \to \xi(\tau)$. 另一方面, $\xi(\tau_{n+1}) \bar{\in} K_{n-1}$, 因而 $\xi(\tau) = b$, 即几乎处处有 $\tau = \zeta$. 所以,对于 $t < \zeta$ 和每个 ω 可以找到一个 n, 使 $t < \tau_n \leqslant \zeta$, 而且 $B(\omega) \subset K_n$. 引理得证.

系. 在时间区间 $[0, \zeta)$ 上，标准马尔科夫过程几乎处处位于 $\mathscr{X}$ 之中.

下面我们在相当一般的条件下证明，在可分局部紧相空间中可以构造一马尔科夫过程,使它具有给定的转移概率.

设 $\mathscr{X}$ 是可分局部紧空间;$\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{X}$ 中 Borel 集的 σ 代数.$\mathscr{C}_0$ 是 $\mathscr{X}$ 中连续函数 $f(x)$ 的空间,对其中每个 $f(x)$ 当 $x \to b$ 时, $f(x) \to 0$; $P(s, x, t, B)$ 是 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 中的转移概率,满足条件: $P(s, x, s, B) = \chi(B, x)$, $P(s, x, t, \mathscr{X}) = 1$.

称转移概率为 Feller 转移概率,如果

a) 对所有 s, $t(0 \leqslant s < t < \infty)$ 有 $\mathbf{T}_{st}(\mathscr{C}_0) \subset \mathscr{C}_0$, 而且对任意 $f \in \mathscr{C}_0$, 函数 $\mathbf{T}_{st} f$ 对变量 (s, t, x) 的全体连续,其中 $0 \leqslant s \leqslant t$, $x \in \mathscr{X}$,

b）对每个函数 $f\in\mathscr{C}_0$，当 $t\downarrow s$ 时关于 $x\in\mathscr{X}$ 一致有 $\mathbf{T}_{st}f\to f$.

定理 3 对可分局部紧相空间 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 中的任意 Feller 转移概率 $P(s,x,t,B)$，存在一标准马尔科夫过程，使其转移概率为 $P(s,x,t,B)$.

证. 首先按 § 1 的一般方法在空间 $\{\mathscr{X}_{\mathfrak{b}},\mathfrak{B}_{\mathfrak{b}}\}$ 中构造一转移概率 $\tilde{P}(s,x,t,B)$，其中 $\mathfrak{b}$ 点起吸收状态的作用，是作为极限无穷远点并入 $\mathscr{X}$ 的. 记 $\mathscr{C}$ 为 $\mathscr{X}_{\mathfrak{b}}$ 中连续函数的空间. 设 $\tilde{\mathbf{T}}_t$ 是本小节一开始引进的算子，它对应于转移概率 $\tilde{P}(s,x,t,B)$. 这时，如果 $f\in\mathscr{C}$，则

$$(\tilde{\mathbf{T}}_tf)(s,x)=\int_{\mathscr{X}}[f(y)-f(\mathfrak{b})]P(s,x,t,dy)+f(\mathfrak{b}),$$

由此可见当 n 固定时，$(\tilde{\mathbf{T}}_tf)(s,x)$ 对 x 连续. 因为

$$(\tilde{\mathbf{T}}_{t+h}f)(s,x)-(\tilde{\mathbf{T}}_tf)(s,x)=\tilde{\mathbf{T}}_t(\tilde{\mathbf{T}}_hf-f)(s,x),$$

所以 $(\tilde{\mathbf{T}}_tf)(s,x)$ 对 t 右连续. 考虑过程的预解式

$$(\mathbf{R}_\lambda f)(s,x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}(\tilde{\mathbf{T}}_tf)(s,x)dt.$$

对固定的 s，它是 x 的连续函数，而且如果 $f(x)>0$，$x\in\mathscr{X}$，则 $(\mathbf{R}_\lambda f)(s,x)>0$. 此外，当 $\lambda\to\infty$时关于 x 一致有

$$\lambda(\mathbf{R}_\lambda f)(s,x)=\int_0^\infty e^{-t}(\tilde{\mathbf{T}}_{t/\lambda}f)(s,t)dt\to f(x).$$

根据 § 3 定理 5，我们在相空间 $\{\mathscr{X}_{\mathfrak{b}},\mathfrak{B}_{\mathfrak{b}}\}$ 中构造一马尔科夫过程 $\{\xi(t,\omega),\mathscr{N}_t^s,\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\}$，使它的转移概率为 $\tilde{P}(s,x,t,B)$. 这里，$\mathscr{N}_t^s$ 是 $\mathscr{X}_{\mathfrak{b}}^{\mathscr{I}}$ 中的柱集产生的 σ 代数，这些柱集底的坐标都属于 $[s,t]$（见第 61 页译注）；$\mathscr{X}_{\mathfrak{b}}^{\mathscr{I}}$ 是从半直线 $\mathscr{I}=[0,\infty)$ 到 $\mathscr{X}_{\mathfrak{b}}$ 的全体映射的空间；$\xi_t=\xi(t,\omega)=x(t)$，$\omega=x(\cdot)\in\mathscr{X}_{\mathfrak{b}}^{\mathscr{I}}$. 照例记 $\mathscr{N}^s$ 为包含所有 σ 代数 $\mathscr{N}_t^s$ $(t\geqslant s)$ 的最小 σ 代数，而 $\mathscr{N}=\mathscr{N}^0$.

设 $f(x)\in\mathscr{C}$，$f(x)\geqslant 0$ $(x\in\mathscr{X})$，$g(s,x)=(\mathbf{R}_\lambda f)(s,x)$. 由引理 1 可知，定义在概率空间 $\{\mathscr{X}_{\mathfrak{b}}^{\mathscr{I}},\mathscr{N}^s,\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\}$ 上的过程 $e^{-\lambda t}g(t,\xi(t))$ 关于 σ 代数流 $\{\mathscr{N}_t^s,t\geqslant s\}$ 是非负上鞅，其中 $s\geqslant$

$0,\ x\in\mathscr{X}_b$.

设 $\mathscr{J}$ 是非负有理数的集. 由上鞅的一般性质可知,当 $t\geqslant s$ 时,对 $\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}$ 几乎所有 ω, 过程 $e^{-\lambda r}g(r,\xi(r))$, $r\in\mathscr{J}$, 在 t 点有右极限,而当 $t>s$ 时它在 t 点有左极限. 记 $\Omega'_s(\lambda,f)$ 是使上述极限存在的全体 ω 的集合. 显然, 当 $s_1>s_2$ 时, $\Omega'_{s_1}(\lambda,f)\supset\Omega'_{s_2}(\lambda,f)$, 而且 $\Omega'_s(\lambda,f)\in\mathscr{N}^s$.

设 $f_n,n=1,2,\cdots$, 是$\mathscr{C}$中处处稠密的可列网络 (因为$\mathscr{C}$可分,所以它存在), $\lambda_n,n=1,2,\cdots$, 是递增正数数列, $\lambda_n\uparrow\infty$. 令

$$\Omega'_s=\bigcap_{n,k}\Omega'_s(\lambda_n,f_k),\quad \Omega'_0=\Omega'.$$

这时,对任意 $(s,x)\in[0,\infty)\times\mathscr{X}$ 有 $\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}(\Omega'_s)=1$. 因为当 $n\to\infty$时关于 x 一致有 $\lambda_n(\mathbf{R}_{\lambda_n}f_k)(s,x)\to f_k(x)$, 所以当 $\omega\in\Omega'_s$ 时, $f_k(\xi(t,\omega))$ 对任意 $t>0$ 有左极限,而对任意 $t\geqslant 0$ 有右极限, $k=1,2,\cdots$. 由此可见,对任意 $f\in\mathscr{C}$, $\omega\in\Omega'$, 当 $t>s$ 时 $f(\xi(t,\omega))$ 有左极限, 而当 $t\geqslant s$ 时它有右极限. 因而函数 $\xi(t,\omega)$ 也有同样的性质.

现在设 $f\in\mathscr{C}$, 而且当 $x\in\mathscr{X}$ 时 $f(x)>0$, $f(b)=0$. 那末, $g(s,x)>0$, $(s,x)\in[0,\infty)\times\mathscr{X}$; 事件 $Q_s=\{\omega$: 当 $t\in[s,r]\cap\mathscr{J}$ 时 $\xi(t,\omega)$ 无界,但是对某个 $r\geqslant s$ 有 $\xi(t,\omega)\in\mathscr{X}\}$ 可表为

$$Q_s=\bigcup_{r\in\mathscr{J}^s}\Big\{\omega:\ e^{-\lambda r}g(r,\xi(r,\omega))>0,\quad \inf_{t\in\mathscr{J}^s_r}e^{-\lambda t}g(t,\xi(t,\omega))=0\Big\},$$

其中 $\mathscr{J}^s_r=\mathscr{J}\cap[s,r]$, $\mathscr{J}^s=\mathscr{J}\cap[s,\infty)$. 显然 $Q_s\in\mathscr{N}^s$, 而由引理 2 有 $\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}(Q_s)=0$. 令 $\Omega_s=\Omega'_s\backslash Q_s$. 由定义可知,马尔科夫过程 $\{\xi(t,\omega),\mathscr{N}^s_t,\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\}(t\in\mathscr{J},\omega\in\mathscr{X}^s)$ 在基本事件空间 $\Omega\equiv\Omega_0$ 上的压缩存在(见 § 3). 为简便计, 和这个压缩有关的各种对象的原记号保持不变.

对每个 $\omega\in\Omega$，函数 $\xi(t,\omega)$ 具有下列性质：

a）当 $t\geqslant 0$ 和 $t>0$ 时，分别存在极限

$$\lim_{r\downarrow t, r\in\mathscr{J}}\xi(r,\omega) \text{ 和 } \lim_{r\uparrow t, r\in\mathscr{J}}\xi(r,\omega),$$

b）如果 $\xi(t,\omega)\in\mathscr{X}$，$t\in\mathscr{J}$，则存在一紧致 $K=K(\omega)$，$K\subset\mathscr{X}$，使对任意 $r\leqslant t$，$r\in\mathscr{J}$ 有 $\xi(t,\omega)\in K$。特别，如果对 $t\in\mathscr{J}$ 有 $\xi(t,\omega)=\mathfrak{b}$，则对任意 $r\in\mathscr{J}^t$ 有 $\xi(r,\omega)=\mathfrak{b}$。

令

$$\eta(t,\omega)=\lim_{r\downarrow t, r\in\mathscr{J}}\xi(r,\omega).$$

不难验证，函数 $\eta(t,\omega)$ 具有下列性质：

a）对每个 ω，函数 $\eta_\omega(t)$ 右连续，而且对任意 $t>0$ 它有左极限，

b）如果 $\eta_\omega(t)=\mathfrak{b}$，则对 $t'>t$ 有 $\eta_\omega(t')=\mathfrak{b}$。

因为对任意 $s\leqslant t$ 函数 ξ_t 为 $\mathscr{N}_t^s$ 可测，故 η_t 为 $\mathscr{N}_{t+}^s$ 可测．现在我们来证明，$\{\eta(t,\omega),\mathscr{N}_{t+}^s,\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\}$ 是马尔科夫过程，它的转移概率为 $P(s,x,t,B)$，而且过程 $\xi(t,\omega)$ 和 $\eta(t,\omega)$ 随机等价．

设 $s\leqslant u<t_n$，$t_n\in\mathscr{J}$，$t_n\downarrow u$。因为 $\xi(t,\omega)$ 是马尔科夫过程，故当 $f\in\mathscr{C}_0$，$g\in b(\mathfrak{B}_b)$ 时，下列等式成立：

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_{s,x}f(\xi_{t_n})g(\xi_u)&=\tilde{\mathbf{E}}_{s,x}\tilde{\mathbf{E}}_{u,\xi_u}f(\xi_{t_u})g(\xi_u)\\&=\tilde{\mathbf{E}}_{s,x}g(\xi_u)(\tilde{\mathbf{T}}_{ut_n}f)(\xi_u).\end{aligned}$$

利用 Feller 转移概率的性质 b)，当 $n\to\infty$时在上式中取极限，得

$$\tilde{\mathbf{E}}_{s,x}f(\eta_u)g(\xi_u)=\tilde{\mathbf{E}}_{s,x}f(\xi_u)g(\xi_u).$$

使等式 $\tilde{\mathbf{E}}_{s,x}h(\eta_u,\xi_u)=\tilde{\mathbf{E}}_{s,x}h(\xi_u,\xi_u)$ 成立的全体函数 $h(x,y)$ 组成线性单调类，因而它包含所有函数 $h\in b(\mathfrak{B}_b\times\mathfrak{B}_b)$。由此可见，$\eta_u=\xi_u(\mathrm{mod}\mathbf{P}_{s,x})$。其次，设：$f\in\mathscr{C}_0$，$s\leqslant u\leqslant t$，$u_n\downarrow u$，$t_n\downarrow t$，$u_n\leqslant t_n$，而且 u_n 和 t_n 均为有理数，$S\in\mathscr{N}_{u+}^s$。那末，由过程 $\xi(t,\omega)$ 的马尔科夫性可见，

$$\int_S f(\xi_{t_n})d\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}=\int_S(\tilde{\mathbf{T}}_{u_nt_n}f)(\xi_{u_n})d\tilde{\mathbf{P}}_{s,x},\tag{2}$$

其中，当 $n\to\infty$ 时，$\xi_{t_n}\to\eta_t$，$\xi_{u_n}\to\eta_u$。考虑到 Feller 转移概率的性质 a)，当 $n\to\infty$ 时在 (2) 式中取极限，得

$$\int_S f(\eta_t)d\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}=\int_S(\tilde{\mathbf{T}}_{ut}f)(\eta_u)d\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}.$$

因为该式对任意 $f\in\mathscr{C}_0$ 成立，所以对属于 $b(\mathfrak{B}_b)$ 的任意函数也成立。也就是说，$\{\eta(t,\omega),\ \mathscr{N}^s_{t+},\ \tilde{\mathbf{P}}_{s,x}\}$ 是马尔科夫过程，$P(s,x,t,B)$ 是它的转移概率。

设 $\mathscr{L}$ 是取值于 $\mathscr{X}$ 并且满足下列条件的函数 $\omega=x(t)$ 构成的空间：对每个 t 函数 $x(t)$ 右连续而且有左极限；如果 $x(s)=\mathfrak{b}$，则对所有 $t>s$ 有 $x(t)=\mathfrak{b}$。记 $\check{\mathfrak{S}}^s_t(\check{\mathfrak{S}}^s)$ 为包含所有柱集的最小 σ 代数，这些柱集底的坐标都属于 $[s,t]$ $([s,\infty))$。利用以前描述过的方法，把测度 $\tilde{\mathbf{P}}_{s,x}$ 开拓到 $\check{\mathfrak{S}}^s$ 上，并把新测度记作 $\mathbf{P}_{s,x}$。显然，$\{\xi_0(t,\omega),\ \check{\mathfrak{S}}^s_{t+},\ \mathbf{P}_{s,x}\}$，其中 $\xi_0(t,\omega)=x(t)$，是马尔科夫过程。如果把 σ 代数 $\check{\mathfrak{S}}^s_{t+}$ 换成它的完备化（见 § 3），则得过程 $\{\xi_0(t,\omega),\mathfrak{S}^s_t,\mathbf{P}_{s,x}\}$。因为 § 4 定理 7 的条件成立，所以它是强马尔科夫过程。由 § 3 引理 8 可见 $\mathfrak{S}^s_t=\mathfrak{S}^s_{t+}$。最后只剩下证明过程 $\xi_0(t,\omega)$ 的拟左连续性。设 τ_n 是单调非减的 $\mathfrak{S}^s_t$ 马尔科夫时间序列，$\lim\tau_n=\tau<\infty$。设 $\xi_0(\tau-)=\lim\xi_0(\tau_n)$。由过程 $\xi_0(\cdot)$ 的右连续性可知 $\xi_0(\tau)=\lim\limits_{h\downarrow 0}\lim\limits_{n}\xi_0(\tau_n+h)$。设 f 和 g 属于 $\mathscr{C}$。由强马尔科夫性得等式

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_{s,x}f(\xi_0(\tau-))g(\xi_0(\tau))\\&=\lim_{h\downarrow 0}\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_{s,x}f(\xi_0(\tau_n))g(\xi_0(\tau_n+h))\\&=\lim_{h\downarrow 0}\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_{s,x}f(\xi_0(\tau_n))(\tilde{\mathbf{T}}_{\tau_n,\tau_n+h}g)(\xi_0(\tau_n))\\&=\mathbf{E}_{s,x}f(\xi_0(\tau-))g(\xi_0(\tau-)).\end{aligned}$$

对任意 $x\in\mathscr{X}_b$，使

$$\mathbf{E}_{s,x}h(\xi_0(\tau-),\xi_0(\tau))=\mathbf{E}_{s,x}h(\xi_0(\tau-),\xi_0(\tau-))\tag{3}$$

成立的全体函数 $h(x,y)\in b(\mathfrak{B}_b\times\mathfrak{B}_b)$ 组成线性单调类。而由刚证明的结果可知，它包含形如 $h(x,y)=f(x)g(y)$ 的函数，其中 $f,g\in\mathscr{C}$。所以，对任意 $h\in b(\mathfrak{B}_b\times\mathfrak{B}_b)$ 等式 (3) 成立。由此

可得等式 $\xi_0(\tau)=\xi_0(\tau-)(\bmod \mathbf{P}_{s,x})$. 从而定理得证.

循序可测过程 在这一小节我们研究一般循序可测过程的构造.

设 f 是从 $\{\Omega,\mathfrak{F}\}$ 到 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 的可测映射，其中 $\mathscr{X}$ 是度量空间，r 是它中间的距离，$\mathfrak{B}$ 是它的 Borel 集 σ 代数.

考虑这样一个函数类，它包含取值于 $\mathscr{X}$ 的 $\mathfrak{F}$ 可测简单函数，并且对极限运算(即对每个 ω 在 $\mathscr{X}$ 中的点收敛)封闭. 如果 f 属于上述函数类，则我们称它为**可数** $\mathfrak{F}$ **可测的**.

函数 f 为可数 $\mathfrak{F}$ 可测的必要和充分条件是它 $\mathfrak{F}$ 可测，并且有可分值集.

事实上，一方面，具有可分值集的 $\mathfrak{F}$ 可测函数类对极限封闭，所以它包含全部可数 $\mathfrak{F}$ 可测函数；另一方面，对每一个具有可分值集的 $\mathfrak{F}$ 可测函数，都可以用一个 $\mathfrak{F}$ 可测的简单函数的序列来逼近它.

设 $\xi(t,\omega)$, $t\geqslant 0$, 是概率空间 $\{\Omega,\mathfrak{F},\mathbf{P}\}$ 上的随机过程，$\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$是它的相空间. $\mathscr{N}_t^s$ 是随机元素 $\xi_u(\omega)$, $u\in[s,u]$, 在 Ω 中所产生的 σ 代数族. $\mathscr{N}_t^s$ 称为**过程** $\xi(t,\omega)$, $t\geqslant s$, **产生的自然** σ **代数流**.

如果对任意 $s\geqslant 0$, 过程 $\xi(t,\omega)$, $t\geqslant s$, 关于 σ 代数流 $\{\mathscr{N}_t^s, t\geqslant s\}$为循序可测，则称它为**自然可测的**.

记 E 为从 $\{\Omega,\mathfrak{F}\}$ 到 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 的 $\mathfrak{F}$ 可测映射的度量空间，它的度量 ρ 和依概率收敛等价. 以 $\check{\xi},\check{\eta},\cdots,\check{\xi}=f(\omega)$ 表示 E 的元素. 随机过程 $\xi(t,\omega)$, $t\in[0,\infty)$, 决定把 $[0,\infty)$ 映入 E 的某一函数 $\check{\xi}_t$.

设 $\mathscr{E}$ 是空间 E 中 Borel 集的 σ 代数. 我们把随机过程 $\xi(t,\omega)$ 看成是，将可测空间 $\{[0,\infty),\mathscr{T}\}$ 映入 $\{E,\mathscr{E}\}$ 的一个映射 $\check{\xi}_t$. 和前面一样，这里 $\mathscr{T}$ 表示 $[0,\infty)$ 上 Borel 集的 σ 代数.

显然，(对度量 ρ) 连续的函数 $\check{\xi}_t$ 是可数 $\mathscr{E}$ 可测的，而且 $\check{\xi}_t$ 在点 $t=t_0$ 连续就意味着过程 $\xi(t,\omega)$ 在 $t=t_0$ 随机连续.

定理 4 如果随机过程 $\xi(t,\omega)$ 为可数 $\mathscr{T}\times\mathfrak{F}$ 可测，则函

数 $\check{\xi}_t$ 为可数$\mathscr{E}$可测. 反之，如果函数 $\check{\xi}_t$ 为可数$\mathscr{E}$可测，则存在随机等价的自然可测并可数 $\mathfrak{B}$ 可测过程 $\xi(t,\omega)$.

证. 定理的第一部分很容易证明. 以Ξ表随机过程类 $\{\xi(t,\omega)\}$，对于其中每个过程 $\xi(t,\omega)$，相应的函数 $\check{\xi}_t$ 为可数$\mathscr{E}$可测. 首先考虑形如 $\Sigma\chi_{\Delta_k}(t)f_k(\omega)$ 的过程，其中 Δ_k 是 $[0,\infty)$ 上的 Borel 集，$\cup\Delta_k=[0,\infty)$，而 $f_k(\omega)$ 是 $\{\Omega,\mathfrak{S}\}$ 上的可测函数. 因为它们所对应的函数 $\check{\xi}_t$ 是简单函数，故都属于 Ξ. 其次，Ξ 对$[0,\infty)$上的点收敛封闭，因而它包含所有 $\mathscr{T}\times\mathfrak{B}$ 可测函数$\xi(t,\omega)$.

现在假设 $\check{\xi}_t=\check{\xi}(t)$ 是可数$\mathscr{E}$可测函数，R是它值域的闭包. 建立集R的一分割序列 $S_1^n,S_2^n,\cdots$，其中每个分割把R分为若干个直径小于2^{-n}的 Borel 集，而且第$n+1$个分割是第n个分割的再分割. 令

$$\Delta_{ji}^{(n)}=\left\{t:\ \check{\xi}(t)\in S_j^n,\ \ t\in\left[\frac{i}{2^n},\ \frac{i+1}{2^n}\right]\right\}.$$

$\Delta_{ji}^{(n)}$ 均为 Borel 集，它们的全体 $\{\Delta_{ji}^{(n)},i=0,1,\cdots,j=1,2,\cdots\}$ 构成$[0,\infty)$的分割. 如果$\Delta_{ji}^{(n)}$不空，则我们从中任取一点 $t_{ji}^{(n)}$，使对任意n有 $\{t_{ji}^{(n)},i=0,1,\cdots,j=1,2,\cdots\}\subset\{t_{ij}^{(n+1)},i=0,1,\cdots,j=1,2,\cdots\}$. 当 $t\in\Delta_{ji}^{(n)}$ 时令 $\varphi_n(t)=t_{ji}^{(n)}$. 那末，$\varphi_n(t)$ 是 Borel 函数，而且当 $t=t_{ji}^{(m)}(n\geq m)$ 时，有

$$\check{\xi}(\varphi_n(t))=\check{\xi}(t),\ \ |\varphi_n(t)-t|<\frac{1}{2^n}.$$

此外，当 $t\in\Delta_{ji}^{(n)}$ 时 $\check{\xi}(\varphi_n(t))=\check{\xi}(t_{ji}^{(n)})$，故 $\rho(\check{\xi}(\varphi_n(t)),\check{\xi}(t))<2^{-n}$，从而对每个$t$和几乎所有$\omega$有 $\xi(\varphi_n(t),\omega)\to\xi(t,\omega)$. 令

$$\xi_0(t,\omega)=\lim_n\xi(\varphi_n(t),\omega),$$

当右侧极限不存在时，令 $\xi_0(t,\omega)=x_0$. 那末，过程 $\xi_0(t,\omega)$ 和 $\xi(t,\omega)$ 随机等价，而且 $\xi(t_{ji}^{(n)},\omega)$ 的值和点x_0的选择完全决定 $\xi_0(t,\omega)$.

如果 $\delta>0$，而n充分大，则 $\xi(\varphi_n(t),\omega)$ 在 $[a,b)$ 上的压缩为可数 $\mathscr{T}_{b+\delta}^{a-\delta}\times\mathscr{N}_{b+\delta}^{a-\delta}$ 可测，其中 $\{\mathscr{N}_t^s\}$ 是过程 $\xi_0(t,\omega)$

的自然 σ 代数流. 所以对所有 $\delta>0$, $\xi_0(t,\omega)$ 具有同样的可测性. 现在不难证明,过程 $\xi_0(t,\omega)$ 为循序可数 $\mathscr{T}_b^a\times\mathscr{N}_b^a$ 可测. 事实上,对任意 $B\in\mathfrak{B}$

$$\begin{aligned}\{(t,\omega):\ \xi(t,\omega)\in B,\ t\in[a,b]\}\\ =\{(a,\omega):\ \xi(a,\omega)\in B\}\\ \cup\{(t,\omega):\xi(t,\omega)\in B,\ t\in(a,b)\}\\ \cdot\cup\{(b,\omega):\ \xi(b,\omega)\in B\},\end{aligned}$$

这里右侧的第一和第三个集合均为 $\mathscr{T}_b^a\times\mathscr{N}_b^a$ 可测;第二个集合也 $\mathscr{T}_b^a\times\mathscr{N}_b^a$ 可测,因为

$$\{(t,\omega):\ \xi(t,\omega)\in B,\ t\in(a,b)\}$$
$$=\bigcup_n\left\{(t,\omega):\ \xi(t,\omega)\in B,\ t\in\left(a+\frac{1}{n},\ b-\frac{1}{n}\right)\right\},$$

而

$$\left\{(t,\omega):\ \xi(t,\omega)\in B,\ t\in\left(a+\frac{1}{n},\ b-\frac{1}{n}\right)\right\}\in\mathscr{T}_a^a\times\mathscr{N}_n^a.$$

定理证完.

若 $\mathscr{X}$ 是紧空间,则可以改进上面的构造,从而得到更强的结果.

设 f 是某一把 $[0,\infty)$ 映入 $\mathscr{X}$ 的函数. 记 $f(J)$ 为集合 J 的映象, $J\subset[0,\infty)$. 令

$$A_+(f,J,t)=\bigcap_n\left[f\left(\left[t,\ t+\frac{1}{n}\right]\cap J\right)\right],$$
$$A_-(f,J,t)=\bigcap_n\left[f\left(\left[t-\frac{1}{n},\ t\right]\cap J\right)\right],$$
$$A(f,J,t)=A_+\cup A_-.$$

$A_+(f,J,t)$ 是函数 $f(\cdot)$ 在 t 点的所有右极限值的集合, 这里极限是在集 J 上求的. $A_-(f,J,t)$ 和 $A(f,J,t)$ 的含义类似. 过程 $\xi(t,\omega)$ 称为**可分的**(**左可分的**,或**右可分的**), **可分集为** J, 如果存在一可列集 J, 使对每个 ω 和所有 t 有 $\xi_\omega(t)\in A(\xi_\omega,J,t)$ ($\in A_-(\xi_\omega,J,t)$, 或 $\in A_+(\xi_\omega,J,t)$).

定理 5 如果 $\mathscr{X}$ 是紧度量空间, 则可以选择上面的构造中

所描述的过程 $\xi(t,\omega)$，使它是可分的(右可分的).

证. 我们稍许改变上一证明中 $\xi_0(t,\omega)$ 的定义. 取一在 $\mathscr{X}$ 中处处稠密的点列 $\{z_n\}$. 记 $n_{11}(t,\omega)$ 为满足下列条件的最小的 $n\geqslant 1$:

$$r(z_1,\xi[\varphi_n(t),\omega])\leqslant \varliminf_{m\to\infty} r(z_1,\xi[\varphi_m(t),\omega])+1$$

(r 是 $\mathscr{X}$ 中的度量); 记 $n_{ij}(t,\omega)$ 为满足下列条件的最小的 n: $n>n_{1,j-1}$,

$$r(z_1,\xi[\varphi_n(t),\omega])\leqslant \varliminf_{m\to\infty} r(z_1,\xi[\varphi_m(t),\omega])+\frac{1}{j}.$$

显然

$$\lim_{j\to\infty} r(z_1,\xi[\varphi_{n_{1j}}(t),\omega])=\varliminf_{n\to\infty} r(z_1,\xi[\varphi_n(t),\omega]),$$

而且对任意 $\delta>0$ 和充分大的 j, $\xi[\varphi_{n_{1j}}(t),\omega]$ 在 $[0,a)\times\Omega$ 上的压缩为 $\mathscr{T}_{a+\delta}\times\mathscr{N}_{a+\delta}$ 可测.

其次, 我们这样来构造整数序列 $\{n_{kj}\}$, 使它们满足下列条件: 它们都是 $\{n_{k,j-1}\}$ 的子列; 对任意 $\delta>0$ 和充分大的 j, $\xi[\varphi_{n_{kj}}(t),\omega]$ 在 $[0,a)\times\Omega$ 上的压缩为 $\mathscr{T}_{a+\delta}\times\mathscr{N}_{a+\delta}$ 可测, 而且

$$\lim_{j\to\infty} r(z_k,\xi[\varphi_{n_{kj}}(t),\omega])=\varliminf_{j\to\infty} r(z_k,\xi[\varphi_{n_{k,j-1}}(t),\omega]).$$

那末,对所有 k, t 和 ω 存在极限 $\lim\limits_{j\to\infty} r(z_k,\xi[\varphi_{n_{jj}}(t),\omega])$. 因而, 对所有 t 和 ω, $\xi[\varphi_{n_{jj}}(t),\omega]$ 有极限,记作 $\xi_0(t,\omega)$. 显然,过程 $\xi_0(t,\omega)$ 和 $\xi(t,\omega)$ 随机等价, 并且具有上一定理证明中所提到的一切性质.

最后我们指出,倘若 $\varphi_n(t)\geqslant t$, 则过程 $\xi_0(t,\omega)$ 就右可分. 上述假设一般并不成立,但是如果用下面的方法改变一下 φ_n 的定义,就可以做到这一点. 如果 $\Delta_{ji}^{(n)}$ (记号见上一定理证明) 中有最大点,则可以把它选作 $t_{ji}^{(n)}$. 若不然, 则设 $\{t_{ji,k}^{(n)}, k\geqslant 1\}$ 是 $\Delta_{ji}^{(n)}$ 中一单调递增点列, 它的极限为 $\sup\{t,\ t\in\Delta_{ji}^{(n)}\}$, 而且当 $t\in\Delta_{ji}^{(n)}\cap[t_{ji,k-1}^{(n)}, t_{ji,k}^{(n)})$ 时,令 $\varphi_n(t)=t_{ji,k}^{(n)}$, 其中 $k\geqslant 1$, $t_{ji,0}^{(n)}=i\cdot 2^{-n}$. 定理得证.

第二章　齐次马尔科夫过程

§1. 基本定义

第一章给出了马尔科夫过程的一般定义，并且研究了它的基本性质. 在这一章里，我们研究最重要的一类马尔科夫过程——齐次(确切地说，时间齐次)马尔科夫过程. 粗略地说，称马尔科夫过程为齐次的，如果它的转移概率 $P(s, x, t, B)$ 只依赖于差 $t-s$. 不过，在现代马尔科夫过程论中，对于齐次马尔科夫过程使用较窄的定义，它对过程的样本函数的集合也加上某些限制. 我们将采用更窄的定义. 事实说明，这样的定义在解决理论的基本问题时是适宜的. 而且在由给定的转移概率构造过程时，它又是最自然的. 下面要引进的定义和一般定义的基本区别在于，它所考虑的马尔科夫过程，是关于由过程样本函数值产生的 σ 代数流而言的，而不是关于任意 σ 代数流的.

我们先引进不中断马尔科夫过程的定义.

我们说定义了一个**齐次马尔科夫过程**，如果给出了下列对象：

首先，给出一可测空间，即所谓过程的**相空间** $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$. 其次，给定轨道(样本函数)的空间，即定义在 $[0, \infty)$ 上，取值于 $\mathscr{X}$ 的某一函数 $x(t)$ 的集合 $\mathscr{F}$ (注意，$\mathscr{F}$ 未必等于在 $[0, \infty)$ 上定义、取值于 $\mathscr{X}$ 的所有函数的集合)；假设集 $\mathscr{F}$ 满足条件：对任意 $x(\cdot) \in \mathscr{F}$ 和 $h>0$，$\theta_h x(\cdot)$ 也属于 $\mathscr{F}$，其中 $\theta_h x(t) = x(t+h)$.

这里定义的算子 θ_h 叫做**推移算子**. 显然，它们组成半群：$\theta_{h+s} = \theta_h \theta_s$.

对所有 u 和 t $(0 \leqslant u \leqslant t \leqslant \infty)$ 假设 $\mathscr{N}_t^u$ 是 $\mathscr{F}$ 上包含形如 $\{x(\cdot): x(s) \in B\}$, $s \in [u, t]$, $B \in \mathfrak{B}$, 的所有集合的最小 σ 代数，简记 $\mathscr{N}_t = \mathscr{N}_t^0$, $\mathscr{N}^u = \mathscr{N}_\infty^u$, $\mathscr{N} = \mathscr{N}_\infty^0$.

最后，假设在$(\mathscr{F},\mathscr{N})$上给定一族概率测度$\mathbf{P}_x$:$\mathbf{P}_x$对所有$x\in\mathscr{X}$有定义，并且满足条件

$$\mathbf{P}_x\{x(s+h)\in B\,|\,\mathscr{N}_h\}=\mathbf{P}_{x(h)}\{x(s)\in B\}\quad(\mathrm{mod}\,\mathbf{P}_x)\qquad(1)$$

($\mathbf{P}_x\{\cdot\,|\,\mathscr{N}_h\}$表示关于概率测度$\mathbf{P}_x$的条件概率).

这样，齐次马尔科夫过程决定于三个元素：相空间，轨道空间（这两个元素又决定推移算子和σ代数$\mathscr{N}_t^u$)，以及概率分布族$\mathbf{P}_x$. 另一方面，可以认为$\mathscr{F}$和$\mathscr{N}$共同决定相空间；所以我们把齐次马尔科夫过程记作$\{\mathscr{F},\mathscr{N},\mathbf{P}_x\}$(此乃具有同一可测空间$\{\mathscr{F},\mathscr{N}\}$的一个特别概率空间族)[1].

关系式(1)容许简单的推广．记θ_hA为集$A(A\in\mathscr{N})$关于映射θ_h的象．容易看出，当$A\in\mathscr{N}$时，$\theta_hA\in\mathscr{N}$. 由(1)可见，对所有$A\in\mathscr{N}$

$$\mathbf{P}_x\{\theta_hA\,|\,\mathscr{N}_h\}=\mathbf{P}_{x(h)}(A)\quad(\mathrm{mod}\,\mathbf{P}_x).\qquad(2)$$

我们来简短地讨论一下上述齐次马尔科夫过程的定义． 第一，我们注意到，可以假设测度$\mathbf{P}_x$是定义在某一可测空间$\{\Omega,\mathfrak{S}\}$上的，而过程$x(t)$的轨道是形如$x(t,\omega)$的随机函数．注意，在我们的定义中$\{\mathscr{F},\mathscr{N}\}$起$\{\Omega,\mathfrak{S}\}$的作用．第二，$\sigma$代数$\mathscr{N}_t^u$有时不够广，因为它一般不包含形如$\{x(\cdot):x(s)\in A,\ u\leqslant s\leqslant t\}$, $A\in\mathfrak{B}$,的这样一些集合．在很多场合，它们属于$\mathscr{N}_t^u$关于测度$\mathbf{P}_x$(对任意x)的完备化． 所以，最好用σ代数$\bar{\mathscr{N}}_t^u$来代替σ代数$\mathscr{N}_t^u$，这里$\bar{\mathscr{N}}_t^u$是$\mathscr{N}_t^u$关于测度$\mathbf{P}_x$的完备化对$x\in\mathscr{X}$的交.

其次，我们来讨论测度$\mathbf{P}_x$对x的依赖关系．由(1)和(2)两式可见，对任意$A\in\mathscr{N}$, $h>0$(和任意x) $\mathbf{P}_{x(h)}(A)$等于$(\mathrm{mod}\,\mathbf{P}_x)$某一$\mathscr{N}_h$可测函数．以后我们处处假设满足更强的条件，即对所有$A\in\mathscr{N}$，假设函数$\mathbf{P}_x(A)$为$\mathfrak{B}$可测． 而这一条件成立，当且仅当对所有$B\in\mathfrak{B}$和$t>0$，转移概率$P(t,x,B)$是x的可测函数$(x\in\mathscr{X})$，这里

$$P(t,x,B)=\mathbf{P}_x\{x(\cdot):x(t)\in B\},$$

---

1) 有时把马尔科夫过程简记为$x(t)$，这里$x(t)$是过程的样本函数；只有在不致引起误解时，我们才使用这样的记号.

(我们称这样的过程为空间可测的)．这时对任意柱集$\{x(\cdot):x(t_1)\in B_1,\cdots,x(t_k)\in B_k\}$，$0<t_1<\cdots<t_k$，有

$$\mathbf{P}_x(A)=\int_{B_1}P(t_1,x,dx_1)\cdots\int_{B_k}P(t_k-t_{k-1},x_{k-1},dx_k),\quad(3)$$

而且由$P(t,x,B)$的$\mathfrak{B}$可测性可知$\mathbf{P}_x(A)$为$\mathfrak{B}$可测．对于其它$A\in\mathscr{N}$可以利用下列事实：使$\mathbf{P}_x(A)$为$\mathfrak{B}$可测的全体A组成σ代数，它包含$\mathscr{N}$中的柱集的代数，从而它等于$\mathscr{N}$．注意，对可测过程由(1)可以得出过程转移概率的 Колмогоров-Chapman 方程：当$t_1<t_2$时，

$$P(t_2,x,B)=\int P(t_1,x,dy)P(t_2-t_1,y,B).\quad(4)$$

最后，我们指出(1)式的一个变形，即把式中的概率换成数学期望．为此我们考虑$\mathscr{F}$上的$\mathscr{N}$可测变量(即$\mathscr{N}$可测泛函)．每个这样的泛函都可以通过对形如$\varphi_k(x(\cdot))=g_k(x(t_1),\cdots,x(t_k))$的简单函数的有限次或可数次极限运算而得到，其中$g_k(x_1,\cdots,x_k)$是$\mathscr{X}^k$上的$\mathfrak{B}^k$可测函数，而$0<t_1<\cdots<t_k$．对于变量$\varphi_k(x(\cdot))$可以定义一推移算子$\theta_k:\theta_k\varphi_k(x(\cdot))=\varphi_k(\theta_k[x(\cdot)])$．可以把这个算子连续地扩展到所有$\mathscr{N}$可测函数(变量)$\varphi$．现在(2)式等价于：对任意有界可测变量$\varphi$

$$\mathbf{E}_x(\theta_h\varphi\,|\,\mathscr{N}_h)=\mathbf{E}_{x(h)}\varphi\quad(\mathrm{mod}\,\mathbf{P}_x).\quad(5)$$

这里$\mathbf{E}_x$表示对测度$\mathbf{P}_x$求数学期望，而$\mathbf{E}_x(\cdot\,|\,\mathscr{N}_h)$表示对$\mathbf{P}_x$求条件数学期望．容易看出，对于空间可测马尔科夫过程，$\mathbf{E}_x\varphi$为$\mathfrak{B}$可测函数，其中φ是任意有界$\mathscr{N}$可测变量．

式(3)表明，转移概率完全决定测度$\mathbf{P}_x$在$\mathscr{N}$中柱集上的值，从而完全决定它在$\mathscr{N}$上的值．

两个齐次马尔科夫过程称为随机等价的，如果它们的转移概率相同．这样的过程仅可能在轨道空间$\mathscr{F}$上不同．显然，对于任何过程$\{\mathscr{F},\mathscr{N},\mathbf{P}_x\}$，都可以指出它的随机等价过程$\{\tilde{\mathscr{F}},\tilde{\mathscr{N}},\tilde{\mathbf{P}}_x\}$，使$\tilde{\mathscr{F}}$是在$[0,\infty)$上定义、取值于$\mathscr{X}$的所有函数$x(\cdot)$的空间；这里$\tilde{\mathscr{N}}$是$\tilde{\mathscr{F}}$中的柱集产生的$\sigma$代数，而$\tilde{\mathbf{P}}_x$决定于

$$\tilde{\mathbf{P}}_x(A)=\mathbf{P}_x(A\cap\mathscr{F})$$

(对任意 $\tilde{\mathcal{N}}$ 可测集 A，集 $A\cap\mathscr{F}$ 为 $\mathcal{N}$ 可测)。

注意，如果把由 $\tilde{\mathbf{P}}_x$ 构造的外测度记作 $\tilde{\mathbf{P}}_x^*$，则 $\tilde{\mathbf{P}}_x^*(\mathscr{F})=1$，而且对所有 $A\in\mathcal{N}$

$$\tilde{\mathbf{P}}_x(A)=\tilde{\mathbf{P}}_x^*(A).$$

相反，若$\{\tilde{\mathscr{F}},\tilde{\mathcal{N}},\tilde{\mathbf{P}}_x\}$是一马尔科夫过程，$\mathscr{F}$ 是它的轨道空间，$\mathscr{F}$ 是 $\tilde{\mathscr{F}}$ 的任一子集，而且 $\tilde{\mathbf{P}}_x^*(\mathscr{F})=1$ ($\tilde{\mathbf{P}}_x^*$ 是由 $\tilde{\mathbf{P}}_x$ 构造的外测度)，则它和马尔科夫过程 $\{\mathscr{F},\mathcal{N},\mathbf{P}_x\}$ 随机等价，其中 $\mathcal{N}$ 是 $\mathscr{F}$ 的柱集产生的 σ 代数，而 $\mathbf{P}_x(A)=\tilde{\mathbf{P}}_x^*(A)$。

容易看出，在轨道空间的扩张和压缩这两种变换下，随机等价过程互相转换。

在第一章中我们研究了具有给定转移概率的马尔科夫过程的存在性问题。容易验证，当转移概率为时间齐次时，由第一章的构造得齐次马尔科夫过程 $\{\mathscr{F},\mathcal{N},\mathbf{P}_x\}$：$\mathscr{F}$ 是在$[0,\infty)$上定义、取值于 $\mathscr{X}$ 的所有函数 $x(t)$ 的空间，$\mathcal{N}$ 是$\mathscr{F}$上的集产生的 σ 代数，$\mathbf{P}_x$ 是由转移概率产生的概率测度族，对形如 $A=\{x(\cdot):x(t_1)\in B_1,\cdots,x(t_k)\in B_k\}$，$t_1<\cdots<t_k$，的柱集，$\mathbf{P}_x(A)$由(3)式定义。

以后会看到，研究齐次马尔科夫过程，比研究一般过程更为方便；这里，有强有力的齐次过程的半群理论。人们的主要注意力之所以放在齐次马尔科夫过程上，是因为经十分简单的变换可把非齐次过程化为齐次的。下面我们来描述这一变换。

为简便计，我们考虑样本函数的集合$\mathscr{F}$等于所有函数的集合的情形。我们定义一个新的相空间$[0,\infty)\times\mathscr{X}$，其中$\mathscr{X}$是原过程的相空间。设样本函数 $\tilde{x}(t)$ 的集合 $\tilde{\mathscr{F}}$ 由函数 $\tilde{x}(t)=(t_0+t;x(t))$ 构成，其中 $x(t)$ 是在$\mathscr{X}$中取值的任意函数，而 $t_0\in[0,\infty)$.

现在我们在 $\tilde{\mathscr{F}}$ 上把概率 $\tilde{\boldsymbol{P}}_{\tilde{x}}(\tilde{A})$，$\tilde{x}\in\tilde{\mathscr{X}}$，定义为两个测度 λ_{t_0} 和 $\mathbf{P}_{t_0,x}$ 的积。这里 λ_{t_0} 是形如 $g_s(t)=s+t\,(s,t\in[0,\infty))$ 的函数空间上的概率测度，它集中在函数 $g_{t_0}(t)$ 上；而 $\mathbf{P}_{t_0,x}$ 是 $\mathscr{F}$ 上的测度，它对应于原非齐次过程。

容易看出，这样构造的过程是齐次的。因此，非齐次马尔科夫

过程可以看成特殊形复合马尔科夫过程的一个分量（所谓复合过程，指它是乘积空间上的过程；所谓特殊形，是指它的一个分量是决定性的）.

伴随齐次马尔科夫过程的半群 设 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$ 是相空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 中的一空间可测齐次马尔科夫过程. 记 $\mathbf{B}$ 为 $\mathscr{X}$ 上所有 $\mathfrak{B}$ 可测有界数值函数的空间. 如果在 $\mathbf{B}$ 中引进范数

$$\|f\| = \sup_x |f(x)|,$$

则 $\mathbf{B}$ 就成为 Banach 空间. 以后我们在 $\mathbf{B}$ 中只考虑这一种范数.

在 $\mathbf{B}$ 上定义算子族 $\{\mathbf{T}_t\}$:

$$\mathbf{T}_t f(x) = \int f(y) P(t, x, dy).$$

由 $P(t, x, \cdot)$ 对 x 的可测性知，对所有 $f \in \mathbf{B}$ 有 $\mathbf{T}_t f \in \mathbf{B}$，即算子 $\mathbf{T}_t$ 把 $\mathbf{B}$ 变换到 $\mathbf{B}$. 算子 $\mathbf{T}_t$ 显然是线性的，而且

$$\|\mathbf{T}_t\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \|\mathbf{T}_t f\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \sup_x \left| \int f(y) P(t, x, dy) \right|$$

$$\leqslant \sup_{\|f\| \leqslant 1} \|f\| \sup_x P(t, x, \mathscr{X}) = 1.$$

我们再指出算子 $\mathbf{T}_t$ 的一条重要性质. 设 $\mathbf{B}_+$ 是 $\mathbf{B}$ 中的非负函数组成的子集. 那末当 $f \in \mathbf{B}_+$ 时，有 $\mathbf{T}_t f \in \mathbf{B}_+$，即算子 $\mathbf{T}_t$ 不改变函数的非负性. 最后由方程 (4) 可见

$$\mathbf{T}_t \mathbf{T}_s f = \mathbf{T}_{t+s} f, \quad \text{即} \quad \mathbf{T}_t \mathbf{T}_s = \mathbf{T}_{t+s};$$

换句话说，族 $\{\mathbf{T}_t\}$ 构成算子半群. 显然，随机等价过程的算子半群相同. 可以利用半群来研究马尔科夫过程的转移概率.

如果有一算子半群 $\{\mathbf{T}_t\}$，它保留非负性并且满足条件 $\mathbf{T}_t \mathbf{1} = \mathbf{1}$ ($\mathbf{1}$ 表示恒为 1 的函数)，则存在一函数 $\check{\mathbf{P}}(t, x, B) = \mathbf{T}_t \chi_B(x)$ 和它相联系，其中 $B \in \mathfrak{B}$，χ_B 是 B 的示性函数. 除了对 B 的完全可加性之外，函数 $\check{\mathbf{P}}(t, x, B)$ 具备转移概率的所有性质. 注意，它对 B 有穷可加，而且对任意函数 $f \in \mathbf{B}$ 可以决定 $\int f(y) \check{\mathbf{P}}(t, x, dy)$；容易证明，上面的积分等于 $\mathbf{T}_t f$. 由此可见，$\check{\mathbf{P}}$ 满足 Колмогоров-Chapman 方程 (4).

存在可测空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$，使它上面的任何有穷可加测度同时也是完全可加的.（具有 Borel 集 σ 代数的紧致就是这种空间的一个例子）. 在这样的空间中，$\check{\mathbf{P}}(t, x, B)$ 是真正的转移概率. 从而，在这样的空间上，在转移概率和上述线性变换半群之间存在一一对应关系. 在其它可测空间中（例如，$\mathscr{X}$ 是可列集，$\mathfrak{B}$ 包含 $\mathscr{X}$ 的所有子集），则存在不具备完全可加性的有穷可加测度. 这时，不是任何算子半群都有转移概率和它相伴随. 然而，在任何时候考虑伴随马尔科夫过程的算子半群都是有益的，因为这个半群永远可以完全决定过程的转移概率.

中断马尔科夫过程 我们在第一章研究了一般的中断过程. 那里曾经指出，在一些扩充过的空间中如何把中断过程化为不中断过程. 下面引进的构造，可以把中断齐次马尔科夫过程化为前面所刻画的齐次马尔科夫过程.

设 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 是一可测空间. 给该空间补上一点 $\mathfrak{b}$（无穷点），记 $\hat{\mathscr{X}}$ 为扩充过的空间. 包含单点集 $\{\mathfrak{b}\}$ 和 $\mathfrak{B}$ 中所有集的 σ 代数记为 $\hat{\mathfrak{B}}$. 我们将要研究可测空间 $\{\hat{\mathscr{X}}, \hat{\mathfrak{B}}\}$ 和该空间具有如下特殊形式的齐次马尔科夫过程 $\{\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{N}}, \hat{\mathbf{P}}_x\}$，其中 $\hat{\mathscr{F}}$ 由所有这样的函数 $x(t)$ 组成：当 $s > \zeta = \inf\{t : x(t) = \mathfrak{b}\}$ 时 $x(s) = \mathfrak{b}$；$\hat{\mathscr{N}}$ 是 $\hat{\mathscr{F}}$ 中的柱集产生的 σ 代数；而 $\hat{\mathbf{P}}_x$ 是一概率测度族，使 $\{\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{N}}, \hat{\mathbf{P}}_x\}$ 为马尔科夫过程. 我们称 $\{\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{N}}, \hat{\mathbf{P}}_x\}$ 为**在时刻 ζ 中断的过程**，ζ 为它的**中断时间**. 随机变量 ζ 为 $\hat{\mathscr{N}}$ 可测，而且事件 $\{\zeta > t\} \in \hat{\mathscr{N}}_t$. 中断时间的一条重要性质，就是在集 $\{\zeta > t\}$ 上 $\theta_t\zeta = \zeta - t$. 显然，$\hat{\mathscr{F}}$ 中的函数决定于它们在区间 $[0, \zeta)$ 上（若 $x(\zeta) \neq \mathfrak{b}$）或区间 $[0, \zeta]$ 上（若 $x(\zeta) = \mathfrak{b}$）的值，即在使它们属于 $\mathscr{X}$ 的最大（右开或右闭）区间上的值. 测度 $\hat{\mathbf{P}}_x$ 唯一地决定于它在集 $A \cap \{\zeta > t\}$ 上的值，其中 $A \in \mathscr{N}_t$；对固定的 t，$\hat{\mathbf{P}}_x(A \cap \{\zeta > t\})$ 是 $\mathscr{N}_t$ 上的测度. 所以，有了定义在区间 $[0, \zeta)$ 或 $[0, \zeta]$ 上、取值于 $\mathscr{X}$ 的函数 $x(\cdot)$，以及 σ 代数族 $\mathscr{N}_t$ 上的测度，就可以决定中断马尔科夫过程. 然而，就其构造来说，这样的定义要比前面的定义复杂.

对任意 $B\in\mathfrak{B}$ 定义概率 $P(t,x,B)=\mathbf{P}_x\{x_t\in B\}=\hat{\mathbf{P}}_x\{x_t\in B,\zeta>t\}$. 函数 $P(t,x,B)$ 具备转移概率的所有性质，只是 $P(t,x,\mathscr{X})$ 未必等于 1；而 $1-P(t,x,\mathscr{X})$ 是过程在时刻 t 中断的概率. 我们仍称函数 $P(t,x,B)$ 为(中断过程的)转移概率. 这时，也可以由转移概率 $P(t,x,B)$ 建立过程的伴随半群 $\{\mathbf{T}_t\}$: $\mathbf{T}_tf=\int f(y)P(t,x,dy)$. 它和不中断过程的伴随半群的唯一区别是 $\mathbf{T}_t1$ 未必等于 1. 对中断过程仍使用记号 $\mathbf{P}_x$ 和 $\mathbf{E}_x$. 这时，对于 $A\in\mathscr{N}$, $\mathbf{P}_x(A)=\hat{\mathbf{P}}_x(A\cap\{\zeta>t\})$; 对 $\mathscr{N}$ 可测随机变量 ξ, $\mathbf{E}_x\xi$ 是对测度 $\mathbf{P}_x$ 的积分. 特别，对于 $B\in\mathfrak{B}$ 有 $\mathbf{P}_x\{x_t\in B\}=P(t,x,B)$, 而对任意函数 f 有

$$\mathbf{E}_xf(x_t)=\int f(y)P(t,x,dy).$$

§2. 弱可测马尔科夫过程的预解式和生成算子

相空间 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 中马尔科夫过程的转移概率 $P(t,x,B)$ 称为可测的，如果对任意 $B\in\mathfrak{B}$, 它在可测空间的积 $\{\mathscr{R}_+,\mathfrak{A}_+\}\times\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 上对 (t,x) 可测，这里 $\mathscr{R}_+=[0,\infty)$, 而 $\mathfrak{A}_+$ 是 $\mathscr{R}_+$ 的 Borel 集的 σ 代数.

称齐次马尔科夫过程是弱可测的，如果它的转移概率可测. 在这一节里我们只考虑弱可测过程.

设 $\mathbf{T}_t$ 是伴随可测过程的算子半群. 由公式

$$\mathbf{R}_\lambda f(x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int f(y)P(t,x,dy)\,dt=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_tf(x)dt \quad (1)$$

把过程的预解式 $\mathbf{R}_\lambda$ 定义为 $\mathbf{B}$ 上的算子族，其中 λ 为复数，$\mathrm{Re}\lambda>0$.

容易看出，$\mathbf{R}_\lambda f(x)$ 是复值可测函数. 记 $\mathbf{B}^*$ 是定义在 $\mathscr{X}$ 上的复值有界 $\mathfrak{B}$ 可测函数 $g(x)$ 的空间，$\|g\|=\sup_x|g(x)|$ 是它的范数. 则 $\mathbf{R}_\lambda$ 是从 $\mathbf{B}$ 到 $\mathbf{B}^*$ 的线性算子.

预解核定义为

$$R_\lambda(x, B) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P(t, x, B) dt. \tag{2}$$

对每个 x 和 $\lambda(\mathrm{Re}\lambda > 0)$, $R_\lambda(x, B)$ 是 $\mathfrak{B}$ 上的完全可加的复值集函数. 所以,对所有 $f \in \mathbf{B}$, 积分

$$\int f(y) R_\lambda(x, dy)$$

有定义,它是从 $\mathbf{B}$ 到 $\mathbf{B}^*$ 的有界线性算子. 由于该算子和算子 $\mathbf{R}_\lambda$ 在 $\mathfrak{B}$ 的柱集上相等,可知

$$\mathbf{R}_\lambda f(x) = \int f(y) R_\lambda(x, dy). \tag{3}$$

因此,为定义过程的预解核,只需知道它的预解式. 而若知道了 $R_\lambda(x, B)$, 就可以对任意 x 和 $B \in \mathfrak{B}$, 对几乎所有 $t > 0$(但不是对所有 $t > 0$)求出 $P(t, x, B)$. 所以不能排除非随机等价过程的预解式相同的可能性. 不过我们将证明,在关于相空间的某些条件下, $R_\lambda(x, B)$ 唯一决定转移概率.

引理 1 设 σ 代数 $\mathfrak{B}$ 可分, $P(t, x, B)$ 和 $P_1(t, x, B)$ 是两个可测的转移概率. 如果对所有 $x \in \mathscr{X}$ 和 $B \in \mathfrak{B}$, 关于 Lebesgue 测度对几乎所有 t, $P(t, x, B)$ 和 $P_1(t, x, B)$ 相等,则它们处处相等.

证. 对每个 x 我们建立一完备 Lebesgue 测度集 $E_x \subset [0, \infty)$, 使对 $t \in E_x$ 和事先给定的序列 $B_k \in \mathfrak{B}$, 有 $P(t, x, B_k) = P_1(t, x, B_k)$. 如果取 B_k 作生成 $\mathfrak{B}$ 的序列,则对 $t \in E_x$,测度 $P(t, x \cdot)$ 和 $P_1(t, x, \cdot)$ 相等. 此外,我们有

$$\begin{aligned} &P_1(t, x, B) - P(t, x, B) \\ &= \frac{1}{t}\int_0^t \left[\int P_1(s, y, B) P_1(t-s, x, dy) - \int P(s, y, B) \cdot P(t-s, x, dy)\right] ds \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t \int [P_1(s, y, B) - P(s, y, B)] P(t-s, x, dy) ds.$$

这里我用到测度 $P(t-s, x, \cdot)$ 和 $P_1(t-s, x, \cdot)$ 对几乎所有 s 相等这一事实. 记 $\Delta(t, x) = |P_1(t, x, B) - P(t, x, B)|$. 那末

$$\Delta(t, x) \leqslant \frac{1}{t}\int_0^t \int P(t-s, x, dy) \frac{1}{s}\int_0^s \int P(s-u, y, dz) \times \Delta(u, z) du ds.$$

经换元和扩大积分域, 得

$$\begin{aligned}\Delta(t, x) &\leqslant \frac{1}{t}\int_0^t \int_0^t \iint P(t-u-v, x, dy) \\ &\quad \times \frac{1}{u+v} P(v, y, dz) \Delta(u, z) du dv \\ &= \frac{1}{t}\int_0^t \iint \left\{ \int_0^t \frac{\Delta(u, z)}{u+v} P(t-u-v, x, dy)\, du \right\} \\ &\quad \times P(v, y, dz) dv = 0,\end{aligned}$$

因为大括号中的式子为 0. 引理得证.

预解式的基本性质 下面我们固定一齐次马尔科夫过程 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$: $P(t, x, B)$ 是它的可测转移概率, $\mathbf{T}_t$ 是伴随过程的半群, 而 $\mathbf{R}_\lambda$ 和 $R_\lambda(x, B)$ 分别为预解式和预解核. 现在我们研究预解式的基本性质.

把 $\mathbf{T}_t\mathbf{T}_\tau f = \mathbf{T}_{t+\tau} f$ 乘以 $e^{-\lambda t - \mu \tau}$, 然后从 0 到∞对 t 和 τ 求积分, 得

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_\lambda \mathbf{R}_\mu f &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t - \mu \tau} \mathbf{T}_{t+\tau} f dt d\tau \\ &= \int_0^\infty ds \mathbf{T}_s f \int_0^s e^{-\lambda(s-\tau) - \mu \tau} d\tau \\ &= \int_0^\infty \mathbf{T}_s f e^{-\lambda s} \frac{e^{(\lambda-\mu)s} - 1}{\lambda - \mu} ds \\ &= \frac{1}{\lambda - \mu} [\mathbf{R}_\mu f - \mathbf{R}_\lambda f].\end{aligned}$$

这样, 对所有 λ 和 μ ($\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, $\mathrm{Re}\,\mu > 0$) 下面的预解方程成立:

$$\mathbf{R}_\lambda \mathbf{R}_\mu = \frac{1}{\lambda - \mu} [\mathbf{R}_\mu - \mathbf{R}_\lambda] \tag{4}$$

利用预解方程可以证明下面的结果.

引理 2 当 $\mathrm{Re}\lambda > 0$ 时，$\mathbf{R}_\lambda f$ 是 λ 的解析函数，并且

$$\frac{d}{d\lambda}\mathbf{R}_\lambda f = -\mathbf{R}_\lambda^2 f$$

(以后用 $\mathbf{R}_\lambda^k f$ 表示算子 $\mathbf{R}_\lambda$ 的 k 次幂)。

系 1 对所有 λ ($\mathrm{Re}\lambda > 0$)，有

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}\mathbf{R}_\lambda f = (-1)^n n! R_\lambda^{n+1} f. \tag{5}$$

用数学归纳法可以证明

$$\frac{d}{d\lambda}(\mathbf{R}_\lambda^m f) = m\mathbf{R}_\lambda^{m-1}\frac{d}{d\lambda}\mathbf{R}_\lambda f,$$

而由此可得(5)式。(这里重要的是，$\mathbf{R}_\lambda$ 和 $\mathbf{R}_\mu$ 是可以交换的：$\mathbf{R}_\lambda\mathbf{R}_\mu = \mathbf{R}_\mu\mathbf{R}_\lambda$；这是预解方程(4)的推论)。

系 2 如果 $\mathrm{Re}\lambda = k > 0$，则当 $|\lambda - \lambda_0| < k$ 时，$\mathbf{R}_\lambda f$ 有下面的分解

$$\mathbf{R}_\lambda f = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^n \mathbf{R}_{\lambda_0}^{n+1} f. \tag{6}$$

这是解析函数 $\mathbf{R}_\lambda f$ 在 λ_0 点的 Taylor 公式。

系 3 对于所有 λ($\mathrm{Re}\lambda > 0$)，为确定 $R_\lambda(x, B)$ 只需知道它在某一点 λ_0($\mathrm{Re}\lambda_0 > 0$)的值。

事实上，这时可以根据(6)把 $\mathbf{R}_\lambda$ 开拓到整个半平面 $\mathrm{Re}\lambda > 0$。于是，马尔科夫过程的预解式是从 $\mathbf{B}$ 到 $\mathbf{B}^*$ 的一线性算子 $\mathbf{R}_\lambda$ 的族，满足下列条件：

a) 族中的算子对 $\mathrm{Re}\lambda > 0$ 有定义，而且当 $\mathrm{Re}\lambda > 0$，$\mathrm{Re}\mu > 0$ 时，它们满足预解方程(4)；

b) 如果 $\lambda > 0$，则对 $f \in \mathbf{B}_+$ 有 $\mathbf{R}_\lambda f \in \mathbf{B}_+$，$\mathbf{R}_\lambda 1 \leqslant 1/\lambda$；

c) $\|\mathbf{R}_\lambda\| \leqslant 1/\mathrm{Re}\lambda$。

性质 b) 显然。由不等式

$$|\mathbf{R}_\lambda f(x)| \leqslant \int_0^\infty |e^{-\lambda t}||\mathbf{T}_t f(x)|\,dt$$

$$\leqslant \|f\|\int_0^\infty |e^{-\lambda t}|\,dt$$

$$= \|f\| \int_0^\infty e^{-t\mathrm{Re}\lambda} dt$$

$$= \frac{\|f\|}{\mathrm{Re}\lambda}$$

得性质 c)．注意，对于不中断过程，当 $\lambda > 0$ 时有 $\|\mathbf{R}_\lambda\| = 1/\lambda$．

系 3 表明，对于所有 $\lambda(\mathrm{Re}\lambda > 0)$，为求 $\mathbf{R}_\lambda$，只需对某一点 λ_0 知道 $\mathbf{R}_{\lambda_0}$．下面我们找出已知算子 $\mathbf{R}$ 等于算子 $\mathbf{R}_{\lambda_0}$ 的条件，其中 $\mathbf{R}_\lambda$ 是满足条件 a)—c) 的算子族，而 $\lambda_0 > 0$．为此，我们指出 $\lambda > 0$ 时算子 $\mathbf{R}_\lambda$ 的一条性质．

引理 3 设 $Q(s)$ 是可表为

$$Q(s) = s\int_0^\infty e^{-t} q(st) dt \tag{7}$$

的任一多项式，其中 $q(t)$ 是在 $[0, \infty)$ 上的非负多项式．则算子 $Q(\mathbf{R}_\lambda)$ 把 $\mathbf{B}_+$ 变为 $\mathbf{B}_+$．

证．设

$$q(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k.$$

那末

$$Q(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^{k+1} \int_0^\infty e^{-t} t^k dt = \sum_{k=0}^n a_k k! s^{k+1}.$$

所以

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{R}_\lambda) f &= \sum_{k=0}^n a_k k! \mathbf{R}_\lambda^{k+1} f \\ &= \sum_{k=0}^n a_k (-1)^k \frac{d^k}{d\lambda^k} \mathbf{R}_\lambda f \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^k \mathbf{T}_t f dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} q(t) \mathbf{T}_t f dt. \end{aligned}$$

如果 $f \in \mathbf{B}_+$，则 $\mathbf{T}_t f \in \mathbf{B}_+$．从而最末一个积分属于 $\mathbf{B}_+$，因为当 $t > 0$ 时 $e^{-\lambda t} q(t) \geqslant 0$．引理得证．

引理 4 设算子 $\mathbf{R}$ 满足下列条件:

1) 它把 $\mathbf{B}$ 变为 $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_+$ 变为 $\mathbf{B}_+$, 而且对给定的 $\lambda_0 > 0$ 有 $\mathbf{R}1 = 1/\lambda_0$,

2) 对于可以表为 (7) 的任意多项式 $Q(s)$, 算子 $Q(\mathbf{R})$ 把 $\mathbf{B}_+$ 变为 $\mathbf{B}_+$[1] (在 (7) 式中 $q(t)$ 对 $t \geqslant 0$ 为非负的多项式).

那末, 存在一算子族 $\mathbf{R}_\lambda(\mathrm{Re}\lambda > 0)$ 满足条件 a)—c), 而且 $\mathbf{R}_{\lambda_0} = \mathbf{R}$.

证. 我们利用 (6) 式和解析开拓来建立算子族. 当 λ 为实数时, 需使每一步所得到的算子都满足条件 2).

对 $|\lambda - \lambda_0| < \lambda_0$, 令

$$\mathbf{R}_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k \mathbf{R}^{k+1}.$$

由 $\|\mathbf{R}^{k+1}\| \leqslant \lambda_0^{-k-1}$, $|(\lambda_0 - \lambda)/\lambda_0| < 1$ 可知此级数收敛. 那末 $\mathbf{R}_{\lambda_0} = \mathbf{R}$. 容易验证预解方程:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_\lambda \mathbf{R}_\mu &= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k \mathbf{R}^{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_0 - \mu)^j \mathbf{R}^{j+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda_0 - \mu)^i (\lambda_0 - \lambda)^{n-1-i} \mathbf{R}^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_0 - \lambda)^n - (\lambda_0 - \mu)^n}{\mu - \lambda} \mathbf{R}^{n+1} \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda} [\mathbf{R}_\lambda - \mathbf{R}_\mu].\end{aligned}$$

现在证, 当 $0 < \lambda < 2\lambda_0$ 时, $\mathbf{R}_\lambda$ 是正算子. 当 n 为偶数时, 多项式 $q_n(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k/k!$ 处处为正, 因为在绝对极小点 $q_n'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k/k! = 0$, 而 $q_n(t) = q_n'(t) + t^n/n! > 0$. 因此, 如果

$$Q_n(s) = s\int_0^{\infty} e^{-t} q_n((\lambda_0 - \lambda)st)\, dt$$

1) 把 $\mathbf{B}_+$ 变为 $\mathbf{B}_+$ 的算子简称做正的.

$$= \sum_{k=0}^{n} (\lambda_0 - \lambda)^k s^{k+1},$$

则由条件 2) 对偶数 n, $Q_n(\mathbf{R})$ 是正算子. 因为当 $n \to \infty$ 时,

$$\|\mathbf{R}_\lambda - Q_n(\mathbf{R})\| \leqslant \frac{1}{\lambda_0} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \right|^k \to 0,$$

故 $\mathbf{R}_\lambda$ 也是正算子. 因为对正算子 $\mathbf{R}_\lambda$ 有 $\|\mathbf{R}_\lambda\| = \|\mathbf{R}_\lambda \mathbf{1}\|$, 而

$$\mathbf{R}_\lambda \mathbf{1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)\left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^{k+1} = \frac{1}{\lambda},$$

所以 $\|\mathbf{R}_\lambda\| = 1/\lambda$, 而且对于 $\mathbf{R}_\lambda$ 条件 b) 成立. 现在我们证明, 当 $0 < \lambda < 2\lambda_0$ 时, $\mathbf{R}_\lambda$ 也满足条件 2). 如果 $Q(s)$ 可表为 (7) 式, 则

$$Q(\mathbf{R}_\lambda) = Q\left(\sum_{0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k \mathbf{R}^{k+1}\right) = G(\mathbf{R}),$$

其中 $G(s)$ 是一幂级数:

$$G(s) = Q\left(\sum_{0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k s^{k+1}\right)$$

$$= Q\left(\frac{s}{1 + s(\lambda - \lambda_0)}\right)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-t/s} e^{(\lambda_0 - \lambda)t} q(t) dt.$$

容易看出, 当 $s \leqslant 1/\lambda_0$ 时 $G(s)$ 有定义.

算子 $\widetilde{Q}_n(\mathbf{R})$ 是正的, 其中

$$\widetilde{Q}_n(s) = \int_0^{\infty} e^{-t/s} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(\lambda_0 - \lambda)^k t^k}{k!} q(t) dt.$$

我们证明当 $n \to \infty$ 时, $\widetilde{Q}_n(\mathbf{R})$ 收敛于 $Q(\mathbf{R}_\lambda)$:

$$Q(s) - \widetilde{Q}_n(s) = \sum_{k=2n+1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-t/s} \frac{(\lambda_0 - \lambda)^k t^k}{k!} \sum_{j=0}^{m} a_j t^j dt$$

$$= \sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{k=2n+1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-t/s} \frac{(\lambda_0 - \lambda)^k t^{k+j}}{k!} dt$$

$$= \sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{k=2n+1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k s^{k+j+1} \frac{(k+j)!}{k!}.$$

从而

$$Q(\mathbf{R}_\lambda) - \tilde{Q}_n(\mathbf{R}) = \sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{(\lambda_0 - \lambda)^k (k+1)!}{k!} \mathbf{R}^{k+j+1}.$$

于是，当 $n \to \infty$ 时，

$$\|Q(\mathbf{R}) - \tilde{Q}_n(\mathbf{R})\| \leqslant \frac{1}{\lambda_0} \sum_{j=0}^{m} \frac{|a_j|}{\lambda_0^j} \cdot \sum_{k=2n+1}^{\infty} \left| \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \right|^k \frac{(k+j)!}{k!} \to 0,$$

而 $Q(\mathbf{R}_\lambda)$ 是正算子.

这样，若选取任一 $\lambda_1(\lambda_0 < \lambda_1 < 2\lambda_0)$，我们可以把 $\mathbf{R}_\lambda$ 的定义开拓到圆 $|\lambda - \lambda_1| < \lambda_1$ 上；而且对任意 λ，这时 $\mathbf{R}_\lambda$ 满足条件 b)，同时也满足预解方程. 重复上述过程，我们可以把 $\mathbf{R}_\lambda$ 开拓到所有 $\lambda(\mathrm{Re}\lambda > 0)$，并且保留其性质不变. 最后只剩下验证性质 c).

对于实部 $\sigma > 0$ 的任意复数 $\sigma + i\tau$ 和充分大的 λ，有

$$\mathbf{R}_{\sigma+i\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \sigma - i\tau)^k \mathbf{R}_\lambda^{k+1}.$$

所以

$$\|\mathbf{R}_{\sigma+i\tau}\| \leqslant \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|\lambda - \sigma - i\tau|}{\lambda} \right)^k$$

$$= \frac{1}{\lambda - \sqrt{(\lambda - \sigma)^2 + \tau^2}}$$

$$= \frac{\lambda + \sqrt{(\lambda - \sigma)^2 + \tau^2}}{2\lambda\sigma - \sigma^2 - \tau^2}.$$

当 $\lambda \to +\infty$ 时取极限，得 $\|\mathbf{R}_{\sigma+i\tau}\| \leqslant 1/\sigma$.

引理证完.

半群的生成算子 我们仍然只考虑弱可测马尔科夫过程. 记

$$\mathbf{B}_0 = \{f: \lim_{t \downarrow 0} \|\mathbf{T}_t f - f\| = 0, f \in \mathbf{B}\}.$$

$\mathbf{B}_0$ 是 $\mathbf{B}$ 的线性子集．它是闭集，因为

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\|\mathbf{T}_t f - f\| \leqslant \overline{\lim_{t\downarrow 0}}\|\mathbf{T}_t\varphi - \varphi\| + 2\|\varphi - f\|.$$

如果 $\|f_n - f\| \to 0$，$f_n \in \mathbf{B}_0$，则 $f \in \mathbf{B}_0$． 因而 $\mathbf{B}_0$ 是 $\mathbf{B}$ 的线性子空间．算子 $\mathbf{T}_t$ 把 $\mathbf{B}_0$ 变为 $\mathbf{B}_0$：如果 $f\in\mathbf{B}_0$ 则

$$\lim_{h\downarrow 0}\|\mathbf{T}_h\mathbf{T}_t f - \mathbf{T}_t f\| \leqslant \lim_{h\downarrow 0}\|\mathbf{T}_t\|\|\mathbf{T}_h f - f\| = 0.$$

我们证明，对所有 $f\in\mathbf{B}$（当 $\lambda > 0$ 时）有 $\mathbf{R}_\lambda f\in\mathbf{B}_0$．事实上

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_h\int_0^\infty \mathbf{T}_s f(x)e^{-\lambda s}ds &= \int P(h,x,dy)\int_0^\infty \mathbf{T}_s f(x)e^{-\lambda s}ds\\ &= \int_0^\infty\left[\int P(h,x,dy)\mathbf{T}_s f(y)\right]e^{-\lambda s}ds\\ &= \int_0^\infty \mathbf{T}_{s+h}f(x)e^{-\lambda s}ds\end{aligned}$$

（因为 $\mathbf{T}_s f(y)$ 对变量 (s, y) 的全体可测，所以可以变更积分的顺序）．因此

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_h\mathbf{R}_\lambda f - \mathbf{R}_\lambda f &= \int_0^\infty \mathbf{T}_{s+h}fe^{-\lambda s}ds - \int_0^\infty \mathbf{T}_s fe^{-\lambda s}ds\\ &= e^{\lambda h}\int_h^\infty \mathbf{T}_s fe^{-\lambda s}ds - \int_0^\infty \mathbf{T}_s fe^{-\lambda s}ds\\ &= (e^{\lambda h} - 1)\int_0^\infty \mathbf{T}_s fe^{-\lambda s}ds - e^{\lambda h}\int_0^h \mathbf{T}_s fe^{-\lambda s}ds.\end{aligned}$$

这样就证明了关系式

$$\mathbf{T}_h\mathbf{R}_\lambda f - \mathbf{R}_\lambda f = (e^{\lambda h} - 1)\mathbf{R}_\lambda f - e^{\lambda h}\int_0^h \mathbf{T}_s fe^{-\lambda s}ds. \tag{8}$$

我们以后要用到它．由 (8) 式可以推出

$$\|\mathbf{T}_h\mathbf{R}_\lambda f - \mathbf{R}_\lambda f\| \leqslant (e^{\lambda h} - 1)\|\mathbf{R}_\lambda f\| + h\|f\|.$$

由此可见 $\mathbf{R}_\lambda f\in\mathbf{B}_0$．

设 $\mathbf{R}_\lambda(\mathbf{B})$ 是算子 $\mathbf{R}_\lambda$ 的值域．我们证明了 $\mathbf{R}_\lambda(\mathbf{B})\subset\mathbf{B}_0$．由预解方程可知，$\mathbf{R}_\lambda(\mathbf{B})$ 对所有 $\lambda > 0$ 相同．现在证明 $\mathbf{B}_0$ 等于 $\mathbf{R}_\lambda(\mathbf{B})$ 的闭包．为此我们证明下面简单的命题：

引理 5 对 $f\in\mathbf{B}_0$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\|\lambda\mathbf{R}_\lambda f - f\| = 0, \tag{9}$$

证.

$$\lambda \mathbf{R}_\lambda f - f = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}(\mathbf{T}_t f - f)dt = \int_0^\infty e^{-t}(\mathbf{T}_{t/\lambda} f - f)dt.$$

所以

$$\|\lambda \mathbf{R}_\lambda f - f\| \leqslant \int_0^\infty e^{-t}\|\mathbf{T}_{t/\lambda} f - f\| dt.$$

因为 $\|\mathbf{T}_{t/\lambda} f - f\| \leqslant 2\|f\|$，故当 $\lambda \to +\infty$ 时可以在积分号下取极限. 引理得证.

现在我们定义过程的强生成算子. 我们说函数 φ 属于过程的生成算子 $\mathbf{A}$ 的定义域 $\mathscr{D}_\mathbf{A}$，如在按范数收敛的意义下存在极限

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}(\mathbf{T}_h \varphi - \varphi) = \mathbf{A}\varphi;$$

这个极限决定生成算子 $\mathbf{A}$ 在函数 $\varphi \in \mathscr{D}_\mathbf{A}$ 上的值. 显然 $\mathscr{D}_\mathbf{A} \subset \mathbf{B}_0$. 下面我们证明，算子 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{B}_0$ 上决定 $\mathbf{T}_t$. 为此我们证明下面的定理.

定理 1 对于所有 $f \in \mathbf{B}_0$，

$$\mathbf{A}\mathbf{R}_\lambda \varphi = \lambda \mathbf{R}_\lambda f - f, \tag{10}$$

对所有 $\varphi \in \mathscr{D}_\mathbf{A}$

$$\mathbf{R}_\lambda \mathbf{A}\varphi = \lambda \mathbf{R}_\lambda \varphi - \varphi. \tag{11}$$

证. (8) 式除以 h，然后当 $h \downarrow 0$ 时取极限得 (10) 式（对 $f \in \mathbf{B}_0$，当 $h \downarrow 0$ 时，$\left\| \frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}\mathbf{T}_s f ds - f \right\| \to 0$）. 为证 (11) 注意到，对 $\varphi \in \mathscr{D}_\mathbf{A}$，当 $h \downarrow 0$ 时对 t 一致有

$$\left\| \frac{\mathbf{T}_{t+h}\varphi - \mathbf{T}_t\varphi}{h} - \mathbf{T}_t \mathbf{A}\varphi \right\| \leqslant \|\mathbf{T}_t\| \left\| \frac{\mathbf{T}_h\varphi - \varphi}{h} - \mathbf{A}\varphi \right\| \to 0.$$

所以

$$\mathbf{R}_\lambda \mathbf{A}\varphi = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{T}_t \mathbf{A}\varphi dt = \lim_{h \downarrow 0}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{\mathbf{T}_{t+h}\varphi - \mathbf{T}_t\varphi}{h} dt$$

$$= \lim_{h \downarrow 0}\frac{1}{h}\left(\mathbf{T}_h \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{T}_t\varphi dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{T}_t\varphi dt\right)$$

$$= \lim_{h \downarrow 0}\frac{\mathbf{T}_h\mathbf{R}_\lambda\varphi - \mathbf{R}_\lambda\varphi}{h}$$

$$= \lambda \mathbf{R}_\lambda \varphi - \varphi$$

(这也用到(8)式).

因此，算子 $\mathbf{R}_\lambda$ 把 $\mathbf{B}_0$ 映入 $\mathscr{D}_\mathbf{A}$. 该映射是一一对应的，因为由(10)有，当 $\mathbf{R}_\lambda f = 0$ 时 $f = 0$. 最后，由(11)可知，任意 $\varphi \in \mathscr{D}_\mathbf{A}$ 都可表为 $\varphi = \mathbf{R}_\lambda f$,其中 $f \in \mathbf{B}_0$ (f 取作 $\lambda\varphi - \mathbf{A}\varphi$ 即可).

系 1

$$\mathbf{R}_\lambda f = (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} f, \tag{12}$$

其中 $\mathbf{I}$ 是 $\mathbf{B}_0$ 到 $\mathbf{B}_0$ 的恒等变换算子.

由(10)和(11)得(12)式.

系 2 算子 $\mathbf{A}$ 唯一决定 $\mathbf{B}_0$ 上的半群 $\mathbf{T}_t$.

事实上,由(12)可见,对所有 $f \in \mathbf{B}_0$, 算子 $\mathbf{A}$ 决定

$$\mathbf{R}_\lambda f = \int_0^\infty \mathbf{T}_t f e^{-\lambda t} dt.$$

现在注意到，对 $f \in \mathbf{B}_0$, $\mathbf{T}_t f$ 对 t 连续:

$$\|\mathbf{T}_{t+h} f - \mathbf{T}_t f\| \leqslant \|\mathbf{T}_h f - f\|,$$

而连续函数唯一地决定于它自己的拉普拉斯变换(对固定的 x, 我们把 $\mathbf{T}_t f(x)$ 看成 t 的函数).

Hille-Yosida 定理 当然,希望能弄清满足条件 a)—c) 的算子族 $\mathbf{R}_\lambda$ 是某一马尔科夫过程预解式的条件. 但是在一般相空间中解决这个问题是困难的，这里只能给出保证半群 $\mathbf{T}_t$ 在 $\mathbf{B}_0$ 中存在的条件. 这个半群是否对应于某马尔科夫过程的问题尚未解决.

这样，我们假设有一把 $\mathbf{B}$ 变为 $\mathbf{B}^*$ 的算子族 $\mathbf{R}_\lambda(\mathrm{Re}\lambda > 0)$, 它满足条件 a)—c). 对实数 λ, 记 $\mathbf{B}_0$ 为算子 $\mathbf{R}_\lambda$ 的值域的闭包. 注意,这个值域不依赖于 λ, 因为由预解方程有

$$\mathbf{R}_{\lambda_2} = \mathbf{R}_{\lambda_1} + (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{R}_{\lambda_1}\mathbf{R}_{\lambda_2}. \tag{13}$$

由此可见,对复数 λ 算子 $\mathbf{R}_\lambda$ 的值域属于$\mathbf{B}_0^*$,其中 $\mathbf{B}_0^*$是形如 $f_1 + if_2$ ($f_1, f_2 \in \mathbf{B}_0$) 的函数的集合. 我们在 $\mathbf{B}_0$ 中建立一算子族 $\mathbf{T}_t$, 使它满足下列条件:

1) 对所有 $f \in \mathbf{B}_0 \cap \mathbf{B}_+$, $\|\mathbf{T}_t\| \leqslant 1$, 有 $\mathbf{T}_t f \geqslant 0$,

2) 当 $t\downarrow 0$ 时，$\|\mathbf{T}_t f - f\|\to 0$，

3) $\mathbf{T}_{t+s}=\mathbf{T}_t\mathbf{T}_s$，

4) $\mathbf{R}_\lambda f=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{T}_t f dt$，$f\in\mathbf{B}_0$.

记 $\mathbf{B}_2$ 是形如 $\mathbf{R}_\mu^2 f$，$\mu>0$，的函数的集合，其中 $f\in\mathbf{B}_0$. 利用(13)可以证明，$\mathbf{B}_2=\mathbf{R}_\lambda(\mathbf{B}_1)$，其中 $\mathbf{B}_1=\mathbf{R}_\lambda(\mathbf{B}_0)$，$\lambda>0$，而且 $\mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{B}_2$ 不依赖于 λ 的选择. 由

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\mathbf{R}_\lambda\mathbf{R}_\mu f=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{\lambda-\mu}[\mathbf{R}_\mu f-\mathbf{R}_\lambda f]=\mathbf{R}_\mu f$$

可知(因为 $\|\mathbf{R}_\lambda\|\leqslant 1/\lambda$)，对 $f\in\mathbf{B}_0$ 在依范数收敛意义下有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\mathbf{R}_\lambda f=f,$$

因为该式在闭集和 $\mathbf{R}_\lambda(\mathbf{B})$ 上成立. 所以对 $f\in\mathbf{B}_0$ 在依范数收敛意义下有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\mu\to\infty}\lambda\mu\mathbf{R}_\lambda\mathbf{R}_\mu f=f,$$

因此 $\mathbf{B}_2$ 在 $\mathbf{B}_0$ 中处处稠密.

设 $f\in\mathbf{B}_2$. 那末存在 $g\in\mathbf{B}_0$，使 $f=\mathbf{R}_1^2 g$. 由预解方程可得表现

$$\mathbf{R}_\lambda f=\frac{f}{\lambda-1}-\frac{\mathbf{R}_1 g}{(\lambda-1)^2}+\frac{1}{(\lambda-1)^2}\mathbf{R}_\lambda g. \tag{14}$$

所以存在对 t 连续的函数 $u_f(t,x)$，使

$$\mathbf{R}_\lambda f(x)=\int_0^\infty u_f(t,x)e^{-\lambda t}dt,$$

它决定于

$$u_f(t,x)=f(x)e^t-te^t\mathbf{R}_1 g(x)$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{(\lambda-1)^2}\mathbf{R}_\lambda g(x)e^{\lambda t}d\lambda, \tag{15}$$

其中 $\sigma>1$. 由 $\mathbf{R}_\lambda g$ 在直线 $\mathrm{Re}\lambda=\sigma$ 上的有界性可知，上述积分收敛，而且绝对收敛. 我们引进 $u_f(t,x)$ 的另一表现，它只用到 $\mathbf{R}_\lambda$ $(\lambda>0)$ 的值. 为此我们要用下面的引理.

引理 6 设 $h(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上的连续数值函数，对某个 $c>0$ 有 $|h(t)|=O(e^{ct})$，而 $\varphi(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}h(t)dt$。则

$$h(t)=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1}\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\varphi(\lambda)\Big|_{\lambda=n/t}. \qquad (16)$$

由下列关系式即可证明该式：

$$\begin{aligned}(-1)^n\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1}&\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\varphi(\lambda)\Big|_{\lambda=n/t}\\&=\frac{1}{n!}\int_0^\infty\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1}e^{-ns/t}s^nh(s)ds\\&=\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-u}u^nh\left(\frac{tu}{n}\right)du\\&=h(t)+\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-u}u^n\left[h\left(\frac{tu}{n}\right)-h(t)\right]du.\end{aligned}$$

由于 $u_f(t,x)$ 对 t 连续，而且 $u_f(t,x)=O(e^{\sigma t})$，故可以把 (16) 式用于 $u_f(t,x)$。因为

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}\mathbf{R}_\lambda f(x)=(-1)^nn!\mathbf{R}_\lambda^{n+1}f(x),$$

所以

$$u_f(t,x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{t}\mathbf{R}_{n/t}\right)^{n+1}f(x). \qquad (17)$$

由此可见，$\|u_f(t,\cdot)\|\leqslant\|f\|$。当 $f\in\mathbf{B}_0$ 时，函数 $u_f(t,x)$ 对 x 可测。所以可以设 $u_f(t,x)=\mathbf{T}_tf(x)$，其中 $\mathbf{T}_t$ 是从 $\mathbf{B}_2$ 到 $\mathbf{B}$ 的算子，$\|\mathbf{T}_t\|\leqslant1$。可以把算子 $\mathbf{T}_t$ 连续地开拓到 $\mathbf{B}_2$ 的闭包，即开拓到 $\mathbf{B}_0$。根据 (15) 式，容易断定，

$$\lim_{\mu\to\infty}\mu\mathbf{R}_\mu u_f(t,\cdot)=u_f(t,\cdot),\quad 即\ u_f(t,\cdot)\in\mathbf{B}_0.$$

因而，$\mathbf{T}_t$ 把 $\mathbf{B}_2$ 变为 $\mathbf{B}_0$；从而 $\mathbf{T}_t$ 把 $\mathbf{B}_0$ 变为 $\mathbf{B}_0$。由 (16) 式可见，对 $f\in\mathbf{B}_2\cap\mathbf{B}_+$ 有 $\mathbf{T}_tf\in\mathbf{B}_2\cap\mathbf{B}_+$，而由 (15) 式可知 $\mathbf{T}_t$ 和 $\mathbf{R}_\mu$ 可交换：$\mathbf{R}_\mu\mathbf{T}_tf=\mathbf{T}_t\mathbf{R}_\mu f$。取 $f\in\mathbf{B}_0\cap\mathbf{B}_+$，我们有（对 $\lambda>0$，$\mu>0$）

$$\mathbf{R}_\lambda\mathbf{R}_\mu f\in\mathbf{B}_2\cap\mathbf{B}_+,\quad \lambda_\mu\mathbf{T}_t\mathbf{R}_\lambda\mathbf{R}_\mu f\in\mathbf{B}_0\cap\mathbf{B}_+.$$

从而

$$\mathbf{T}_t f = \lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\mu\to\infty}\lambda\mu\mathbf{T}_t\mathbf{R}_\lambda\mathbf{R}_\mu f\in\mathbf{B}_0\cap\mathbf{B}_+.$$

其次，当 $f\in\mathbf{B}_0$ 时，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{T}_t f\,dt &= \lim_{\lambda,\mu\to\infty}\lambda\mu\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{R}_\lambda\mathbf{R}_\mu\mathbf{T}_t f\,dt\\ &= \lim_{\lambda,\mu\to\infty}\lambda\mu\mathbf{R}_s\mathbf{R}_\lambda\mathbf{R}_\mu f\\ &= \mathbf{R}_s f.\end{aligned}$$

这样，性质 1) 和 4) 得证．为证明性质 2)，我们注意到，对 $f\in\mathbf{B}_2$ 由 (15) 和 $\sigma>1$ 的任意性有

$$\|\mathbf{T}_t f - f\|\leqslant|e^t-1|\,\|f\|+te^t\|\mathbf{R}_1 g\|,$$

即当 $t\downarrow 0$ 时，$\|\mathbf{T}_t f - f\|\to 0$．如果 $f_n\in\mathbf{B}_2$，而且 $\|f-f_n\|\to 0$，则 $\|\mathbf{T}_t f_n-\mathbf{T}_t f\|\leqslant\|f_n-f\|$，从而 $\mathbf{T}_t f_n(x)$ 关于 t 和 x 一致收敛于 $\mathbf{T}_t f(x)$．由此可见，对所有 $f\in\mathbf{B}_0$

$$\|\mathbf{T}_t f - f\|\leqslant\|\mathbf{T}_t f_n - f_n\|+2\|f_n-f\|$$

趋于 0，而且 $\mathbf{T}_t f$ 依范数连续：

$$\|\mathbf{T}_{t+h}f-\mathbf{T}_t f\|\leqslant\|\mathbf{T}_h f - f\|.$$

为证明性质 3)，我们看函数 $\mathbf{T}_t\mathbf{T}_s f$ 和 $\mathbf{T}_{t+s}f$（它们都对 t 和 s 连续）的二重拉普拉斯变换：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^\infty\mathbf{T}_t\mathbf{T}_s f e^{-\lambda t-\mu s}\,dt\,ds &= \int_0^\infty\mathbf{T}_t\left[\int_0^\infty\mathbf{T}_s f e^{-\mu s}ds\right]e^{-\lambda t}dt\\ &= \mathbf{R}_\lambda\mathbf{R}_\mu f;\end{aligned}\tag{18}$$

等式 $\mathbf{T}_t\int_0^\infty\mathbf{T}_s f e^{-\mu s}ds=\int_0^\infty\mathbf{T}_t\mathbf{T}_s f e^{-\mu s}ds$ 是由下面的结果得出来的：

$$\lim_{h\downarrow 0}\left\|\int_0^\infty\mathbf{T}_s f e^{-\mu s}ds-h\sum_{k=1}^\infty\mathbf{T}_{kh}f e^{-\mu kh}\right\|=0.$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^\infty\mathbf{T}_{t+s}f e^{-\lambda t-\mu s}\,dt\,ds &= \int_0^\infty\mathbf{T}_u f\int_0^u e^{-\lambda t-\mu(u-t)}\,dt\,du\\ &= \frac{\mathbf{R}_\lambda f-\mathbf{R}_\mu f}{\mu-\lambda}.\end{aligned}\tag{19}$$

根据预解方程，(18) 和 (19) 两式的右侧相等，所以连续函数

$\mathbf{T}_t\mathbf{T}_s f$ 和 $\mathbf{T}_{t+s} f$ 也相等．性质 3) 得证．

上面所描述的根据预解式构造半群的方法适用于任何 Banach 空间．这一构造就是 Hille-Yosida 定理的内容．

设 $\mathbf{B}$ 是某一实 Banach 空间，$\mathbf{B}^*$ 是它的复扩张，即形如 $x + iy$ (其中 $x, y \in \mathbf{B}$) 的元素的集合．这时有

$$\|x + iy\| = \sup_{\|l\| \leqslant 1} \|l(x) + il(y)\|,$$

其中 l 是 $\mathbf{B}$ 上的线性泛函，而上确界 sup 是对所有范数不大于 1 的泛函来求的．

Hille-Yosida 定理 设在 $\mathbf{B}^*$ 上给定一算子族 $\mathbf{R}_\lambda(\mathrm{Re}\lambda > 0)$，它满足下列条件:

1) $\|\mathbf{R}_\lambda\| \leqslant 1/\mathrm{Re}\lambda$,

2) 当 $\lambda > 0$ 时，$\mathbf{R}_\lambda(\mathbf{B}) \subset \mathbf{B}$,

3) 预解方程成立：当 $\mathrm{Re}\lambda > 0, \mathrm{Re}\mu > 0$ 时，

$$\mathbf{R}_\lambda - \mathbf{R}_\mu = (\mu - \lambda)\mathbf{R}_\lambda\mathbf{R}_\mu,$$

4) 对某个 $\lambda > 0$, $\mathbf{R}_\lambda(\mathbf{B})$ 在 $\mathbf{B}$ 中处处稠密．

那末，在 $\mathbf{B}$ 上存在线性算子 $\mathbf{T}_t$ 的半群，满足下列条件:

(I) $\mathbf{T}_t(\mathbf{B}) \subset \mathbf{B}$,

(II) 对所有 $t > 0, \tau > 0$, $\mathbf{T}_t\mathbf{T}_\tau = \mathbf{T}_{t+\tau}$,

(III) 对所有 $x \in \mathbf{B}$，当 $t \downarrow 0$ 时，$\|\mathbf{T}_t x - x\| \to 0$,

(IV) $\|\mathbf{T}_t\| \leqslant 1$,

(V) 对所有 $x \in \mathbf{B}$, $\mathbf{R}_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{T}_t x\, dt$.

如果所有算子 $\mathbf{R}_\lambda$ 把某一圆锥 K 变为它自身，则算子 $\mathbf{T}_t$ 也具有同样的性质．

仿照在 $\mathbf{B}_0$ 上构造半群 $\mathbf{T}_t$ 的方法即可证明该定理．只是应注意到，可以把取值于 $\mathbf{B}$ 的函数的积分看成一般（或广义）黎曼积分，因为所有这些函数都连续．

§ 3. 随机连续过程

现在假设，$\mathscr{X}$ 是一拓扑空间，满足 Hausdorff 分离公理．σ 代

数 $\mathfrak{B}$ 取作 $\mathscr{X}$ 中 Borel 集的 σ 代数，即 $\mathscr{X}$ 的开集产生的 σ 代数。称相空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 中的齐次马尔科夫过程 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$ 为**随机连续的**，如果对任意 $x \in \mathscr{X}$ 和点 x 的任意邻域 U_x 有 $\lim\limits_{t\to 0} P(t, x, U_x) = 1$，其中 $P(t, x, B)$ 是过程的转移概率。满足上述条件的转移概率 $P(t, x, B)$ 也称做**随机连续的**。

记 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 是定义在 $\mathscr{X}$ 上的有界连续函数 $f(x)$ 的集合，$\|f\| = \sup\limits_x |f(x)|$ 是它的范数。$\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 是 Banach 空间。我们指出随机连续过程的如下一些性质。

I. 对所有 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 和 $x \in \mathscr{X}$ 有

$$\lim_{t \downarrow 0} \mathbf{T}_t f(x) = f(x).$$

事实上，选择点 x 的一邻域 U，使当 $y \in U$ 时 $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$。那末

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{t\downarrow 0}} \left| \int P(t, x, dy) f(y) - f(x) \right| \\
&\quad = \overline{\lim_{t\downarrow 0}} \left| \int_U P(t, x, dy)[f(y) - f(x)] \right. \\
&\qquad + \int_{\mathscr{X}\setminus U} P(t, x, dy) f(y) \\
&\qquad \left. + P(t, x, \mathscr{X}\setminus U) f(x) \right| \\
&\quad \leqslant \varepsilon,
\end{aligned}$$

因为 $P(t, x, \mathscr{X}\setminus U) \to 0$。

II. 对所有 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 和每个 x，函数 $\mathbf{T}_t f(x)$ 对 t 右连续。这由下式可以推出：

$$\begin{aligned}
\lim_{h\downarrow 0} \mathbf{T}_{t+h} f(x) &= \lim_{h\downarrow 0} \int P(t, x, dy) \mathbf{T}_h f(y) \\
&= \int P(t, x, dy) \lim_{h\downarrow 0} \mathbf{T}_h f(y) \\
&= \mathbf{T}_t f(x),
\end{aligned}$$

这里用到关于在积分号下取极限的 Lebesgue 定理和性质 I.

III. 对所有 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$，预解式 $\mathbf{R}_\lambda$ 满足

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\mathbf{R}_\lambda f(x)=f(x)\quad(\text{对所有 } x\in\mathscr{X}).$$

为证明这一点，我们考虑

$$\lambda\mathbf{R}_\lambda f(x)=\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{T}_t f(x)\,dt$$
$$=\int_0^\infty e^{-u}\mathbf{T}_{u/\lambda}f(x)\,du,$$

并注意到，当 $\lambda\to+\infty$ 时有 $\mathbf{T}_{u/\lambda}f(x)\to f(x)$，而且 $|\mathbf{T}_{u/\lambda}f(x)|\leqslant\|f\|$.

IV. 当 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 时，对所有 $x\in\mathscr{X}$，用完全相同的方法可以由

$$\lambda^n\mathbf{R}_\lambda^n f(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\mathbf{T}_{t/\lambda}f(x)\,dt$$

推出

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^n\mathbf{R}_\lambda^n f(x)=f(x).$$

由于当 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 时，$\mathbf{T}_t f(x)$ 对 t 右连续，故它唯一地决定于自己的拉普拉斯变换. 当 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 时，虽然 $\mathbf{T}_t f$ 也具有一定的好性质，然而对 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$，$\mathbf{T}_t f$ 一般不能在 $\mathbf{B}$ 上决定 $\mathbf{T}_t$，因而它也就不能决定转移概率.

我们考虑更窄的过程类. 设 $\mathfrak{B}'$ 是使 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 中的所有函数可测的最小 σ 代数. $\mathfrak{B}'$ 叫做 Baire 集的 σ 代数. 显然 $\mathfrak{B}'\subset\mathfrak{B}$. 称 $P(t,x,B)$ 为 Baire 转移概率，如果对所有 $B\in\mathfrak{B}'$，$P(t,x,B)$ 是 Baire 函数，即 $P(t,x,B)$ 为 $\mathfrak{B}'$ 可测. 那末，可以在相空间 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}'\}$ 考虑一新的马尔科夫过程 $\{\mathscr{F},\mathscr{N}',\mathbf{P}'_x\}$: 轨道空间 $\mathscr{F}$ 和以前相同；$\mathscr{N}'$ 是 $\mathscr{N}$ 的子 σ 代数，它是由形如 $\{x(\cdot): x(t)\in B\}$，$B\in\mathfrak{B}'$，的集合产生的；$\mathbf{P}'_x$ 是测度 $\mathbf{P}_x$ 在 $\mathscr{N}'$ 上的收缩. 我们称这样的过程为 Baire 过程. 因为任何 Baire 函数可经有限或可数多次极限运算由 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 得到，所以为求 Baire 过程的转移概率，只需知道预解式 $\mathbf{R}_\lambda$ 在 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 上的值.

度量空间中的过程 在度量空间中，Borel 集的 σ 代数和 Baire 集的 σ 代数相同. 所以，为求过程的转移概率，这里只需知道预解式 $\mathbf{R}_\lambda$ 在 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 上的值. 此外，这时伴随过程的半群 $\mathbf{T}_t$ 完全决定于

它在 $\mathbf{B}_0$ 上的值（$\mathbf{B}_0$ 的定义见上一节）．事实上，在 §2 中已说明，$\mathbf{B}_0$ 和预解式在 $\mathbf{B}$ 上的值域的闭包相同．因为由性质III，$\mathbf{R}_\lambda(\mathscr{C}_{\mathscr{X}})$ 在有界收敛意义下的闭包包含 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$，故 $\mathbf{B}_0$ 在有界收敛意义下的闭包包含 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$．从而它包含一切有界 Baire 函数的集合，而后者与 $\mathbf{B}$ 重合．记 $\mathbf{B}_1$ 为 $\bigcup\limits_{\lambda>0}\mathbf{R}_\lambda(\mathscr{C}_{\mathscr{X}})$ 关于一致度量的闭包．前面已指出 $\mathbf{B}_1\subset\mathbf{B}_0$．此外，$\mathbf{B}_1$ 关于有界收敛的闭包等于 $\mathbf{B}$．其次，若 $f\in\mathbf{B}_1$，则 $\mathbf{T}_tf\in\mathbf{B}_1$．事实上，由 $f\in\bigcup\limits_{\lambda}\mathbf{R}_\lambda(\mathscr{C}_{\mathscr{X}})$ 可见，对所有 $\mu>0$，

$\mathbf{R}_\mu\mathbf{R}_\lambda f\in\bigcup\limits_{\lambda}\mathbf{R}_\lambda(\mathscr{C}_{\mathscr{X}})$，因为 $\mathbf{R}_\mu\mathbf{R}_\lambda f=\dfrac{1}{\lambda-\mu}(\mathbf{R}_\mu f-\mathbf{R}_\lambda f)$．所以算子 $\mathbf{R}_\lambda$ 把 $\mathbf{B}_1$ 变为 $\mathbf{B}_1$． 对 $f\in\mathbf{B}_1$， 当 $|t-s|\to0$ 时，$\|\mathbf{T}_tf-\mathbf{T}_sf\|\to0$．另外

$$\begin{aligned}&\left\|\mathbf{T}_tf-\left(\frac{n}{t}\mathbf{R}_{n/t}\right)^{n+1}f\right\|\\&\leqslant\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{t}\right)\int_0^\infty e^{-sn/t}\left(\frac{ns}{t}\right)^n\|\mathbf{T}_tf-\mathbf{T}_sf\|ds\\&\leqslant\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{t}\right)\int_{|s-t|\leqslant\varepsilon}e^{-sn/t}\left(\frac{ns}{t}\right)^n\|\mathbf{T}_tf-\mathbf{T}_sf\|ds\\&\quad+\frac{2\|f\|}{n!}\left(\frac{n}{t}\right)\int_{\substack{|s-t|>\varepsilon\\s>0}}e^{-sn/t}\left(\frac{ns}{t}\right)^n ds.\end{aligned}$$

对任意 $\varepsilon>0$ 当 $n\to\infty$ 时，第二项趋于 0；而第一项不大于 $\sup\limits_{|t-s|\leqslant\varepsilon}\|\mathbf{T}_tf-\mathbf{T}_sf\|$，而后者当 $\varepsilon\to0$ 时也趋于 0．因而

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\mathbf{T}_tf-\left(\frac{n}{t}\mathbf{R}_{n/t}\right)^{n+1}f\right\|=0.$$

因为当 $f\in\mathbf{B}_1$ 时 $\left(\dfrac{n}{t}\mathbf{R}_{n/t}\right)^{n+1}f\in\mathbf{B}_1$，所以 $\mathbf{T}_tf\in\mathbf{B}_1$.

这样，转移概率（或伴随半群）完全决定于半群在集 $\mathbf{B}_1$ 上的值，$\mathbf{B}_1$ 满足下列三个条件：

a）它对于诸算子 $\mathbf{T}_t$ 不变，

b）半群在它上面强连续：当 $t\downarrow0$ 时，$\|\mathbf{T}_tf-f\|\to0$，

c）它的有界收敛闭包包含 $\mathbf{B}$.

显然，$\mathbf{B}_0$ 也具备性质 a)—c)．但是最好能找到 $\mathbf{B}$ 中函数的一个集合，使它具备性质 a)—c)，而包含尽可能少的函数(自然要找对于诸算子 $\mathbf{T}_t$ 不变的一个“最小”集合，使这些算子在它上面的值完全决定半群)．集合 $\mathbf{B}_1$ 一般比 $\mathbf{B}_0$ 要窄．我们现在证明，对于可分空间可以构造一可分集 $\mathbf{B}_2$，使它满足条件 a)—c)．为此取 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 中函数的一个子集 $\mathscr{C}^1$，使它的有界收敛闭包包含 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ (因而也包含 $\mathbf{B}$)．记 $\mathbf{B}_2$ 为 $\bigcup\limits_{\lambda}\mathbf{R}_\lambda(\mathscr{C}^1)$ 的一致收敛闭包． 因为 $\mathbf{B}_2\subset\mathbf{B}_0$，故条件 b) 成立；而由于 $\mathbf{B}_2$ 的有界收敛闭包包含 $\mathscr{C}^1$，所以条件 c) 成立．和 $\mathbf{B}_1$ 的情形完全相同可以证明条件 a) 成立．因为可列集

$$\bigcup_{k,n}\mathbf{R}_{k/n}(D)$$

(其中 D 是在 $\mathscr{C}^1$ 中处处稠密的可列集)在 $\mathbf{B}_2$ 中稠密，所以 $\mathbf{B}_2$ 可分．

如果给出一邻域组 $U_{x_0}=\{x:\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\}$，其中 $\varepsilon>0$，$f\in\mathbf{B}_i(i=1,2)$，则可以利用函数集 $\mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{B}_2$ 在 $\mathscr{X}$ 中引进一新的拓扑．在引进这一新拓扑之后，$\mathbf{B}_i$ 中的所有函数都成为连续的．若取 $i=2$，则还可以在 $\mathscr{X}$ 中引进新的度量，使 $\mathbf{B}_2$ 中所有函数连续．为此我们选取一函数序列 $\{f_i\}$，$f_i\in\mathbf{B}_2$，$\|f_i\|\leqslant 1$，使它的线性生成系在 $\mathbf{B}_2$ 中稠密．令

$$r_2(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k|f_k(x)-f_k(y)|,$$

其中 $c_k>0$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k<\infty$.

注意，由 $r_2(x,y)=0$ 可见，对一切 $f\in\mathbf{B}_2$ 有 $f(x)=f(y)$，而由条件 c) 对一切 $f\in\mathbf{B}$ 有 $f(x)=f(y)$，但这时 $x=y$.

于是，对可分度量空间中的随机连续过程，总可以找到一个新度量，使存在一个连续函数的集合满足条件 a)—c)．一般，$\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 未必等于关于度量 r_2 连续的所有函数的集合．因此，不能断定，关

于新度量连续函数的集合对于半群 $\mathbf{T}_t$ 不变. 满足这一条件的过程有特殊的意义.

Feller 过程 拓扑空间 $\mathscr{X}$ 中的过程 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$ 称为 Feller 的(又称它具有 Feller 性), 如果对所有 $t>0$, $\mathbf{T}_t(\mathscr{C}_{\mathscr{X}})\subset\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$. 这时, 称转移概率为 Feller 的. 我们感兴趣的主要是, $\mathscr{X}$ 为可分度量空间, 而过程随机连续的情形. 因为对于 Feller 过程 $\mathbf{R}_\lambda(\mathscr{C}_{\mathscr{X}})\subset\mathscr{C}_{\mathscr{X}}\ (\lambda>0)$, 所以上一节中建立的集合 $\mathbf{B}_1$ (以及 $\mathbf{B}_2$) 是空间 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 的子集. 随机连续 Feller 过程的预解式满足下列条件:

1) 对所有 $\lambda>0$, $\mathbf{R}_\lambda(\mathscr{C}_{\mathscr{X}})\subset\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, 而对所有 λ, $\mathrm{Re}\lambda>0$, $\mathbf{R}_\lambda(\mathscr{C}_{\mathscr{X}})\subset\mathscr{C}^*_{\mathscr{X}}$, 其中 $\mathscr{C}^*_{\mathscr{X}}$ 是 $\mathscr{X}$ 上的复值连续函数的空间, $\|f\|=\sup\limits_x|f(x)|$ 是它的范数; 这时 $\|\mathbf{R}_\lambda\|\leqslant 1/\mathrm{Re}\lambda$;

2) $\mathbf{R}_\lambda-\mathbf{R}_\mu=(\mu-\lambda)\mathbf{R}_\lambda\mathbf{R}_\mu$;

3) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\mathbf{R}_\lambda f(x)=f(x)$, $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$;

4) 对所有 λ, 算子 $\mathbf{R}_\lambda$ 具有如下形式:

$$\mathbf{R}_\lambda f(x)=\int R_\lambda(x, dy)f(y), \tag{1}$$

其中 $R_\lambda(x,\cdot)$ 是完全可加集函数, 对 $\lambda>0$ 它非负.

产生一个问题, 条件 1)—4) 是否足以保证以 $\mathbf{R}_\lambda$ 为预解式的马尔科夫过程的存在?

下面的例子表明这并非如此.

例. 设 $\mathscr{X}$ 是实直线. 对 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 设

$$\mathbf{T}_t f(x)=f(\mathrm{tg}(t+\mathrm{arc\,tg}\,x)).$$

对几乎所有 t 和每个 x, 函数 $\mathbf{T}_t f(x)$ 有定义并且连续, 而 $|\mathbf{T}_t f|\leqslant\|f\|$. 容易验证, 对几乎所有 $t, \tau>0$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_t\mathbf{T}_\tau f(x)&=\mathbf{T}_\tau f(\mathrm{tg}(t+\mathrm{arc\,tg}\,x))\\&=f(\mathrm{tg}(t+\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{tg}(\tau+\mathrm{arc\,tg}\,x)))\\&=f(\mathrm{tg}(t+\tau+\mathrm{arc\,tg}\,x))\\&=\mathbf{T}_{t+\tau}f(x).\end{aligned}\tag{2}$$

对 $\mathrm{Re}\lambda > 0$ 我们定义一函数

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_\lambda f(x) &= \int_0^\infty \mathbf{T}_t f(x) e^{-\lambda t} dt \\ &= \int_0^\infty f(\operatorname{tg}(t + \operatorname{arctg} x)) e^{-\lambda t} dt \\ &= e^{\lambda \operatorname{arctg} x} \left[\int_x^\infty f(y) e^{-\lambda \operatorname{arctg} y} \frac{dy}{1+y^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1-e^{-\lambda \pi}} \int_{-\infty}^\infty f(y) e^{-\lambda \operatorname{arctg} y} \frac{dy}{1+y^2} \right].\end{aligned}$$

显然 $\mathbf{R}_\lambda$ 满足条件 1)，3) 和 4)；这时

$$R_\lambda(x, B) =$$

$$\int_B e^{\lambda \operatorname{arctg} x - \lambda \operatorname{arctg}} \frac{1}{1+y^2}(1 + \chi_0(x+y))dy,$$

其中当 $z > 0$ 时 $\chi_0(z) = 1$，当 $z < 0$ 时 $\chi_0(z) = 0$. 将 (2) 式乘以 $e^{-\lambda t - \mu \tau}$，然后从 0 到∞对 t 和 τ 积分，就可得出预解方程（见 §2）. 但这里以 $\mathbf{R}_\lambda$ 为预解式的转移概率不存在.

然而，若 $\mathscr{X}$ 是完备度量空间，由 (1) 式及 $R_\lambda(x, B)$ 给出的算子 $\mathbf{R}_\lambda$ 满足条件 1)—4)，则可以构造一《减弱的》马尔科夫过程. 这从构造的本身就可以看出它的含义.

利用 §2 的结果，我们可以在空间 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 的线性子空间 $\mathbf{B}_1$ 上构造一半群 $\mathbf{T}_t$. 换句话说，对所有 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 和所有 $\mu > 0$，$\mathbf{T}_t\mathbf{R}_\mu f$ 有定义.

对所有 $f \in \mathbf{B}_1$，设

$$G(t, f) = \int_0^t \mathbf{T}_s f ds.$$

那末

$$\mathbf{R}_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda s} \mathbf{T}_s f ds = \int_0^\infty e^{-\lambda t} d_t G(t, f).$$

因为

$$\lim_{\mu \to \infty} \mathbf{R}_\lambda \mu \mathbf{R}_\mu f = \mathbf{R}_\lambda f,$$

故存在

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda t}d_t G(t,\ \mu\mathbf{R}_\mu f).$$

因而对所有 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}\cap\mathbf{B}_+$,当 $\mu\to\infty$ 时,(对固定的 x 关于 t)非减函数的序列 $G(t,\ \mu\mathbf{R}_\mu f)$ 弱收敛于某一非减函数 $G(t,\ f)$. 这就是说,对所有 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 存在极限

$$G(t,\ f)=\lim_{\mu\to\infty}G(t,\ \mu\mathbf{R}_\mu f).$$

由不等式

$$\begin{aligned}&\|G(t_2,\ \mu\mathbf{R}_\mu f)-G(t_1,\ \mu\mathbf{R}_\mu f)\|\\&\leqslant\left\|\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{T}_s\mu\mathbf{R}_\mu f ds\right\|\\&\leqslant|t_2-t_1|\cdot\|f\|\end{aligned}$$

可见,对所有 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}, x\in\mathscr{X}$, 函数 $G(t,\ f)$ 连续,而且几乎处处对 t 可微.

此外,对一切 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 有

$$\mathbf{R}_\lambda f=\int_0^\infty e^{-\lambda t}d_t G(t,\ f).$$

因为对每个 x, $G(t,\ f)$ 是 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$上的非负线性泛函,满足条件

$$|G(t,\ f)|\leqslant e^{\lambda t}\int|f(y)|\mathbf{R}_\lambda(x,\ dy),$$

故

$$G(t,\ f)=\int f(y)Q(t,\ x,\ dy),$$

其中 $Q(t,\ x,\ \cdot\ )$ 是 $\mathfrak{B}$ 上的有穷测度(见第一卷,第五章 §1). 显然当 $t_1<t_2$ 时, $Q(t_1,\ x,\ B)\leqslant Q(t_2,\ x,\ B)$. 对给定的 x, 选取一紧致序列 $\{K_n\}$, 使 $Q(T,\ x,\ \mathscr{X}\setminus K_n)\leqslant 2^{-n}$. 其次,设序列 $h_m\downarrow 0$. 记

$$\begin{aligned}\Lambda(n,\ \varepsilon)=\Big\{t:\ &t\in[0,\ T],\\&\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{h_m}[Q(t+h_m,x,\ \mathscr{X}\setminus K_n)\\&-Q(t,\ x,\ \mathscr{X}\setminus K_n)]>\varepsilon\Big\}.\end{aligned}$$

因为 $Q(t,\ x,\ \mathscr{X}\setminus K_n)$ 对 t 几乎处处可微,故

$$\Lambda(n,\varepsilon)\subset\{t:\ t\leqslant T,\ Q'_t(t,x,\mathscr{X}\setminus K_n)>\varepsilon\}$$
$$\cup\{t:\ Q'_t\text{不存在}\}.$$

因此，若记 $\mathrm{mes}\Lambda$ 为集 Λ 的 Lebesgue 测度，则

$$\mathrm{mes}\Lambda(n,\varepsilon)\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T Q'_t(t,x,\mathscr{X}\setminus K_n)dt\leqslant\frac{1}{\varepsilon}2^{-n}.$$

如果 $t\in[0,T]\setminus\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\Lambda\left(n,\frac{1}{m}\right)$，则从某个 m 起对所有充分大的 n 有

$$\frac{1}{h_m}[Q(t+h_m,x,\mathscr{X}\setminus K_n)-Q(t,x,\mathscr{X}\setminus K_n)]\leqslant\frac{1}{n}.$$

从而，对这些 t，测度族

$$\frac{1}{h_m}[Q(t+h_m,x,\cdot)-Q(t,x,\cdot)] \tag{3}$$

是紧的. 而因为

$$\mathrm{mes}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\Lambda\left(n,\frac{1}{m}\right)=0,$$

故测度族 (3) 对几乎所有 $t\in[0,T]$ 是紧的；而由 T 的任意性可知，它对所有 t 紧. 因为对 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, $G(t,f)$ 几乎处处对 t 可微，故对任意 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 和几乎所有 t 存在

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{h_m}\int f(y)[Q(t+h_m,x,dy)-Q(t,x,dy)]$$
$$=\frac{d}{dt}G(t,f).$$

取函数的某一可列集 $\mathscr{C}^0\subset\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$，使 $\int fd\mu$, $f\in\mathscr{C}^0$ 的值完全决定测度 μ. 我们断定，对几乎所有 t，测度序列 (3) 收敛于某一测度 $P(t,x,B)$，并且对所有 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 和几乎所有 t 有

$$\int P(t,x,dy)f(y)=\frac{d}{dt}G(t,f).$$

此外

$$\mathbf{R}_\lambda f(x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int P(t,x,dy)f(y)dt. \tag{4}$$

函数 $P(t, x, B)$ 是集 B 的测度，它对每个 x 和几乎所有 t 有定义(自然,作为 t 的定义域不依赖 x). 上面的例子说明，在一般情形下不会得出更多的结果。

我们现在假设 $\mathscr{X}$ 是一紧致. 那末测度族 $P(t, x, B)$ 是一紧集. 对于 $f \in \mathbf{B}_1$ 和每个 x，由 $\mathbf{T}_t f$ 对 t 的连续性可知，可以把测度 $P(t, x, B)$ 连续地开拓到所有 t. 从而，这时转移概率和函数 $\mathbf{R}_\lambda$ 相对应.

我们可以这样来利用上面的结果. 假设可以构造空间 $\mathscr{X}$ 的一紧扩张 $\hat{\mathscr{X}}$,使得可以连续地把 $\mathbf{B}_1$ 中的所有函数开拓到 $\hat{\mathscr{X}}$ 上. 这时,可以在 $\hat{\mathscr{X}}$ 上构造一转移概率 $\hat{P}(t, x, B)$, 对所有 $x \in \mathscr{X}$ 和几乎所有 t,使 $\hat{P}(t, x, \hat{\mathscr{X}} \setminus \mathscr{X}) = 0$ ($\mathscr{X}$ 是 $\hat{\mathscr{X}}$ 中的开集). 这时，可以在空间 $\mathscr{X}$ 的某一扩张上构造一过程，使它的轨道对几乎所有 t 都在 $\mathscr{X}$ 之中。

我们还要指出一个条件，它连同条件 1)—4) 构成使和 $\mathbf{R}_\lambda$ 相对应的转移概率存在的必要和充分条件. 这个条件的不足之处，就是难以检验它是否成立。

定理 考虑满足下列条件的转移概率 $P(t, x, B)$: 对 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \mathbf{T}_t f(x)\, dt = f(x);$$

函数

$$R_\lambda(x, B) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P(t, x, B) dt \tag{5}$$

以及由 (1) 式通过 $R_\lambda(x, B)$ 所确定的算子 $\mathbf{R}_\lambda$ 满足条件 1)—4).

那末，满足上述条件的转移概率 $P(t, x, B)$ 存在的必要和充分条件是:

5) 对每个 t, 由

$$\int \pi_n(t, x, dy) f(y) = \left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} \mathbf{R}_{n/t}^{n+1} f(x) \tag{6}$$

所决定的测度 $\pi_n(t, x, B)$ 的集合是紧集。

事实上,在所作的假设条件下,有

$$\lim_{n\to\infty}\int \pi_n(t, x, dy)f(y) = \mathbf{T}_t f(x). \tag{7}$$

由此得条件 5) 的必要性.

如果条件 5) 成立,则利用 (7) 对所有 $f\in \mathbf{B}_1$ 成立以及测度 π_n 的紧性,即可断定满足 (5) 的转移概率 $P(t, x, B)$ 存在.

§4. 局部紧空间的 Feller 过程

在这一节我们要研究随机连续的齐次 Feller 马尔科夫过程. 它们的相空间 $\mathscr{X}$ 是可分的局部紧空间. 首先看 $\mathscr{X}$ 是紧致的情形.

紧空间上的 Feller 过程. 设 $\mathscr{X}$ 是紧致集. $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$ 是 $\mathscr{X}$ 中一(不中断)齐次马尔科夫过程,它随机连续并且具有 Feller 性. 记 $P(t, x, B)$ 为过程的转移概率,而 $\mathbf{T}_t f$ 是伴随过程的半群. 我们只在 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 上考虑半群. 现在我们来证明,对所有 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$

$$\lim_{t\downarrow 0}\|\mathbf{T}_t f - f\| = 0. \tag{1}$$

使 (1) 式成立的 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 中函数 f 的集合,是 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 的子空间,记作 $\mathscr{L}$. 由 §2(8) 式可见, $\mathbf{R}_\lambda(\mathscr{C}_{\mathscr{X}})\subset\mathscr{L}$. 假设 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{C}$ 不相同. 那末在 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 上存在一线性泛函 $l(f)$, 使对所有 $f\in\mathscr{L}$ 有 $l(f) = 0$, 而且 $\|l\| = 1$. 但是 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 上的任意泛函都具有如下形式:

$$l(f) = \int f(y)l(dy),$$

其中 $l(B)$ 是 $\mathfrak{B}$ 上的有穷完全可加函数, 而 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{X}$ 中 Borel 集的 σ 代数. 因为对所有 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, $\lambda\mathbf{R}_\lambda f\in\mathscr{L}$, 故

$$0 = \int \lambda\mathbf{R}_\lambda f(y)l(dy).$$

因为当 $\lambda\to\infty$ 时, $\lambda\mathbf{R}_\lambda f$ 有界收敛于 f, 故根据在积分号下取极限的 Lebesgue 定理,对所有 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 有

$$\int f(y)l(dy) = l(f) = 0,$$

而这和条件 $\|l\| = 1$ 矛盾. 这说明 $\mathscr{L} = \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, 于是 (1) 得证.

下面我们来描述紧空间上 Feller 过程的生成算子.

定理 1 设 $\mathscr{D}$ 是在 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 中处处稠密的一个集合. 定义在 $\mathscr{D}$ 上的算子 $\mathbf{A}$, 是紧空间 $\mathscr{X}$ 上一随机连续 Feller 过程的生成算子的必要和充分条件是:

1) 对某个 $\lambda > 0$, 算子 $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ 把 $\mathscr{D}$ 变化为 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ ($\mathbf{I}$ 是恒等变换算子),

2) 对于算子 $\mathbf{A}$, 满足极大值原理: 即如果 $f \in \mathscr{D}$, $f(x_0) \geq f(x)$, 则 $\mathbf{A}f(x_0) \leq 0$.

证. 由 $\mathscr{D} = \mathbf{R}_\lambda(\mathscr{C}_{\mathscr{X}})$ 可见条件 1) 必要. 条件 2) 也成立, 因为

$$\mathbf{A}f(x_0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int P(t, x_0, dy)[f(y) - f(x_0)],$$

$$\int P(t, x_0, dy)[f(y) - f(x_0)] \leq 0.$$

下面证充分性. 首先证明, 当 $\mathrm{Re}\lambda > 0$ 时, 算子 $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ 可逆. 分别以 $\mathscr{D}^*$ 和 $\mathscr{C}^*_{\mathscr{X}}$ 表示形如 $g = g_1 + ig_2$ 的函数的集合, 其中 $g_1, g_2 \in \mathscr{D}$ 或相应地 $g_1, g_2 \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$. 在 $\mathscr{C}^*_{\mathscr{X}}$ 中引进范数 $\|g\| = \sup_x |g(x)|$.

设 $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})g = 0$ $(g \in \mathscr{D}^*)$. 那末 $\mathbf{A}g = \lambda g$. 假设 $\sup_x |g(x)| = |g(x_0)|$. 把 g 乘以常数, 可以使 $\|g\| = g(x_0)$. 那末, 显然 $g_2(x_0) = 0$, $g_1(x_0) \geq g_1(x)$ $(g = g_1 + ig_2)$. 因为

$$\mathbf{A}g_1(x_0) = \sigma g_1(x_0) - \tau g_2(x_0) = \sigma g_1(x_0),$$

其中 $\sigma + i\tau = \lambda$, $\sigma > 0$, 故由条件 2 有

$$g_1(x_0) = \frac{1}{\sigma} \mathbf{A}g_1(x_0) \leq 0.$$

因此 $\|g\| = g_1(x_0) \leq 0$, 即 $\|g\| = 0$. 算子 $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ 的可逆性得证, 记

$$\mathbf{R}_\lambda = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.$$

现在证明,算子 $\mathbf{R}_\lambda$ 满足条件

$$\|\mathbf{R}_\lambda\| \leqslant \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda} \qquad (\mathrm{Re}\lambda > 0). \tag{2}$$

设 $\mathbf{R}_\lambda f = g$. 那末 $\lambda g - \mathbf{A}g = f$. 如果 $\|g\| = |g(x_0)|$, 并且令 $\tilde{g} = ge^{i\arg g(x_0)}$, 则有

$$\lambda\tilde{g} - \mathbf{A}\tilde{g} = \tilde{f},$$

其中 $\tilde{f} = fe^{-i\arg g(x_0)}$. 这时 $\|g\| = \tilde{g}(x_0)$, $\|f\| = \|\tilde{f}\|$. 记 $\lambda = \sigma + i\tau$, $\tilde{g} = \tilde{g}_1 + i\tilde{g}_2$, $\tilde{f} = \tilde{f}_1 + i\tilde{f}_2$. 显然 $\tilde{g}_1(x_0) \geqslant \tilde{g}_1(x)$, $\tilde{g}_2(x_0) = 0$. 因此

$$\sigma\tilde{g}_1(x_0) - \mathbf{A}\tilde{g}_1(x_0) = \tilde{f}_1(x_0),$$

或由条件 2) 有

$$\|g\| = \tilde{g}_1(x_0) = \frac{1}{\sigma}[\tilde{f}_1(x_0) + \mathbf{A}\tilde{g}_1(x_0)]$$

$$\leqslant \frac{1}{\sigma}\tilde{f}_1(x_0) \leqslant \frac{1}{\sigma}\|\tilde{f}_1\| \leqslant \frac{1}{\sigma}\|f\|.$$

因而

$$\|g\| \leqslant \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}\|f\|, \qquad \|\mathbf{R}_\lambda f\| \leqslant \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}\|f\|.$$

不等式 (2) 得证.

设 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, $f \geqslant 0$. 我们证明,当 $\lambda > 0$ 时 $\mathbf{R}_\lambda f \geqslant 0$. 假设 $\mathbf{R}_\lambda f(x) \geqslant \mathbf{R}_\lambda f(x_0)$. 根据定义

$$\lambda\mathbf{R}_\lambda f(x_0) - \mathbf{A}\mathbf{R}_\lambda f(x_0) = f(x_0).$$

但是由条件 2) 有 $\mathbf{A}\mathbf{R}_\lambda f(x_0) \geqslant 0$. 因此 $\lambda\mathbf{R}_\lambda f(x_0) \geqslant f(x_0)$. 这样,算子 $\mathbf{R}_\lambda$ 不改变自己的正性. $\mathbf{R}_\lambda$ 的预解方程成立:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_\lambda - \mathbf{R}_\mu &= (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} - (\mu\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \\ &= \mathbf{R}_\lambda(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})[(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \\ &\quad - (\mu\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}](\mu\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{R}_\mu \\ &= \mathbf{R}_\lambda[(\mu\mathbf{I} - \mathbf{A}) - (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})]\mathbf{R}_\mu \\ &= (\mu - \lambda)\mathbf{R}_\lambda\mathbf{R}_\mu.\end{aligned}$$

利用预解方程可以断定，$\mathbf{R}_\lambda$ 的值域不依赖于 $\lambda(\lambda>0)$，并且等于 $\mathscr{D}$. 现在我们运用 Hille-Yosida 定理. 根据该定理，存在把 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 变为它自身的半群 $\mathbf{T}_t$($\mathscr{D}$ 的闭包等于 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$). 这时 $\|\mathbf{T}_t\|=1$，而且对 $f\geqslant 0$ 有 $\mathbf{T}_t f\geqslant 0$. 因为对每个 t 和 x，$\mathbf{T}_t f$ 是 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 上的线性泛函，故在 $\mathfrak{B}$ 上存在一可加集函数 $P(t, x, B)$，使

$$\mathbf{T}_t f(x)=\int f(y)P(t, x, dy).$$

由 $\mathbf{T}_t f$ 的正性可知，$P(t, x, B)$ 是测度. 由等式 $\mathbf{R}_\lambda \mathbf{1}=1/\lambda$ (由条件 2)，$\mathbf{A1}=0$) 可知 $T_t f=1$. 由此 $P(t, x, \mathscr{X})=1$. 从而 $P(t, x, B)$是马尔科夫过程的转移概率. 因为 $\mathbf{T}_t(\mathscr{C}_{\mathscr{X}})\subset\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$，所以该过程是 Feller 过程. 我们证明它随机连续.

由 Hille-Yosida 定理可见，对所有 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 有 $\mathbf{T}_t f\to f$. 因此(设 $f(x)\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$，而且当 $x\neq x_0$ 时 $f(x)>0$，$f(x_0)=0$；V是包含 x_0 的任一闭集)：

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\, P(t, x_0, V) &\leqslant \frac{1}{\inf\limits_{x\in V} f(x)}\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\int_V f(y)P(t, x_0, dy)\\ &\leqslant \frac{1}{\inf\limits_{x\in V} f(x)}\overline{\lim_{t\to 0}}\; T_t f(x_0)\\ &=\frac{1}{\inf\limits_{x\in V} f(x)} f(x_0)=0.\end{aligned}$$

过程的随机连续性得证. 定理证完.

局部紧空间的规则过程 现在设 $\mathscr{X}$ 是可分的局部紧空间. 考虑 $\mathscr{X}$ 上的随机连续 Feller 过程，$P(t, x, B)$ 是它的转移概率. 假设转移概率满足下列条件：

C_0：对任意 $t>0$，紧集K和 $\varepsilon>0$，存在一紧集 K_1，使对 $x\bar{\in}K_1$ 有 $P(t, x, K_1)<\varepsilon$.

记 $\mathscr{C}_0$ 是 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 中这样一些连续函数 $f(x)$ 的集合，使对任意 $\varepsilon>0$，集合 $\{x: |f(x)|\geqslant\varepsilon\}$ 是紧集. 注意，条件 C_0 和下面的条件等价：算子 $\mathbf{T}_t$，$\mathbf{T}_t f(x)=\int P(t, x, dy)f(y)$，把 $\mathscr{C}_0$ 变为 $\mathscr{C}_0$.

事实上，如果条件 C_0 成立，则对 $f\in\mathscr{C}_0$

$$\{x:\ |\mathbf{T}_t f(x)|<\varepsilon\}\subset\mathscr{X}\backslash K_1,$$

其中 K_1 是一紧集，对 $x\bar{\in}K_1$ 有 $P(t, x, K)<\varepsilon/2\cdot\|f\|$，而 $K=\{x: |f(x)|\geqslant\varepsilon/2\}$，因为

$$\mathbf{T}_t f(x)=\int_K P(t, x, dy)f(y)+\int_{\mathscr{X}\backslash K}P(t, x, dy)f(y)$$

$$\leqslant\|f\|P(t, x, K)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

现在假设当 $f\in\mathscr{C}_0$ 时，$\mathbf{T}_t f\in\mathscr{C}_0$. 对上述紧集 K 取一非负函数 $f\in\mathscr{C}_0$，使 $f(x)\geqslant 1$, $x\in K$. 由 $\mathbf{T}_t f\in\mathscr{C}_0$ 可见，$\{x: |\mathbf{T}_t f(x)|\geqslant\varepsilon\}=K_1$ 是紧集. 因此当 $x\in\mathscr{X}\backslash K_1$ 时

$$P(t, x, K)\leqslant\mathbf{T}_t f(x)<\varepsilon.$$

转移概率满足条件 C_0 的过程以及此转移概率本身都称做**规则的**(**正则的**).

设 $\mathscr{X}^0$ 是由空间 $\mathscr{X}$ 的点和点 $\mathfrak{b}$ 组成的集合. 在 $\mathscr{X}^0$ 中引进拓扑如下：原属 $\mathscr{X}$ 的点 x 的邻域就是它原在 $\mathscr{X}$ 中的邻域，而点 $\mathfrak{b}$ 的邻域是形如 $\mathscr{X}^0\backslash K$ 的集，其中 K 是 $\mathscr{X}$ 中的紧集. $\mathscr{X}^0$ 是紧集. 如果 f 是 $\mathscr{X}^0$ 上的连续函数，则 $f(x)-f(\mathfrak{b})$, $x\in\mathscr{X}$, 是属于 $\mathscr{C}_0$ 的函数. 相反，如果 $f\in\mathscr{C}_0$，而 c 是任一常数，则 $f_0(x)=f(x)+c$, $x\in\mathscr{X}$，而 $f_0(\mathfrak{b})=c$，是 $\mathscr{X}^0$ 上的连续函数. 设 $\mathfrak{B}^0$ 是空间 $\mathscr{X}^0$ 的 Borel 集的 σ 代数. 我们把 $\{\mathscr{X}^0, \mathfrak{B}^0\}$ 上的转移概率 $P(t, x, B)$ 作如下开拓：

$$P^0(t, x, B^0)=P(t, x, B^0\cap\mathscr{X}),\quad x\in\mathscr{X},$$

$$P^0(t, x, B^0)=\begin{cases}1, & \text{当 } \mathfrak{b}\in B^0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } \mathfrak{b}\bar{\in} B^0 \text{ 时}.\end{cases}$$

(容易看出，属于 $\mathfrak{B}^0$ 但不包含 $\mathfrak{b}$ 的集合，同时也属于 $\mathfrak{B}$). 对于我们所研究的过程，点 $\mathfrak{b}$ 是吸收点，而 $\mathscr{X}$ 是不变集：$P^0(t, x, \mathscr{X})=1$, $x\in\mathscr{X}$. 显然，对任一马尔科夫过程，若它的转移概率 $P^0(t, x, B^0)$ 满足条件：$P^0(t, x, \mathscr{X})=1$, $x\in\mathscr{X}$，和 $P^0(t, \mathfrak{b}, \{\mathfrak{b}\})=1$ ($\{\mathfrak{b}\}$ 是 $\mathfrak{b}$ 一个点的集)，则在 $\mathscr{X}$ 上(精确到随机等价性)有唯一一

个马尔科夫过程和它相对应，而且它们的转移概率相同：$P(t, x, B) = P^0(t, x, B)$.

现在我们来研究，以 $P^0(t, x, B)$ 为转移概率的马尔科夫过程的预解式 $\mathbf{R}_\lambda^0$ 满足哪些条件．除了紧空间上的随机连续 Feller 过程的预解式所满足的通常条件外，$\mathbf{R}_\lambda^0$ 还满足条件

$$R_\lambda^0(x, \mathscr{X}) = 1/\lambda, \quad \text{对所有 } x \in \mathscr{X},$$

$$R_\lambda^0(\mathfrak{b}, B^0) = \begin{cases} 1/\lambda, & \text{当 } \mathfrak{b} \in B^0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } \mathfrak{b} \bar{\in} B^0 \text{ 时}. \end{cases}$$

考虑测度

$$\delta_\mathfrak{b}(B^0) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \mathfrak{b} \in B^0, \\ 0, & \text{若 } \mathfrak{b} \bar{\in} B^0. \end{cases}$$

那末

$$R_\lambda^0(x, B^0) = R_\lambda(x, B^0 \cap \mathscr{X}) + \frac{1}{\lambda}\delta_\mathfrak{b}(B^0).$$

最后，对于 $\mathscr{X}^0$ 上的函数 f^0，存在

$$\mathbf{A}^0 f^0 = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}\left[\int f^0(y) P^0(t, x, dy) - f^0(x)\right],$$

当且仅当对 $x \in \mathscr{X}$ 存在极限

$$\mathbf{A} f_\mathscr{X}^0(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}\left[\int_\mathscr{X} f_\mathscr{X}^0(x) P(t, x, dy) - f^0(x)\right],$$

并且是属于 $\mathscr{C}_0$ 的函数（$f_\mathscr{X}^0$ 表示函数 f^0 限于 $\mathscr{X}$ 上）．这样，对 $x \in \mathscr{X}$

$$\mathbf{A}^0 f(x) = \mathbf{A} f_\mathscr{X}^0(x), \quad \mathbf{A}^0 f(\mathfrak{b}) = 0.$$

我们现在利用定理 1 来描绘规则过程的全部生成算子．所谓规则过程，即转移概率满足条件 C_0 的过程．

定理 2 算子 $\mathbf{A}$ 是相空间 $\mathscr{X}$ 中具有规则转移概率的马尔科夫过程的无穷小算子，当且仅当满足下列条件：

1）$\mathbf{A}$ 的定义域 $\mathscr{D}$ 是一函数的集合，它关于一致收敛拓扑在空间 $\mathscr{C}_\mathscr{X}^0$ 中处处稠密，这里 $\mathscr{C}_\mathscr{X}^0$ 是形如 $f + c$（$f \in \mathscr{C}_0$，c 是常数）的函数的空间；

2) 对于一切 $f\in\mathscr{D}$，如果 $f(x_0)\geqslant f(x)$ $(x\in\mathscr{X})$，则 $\mathbf{A}f(x_0)\leqslant 0$，(即满足极大值原理)；

3) 对某一 $\lambda>0$，算子 $\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}$ 把 $\mathscr{D}$ 变到 $\mathscr{C}^0_{\mathscr{X}}$ 里。

证. 设算子 $\mathbf{A}^0$ 定义在 $\mathscr{D}^0\subset\mathscr{C}_{\mathscr{X}^0}$ 上，即定义在这样一些函数 f^0 上：f^0 是由函数 $f\in\mathscr{D}$ 经连续开拓到点 $\mathfrak{b}$ 而得到的，而且对 $f^0\in\mathscr{D}^0$

$$\mathbf{A}^0f^0(x)=\mathbf{A}f^0_{\mathscr{X}}(x),\quad x\in\mathscr{X},\quad \mathbf{A}^0f^0(\mathfrak{b})=0.$$

显然 $\mathbf{A}^0$ 满足定理的条件. 所以在 $\{\mathscr{X}^0,\mathfrak{B}^0\}$ 上存在转移概率 $P^0(t,x,B^0)$，使 $\mathbf{A}^0$ 是它的生成算子. 设 $f(x)\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}^0}$，$f(\mathfrak{b})=0$，则 $\int P^0(t,\mathfrak{b},dy)f(y)=0$. 这对 $f\in\mathscr{D}^0$ 是对的，因为函数 $\lambda(t)=\int P^0(t,\mathfrak{b},dy)f(y)$ 连续，而它的右导数等于 0:

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}$$

$$=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int P^0(h,\mathfrak{b},dy)\left[\int P^0(t,y,dz)f^0(z)-\int P^0(t,x,dz)f^0(z)\right]=0$$

(由于 $\int P^0(t,y,dz)f^0(z)\in\mathscr{D}^0$). 此外 $\lambda(0)=0$. 由此可见 $\lambda(t)=0$. 可将该式连续开拓到 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}^0}$ 的所有函数，因而对所有 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}^0}$，$f(\mathfrak{b})=0$，有

$$\int_{\mathscr{X}}f(y)P^0(t,\mathfrak{b},dy)=0.$$

取一函数序列 $\{f_n\}$：$f_n\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}^0}$，它几乎处处收敛于 1，$|f_n|\leqslant K<\infty$，$f_n(\mathfrak{b})=0$. 那末

$$P^0(t,\mathfrak{b},\mathscr{X})=0.$$

我们现在证明，对 $x\in\mathscr{X}$ 有 $P^0(t,\mathfrak{b},\mathscr{X})=1$. 设 $\mathbf{R}^0_\lambda$ 是转移概率 $P^0(t,x,B)$ 的预解式. 这时

$$f^0=(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}^0)\mathbf{R}^0_\lambda f^0$$

$$= \lambda \mathbf{R}_\lambda^0 f^0 - \mathbf{A}^0 \mathbf{R}_\lambda^0 f^0$$

$$= \begin{cases} \lambda \mathbf{R}_\lambda^0 f^0 - \mathbf{A}^0 [\mathbf{R}^0 f^0]_{\mathscr{X}}, & x \in \mathscr{X}, \\ \lambda \mathbf{R}_\lambda^0 f^0(\mathfrak{b}), & x = \mathfrak{b}. \end{cases}$$

因此

$$[\mathbf{R}_\lambda^0 f^0]_{\mathscr{X}} = \mathbf{R}_\lambda f_{\mathscr{X}}^0 = \int_{\mathscr{X}} f^0(y) \mathbf{R}_\lambda(x, dy).$$

由 $\mathscr{C}_0$ 上的线性泛函的一般形式可知 $\mathbf{R}_\lambda f_{\mathscr{X}}^0$ 具有上面的形式.

设 $f^0(\mathfrak{b}) = 0$. 那末

$$\int_0^\infty \int f^0(y) P^0(t, x, dy) e^{-\lambda t} dt = \int_{\mathscr{X}} f^0(y) R_\lambda(x, dy).$$

因此，若取一序列 $f_n^0(x)$: $f_n^0(\mathfrak{b}) = 0$, $f_n^0(x) \to 1$ $(x \in \mathscr{X})$，则得

$$\int_0^\infty P(t, x, \mathscr{X}) e^{-\lambda t} dt = R_\lambda(x, \mathscr{X}) = (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{1} = \frac{1}{\lambda}$$

(因为 $\mathbf{A1} = 0$).

由此可见，对几乎所有 t, $P^0(t, x, \mathscr{X}) = 1$. 剩下来只需注意到，由

$$P^0(t+\tau, \mathscr{X}) = \int P^0(t, x, dy) P^0(\tau, y, \mathscr{X})$$

$$= \int_{\mathscr{X}} P^0(t, x, dy) P^0(\tau, y, \mathscr{X}) + [1 - P^0(t, x, \mathscr{X})] P^0(\tau, \mathfrak{b}, \mathscr{X})$$

$$\leqslant P^0(t, x, \mathscr{X})$$

可见，$P^0(t, x, \mathscr{X})$是单调函数. 因此 $P^0(t, x, \mathscr{X}) = 1$，而 $P(t, x, B) = P^0(t, x, B)$, $x \in \mathscr{X}$, $B \in \mathfrak{B}$，是马尔科夫过程的规则转移概率. 定理得证.

注. 在这之前，我们只考虑过程的转移概率，而没有顾及过程的轨道. 我们证明，对于规则过程可以选取轨道的集合，使其中的轨道在每一点都没有第二类间断点. 为此我们首先注意到，当 $\mathscr{X}$ 为紧集时，规则过程满足一致随机连续条件：对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $V_\varepsilon(x) = \{y: r(x, y) > \varepsilon\}$ 有

$$\lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in \mathscr{X}} P(t, x, V_\varepsilon(x)) = 0. \tag{3}$$

事实上，若不然，则可以找到两个序列 $x_k \to x_0$ 和 $t_k \downarrow 0$，使 $P(t_k, x_k, V_\varepsilon(x_k)) > \delta > 0$. 现在设 $f(x) = \frac{2}{\varepsilon} r(x, V_{\varepsilon/2}(x_0))$. 那末当 $r(x, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ 时，

$$
\begin{aligned}
& f(x) - \int P(t_k, x, dy) f(y) \\
& \geqslant f(x) - [1 - P(t_k, x, V_\varepsilon(x))] \\
& = P(t_k, x, V_\varepsilon(x)) + f(x) - 1.
\end{aligned}
$$

因而

$$
\lim_{k\to\infty}\left[f(x_k) - \int P(t_k, x_k, dy) f(y) \right] \geqslant \varliminf_{k\to\infty} P(t_k, x_k, V_\varepsilon(x_k)) \geqslant \delta,
$$

这和 (1) 矛盾.

由第一章 § 6 定理 2 可见条件 (3) 保证存在一过程：它具有和原过程相同的联合分布(因此也有相同的转移概率)，但是没有第二类间断点.

现在考虑局部紧空间 $\mathscr{X}$ 中具有规则转移概率的过程. 把转移概率开拓到 $\mathscr{X}^0$. 可以看出，对这些转移概率，在 $\mathscr{X}$ 中存在一没有第二类间断点的过程.

记 $\mathscr{D}_{\mathscr{X}}[0, \infty)$是$[0,\infty)$上在$\mathscr{X}$中取值的这样一些函数 $x(t)$ 的集合：它们没有第二类间断点，而且在每一点 t 都有 $x(t-0)$ 及$x(t+0) \in \mathscr{X}$. 容易看出，$\mathscr{D}_{\mathscr{X}}[0, \infty)$ 是 $\mathscr{D}_{\mathscr{X}^0}[0, \infty)$ 中的可测集(关于由柱集所产生的最小 σ 代数可测).

我们现在设 μ_x 是 $\mathscr{D}_{\mathscr{X}^0}[0, \infty)$ 中的测度，它对应于以 $P^0(t, x, B)$ 为转移概率、初值为 $x(0) = x$ 的过程，而且该过程没有第二类间断点，并证明 $\mu_x(\mathscr{D}_{\mathscr{X}}[0, \infty)) = 1$. 为此只需证明，对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $T > 0$，存在一紧集 K，使

$$
\mu_x(\{x(\cdot): x(t) \in K, 0 \leqslant t \leqslant T\}) > 1 - \varepsilon.
$$

设 $0 < t_1 < \cdots < t_n = T$，而 K_1 和K是两个集合. 那末

$$
\begin{aligned}
& 1 - \mu_x(\{x(\cdot): x(t_i) \in K, i < n, x(T) \in K_1\}) \\
& \leqslant \sum_k \mu_x(\{x(\cdot): x(t_i) \in K, i = 1, \cdots, k-1,
\end{aligned}
$$

$$x(t_k)\bar{\in}K,\ x(T)\in K_1\}) + P(T,\ x,\ \mathscr{X}\backslash K_1)$$
$$\leqslant \sup_k \sup_{y\in K} P(T-t_k,\ y,\ K_1) + P(T,\ x,\ \mathscr{X}\backslash K_1).$$

由 $x(t)$ 没有第二类间断点可见

$$1-\mu_x(\{x(\cdot):\ x(t)\in K,\ x(T)\in K_1\})$$
$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \sup_{y\in K} P(t,\ y,\ K_1) + P(T,\ x,\ \mathscr{X}\backslash K_1).$$

因为我们可以选择 K_1，使 $P(T,\ x,\ \mathscr{X}\backslash K_1)$ 任意地小，所以，为证明我们的命题只需证明，对任意 $\varepsilon>0$, $T>0$ 和紧集 K_1，存在一紧集 K，使

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \sup_{y\in K} P(t,\ y,\ K_1) < \varepsilon,$$

设 $f\in\mathscr{C}_0$, $0\leqslant f(x)\leqslant 1$，当 $x\in K_1$ 时 $f(x)=1$. 函数

$$f(t,\ x)=\lambda\int \mathbf{R}_\lambda f(y)P^0(t,\ x,\ dy)$$

(其中 λ 满足 $|f(x)-\lambda\mathbf{R}_\lambda f(x)|\leqslant\varepsilon/2$) 具有下列性质:

1) $\lim\limits_{|t_1-t_2|\to 0} \sup\limits_x |f(t_2,\ x)-f(t_1,\ x)|=0$,

2) 对任意 t 和 $\delta>0$，存在一紧集 $K(t,\ \delta)$，使对 $x\bar{\in}K(t,\ \delta)$ 有

$$|f(t,\ x)|<\delta.$$

由性质 1)—2) 可见，对任意 $\varepsilon>0$ 和 t，可以找到一个区间 $\Delta\ni t$ 和一紧集 K^t，使对所有 $s\in\Delta$, $x\in K^t$ 有 $|f(s,\ x)|<\varepsilon/2$. 由 $[0,\ T]$ 的紧性可知，存在一紧集 K，使当 $x\in K$, $t\in[0,\ T]$ 时，

$$|f(t,\ x)|<\varepsilon/2.$$

因此，当 $y\bar{\in}K$ 时

$$P(t,\ y,\ K_1)\leqslant\int f(x)P(t,\ y,\ dx)$$
$$\leqslant\varepsilon/2+\int R_\lambda f(z)P(t,\ y,\ dz)$$
$$\leqslant\varepsilon/2+f(x,\ y)<\varepsilon.$$

我们的命题得证.

中断过程 在 §1 中曾经指出，如何通过给相空间补充一个状态 (过程在中断时落入的状态)，把中断过程化归为一般过程.

现在在特别的假设条件下，我们来更详细的讨论一下这个问题.

设 $\mathscr{X}$ 是局部紧空间，$\mathscr{X}^0$ 是它的紧化. 我们来考虑对 $t>0$，$x\in\mathscr{X}$，$B\in\mathfrak{B}$ 定义的函数 $P(t, x, B)$. 假设它满足下列条件：

1) $P(t, x, \cdot)$ 是 $\mathfrak{B}$ 上的测度，而且 $P(t, x, \mathscr{X})\leqslant 1$，

2) 对固定的 t 和 B，$P(t, x, B)$ 对 x 可测，

3) 对所有 $t>0$，$\tau>0$，$x\in\mathscr{X}$，$B\in\mathfrak{B}$，

$$\int P(t, y, B)P(\tau, x, dy)=P(t+\tau, x, B).$$

如果对所有 t 和 x，$P(t, x, \mathscr{X})=1$，则 $P(t, x, B)$ 是普通过程的转移概率. 如果对某一对 t 和 x 有 $P(t, x, \mathscr{X})<1$，则称函数 $P(t, x, B)$ 为**中断过程的转移概率**. $1-P(t, x, \mathscr{X})$ 是过程在时刻 t 中断的概率. 设 $\mathfrak{b}$ 是补充给 $\mathscr{X}$ 使之变为紧致 $\mathscr{X}^0$ 的一个点. 我们把 $\mathfrak{b}$ 看成过程在消失之后的状态. 对 $x\in\mathscr{X}$，$B^0\in\mathfrak{B}$，假设

$$P^0(t, x, \{\mathfrak{b}\})=1-P(t, x, \mathscr{X}),$$
$$P^0(t, \mathfrak{b}, B^0)=\delta_{\mathfrak{b}}(B^0).$$

容易看出，$P^0(t, x, B)$ 是 $\{\mathscr{X}^0, \mathfrak{B}^0\}$ 上的转移概率. 现在看它是否满足 Колмогоров-Chapman 方程：对 $x\in\mathscr{X}$

$$\begin{aligned}\int P^0(t, x, dy)P^0(\tau, y, B)&=\int_{\mathscr{X}}P(t, x, dy)P(\tau, y, B\backslash\{\mathfrak{b}\})\\&\quad+[1-P(t, x, \mathscr{X})]\delta_{\mathfrak{b}}(B)\\&\quad+\int_{\mathscr{X}}P(t, x, dy)\\&\quad\cdot[1-P(\tau, y, \mathscr{X})]\delta_{\mathfrak{b}}(B)\\&=P(t+\tau, x, B\backslash\{\mathfrak{b}\})\\&\quad+[1-P(t+\tau, x, \mathscr{X})]\delta_{\mathfrak{b}}(B)\\&=P(t+\tau, x, B),\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\int P^0(t, \mathfrak{b}, dy)P^0(\tau, y, B)&=\int\delta_{\mathfrak{b}}(dy)P^0(\tau, y, B)\\&=P^0(\tau, \mathfrak{b}, B)\end{aligned}$$

$$= \delta_b(B)$$
$$= P(t + \tau, b, B).$$

考虑满足条件 C_0 的随机连续 Feller 转移概率。那末显然转移概率 $P^0(t, x, B)$ 在紧空间 $\mathscr{X}^0$ 上也是随机连续的和 Feller 的。事实上，对所有 $f_{\mathscr{X}}(y) \in \mathscr{C}_0$ 和任意函数 $f(x) \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}^0}, f(b)=0$，有

$$\int P^0(t, x, dy) f(y) = \int P(t, x, dy) f_{\mathscr{X}}(y).$$

而由规则性可见，对 $f \in \mathscr{C}_0$

$$\int P(t, x, dy) f(y) \in \mathscr{C}_0.$$

此外

$$\int P^0(t, x, dy) \cdot c = c.$$

所以在 $\mathscr{X}^0$ 中存在一过程，其轨道没有第二类间断点，$P^0(t, x, B)$ 是它的转移概率。设该过程为 $\{\mathscr{D}_{\mathscr{X}^0}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$，其中 $\mathscr{D}_{\mathscr{X}^0}$ 是函数 $x(t)$ 的集合：$x(t)$ 对 $t \geqslant 0$ 定义，在 $\mathscr{X}^0$ 取值，而且没有第二类间断点。我们证明，对任意紧集 $K \subset \mathscr{X}$ 和 $\varepsilon > 0$，存在一紧集 $K_1 \subset \mathscr{X}$，使

$$\mathbf{P}_x\{x^0(\cdot): x^0(t) \in K, x^0(t+h) \in K,$$
$$\exists s \in [t, t+h]: x(s) \overline{\in} K_1\} < \varepsilon. \quad (4)$$

和上一小节一样可以看出，这个概率不大于

$$\sup_{0 \leqslant u \leqslant h} \sup_{y \in K_1} P(u, y, K).$$

适当选择紧集 K_1，可以使该式的值任意小(见上一小节)。

由 (4) 可见，对所有 x 和紧集 $K \subset \mathscr{X}$ 有

$$\mathbf{P}_x\{x^0(\cdot): x^0(t) \in K, x^0(t+h) \in K,$$
$$\exists s \in [t, t+h]: x^0(s-0) = b,$$
$$\text{或 } x^0(s) = b, \text{或 } x^0(s+0) = b\} = 0.$$

因此

$$\mathbf{P}_x\{x^0(\cdot): x^0(t) \neq b, x^0(t+h) \neq b$$
$$\exists s \in [t, t+h]: x^0(s-0) = b,$$

或 $x^0(s) = \mathfrak{b}$，或 $x^0(s+0) = \mathfrak{b}\} = 0$.

设 $\tilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}^0}(\subset \mathscr{D}_{\mathscr{X}^0})$由 $\mathscr{D}_{\mathscr{X}^0}$ 中满足下列条件的函数 $x(t)$组成：如果 $x^0(s-0)$，$x^0(s)$ 和 $x^0(s+0)$ 之一等于 $\mathfrak{b}$，则对所有 $t>s$，$x(t)=\mathfrak{b}$. 因为所有测度 $\mathbf{P}_x$ 都集中在集 $\tilde{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}^0}$ 上，故存在一随机变量 ζ，使

$$x^0(s)\begin{cases} \in \mathscr{X}, & \text{若 } s<\zeta, \\ = \mathfrak{b}, & \text{若 } s>\zeta. \end{cases}$$

现在看 $\mathscr{X}$ 中的过程，其轨道定义在区间 $[0, \zeta)$ 上. 我们把它的转移概率 $P(t, x, B)$ 看成"$x(t)$ 在时刻 t 有定义，且在 B 中取值"的概率.

如果对 x 存在一致极限

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}\left[\int P(t, x, dy) f(y) - f(x)\right] = \varphi(x),$$

则中断过程的无穷小算子定义为：$\mathbf{A} f = \varphi$，$f \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}}$. 我们证明，$\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$关于一致收敛拓扑在$\mathscr{C}_0$中处处稠密. 设$\mathbf{A}^0$是以$P^0(t, x, B)$为转移概率的过程的无穷小算子，$\mathscr{D}^0$是它的定义域. 记$\mathscr{D}$为一函数的集合，其中每个函数是由形如 $f^0(x)-f^0(\mathfrak{b})$ $(f^0 \in \mathscr{D}^0)$ 的函数限制于 $\mathscr{X}$ 上而得到的. 那末，对所有 $f=[f^0-f^0(\mathfrak{b})]_{\mathscr{X}}$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t}\left[\int P(t, x, dy) f(y) - f(x)\right] \\ &\quad = \frac{1}{t}\left[\int P^0(t, x, dy) f^0(y) - f^0(x)\right]_{\mathscr{X}}, \end{aligned}$$

从而 $f \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}}$.

我们指出算子 $\mathbf{A}$ 的两条性质.

如果 $\max\limits_{x \in \mathscr{X}} f(x) = f(x_0) \geqslant 0$，$f \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}}$，则

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t}\left[\int P(t, x_0, dy) f(y) - f(x)\right] \\ &\quad \leqslant \frac{1}{t}\int P(t, x, dy)[f(y) - f(x_0)] \\ &\quad \leqslant 0, \end{aligned}$$

因此 $\mathbf{A}f(x_0) \leqslant 0$.

第二条性质：如果

$$\mathbf{R}_\lambda f(x_0) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{T}_t f(x)\,dt,$$

$$\mathbf{T}_t f(x) = \int P(t, x, dy) f(y),$$

则对 $f \in \mathscr{C}_0$ 有 $\mathbf{R}_\lambda f = (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} f$. 由规则性显然 $\mathbf{R}_\lambda(\mathscr{C}_0) \subset \mathscr{C}_0$.

此外，对 $f \in \mathscr{C}_0$，$\mathbf{R}_\lambda f = [R_\lambda^0 f^0]_{\mathscr{X}}$，其中 $\mathbf{R}_\lambda^0$ 是转移概率 $P^0(t, x, B)$ 的预解式，f^0 是 f 到 $\mathscr{X}^0$ 的连续开拓（$f^0(\mathfrak{b}) = 0$）. 所以

$$\mathbf{A}\mathbf{R}_\lambda f = [\mathbf{A}^0 \mathbf{R}_\lambda^0 f^0]_{\mathscr{X}} = [\lambda \mathbf{R}_\lambda^0 f^0 - f^0]_{\mathscr{X}} = \lambda \mathbf{R}_\lambda f - f.$$

结果表明，为使算子 $\mathbf{A}$ 是某一中断马尔科夫过程的无穷小算子，上述性质是充分的. 这由下面的定理可以看出.

定理 3 设集 $\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$ 关于一致收敛拓扑在 $\mathscr{C}_0$ 中处处稠密；算子 $\mathbf{A}$ 定义在 $\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$ 上，满足下列条件：

1）对任意函数 $\varphi \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}}$，$\varphi(x_0) \geqslant 0$，$\varphi(x_0) \geqslant \varphi(x)$，

$$\mathbf{A}\varphi(x_0) \leqslant 0;$$

2）对某一 $\lambda > 0$，算子 $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$ 把 $\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$ 变到 $\mathscr{C}_0$ 里.

那末存在一（一般为中断的）过程，使 $\mathbf{A}$ 是它的无穷小算子.

证. 考虑函数 f^0 的集合 $\mathscr{D}^0$，其中 $[f^0(x) - f^0(\mathfrak{b})]_{\mathscr{X}} \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}}$. 显然 $\mathscr{D}^0$ 在 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}^0}$ 中稠密. 对 $f^0 \in \mathscr{D}^0$ 设

$$\mathbf{A}^0 f^0 = \mathbf{A}[f^0 - f^0(\mathfrak{b})]_{\mathscr{X}},\ x \in \mathscr{X},\ \mathbf{A}^0 f^0(\mathfrak{b}) = 0.$$

算子 $\mathbf{A}$ 满足定理 2 的条件 1)—3)（在函数 $f^0(x)$ 的极大点 x_0，函数 $[f^0 - f^0(\mathfrak{b})]_{\mathscr{X}}$ 是非负的）. 而对所有 $g \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}^0}$，方程

$$\lambda f^0 - \mathbf{A}^0 f^0 = g^0$$

有如下形状的解：

$$f^0(x) + g^0(\mathfrak{b})/\lambda,$$

其中 f^0 是函数 $f \in \mathscr{C}_0$ 的连续开拓，f 又是方程

$$\lambda f - \mathbf{A}f = [g^0 - g^0(\mathfrak{b})]_{\mathscr{X}}$$

的解，所以存在转移概率 $P^0(t, x, B)$，使 $\mathbf{A}^0$ 是它的无穷小算子.

因为对所有 $f^0\in\mathscr{D}^0$, $\mathbf{A}^0f^0(\mathfrak{b})=0$, 故如以前所证 $P^0(t,\mathfrak{b},\{\mathfrak{b}\})=1$. 所以,对所有 $x\in\mathscr{X}$ 和 $B\in\mathfrak{B}$, $P(t,x,B)=P^0(t,x,B)$ 是转移概率(只是 $P(t,x,\mathscr{X})=1$ 未必成立). 容易验证,它具有规则性,而 $\mathbf{A}$ 是它的无穷小算子.

现在证明转移概率 $P(t,x,B)$ 的 Feller 性. 设 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, 而 K 是任一紧集. 对任意 $\varepsilon>0$ 我们选取一紧集 K_1, 使 $P(t,x,\mathscr{X}\setminus K_1)<\varepsilon$, $x\in K$. 设 $f_1\in\mathscr{C}_0$, 在 K 上 $f_1=f$, $\|f_1\|=\|f\|$. 那末对 $x\in K$

$$|\mathbf{T}_tf_1(x)-\mathbf{T}_tf(x)|<2\|f\|\varepsilon.$$

因为 $\mathbf{T}_tf_1\in\mathscr{C}_0\subset\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, 故在 K 上 $\mathbf{T}_tf$ 是 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 中函数的一致极限. 于是 $\mathbf{T}_tf\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$.

定理得证.

中断规则过程的势 函数 $P^0(t,x,\{\mathfrak{b}\})=1-P(t,x,\mathscr{X})$, $x\in\mathscr{X}$, 在 $\mathscr{X}$ 上(但不是在 $\mathscr{X}^0$ 上)是连续的,而且随 t 的增大而递增. 所以 $\Delta_t=\{x:P(t,x,\mathscr{X})=1\}$ 是闭集,而且它随 t 的增大而递降. 于是 $\Delta=\bigcap\limits_{t>0}\Delta_t$ 也是闭集. 我们证明, Δ 是过程的不变集,即对所有 $x\in\Delta$ 和 $t>0$, $P(t,x,\Delta)=1$. 事实上,如果对某一 $s>0$, $P(t,x,\mathscr{X}\setminus\Delta_s)>0$, 则

$$1-P(t+s,x,\mathscr{X})>\int_{\mathscr{X}\setminus\Delta_s}[1-P(s,y,\mathscr{X})]\cdot P(t,x,dy)>0,$$

而这和 $x\in\Delta$ 的条件矛盾.

称过程为**以概率 1 中断的**,如果 Δ 是空集. 我们证明,这时算子 $\mathbf{A}$ 在 $\mathscr{C}_0$ 上可逆. 设 $\varphi\in\mathscr{C}_0$, $\mathbf{A}\varphi=0$. 由

$$\mathbf{T}_t\varphi-\varphi=\lim_{h\downarrow 0}\int_0^t\mathbf{T}_s\frac{\mathbf{T}_h\varphi-\varphi}{h}ds=\int_0^t\mathbf{T}_s\mathbf{A}\varphi ds$$

可见,对一切 t 有 $\mathbf{T}_t\varphi=\varphi$. 另一方面,如果 $x_0\in\mathscr{X}$ 是使 φ 达到正极大值的点,则

$$\varphi(x_0)=\int P(t,x_0,dy)\varphi(y)\leqslant\varphi(x_0)P(t,x_0,\mathscr{X})<\varphi(x_0),$$

因为当 t 充分大时，$P(t, x_0, \mathscr{X}) < 1$. 用同样的方法可以证明 φ 没有负极小值. 于是 $\varphi = 0$.

设 F 是 $\mathscr{X}$ 中的任意紧集. 因为 $\{x: P(t, x, \mathscr{X}) < 1\}$ 是开集，而且它们覆盖 F，故存在 F 的有限覆盖: $F \subset \bigcup_{k=1}^{n} \{x: P(t_k, x, \mathscr{X}) < 1\}$. 那末当 $t \geqslant \tau = \max_k t_k$ 时，$P(t, x, \mathscr{X}) < 1$, $x \in F$; 从而 $\delta = 1 - \sup_{x \in F} P(\tau, x, \mathscr{X}) > 0$. 我们证明

$$\sup_x \int_0^\infty P(t, x, F) dt < \infty.$$

因为

$$\int_0^\infty P(t, x, F) dt = \int_0^\tau \sum_{k=0}^\infty P(t + k\tau, x, F) dt$$

$$= \int_0^\tau \int P(t, x, dy) \sum_{k=0}^\infty P(k\tau, y, F) dt,$$

故只需证明 $\sum_{k=0}^\infty P(k\tau, y, F) \leqslant L$, 其中 L 是不依赖于 y 的常数.

注意到

$$P(n\tau, y, F) = \sum_m \sum_{0<i_1<\cdots<i_m<n} \mathbf{P}_y\{x(k\tau) \bar{\in} F, k \neq i_1, \cdots, i_m; x(l\tau) \in F, l = i_1, \cdots, i_m; x(n\tau) \in F\}.$$

所以

$$\sum_n P(n\tau, y, F) = \sum_m \sum_n \sum_{0<i_1<\cdots<i_m<n} \mathbf{P}_y\{x(k\tau) \bar{\in} F, k \neq i_1, \cdots, i_m; x(l\tau) \in F, l = i_1, \cdots, i_m; x(n\tau) \in F\}.$$

其次，对任意一组 $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$

$$\sum_{n=i_m+1}^\infty \mathbf{P}_y\{x(k\tau) \bar{\in} F, k \neq i_1, \cdots, i_{m-1}, k < n; x(l\tau) \in F, l = i_1, \cdots, i_m; x(n\tau) \in F\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_F \mathbf{P}_y\{x(k\tau)\bar{\in} F,\ k \neq i_1, \cdots, i_m,\ k < i_m; \\
&\quad x(l\tau) \in F,\ l = i_1, \cdots, i_{m-1};\ x(i_m\tau) \in dz\} \\
&\quad \times \sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{P}_z\{x(l\tau)\bar{\in} F,\ l < r;\ x(r\tau) \in F\}.
\end{aligned}
$$

注意到,对 $z \in F$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{P}_z\{x(l\tau)\bar{\in} F,\ l < r;\ x(r\tau) \in F\} \\
&\quad = \mathbf{P}_z\{\exists r > 0:\ x(r\tau) \in F\} \\
&\quad \leqslant \mathbf{P}_z\{x^0(\tau) \neq \mathfrak{b}\} < 1 - \delta.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\sum_{0<i_1<\cdots<i_m<n} \mathbf{P}_y\{x(k\tau)\bar{\in} F,\ k \neq i_1, \cdots, i_m,\ k < n; \\
&\quad x(l\tau) \in F,\ l = i_1, \cdots i_m;\ x(n\tau) \in F\} \\
&\leqslant (1-\delta) \sum_{0<i_1<\cdots<i_m<n} \mathbf{P}_y\{x(k\tau)\bar{\in} F,\ k \neq i_1, \cdots, i_{m-1}, \\
&\quad k < i_m; x(l\tau) \in F,\ l = i_1, \cdots, i_m\} \leqslant (1-\delta)^{m+1}.
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\sum_n P(n\tau, y, F) \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} (1-\delta)^{m+1} < \frac{1-\delta}{\delta},
$$

$$
\int_0^{\infty} P(t, x, F)dt \leqslant \int_0^{\tau} \left(1 + \frac{1-\delta}{\delta}\right) dt = \frac{\tau}{\delta}.
$$

由所证明的可见,对任意在某一紧集 F 上不为 0 的函数 $f(x)$,存在

$$
\int_0^{\infty} \int P(t, x, dy) f(y)\, dt.
$$

由空间 $\mathscr{C}_F$ 中线性泛函的表示定理可见,存在测度 $K(x, dy)$,使

$$
\int_0^{\infty} \int P(t, x, dy) f(y) dt = \int K(x, dy) f(y),
$$

其中 $K(x, B)$ 对每个 x,在每个紧致上是有穷测度. 而由于 $\mathscr{X}$ 是局部紧空间,故 $K(x, \cdot)$ 是 σ 有穷测度. 函数 $K(x, B)$ 称为

转移概率 $P(t, x, B)$ 的(位)势。我们证明了，任何以概率 1 中断的规则过程的位势存在。算子 $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{K}f(x) = \int K(x, dy)f(y)$$

对一切有限支集函数 f 定义。但它也定义在更广的函数类上。例如，它对一切形如 $\mathbf{T}_t f$ (f 为有限支集函数)的函数有定义。事实上

$$\int_0^\infty \int P(s, x, dy)\mathbf{T}_t f(y) dy = \int_0^\infty P(s + t, x, dy)f(y)$$

$$= \mathbf{K}f(x) - \int_0^t \mathbf{T}_s f(x) ds.$$

同理

$$\mathbf{T}_t\mathbf{K}f = \mathbf{K}f - \int_0^t \mathbf{T}_s f ds. \tag{5}$$

这样，算子 $\mathbf{K}$ 定义在函数集 $\mathscr{C}$ 上。$\mathscr{C}$ 中的函数要么是有限支集函数，要么形如 $\mathbf{T}_t f$，其中 f 是有限支集函数。算子 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{T}_t$ 对所有 $t > 0$ 可交换 ($\mathscr{C}$ 是 $\mathbf{T}_t$ 的不变集)。

对所有 $f \in \mathscr{C}$，存在一致极限

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbf{T}_h\mathbf{K}f - \mathbf{K}f}{h} = -f. \tag{6}$$

由 (5) 式可见，对 $f \in \mathscr{C}$，$\mathbf{K}(\mathbf{T}_t f - f)$ 是连续函数。设 $f \in \mathscr{C}$ 是非负函数。那末，若改变积分顺序：

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{T}_{t+s} f dt ds = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{T}_t\mathbf{K}f dt = \int_0^\infty \mathbf{T}_s\mathbf{R}_\lambda f ds,$$

则可以看出，算子 $\mathbf{K}$ 对 $\mathbf{R}_\lambda f$，$f \in \mathscr{C}$，有定义，而且

$$\mathbf{K}\mathbf{R}_\lambda f = \mathbf{R}_\lambda\mathbf{K}f.$$

记 $\mathscr{D}_\mathbf{K}$ 为算子 $\mathbf{K}$ 的定义域，它是满足下列条件的函数 f 的集合：

$$\sup_x \int K(x, dy)|f(y)| < \infty.$$

显然，$\mathbf{R}_\lambda(\mathscr{D}_\mathbf{K}) \subset \mathscr{D}_\mathbf{K}$，而对 $t > 0$ 有 $\mathbf{T}_t(\mathscr{D}_\mathbf{K}) \subset \mathscr{D}_\mathbf{K}$.

设 f 使 $\mathbf{A}f \in \mathscr{D}_\mathbf{K}$ (例如，$f = \mathbf{R}_\lambda\varphi$，$\varphi \in \mathscr{D}_\mathbf{K}$)，则 $\mathbf{A}f = \lambda f - \varphi \in \mathscr{D}_\mathbf{K}$，因为 $\mathscr{D}_\mathbf{K}$ 是线性流形。那末

$$\mathbf{K}\mathbf{A}f = -f.$$

事实上，由积分 $\int_0^\infty \mathbf{T}_t f dt (f \in \mathscr{D}_{\mathbf{K}})$ 收敛可见，当 $t \to \infty$ 时，$\mathbf{T}_t f \to 0$。因此有

$$\mathbf{K}\mathbf{A}f = \lim_{t \to \infty} \int_0^t \mathbf{T}_s \mathbf{A} f ds = \lim_{t \to \infty} (\mathbf{T}_t f - f) = -f.$$

记 $\tilde{\mathscr{D}} = \{f: \mathbf{A}f \in \mathscr{D}_{\mathbf{K}}\}$. 那末对 $f \in \tilde{\mathscr{D}}$，$\mathbf{K}\mathbf{A}f = -f$. 设 $\tilde{\Delta}$ 是算子 $\mathbf{A}$ 的值集 $(f \in \tilde{\mathscr{D}})$，则 $\tilde{\Delta} \subset \mathscr{D}_{\mathbf{K}}$，而且对 $\varphi \in \tilde{\mathscr{D}}$ 有 $\mathbf{K}\varphi \in \mathscr{C}_0$. 式(6)表明，这时 $\mathbf{K}\varphi \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}}$，

$$\mathbf{A}\mathbf{K}\varphi = -\varphi.$$

我们已证明算子 $\mathbf{A}$ 可逆，即 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在. 设 Δ 是 $\mathbf{A}$ 的值域. 算子 $\mathbf{A}^{-1}$ 把 Δ 变到 $\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$. 在集 Δ 的某一子集 $\tilde{\Delta}$ 上算子 $\mathbf{K}$ 也有定义，在这个集合上 $\mathbf{K} = -\mathbf{A}^{-1}$. 我们证明 $\tilde{\Delta}$ 在 Δ 中稠密. 如果 $\varphi \in \Delta$，则 $\varphi = \mathbf{A}f$，$f \in \mathscr{C}_0$. 所以 $\varphi = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda \mathbf{A}\mathbf{R}_\lambda f$. 现在选取 $f_n \in \mathscr{D}_{\mathbf{K}}$，使 $\|f_n - f\| \to 0$. 可以建立一函数 $\lambda_n \mathbf{A}\mathbf{R}_{\lambda_n} f$ 的序列，使其中每个函数都属于 $\tilde{\Delta}$，而且 $\lambda_n \mathbf{A}\mathbf{R}_{\lambda_n} f \to \varphi$. 算子 $\mathbf{A}$ 是封闭的，因而算子 $\mathbf{A}^{-1}$ 也封闭.

我们证明，算子 $\mathbf{K}$ 的扩张 $\tilde{\mathbf{K}}$ 也封闭. 这里，若 $\int_0^\infty \mathbf{T}_t f dt$ 关于 x 一致收敛，则 $\mathbf{K}$ 在 f 上有定义.

事实上，设 $\|f_n - f\| \to 0$，积分 $\int_0^\infty \mathbf{T}_t f_n dt$ 关于 x 一致收敛，且当 $n, m \to \infty$ 时

$$\left\| \int_0^\infty \mathbf{T}_t f_n dt - \int_0^\infty \mathbf{T}_t f_m dt \right\| \to 0.$$

那末

$$\begin{aligned} &\overline{\lim_{c \to \infty}} \lim_{n,m \to \infty} \left\| \int_c^\infty \mathbf{T}_t f_n dt - \int_c^\infty \mathbf{T}_t f_m dt \right\| \\ &\qquad \leqslant \lim_{c \to \infty} \|\mathbf{T}_c\| \lim_{n,m \to \infty} \left\| \int_0^\infty \mathbf{T}_t f_n dt - \int_0^\infty \mathbf{T}_t f_n dt \right\| = 0. \end{aligned}$$

因此，积分

$$\int_0^\infty \mathbf{T}_t f_n dt$$

关于 x 和 n 一致收敛．所以可以在积分号下取极限．算子 $\mathbf{A}^{-1}$ 和 $\tilde{\mathbf{K}}$ 封闭，它们在处处稠密集 $\tilde{\Delta}$ 上相等．因而它们处处相等．

根据测度 $K(x, dy)$ 可以构造算子 $\mathbf{K}$ 如下：和前面一样，先在 $\mathscr{D}_{\mathbf{K}}$ 上构造 $\mathbf{K}$；然后选 $\mathscr{D}_{\mathbf{K}}$ 的一个子集，使对属于该子集的 f 有 $\mathbf{K}f \in \mathscr{C}_0$；在所选子集上令 $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}$；再取 $\tilde{\mathbf{K}}$ 的闭包．

设 $x(t)$ 是 $\mathscr{X}$ 中的中断过程，$x^0(t)$ 是 $\mathscr{X}^0$ 中和 $x^0(t)$对应的过程．前面已经证明，可以这样构造 $x^0(t)$，使之没有第二类间断点．

设 $f \in \mathscr{D}_{\mathbf{K}}$ 是非负函数，而 f^0 是它到 $\mathscr{X}^0$ 的连续开拓．那末

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}f(x) &= \int_0^\infty \int P(t, x, dy) f(y) dt \\
&= \int_0^\infty \int P^0(t, x, dy) f^0(y) dt \\
&= \mathbf{E}_x^0 \int_0^\infty f(x^0(t)) dt \\
&= \mathbf{E}_x \int_0^\zeta f(x(t)) dt,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

其中 ζ 是过程 $x(t)$ 的中断时间．

考虑算子 $\mathbf{K}$ 有界的情形．为此

$$
\sup_x K(x, \mathscr{X}) \leqslant C < \infty
$$

必要并且充分．而由 (7) 式可见，这又等价于

$$
\sup_x \mathbf{E}_x \zeta \leqslant C < \infty.
$$

从而

$$
\sup_x \mathbf{P}_x\{\zeta > T\} \leqslant \frac{C}{T} \qquad \text{或} \qquad P(T, x, \mathscr{X}) \leqslant \frac{C}{T}.
$$

若选择 T，使 $C/T < \alpha < 1$，则有

$$
\begin{aligned}
\sup_x P(kT, x, \mathscr{X}) &= \sup_x \int P((k-1)T, x, dy) P(T, y, \mathscr{X}) \\
&\leqslant \alpha \sup_x P((k-1)T, x, \mathscr{X}) \leqslant \alpha^k.
\end{aligned}
$$

所以

$$\sup_x P(t, x, \mathscr{X}) \leqslant Le^{-\beta t}, \tag{8}$$

其中 $L = 1/\alpha$, $\beta = -(1/T)\ln\alpha$. 这样,在所考虑的情形下,对任意连续函数 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$

$$\sup_x \left| \int P(t, x, dy) f(y) \right| \leqslant \|f\| Le^{-\beta t}.$$

所以

$$\int_0^\infty \int P(t, x, dy) f(y) dt$$

关于 $x \in \mathscr{X}$ 一致收敛,并且是属于 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 的连续函数. 而$\mathscr{C}_0$ 中的函数变为 $\mathscr{C}_0$ 中的函数.

我们指出函数 $K(x, B)$ 是某一规则随机连续 Feller 过程的势的必要和充分条件.

定理 4 设对每个 $x \in \mathscr{X}$, 函数 $K(x, B)$, $x \in \mathscr{X}$, $B \in \mathfrak{B}$, 是 $\mathfrak{B}$ 上的测度, 满足条件:

1) 当 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 时, $\int K(x, dy) f(y)$ 是 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 中的函数, 而当 $f \in \mathscr{C}_0$ 时, 它是 $\mathscr{C}_0$ 中的函数,

2) 算子 $\mathbf{K}$ 的值域: $\mathbf{K}f = \int K(x, dy) f(y)$ 在 $\mathscr{C}_0$ 中处处稠密,

3) 如果 $f \in \mathscr{C}_0$, $\mathbf{K}f(x_0) \geqslant 0$, 且对所有 x, $\mathbf{K}f(x_0) \geqslant \mathbf{K}f(x)$, 则 $f(x_0) \geqslant 0$.

那末 $K(x, B)$ 是规则随机连续 Feller 过程的势.

如果 $\sup\limits_x K(x, \mathscr{X}) < \infty$, 则上述条件对于该命题也是必要的.

证. 条件 1) 的必要性前面已证明. 由 $\mathbf{K}^{-1} = -\mathbf{A}$ 可见条件 2) 和 3) 必要. 现在证明这些条件的充分性. 先证在 $\mathscr{C}_0$ 中 $\mathbf{K}$ 的可逆性.

设 $f \in \mathscr{C}_0$, 而且

$$\int K(x, dy) f(y) = 0.$$

那末，由条件 3) 可见，对所有 x 有 $f(x)\geqslant 0$. 关于 $-f$ 有完全相同的结论. 于是 $f=0$. 设 $\mathscr{D}=\mathbf{K}(\mathscr{C}_0)$，在 $\mathscr{D}$ 上定义算子 $\mathbf{A}$ 如下:

$$\mathbf{A}=-\mathbf{K}^{-1}.$$

算子 $\mathbf{A}$ 把 $\mathscr{D}$ 变到 $\mathscr{C}$ 里. 我们证明，算子 $\mathbf{A}$ 满足定理 3 的条件.

由定理 4 的条件 3) 可以推出定理 3 的条件 1). 为验证定理 3 的条件 2)，我们注意到

$$(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{K}^{-1})=\mathbf{K}^{-1}(\lambda\mathbf{K}+\mathbf{I}).$$

所以，对 $\lambda<1/\|\mathbf{K}\|$ 有

$$(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{K}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\lambda^k\mathbf{K}^k\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\lambda^k\mathbf{K}^{k+1}.$$

它是定义在 $\mathscr{C}_0$ 上的、把 $\mathscr{C}_0$ 变到 $\mathscr{D}$ 里的有界算子. 从而，$(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})$ 把 $\mathscr{D}$ 变到 $\mathscr{C}_0$. 由定理 3 该定理得证.

注. 设 $P(t,x,B)$ 是 $\mathscr{X}$ 中一规则过程的转移概率. 我们考虑转移概率 $P_0(t,x,B)=e^{-\lambda t}P(t,x,B)$. 它是某一中断过程的转移概率，它的势等于以 $P(t,x,B)$ 为转移概率的过程的预解核 $R_\lambda(x,dy)$. 所以由定理 4 可以得出下面的结果: $\mathbf{R}_\lambda$ 是某一规则马尔科夫过程的必要和充分条件是:

1) $R_\lambda(x,B)$ 对 $x\in\mathscr{X}$，$B\in\mathfrak{B}$ 有定义，而且它对 B 为测度，

2) 算子 $\mathbf{R}_\lambda$ 把 $\mathscr{C}_0$ 变到 $\mathscr{C}_0$，而且它的值域在 $\mathscr{C}_0$ 中稠密，

3) 如果对所有 $f\in\mathscr{C}_0$，$x\in\mathscr{X}$ 有 $\mathbf{R}_\lambda f(x_0)\geqslant\mathbf{R}_\lambda f(x)$，$\mathbf{R}_\lambda f(x_0)\geqslant 0$，则 $f(x_0)\geqslant 0$.

§5. 局部紧空间的强马尔科夫过程

强马尔科夫过程的定义 我们对于这一章所研究的齐次马尔科夫过程类重述强马尔科夫过程的定义(一般定义见第一章 §4).

称 $\mathscr{N}$ 可测非负变量 τ 关于马尔科夫过程 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$ 为马尔科夫时间，如果对所有 $t>0$ 事件 $\{\tau>t\}\in\mathscr{N}_t$. 对于 $\mathscr{F}$ 上的所有 $\mathscr{N}$ 可测变量，可以定义算子 θ_τ 如下：如果 $\varphi(x(\cdot))=f(x(t_1),\cdots,x(t_k))$，则

$$\theta_\tau\varphi=f(x(t_1+\tau),\cdots,x(t_k+\tau));$$

然后把 θ_τ 连续地开拓到所有 $\mathscr{N}$ 可测函数. 此外，我们再引进 σ 代数 $\mathscr{N}_\tau$，它是包含形如 $\{\tau>t\}\cap\mathfrak{U}_t$，$\mathfrak{U}_t\in\mathscr{N}_t$，的集合的最小 σ 代数. 如果 τ 是非随机的，而 φ 有界并且 $\mathscr{N}$ 可测，则由 §1 的 (5) 式有

$$\mathbf{E}_x(\theta_\tau\varphi\,|\,\mathscr{N}_\tau)=\mathbf{E}_{x(\tau)}\varphi\quad(\mathrm{mod}\mathbf{P}_x). \tag{1}$$

对于任意马尔科夫时间 τ 和有界 $\mathscr{N}$ 可测函数，如果变量 $\theta_\tau\varphi$ 也 $\mathscr{N}$ 可测，而且 (1) 式成立，则称过程为强马尔科夫的.

假设相空间 $\mathscr{X}$ 是度量空间，$\mathscr{F}$ 只包含右连续函数，而过程是 Feller 的(见 §4)，如第一章 §4 的定理 7 所证明的，$\{\mathscr{F},\mathscr{N},\mathbf{P}_x\}$ 是强马尔科夫过程.

有时不得不考虑过程在非 $\mathscr{N}$ 可测的随机时刻(例如，在不依赖于过程进程的时刻)的值. 可以根据马尔科夫过程关于任意 σ 代数流 $\mathscr{F}_t$ 的一般构造，来给马尔科夫过程以更一般的定义. 为在所给齐次过程的定义下引进这样的时间，我们再考虑一概率空间 $\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$. $\Omega\times\mathscr{F}$ 上 $\mathfrak{S}\times\mathscr{N}$ 可测的非负随机变量 τ 称为广义马尔科夫时间，如果对任意 $t>0$，事件 $\{\tau>t\}\in\mathfrak{S}\times\mathscr{N}_t$. 设 $\tilde{\mathbf{P}}_x=\mathbf{P}\times\mathbf{P}_x$ 是 $\Omega\times\mathscr{F}$ 上的测度，$\tilde{\mathscr{N}}=\mathfrak{S}\times\mathscr{N}$，$\tilde{\mathscr{N}}_t=\mathfrak{S}\times\mathscr{N}_t$，$\tilde{\mathbf{E}}_x$ 是对 $\tilde{\mathbf{P}}_x$ 的积分. 我们定义作用于 $\mathscr{N}$ 可测随机变量 ξ 的算子 θ_τ，使

$$\theta_\tau\xi_1\xi_2=\theta_\tau\xi_1\cdot\theta_\tau\xi_2,\qquad\theta_\tau(\xi_1+\xi_2)=\theta_\tau\xi_1+\theta_\tau\xi_2$$

$$\theta_\tau\lim\xi_n=\lim\theta_\tau\xi_n,$$

对任意 Borel 函数 $g(x)$ 和 $t_1>0$

$$\theta_\tau g(x_{t_1})=g(x_{t_1+\tau}),$$

对任意 $\mathfrak{S}$ 可测随机变量 ξ，$\theta_\tau\xi=\xi$. 记 $\tilde{\mathscr{N}}_\tau$ 为事件 $\mathfrak{U}_t\cap\{\tau>t\}$ 产生的 σ 代数，其中 $\mathfrak{U}_t\in\mathscr{N}_t$. 那末下面的引理成立.

引理 1 如果$\{\mathscr{F},\mathscr{N},\mathbf{P}_x\}$是强马尔科夫过程，则对任意有界 $\tilde{\mathscr{N}}$ 可测随机变量ξ

$$\tilde{\mathbf{E}}_x(\theta_\tau\xi|\tilde{\mathscr{N}}_\tau)=\tilde{\mathbf{E}}_{x(\tau)}(\xi|\mathfrak{S}).$$

证．只需对所有 $t>0$，$\mathfrak{U}_t\in\mathscr{N}_t$ 和有界 $\mathfrak{S}$ 可测随机变量 η 证明等式

$$\tilde{\mathbf{E}}_x\theta_\tau\xi\chi_{\mathfrak{U}_t}\chi_{\{\tau>t\}}\eta=\tilde{\mathbf{E}}_x[\tilde{\mathbf{E}}_{x_\tau}(\xi|\mathfrak{S})\chi_{\mathfrak{U}_t}\chi_{\{\tau>t\}}\eta]. \tag{2}$$

根据 Fubini 定理，随机变量τ和ξ对于几乎一切固定ω为$\mathscr{N}$可测．记τ_ω和ξ_ω为 $\mathscr{N}$ 可测随机变量：对于固定的 ω，$\tau=\tau_\omega$，$\xi=\xi_\omega$．那末，根据 Fubini 定理：

$$\tilde{\mathbf{E}}_x\theta_\tau\xi\chi_{\mathfrak{U}_t}\chi_{\{\tau>t\}}\eta=\mathbf{E}[\mathbf{E}_x\theta_{\tau_\omega}\xi_\omega\chi_{\mathfrak{U}_t}\chi_{\{\tau_\omega>t\}}]\eta,$$

其中$\mathbf{E}$是对测度$\mathbf{P}$的积分．容易看出，对几乎所有ω，τ_ω是马尔科夫时间．故

$$\mathbf{E}_x\theta_{\tau_\omega}\xi_\omega\chi_{\mathfrak{U}_t}\chi_{\{\tau_\omega>t\}}=\mathbf{E}_x[\mathbf{E}_{x_{\tau_\omega}}\xi_\omega]\chi_{\mathfrak{U}_t}\chi_{\{\tau_\omega>t\}}.$$

因此，(2) 式的右侧现在化为

$$\mathbf{E}\mathbf{E}_x[\mathbf{E}_{x_{\tau_\omega}}\xi_\omega]\chi_{\mathfrak{U}_t}\chi_{\{\tau_\omega>t\}}\eta.$$

最后，因为根据 Fubini 定理 $\tilde{\mathbf{E}}_x\xi\eta=\mathbf{E}\mathbf{E}_x\xi_\omega\eta$，故对几乎所有$\omega$和测度$\mathbf{P}$，有

$$\tilde{\mathbf{E}}_x(\xi|\mathfrak{S})=\mathbf{E}_x\xi_\omega.$$

把$\mathbf{E}_{x_{\tau_\omega}}\xi_\omega$换成 $\tilde{\mathbf{E}}_{x_\tau}(\xi|\mathfrak{S})$，即可得出 (2) 式的左侧．

此引理说明了，在推移一广义马尔科夫时间时，强马尔科夫过程是如何行动的．

这一节下面我们要研究局部紧相空间的右连续 Feller 过程（从而它又是强马尔科夫过程）．

在马尔科夫时间的半群．特征算子 根据公式

$$\mathbf{T}_tf(x)=\mathbf{E}_xf(x_t)$$

可以决定半群在随机时间的值．设f是连续函数，而τ是马尔科夫时间．那末$f(x_\tau)$是$\mathscr{N}$可测随机变量．事实上，我们先假设τ只取 kh 的值．那末

$$f(x_\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}f(x_{kh})\chi_{\{\tau=kh\}}.$$

它显然是 $\mathscr{N}$ 可测随机变量. 当 $k/n \leqslant \tau < (k+1)/n$ 时，设 $\tau_n = (k+1)/n$. τ_n 是马尔科夫时间. 因为对于一般情形

$$f(x_\tau) = \lim_{n\to\infty} f(x_{\tau_n}),$$

故作为 $\mathscr{N}$ 可测随机变量 $f(x_{\tau_n})$ 的极限，$f(x_\tau)$ 也 $\mathscr{N}$ 可测. 由此立即可以得出如下结果：对任意马尔科夫时间 τ 和 Borel 函数 f，随机变量 $f(x_\tau)$ 为 $\mathscr{N}$ 可测.

如果 f 是有界 Borel 函数，则设

$$\mathbf{T}_\tau f(x) = \mathbf{E}_x f(x_\tau).$$

引理 2 设 $f \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}}$，而 τ 是马尔科夫时间，$\mathbf{E}_x\tau < \infty$. 则

$$\mathbf{T}_\tau f(x) = f(x) + \mathbf{E}_x \int_0^\tau \mathbf{A} f(x_s)\,ds. \tag{3}$$

证. 设 τ 只取 kh 为值. 那末

$$f(x_\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} [f(x_{(k+1)h}) - f(x_{kh})]\chi_{\{\tau > kh\}} + f(x)[\chi_{\{\tau>0\}} + \chi_{\{\tau=0\}}].$$

由此可见

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x f(x_\tau) &= f(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}_x \chi_{\{\tau>kh\}} \mathbf{E}[f(x_{(k+1)h}) - f(x_{kh}) \mid \mathscr{N}_{kh}] \\ &= f(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}_x \chi_{\{\tau>kh\}} \mathbf{E}\left(\int_{kh}^{(k+1)h} \mathbf{A} f(x_s)\,ds \mid \mathscr{N}_{kh}\right) \\ &= f(x) + \mathbf{E}_x \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{\{\tau>kh\}} \int_{kh}^{(k+1)h} \mathbf{A} f(x_s)\,ds \\ &= f(x) + \mathbf{E}_x \int_0^\tau \mathbf{A} f(x_s)\,ds,\end{aligned}$$

(在上面的一串等式中，我们用到级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}_x \chi_{\{\tau>kh\}} = \frac{1}{h}\mathbf{E}_x\tau$ 的收敛性).

对任意 τ，我们仿照上面引进一马尔科夫时间序列 τ_n. 那末

$$\mathbf{E}_x f(x_{\tau_n}) = f(x) + \mathbf{E}_x \int_0^{\tau_n} \mathbf{A} f(x_s)\,ds.$$

当 $n \to \infty$ 时，在该式中取极限. 由不等式

$$\left|\int_0^{\tau_n}\mathbf{A}f(x_s)ds-\int_0^{\tau}\mathbf{A}f(x_s)ds\right|\leqslant\frac{1}{n}\|\mathbf{A}f\|$$

即可得出引理的结论.

考虑特殊形式的马尔科夫时间. 设G是开集. 我们证明，随机变量

$$\tau_G=\inf[s:\ x(s)\bar{\in}G]$$

(首次流出G的时间)是马尔科夫时间. 因为x_s右连续，故τ_G决定于它在有理点上的值. 由此可见τ_G为$\mathcal{N}$可测. 现在证明，事件$\{\tau_G>t\}$属于$\mathcal{N}_t$. 设Γ是集G的边界. 显然$\{x(s)\in G\cup\Gamma,s\leqslant t\}\in\mathcal{N}_t$. 设$h(s)=r(x_s,\Gamma)$，其中$r$是$\mathscr{X}$中的距离. 函数$h(t)$右连续并且$\mathcal{N}_t$可测. 所以

$$\{\tau_G>t\}=\{x(s)\in G\cup\Gamma,\ s\leqslant t\}\backslash\{h(s)>0,\ s\leqslant t\}.$$

我们证明$\{h(s)>0,s\leqslant t\}\in\mathcal{N}_t$. 设$\{s_k\}$是一在$[0,t]$上稠密的点列. 如果$h(s_k)>0$，则存在包含$s_k$的一个最小区间$[\alpha_k,\beta_k)\subset[0,t]$，使$\inf h(s)>0$: $s\in(\gamma,\delta)$，$\alpha_k<\gamma<\delta<\beta_k$. 容易看出，随机变量$\alpha_k$和$\beta_k$为$\mathcal{N}_t$可测. 但是

$$\{h(s)>0,\ s\leqslant t\}=\left[\bigcap_{k=0}^{\infty}\{h(s_k)>0\}\right]$$
$$\cdot\cap\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty}[\alpha_k,\beta_k)=[0,t)\right\}$$
$$\cdot\cap\{h(t)>0\}\cap\left[\bigcap_{k=1}^{\infty}\{h(\alpha_k)>0\}\right].$$

于是$\{h(s)>0,s\leqslant t\}\in\mathcal{N}_t$得证.

很容易证明，对任意闭集S，随机变量$\tau_S=\inf[s:\ x(s)\bar{\in}S]$也是马尔科夫时间.

设τ是首次流出点x的邻域U的时间，其中集$U=\{y:|\mathbf{A}f(x)-\mathbf{A}f(y)|<\varepsilon\}$. 如果$\mathbf{E}_x\tau<\infty$，则由(3)式得

$$\mathbf{T}_tf(x)=f(x)+[\mathbf{A}f(x)+O(\varepsilon)]\mathbf{E}_x\tau. \tag{4}$$

我们来求使$\mathbf{E}_x\tau$在点x充分小的邻域内有限的条件.

x称为**吸收点**，如果对所有$t>0$，$\mathbf{P}_x\{x_t=x\}=1$. 我们证

明，对非吸收点 x 存在一邻域 U，使 $\mathbf{E}_x\tau_U<\infty$.

设 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, $0\leqslant f\leqslant 1$, 而当 $x\neq y$ 时 $f(x)=1$, $f(y)<1$. 如果 x 不是吸收点，则对某一 t 有 $\mathbf{T}_tf(x)<1$. 从而存在 $\delta>0$ 和 x 的一邻域 U_1，使 $\mathbf{T}_tf(y)<1-2\delta, y\in U_1$. 若设 $U_2=\{y: f(y)>1-\delta\}$，则对 $y\in U=U_1\cap U_2$

$$P(t, y, U)\leqslant\frac{1}{1-\delta}\int P(t, y, dz)f(z)\leqslant 1-\delta.$$

因此

$$\mathbf{P}_x\{\tau_U>kt\}\leqslant\mathbf{P}_x\{x(lt)\in U, l=1,\cdots k\}\leqslant(1-\delta)^k.$$

由此可见，τ_U 的各阶矩都存在.

由 (4) 式可以得到下面的结果. 设 $f\in\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$, U_n 是吸收点 x 的邻域序列，满足条件：对任意邻域 U 存在 N，使当 $n>N$ 时 $U_n\subset U$（记作 $U_n\downarrow x$）. 那末

$$\mathbf{A}f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbf{E}_xf(x_{\tau_n})-f(x)}{\mathbf{E}_x\tau_n}\quad(\tau_n=\tau_{U_n}).\tag{5}$$

为由 (4) 得到 (5)，只需注意到当 $n\to\infty$ 时，

$$\varepsilon_n=\sup_{y\in U_n}|f(y)-f(x)|\to 0.$$

设 x 是吸收点. 因为 $\mathbf{P}_x\{x_t=x\}=1$，而且 x_t 右连续，故 $\mathbf{P}_x\{x_t=x, t\geqslant 0\}=1$. 这时，对一切 $U\ni x$ 有 $\tau_U=+\infty$，而且 $\mathbf{E}_x\tau_U=+\infty$. 另一方面，对于吸收点 x，有

$$\mathbf{A}f(x)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{\mathbf{T}_tf(x)-f(x)}{t}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{f(x)-f(x)}{t}=0.$$

因此，如果令 $\frac{c}{+\infty}=0$，则 (5) 式仍然成立.

我们定义过程的**特征算子** $\mathfrak{A}$ 如下.

我们说函数 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 属于算子 $\mathfrak{A}$ 在 x 点的定义域 $\mathscr{D}_{\mathfrak{A},x}$，如果存在极限

$$\mathfrak{A}f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbf{E}_xf(x_{\tau_n})-f(x)}{\mathbf{E}_x\tau_n},\tag{6}$$

其中 τ_n 是首次流入 U_n 的时刻，而 U_n 是 x 点的任意邻域列，$U_n\downarrow$

x. $\mathfrak{A}f(x)$就是算子 $\mathfrak{A}$ 作用于函数 f 后在 x 点上的值. 称集 $\mathscr{D}_{\mathfrak{A}}=\bigcap_{x\in\mathscr{X}}\mathscr{D}_{\mathfrak{A},x}$ 为算子 $\mathfrak{A}$ 的定义域: 对于 $f\in\mathscr{D}_{\mathfrak{A}}$, 在一切点 x 上, 函数 $\mathfrak{A}f(x)$ 由 (6) 式定义. 由 (5) 式可见, $\mathscr{D}_{\mathbf{A}}\subset\mathscr{D}_{\mathfrak{A}}$, 而且在 $\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$ 上 $\mathbf{A}=\mathfrak{A}$, 即 $\mathfrak{A}\supseteq\mathbf{A}$ (特征算子是无穷小算子的扩张).

特征算子之所以方便, 是因为它的定义只要求知道过程在流出初始点任意小的邻域之前的行为. 换句话说, 特征算子具有某种局部的特性.

紧空间上过程的特征算子 由两个过程的特征算子相等, 一般不能得出它们转移概率相同的结论;由以上所证明的只知道,它们的无穷小算子是同一算子的压缩. 以后我们会看到, 不同的过程确实可以有相同的特征算子. 然而, 对于有一类过程, 具体地说, 对于紧空间上的随机连续 Feller 过程, 特征算子决定过程的转移概率.

设 $\mathscr{X}$ 是紧空间, $\mathfrak{A}$ 是马尔科夫过程 $\{\mathscr{T},\mathscr{N},\mathbf{P}_x\}$ 的特征算子,这里过程$\{\mathscr{T},\mathscr{N},\mathbf{P}_x\}$是随机连续的和 Feller 的. 我们证明,这时特征算子 $\mathfrak{A}$ 决定无穷小算子 $\mathbf{A}$. 确切地说, 我们要证明, 算子 $\mathbf{A}$ 的定义域由所有使 $\mathfrak{A}f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 的函数 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}\cap\mathscr{D}_{\mathfrak{A}}$ 组成, 记 $\mathscr{D}_0$ 为这样函数的集合. 设 $\bar{\mathbf{A}}$ 是定义在 $\mathscr{D}_0$ 上的算子: $\bar{\mathbf{A}}f=\mathfrak{A}f$. 容易看出, 如果 $f\in\mathscr{D}_{\mathfrak{A}}$ 并且在 x_0 有极大值, 则 $\mathfrak{A}f(x_0)\leqslant 0$. 从而 $\bar{\mathbf{A}}$ 满足极大值原理 (见 § 4 定理 1), 而且其定义域是一处处稠密的集合, 因为 $\mathscr{D}_0\supset\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$, 而 $\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$ 在 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 中稠密. 对于任意 $\lambda>0$ 和一切 $g\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, 我们证明方程 $\lambda f-\bar{\mathbf{A}}f=g$ 有解 (由 § 4 定理 1 的证明知, 由极大值原理可以推出此解的唯一性, 即算子 $(\lambda\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}})$ 有可逆性). 函数 $\mathbf{R}_\lambda g$ (其中 $\mathbf{R}_\lambda$ 是所考虑的马尔科夫过程的预解式) 就是这样的解. 事实上, 由 $\mathbf{R}_\lambda g\in\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$ 知 $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{R}_\lambda g=\mathbf{A}\mathbf{R}_\lambda g$. 故

$$\lambda\mathbf{R}_\lambda g=\bar{\mathbf{A}}\mathbf{R}_\lambda g=\lambda g-\mathbf{A}\mathbf{R}_\lambda g=g.$$

因此

$$(\lambda\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}})^{-1}g=\mathbf{R}_\lambda g,$$

从而 $\mathscr{D}_0=\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{A}}=\mathbf{A}$,

这一结果对于局部紧空间的规则过程有如下推广.

定理 1 如果 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$ 是局部紧空间 $\mathscr{X}$ 中的规则过程,$\mathfrak{A}$ 是它的特征算子,则无穷小算子的定义域 $\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$ 与 $\mathscr{D}_{\mathfrak{A}} \cap \mathscr{C}_0 \cap \{f: \mathfrak{A}f \in \mathscr{C}_0\}$ 重合,即 $\mathfrak{A}$ 唯一决定过程的无穷小算子.

这一定理的证明和 $\mathscr{X}$ 紧致的情形完全相同.

局部紧空间中,在首次流出所有紧集的瞬时中断的过程. 一般来说,我们将研究局部紧空间中的中断强马尔科夫 Feller 过程. 假设过程满足下面较强的随机连续性,以后我们称之为局部一致随机连续性:

对所有 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$,在 $\mathscr{X}$ 中的每一紧集 K 上一致有

$$\lim_{t \downarrow 0} \mathbf{T}_t f(x) = f(x).$$

由这一条件可知,当 $\lambda \to +\infty$ 时,在 $\mathscr{X}$ 的每一紧集上 $\lambda \mathbf{R}_\lambda f \to f$ ($\mathbf{R}_\lambda$ 是过程的预解式).

§3 的例子表明, 为使 $\mathbf{R}_\lambda$ 是一马尔科夫过程的预解式, 上述条件和 §3 的条件 1)—4) 是不充分的. 所以, 甚至在局部一致随机连续条件成立时, 描绘局部紧空间中马尔科夫过程的所有预解式(或即描绘所有无穷小算子)的问题,比对紧空间上的过程(或对局部紧空间的规则过程)解决该问题更为复杂,它没有那样简单的答案.

我们先研究一个特别的中断过程类. 在 §4 我们曾经指出,如果给 $\mathscr{X}$ 补充上一点 $\mathfrak{b}$ 以把它扩张为紧空间 $\mathscr{X}^0$, 并且在 $\mathscr{X}^0$ 上给出一个过程,使 $\mathfrak{b}$ 是它的吸收点,从而也就在 $\mathscr{X}$ 中给出一中断过程. 我们仍然假设这个 $\mathscr{X}$ 中的过程是右连续的和强马尔科夫的. 我们称首次流出开集 $\mathscr{X}$ 的时刻 ζ 为过程的消失或中断时间. 我们说, 过程在 $\mathscr{X}$ 之内中断,如果对于任意紧集 K, 它首次流出这一紧集的时间 $\tau_K < \zeta$. 称 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$ 为在无穷中断的过程, 如果存在一紧集序列 K_n, $K_n \subset K_{n+1}$, $\bigcup K_n = \mathscr{X}$, 使 $\zeta = \xi = \lim_{n \to \infty} \tau_{K_n}$.

此外, 在这一节我们要研究中断的右连续 Feller 强马尔科夫

过程，假设它满足局部一致随机连续条件，并且在 $\mathscr{X}$ 之内中断。我们将要给出根据已给过程的转移概率来构造在时刻 ξ 中断的过程之转移概率的方法。同时证明，后者唯一地决定于原过程的特征算子。

记 x_t 为过程 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$ 的轨道。我们考虑函数

$$P^v(t, x, E) = \mathbf{E}_x \chi_E(x_t) \exp\left\{-\int_0^t v(x_s)ds\right\},$$

其中 $v(x)$ 是 $\mathscr{X}$ 上某一非负连续函数，$B \in \mathfrak{B}$。我们证明，$P^v(t, x, B)$ 是转移函数。至于说 $P^v(t, x, B)$ 对于 B 为测度是显然的。其次

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_x \chi_B(x_{t+u}) \exp\left\{-\int_0^{t+u} v(x_s)ds\right\} &= \mathbf{E}_x \exp\left\{-\int_0^t v(x_s)ds\right\} \\
&\quad \times \mathbf{E}\left(\exp\left\{-\int_t^{t+u} v(x_s)ds\right\} \chi_B(x_{t+u}) \,\middle|\, \mathscr{N}_t\right) \\
&= \mathbf{E}_x \exp\left\{-\int_0^t v(x_s)ds\right\} \mathbf{E}_{x_t} \chi_B(x_s) \exp\left\{-\int_0^u v(x_s)ds\right\} \\
&= \mathbf{E}_x \exp\left\{-\int_0^t v(x_s)ds\right\} P^v(u, x, B) \\
&= \int P^v(u, y, B) P^v(t, x, dy),
\end{aligned}$$

因为对任意有界可测函数 $h(y)$ 有

$$\int P^v(t, x, dy) h(y) = \mathbf{E}_x h(x_s) \exp\left\{-\int_0^t v(x_s)ds\right\}.$$

这样，$P^v(t, x, B)$ 满足 Колмогоров-Chapman 方程。$P^v(t, x, B)$ 对 x 可测，因为

$$\begin{aligned}
P^v(t, x, B) &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_x \chi_B(x_t) \exp\left\{-\frac{t}{n}\sum_{k=1}^n v(x_{kt/n})\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_x \exp\left\{-\frac{t}{n} v(x_{t/n})\right\} \\
&\quad \times \mathbf{E}_{x(t/n)} \exp\left\{-\frac{t}{n} v\left[x\left(\frac{t}{n}\right)\right]\right\} \\
&\quad \times \cdots \times \mathbf{E}_{x(t(n-1)/n)} \exp\left\{-\left(\frac{t}{n}\right) v\right.
\end{aligned}$$

$$\times \left[x\left(\frac{t}{n}\right)\right]\Big\}\chi_B\left[x\left(\frac{t}{n}\right)\right],$$

而对任意有界可测函数 $g(x)$，函数 $\mathbf{E}_x e^{-\lambda v(x_s)} g(x_s)$ 可测. 由于

$$\int P^v(t, x, dy) f(y) = \mathbf{E}_x f(x_t) \exp\left\{-\int_0^t v(x_s) ds\right\},$$

故对所有 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$

$$\lim_{t \downarrow 0} \int P^v(t, x, dy) f(y) = f(x),$$

即转移概率 $P^v(t, x, B)$ 随机连续.

假设当 $x \to \infty$ 时 $v(x) \to +\infty$，使对所有 $t > 0$

$$\lim_{x \to \infty} \mathbf{E}_x \exp\left\{-\int_0^t v(x_s) ds\right\} = 0.$$

为此只需 $v(x)$ 满足下面的条件：如果 U_n 是具有紧闭包的开集序列，$\bigcup U_n = \mathscr{X}$，$[U_n] \subset U_{n+1}$，而 h_n 是这样一些数，当 $x \in [U_{n+1}] \setminus U_n$ 和 $t \leqslant h_n$ 时满足不等式

$$P(t, x, U_{n+2} \setminus [U_{n+1}]) \geqslant 1 - \frac{1}{n},$$

则 $h_n \inf\limits_{x \in U_{n+2} \setminus [U_{n-1}]} v(x) \to \infty \ (n \to \infty)$. 事实上，这时对 $x \in [U_{n+1}] \setminus U_n$ 有

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x \exp\left\{-\int_0^t v(x_s) ds\right\} &\leqslant \mathbf{E}_x \exp\left\{-\int_0^{h_n} v(x_s) ds\right\} \\ &\leqslant \frac{1}{h_n} \mathbf{E}_x \int_0^{h_n} e^{-v(x_s) h_n} ds \\ &\leqslant \exp\{-\inf_{x \in U_{n+2} \setminus [U_{n-1}]} v(x) h_n\} \\ &\quad \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \to 0. \end{aligned}$$

对于这样选择的 $v(x)$ 和 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$

$$\lim_{x \to \infty} \int P^v(t, x, dy) f(y) = 0.$$

引理 3 如果 ζ 是流出所有紧集的时刻，而且 $v(x)$ 满足上面所指出的条件，$v(x) > 0$，则

$$\mathbf{P}_x\left\{\int_0^{\zeta} v(x_s)ds = +\infty\right\} = 1,$$

而且当 $\mathbf{P}_x\{\zeta < \infty\} > 0$ 时

$$\mathbf{P}_x\left\{\int_0^{\xi} v(x_s)ds = +\infty \,|\, \xi < \infty\right\} = 1.$$

证． 因为 $v(x) > 0$，故 $\mathbf{P}_x\left\{\int_0^{\infty} v(x_s)ds = +\infty\right\} = 1$．所以为证明引理，只需证明第一个式子．我们证明，对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $x \in \mathscr{X}$

$$\mathbf{P}_x\left\{\int_0^{\xi+\varepsilon} v(x_s)ds = +\infty\right\} = 1.$$

为此只需证明，对任意 x 有 $\mathbf{P}_x\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\tau_n}^{\tau_n+\varepsilon} v(x_s)ds = +\infty$，其中 τ_n 是流出 U_n 的时刻（U_n 是 $v(x)$ 的定义中的开集）．我们有

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_x\left\{\int_{\tau_n}^{\tau_n+\varepsilon} v(x_s)ds > L\right\} &= \mathbf{E}_x\mathbf{P}_{x_{\tau_n}}\left\{\int_0^{\varepsilon} v(x_s)ds > L\right\} \\
&= \mathbf{E}_x\mathbf{P}_{x_{\tau_n}}\left\{\exp\left\{-\int_0^{\varepsilon} v(x_s)ds\right\} < e^{-L}\right\} \\
&\geqslant 1 - e^{L}\mathbf{E}_x\mathbf{E}_{x_{\tau_n}}\exp\left\{-\int_0^{\varepsilon} v(x_s)ds\right\},
\end{aligned}$$

而由于 $x_{\tau_n} \to \infty$，故当 $n \to \infty$ 时 $\mathbf{E}_{x_{\tau_n}}\exp\left\{-\int_0^{\varepsilon} v(x_s)ds\right\} \to 0$．

由刚证明的可见，对所有 x

$$\mathbf{P}_x\left\{\int_0^{\xi} v(x_s)ds = +\infty\right\} = 1.$$

事实上，如果过程在时刻 ζ 中断，则

$$\int_0^{\xi} v(x_s)ds = \int_0^{\zeta+\varepsilon} v(x_s)ds.$$

而若过程在时刻 ζ 不中断，则由过程的右连续性和强马尔科夫性可见，对充分小的 $\varepsilon > 0$

$$\int_{\xi}^{\xi+\varepsilon} v(x_s)ds = \theta_{\xi}\int_0^{\varepsilon} v(x_s)ds$$

有限．因此，由于对所有 $\varepsilon > 0$，$\int_0^{\zeta+\varepsilon} v(x_s)ds$ 无穷，故 $\int_0^{\xi} v(x_s)\ ds$

无穷．引理得证．

以后要用到下面的一致局部有界条件：我们说过程满足一致局部有界条件，如果对每个紧集 K 和 $\varepsilon > 0$ 存在一紧集 K_1，使

$$\sup_x \mathbf{P}_x\{x(\tau_K)\bar{\in} K_1\} < \varepsilon.$$

定理 2 如果过程满足一致局部有界条件，则转移概率 $P^v(t, x, B)$ 是规则的．

为证明该定理，只需确立转移概率 $P^v(t, x, B)$ 的 Feller 性．先证明下面的辅助命题．

引理 4 如果 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$，$\varphi\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}_t}$，而 $g(\lambda)$ 是连续数值函数，则对 $t>0$，函数 $\mathbf{E}_x g\left(\int_0^t f(x_s)ds\right)\varphi(x_t)$ 属于 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$．

证． 因为 $\left|\int_0^t f(x_s)ds\right|\leqslant t\|f\|$，而 $g(\lambda)$ 在线段 $[-t\|f\|, t\|f\|]$ 上可以表为多项式的一致极限，所以只需对 $g(\lambda)=\lambda^n$ 证明引理．这时

$$g\left(\int_0^t f(x_s)ds\right) = n! \int_{0<s_1<\cdots<s_n<t}\cdots\int f(x_{s_1})\cdots f(x_{s_n})ds_1\cdots ds_n,$$

因而

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_x g\left(\int_0^t f(x_s)ds\right)\varphi(x_t)\\
&= n! \int_{0<s_1<\cdots<s_n<t}\cdots\int \mathbf{E}_x[f(x_{s_1})\cdots f(x_{s_n})\varphi(x_t)]ds_1\cdots ds_n\\
&= n! \int_{0<s_1<\cdots<s_n<t}\cdots\int \mathbf{T}_{s_1}f\cdots\mathbf{T}_{s_n-s_{n-1}}f\mathbf{T}_{t-s_n}\varphi(x)ds_1\cdots ds_n.
\end{aligned}$$

因为最后一个积分对 t 连续而以 $\|f\|^n\cdot\|\varphi\|$ 为界，所以根据在积分号下取极限的 Lebesgue 定理知它对 t 连续．引理得证．

我们现在来证明定理 2．设

$$v_n(x)=\begin{cases} v(x), & \text{若 } v(x)\leqslant n,\\ n, & \text{若 } v(x)\geqslant n.\end{cases}$$

那末对 $f\geqslant 0$，$f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$

$$\mathbf{E}_x \exp\left\{-\int_0^t v(x_s)ds\right\} f(x_t)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_x \exp\left\{-\int_0^t v_n(x_s)ds\right\} f(x_t).$$

极限号后面是递减连续函数列，所以函数

$$\mathbf{T}_t^v f(x) = \mathbf{E}_x \exp\left\{-\int_0^t v(x_s)ds\right\} f(x_t)$$

对 x 上半连续. 我们现在证明,对于 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}, f \geqslant 0$, 函数 $\mathbf{T}_t^v f(x)$ 也下半连续. 为此只需证明 $\mathbf{T}_t^v \mathbf{1}(x)$ 下半连续. 事实上，这时函数 $\mathbf{T}_t^v(\|f\| - f)$ 是上半连续的,因为它非负;它是下半连续的,因为函数 $\mathbf{T}_t^v\mathbf{1}$ 和 $-\mathbf{T}_t^v f$ 下半连续. 因此对 $f \geqslant 0$ 和 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, 函数 $\mathbf{T}_t^v f$ 连续. 由此已经可以看出，如果 $\mathbf{T}_t\mathbf{1} \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, 则对所有 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 有 $\mathbf{T}_t f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$.

从而对 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}, f \geqslant 0$, 函数

$$\mathbf{R}_\lambda^v f(x) = \int_0^\infty \mathbf{T}_t^v f(x) e^{-\lambda t} dt$$

上半连续. 为证明 $\mathbf{R}_\lambda^v f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ $(f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}})$, 也只需证明 $\mathbf{R}_\lambda^v \mathbf{1}$ 下半连续. 如果对所有 $f \in \mathscr{C}_0$ 有 $\mathbf{R}_\lambda^v f \in \mathscr{C}_0$, 则由 § 2 的 (15) 式对 $\sigma > 1$ 有

$$\mathbf{T}_t^v(\mathbf{R}_1)^2 f = (\mathbf{R}_1^v)^2 f e^t - t e^t \mathbf{R}_1^v f$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{1}{(\lambda - 1)^2} \mathbf{R}_\lambda f e^{\lambda t} d\lambda,$$

从而对所有 $f \in \mathscr{C}_0$ 有 $\mathbf{T}_t^v(\mathbf{R}_1^v)^2 f \in \mathscr{C}_0$. 这样，对所有 $f \in \mathscr{C}_0$ 和 $\lambda > 0$ 有 $\mathbf{T}_t^v(\mathbf{R}_1^v)^2 f \in \mathscr{C}_0$. 因为

$$\mathbf{T}_t^v f = \lim_{\lambda\to+\infty} \mathbf{T}_t^v \lambda^2 (\mathbf{R}_\lambda^v)^2 f,$$

而且从右边的收敛是一致的,所以对所有 $f \in \mathscr{C}_0$ 有 $\mathbf{T}_t^v f \in \mathscr{C}_0$. 如果选取一序列 $f_n \uparrow 1$, $f_n \in \mathscr{C}_0$, 则可以看出 $\mathbf{T}_t^v\mathbf{1}(x) = \lim \mathbf{T}_t^v f_n(x)$, 即 $\mathbf{T}_t^v\mathbf{1}$ 下半连续. 前面已经指出,由此可得定理的结论.

于是,为证明定理,只需证明函数

$$g(x) = \mathbf{E}_x \int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^t v(x_s)ds - \lambda t\right\} dt$$

下半连续．因为 $\int_0^\zeta v(x_s)ds=+\infty$，而且 $\tau_n\uparrow\zeta$，故

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_x\int_0^{\tau_n}\exp\left\{-\int_0^t v(x_s)ds-\lambda t\right\}dt,$$

而且极限号后面的函数序列递增． 函数 $v(x)$ 在 U_n 上有界． 所以为证明定理，只需证明，对 $\varphi\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$，$\varphi\geqslant 0$，函数

$$g_1(x)=\mathbf{E}_x\int_0^\tau\exp\left\{-\int_0^t\varphi(x_s)ds-\lambda t\right\}dt$$

在 U 内的每一紧集 K 上为下半连续，其中 U 是具有紧闭包的开集，而 τ 是首次流出 U 的时间．

设 $h(x)\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$，而且当 $x\in V\subset U$ 时 $h(x)=0$，当 $x\bar{\in}U$ 时 $h(x)=1$，$0\leqslant h(x)\leqslant 1$．令

$$f_m(x)=\mathbf{E}_x\int_0^\infty\exp\left\{-\int_0^t\varphi(x_s)ds-\lambda t-m\int_0^t h(x_s)ds\right\}dt. \tag{7}$$

由引理 4 可见，对所有 m 有 $f_m(x)\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$．其次

$$\begin{aligned}f_m(x)=&\mathbf{E}_x\int_0^\tau\exp\left\{-\int_0^t\varphi(x_s)ds-\lambda t\right.\\&\left.-m\int_0^t h(x_s)ds\right\}dt\\&+\mathbf{E}_x\int_\tau^\infty\exp\left\{-\int_0^t\varphi(x_s)ds-\lambda t-m\int_0^t h(x_s)ds\right\}dt\\&\leqslant g(x)+\mathbf{E}_x\mathbf{E}_{x_\tau}\int_0^\infty\exp\left\{-\int_0^t\varphi(x_s)ds-\lambda t\right.\\&\left.-m\int_0^t h(x_s)ds\right\}\times dt\chi_{\{x_\tau\in U_n,\tau<\infty\}}\\&+\mathbf{P}_x\{x_\tau\bar{\in}U_n,\ \tau<\infty\}.\end{aligned}$$

由不等式（$x\in U_n\backslash U$）

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x\exp\left\{-m\int_0^t h(x_s)ds\right\}&\leqslant\frac{1}{\Delta}\mathbf{E}_x\int_0^\Delta\exp\left\{-\frac{m}{\Delta}\Delta h(x_s)\right\}ds\\&\leqslant\sup_{x\in U_n\backslash U}\frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta P(s,x,\mathscr{X}\backslash U_n)ds\\&\quad+e^{-m\Delta}\end{aligned}$$

可见，对任意 n 可以选择 m，使

$$\mathbf{E}_{x_\tau}\int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^t \varphi(x_s)ds - \lambda t - m\int_0^t h(x_s)ds\right\}dt\chi_{\{x_\tau\in U_n, \tau<\infty\}}$$

可以任意地小．因此，对任意 n 和 $\delta > 0$，当 m 充分大时有

$$f_m(x) \leqslant g(x) + \delta + \mathbf{P}_x\{x_\tau \bar{\in} U, \tau < \infty\}.$$

由一致局部有界条件，当 $n \to \infty$ 时 $\sup\limits_{x\in K} \mathbf{P}_x\{x_\tau \bar{\in} U_n, \tau < \infty\} \to 0$. 所以，对任意 $\varepsilon > 0$ 和所有充分大的 m，不等式 $f_m(x) \leqslant g(x) + \varepsilon$ 成立．另一方面，

$$g(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{V\uparrow U} f_m(x).$$

由此即可知 $g(x)$ 下半连续．定理得证．

下面的例子说明，对于不满足一致局部有界条件的过程，转移概率 $P^V(t, x, E)$ 未必是 Feller 的．

例． $\mathscr{X}$ 由全体自然数和点 $x_n = 1 - 1/n$, $n = 1, 2, \cdots$ 组成．在时间区间 τ_n 内过程位于点 x_n；τ_n 服从指数分布，均值为 a_n；在服从均值为 b_n 的指数分布的时间区间内过程位于点 n，其中 $\sum a_n < \infty$, $\sum b_n < \infty$，而且

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=N}^\infty b_n/a_N\right) = 0, \qquad \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=N+1}^\infty a_n/a_N\right) = 0.$$

过程（以概率 1）从点 n 向点 $n+1$ 转移，它以概率 $\frac{1}{n}$ 从 x_n 向点 $n+1$ 转移，而以概率 $1-1/n$ 向点 x_{n+1} 转移．经无穷多次转移之后过程落入点 1，然后又按以前的规律继续自己的进程．$\mathscr{X}$ 中的拓扑是一般的，1 是唯一的一个极限点．显然当 $t\downarrow 0$ 时，$\mathbf{T}_t f(x_n) \to f(x_n)$，而 $\mathbf{T}_t f(n) \to f(n)$．为验证局部一致随机连续条件只需证明，当 $t_n \downarrow 0$, $n \to \infty$ 时，$\mathbf{T}_{t_n} f(x_n) \to f(1)$．记 ζ_1 为过程首达自然数集的时间，而 ζ_2 为首达无穷的时间．那末

$$\begin{aligned} &P(t_n, x_n, [2,3,\cdots]) \\ &\leqslant \mathbf{P}_{x_n}\{\xi_1 < t_n, \zeta_1 + \zeta_2 > t_n\} + \mathbf{P}_1\{\tau_1 < t_n\}, \end{aligned}$$

其中 τ_1 是首次流出点 1 的时间．显然

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\tau_1 < t_n\} = 0,$$

而

$$\mathbf{P}_{x_n}\{\zeta_1 < t_n, \zeta_1 + \zeta_2 > t_n\}$$
$$= \int_0^{t_n}\mathbf{P}_{x_n}\{\zeta_1 \in ds\}\mathbf{P}_{x_n}\{\zeta_2 > t_n - s | \zeta_1 = s\}.$$

容易看出，

$$\mathbf{P}_{x_n}\{\zeta_1 \in ds\} = \frac{1}{a_n} e^{-s/a_n}(1 + o(1))ds,$$

而

$$\mathbf{P}_{x_n}\{\zeta_2 > t_n - s | \zeta_1 = s\} \leqslant \min\left[1; \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k/(t_n - s)\right].$$

从而

$$\mathbf{P}\{\zeta_1 < t_n, \zeta_1 + \zeta_2 > t_n\}$$
$$\sim \frac{1}{a_n}\int_0^{t_n} e^{-s/a_n}\min\left[1, \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k/(t_n - s)\right]ds.$$

可以用

$$\min_{\delta\leqslant t_n}\left[\frac{\delta}{a_n} + \frac{1}{\delta}\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right] \leqslant \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k/a_n$$

来估计上式的右侧，可见它趋于 0. 因此，当 $n\to\infty$ 时，

$$|\mathbf{T}_{t_n}f(x_n) - f(1)| \leqslant \sup_{m>n}|f(x_m) - f(1)|$$
$$+ 2P(t_n, x_n, [2, 3, \cdots]) \to 0.$$

由此可见，当 $t\downarrow 0$ 时，在每一紧集上有 $\mathbf{T}_t f(x)\to f(x)$（局部一致随机连续性）。容易证明过程的 Feller 性. 然而，一致局部有界条件对于该过程并不成立. 如果 K 是由点 $x_n(n = 1, 2, \cdots)$ 和 1 构成的紧集，则 $\mathbf{P}_{x_n}\{x(\tau_n)>n\} = 1$. 这时转移概率 $P^v(t, x, B)$ 不是 Feller 的，因为 $\mathbf{T}_t^v f(1)$ 可以取任意值，而

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{T}_t^v f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\mathbf{T}_t^v f(n) = 0.$$

注. 对于以概率 1 连续的过程，跃度有界的过程，以及具有离散拓扑的空间中的过程，一致局部有界条件自然成立，因为在这

样的空间中只有有穷集才是紧集.

我们现在来构造以 $P^v(t, x, B)$ 为转移概率的过程. 设 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$ 是已给马尔科夫过程. 记 $\check{\mathscr{F}}$ 为定义在 $[0, \zeta)$ 上的函数 $x(t)$ 的集合，其中 ζ 是任意实数，满足不等式 $\zeta \leqslant \xi$ (ξ 是流出一切紧集的时间)，而且每个函数 $x(t)$, $t \in [0, \zeta)$, 与 $\mathscr{F}$ 中的一个函数(当 $t \in [0, \zeta)$ 时)重合. 以 $\check{\mathscr{N}}_t$ 表 $\check{\mathscr{F}}$ 的子集的 σ 代数: 它由形如 $\mathscr{F}^t \cap A$ 的集合所产生，其中 A 是 $\mathscr{N}_t$ 中的柱集，而 $\mathscr{F}^t$ 是 $\check{\mathscr{N}}$ 中的函数 $x(s)$, $s \in [0, \zeta)$, $\zeta > t$, 的集合. 对于任意 $A \in \check{\mathscr{N}}_t$, 测度 $\mathbf{P}_x^v$ 定义为

$$\mathbf{P}_x^v(A) = \mathbf{E}_x \chi_A(x(\cdot)) \exp\left\{-\int_0^t v(x_s)ds\right\}. \tag{8}$$

这里所引进的数 ζ 就是过程的中断时间. (由引理 3 可知，以 $P^v(t, x, B)$ 为转移概率的过程的中断时间满足不等式 $\zeta \leqslant \xi$).

我们来研究过程 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$ 和 $\{\check{\mathscr{F}}, \check{\mathscr{N}}, \mathbf{P}_x^v\}$ 的特征算子之间的联系. 前者的特征算子记作 $\mathfrak{A}$, 而后者的记作 $\mathfrak{A}^v$. 如果 $\varphi \in \mathscr{D}_{\mathfrak{A}, x}$, 则

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x^v\varphi(x_{\tau_U}) - \varphi(x) &= \mathbf{E}_x\varphi(x_{\tau_U}) \\ &\quad \cdot \exp\left\{-\int_0^{\tau_U} v(x_s)ds\right\} - \varphi(x) \\ &= \mathbf{E}_x\varphi(x_{\tau_U}) - \varphi(x) + \mathbf{E}_x\varphi(x_{\tau_U}) \\ &\quad \cdot \left[\exp\left\{-\int_0^{\tau_U} v(x_s)ds\right\} - 1\right].\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}&\exp\left\{-\int_0^{\tau_U} v(x_s)ds\right\} - 1 \\ &= -\tau_U[v(x) + O(\sup_{y \in U}|v(y) - v(x)|)],\end{aligned}$$

故当 $U \downarrow x$, 而且 x 不是吸收点时，

$$\frac{\mathbf{E}_x^v\varphi(x_{\tau_U}) - \varphi(x)}{\mathbf{E}_x^v\tau_U} \to \mathfrak{A}\varphi(x) - v(x)\varphi(x).$$

对于吸收点 x, $\mathfrak{A}^v$ 没定义，但是对这样的点自然设 $\mathfrak{A}^v f = -vf$. 假设一致局部有界条件成立，而 $\mathbf{A}^v$ 是过程 $\{\check{\mathscr{F}}, \check{\mathscr{N}}, \mathbf{P}_x^v\}$ 的无

穷小算子. 因为该过程是规则的,所以算子 $\mathbf{A}^v$ 定义在在 $\mathscr{C}_0$ 中稠密的子集 $\mathscr{D}_0$ 上. 在该集合上算子 $\mathbf{A}^v$ 和 $\mathfrak{A}^v$ 相等. 对 $\varphi \in \mathscr{D}_0$

$$\mathbf{A}^v\varphi = \mathfrak{A} p - v\varphi,$$

而由定理 1 可知, $\mathscr{D}_0$ 包含所有满足 $\mathfrak{A}\varphi - v\varphi \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 的 φ.

我们现在来讨论如何定义在流出所有紧集之后中断的过程. 设

$$P_n(t, x, B) = \mathbf{E}_x \chi_B(x_t) \exp\left\{-\frac{1}{n}\int_0^t v(x_s)ds\right\},$$

其中 v 是和前面同样的函数. 对所有 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\int P_n(t, x, dy)f(y)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_x f(x_t)\exp\left\{-\frac{1}{n}\int_0^t v(x_s)ds\right\}.$$

这个极限可以写为

$$\int P^0(t, x, dy)f(y),$$

其中 $P^0(t, x, B)$ 也是转移概率. 对任意 $f \geqslant 0$,下面的不等式成立:

$$\int P_n(t, x, dy)f(y) \leqslant \int P^0(t, x, dy)f(y)$$

$$\leqslant \int P(t, x, dy)f(y).$$

由此可见, 在每一紧集上一致有

$$\lim_{t\downarrow 0}\int P^0(t, x, dy)f(y) = f(x),$$

因此对转移概率 $P^0(t, x, B)$, 局部一致随机连续条件也成立.

为了说明所找到的转移概率 $P^0(t, x, B)$ 确实是在时刻 ζ 中断的过程的转移概率,只需注意到,以概率 $\mathbf{P}_x = 1$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\exp\left\{-\frac{1}{n}\int_0^t v(x_s)ds\right\} = \chi_{\{\zeta > t\}},$$

因为 $\mathbf{P}_x\left\{\int_0^\zeta v(x_s)ds = +\infty\right\} = 1$.

我们指出一种求转移概率 $P^{\varphi}(t, x, B)$ 的方法，它也适用于一致局部有界条件不成立的情形.

引理 5 如果 $\varphi \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, 则函数

$$u(t, x) = \mathbf{E}_x \exp\left\{-\int_0^t \varphi(x_s)ds\right\} f(x_t)$$

满足下列积分方程:

$$u(t, x) = \mathbf{T}_t f(x) - \int_0^t \int u(t-s, y)\varphi(y)P(s, x, dy)ds. \quad (9)$$

证. 把等式

$$\exp\left\{-\int_s^t \varphi(x_u)du\right\} = 1 - \int_0^t \exp\left\{-\int_s^t \varphi(x_u)du\right\} \varphi(x_s)ds$$

两侧同乘以 $f(x_t)$, 然后求数学期望 $\mathbf{E}_x$. 由

$$\mathbf{E}_x \exp\left\{-\int_s^t \varphi(x_u)du\right\} \varphi(x_s)f(x_t)$$

$$= \mathbf{E}_x \varphi(x_s)\mathbf{E}_{x_s} \exp\left\{-\int_0^{t-s} \varphi(x_u)du\right\} f(x_{t-s})$$

得 (9) 式.

注. 最好用拉普拉斯变换来解方程 (9). 设

$$u_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(t, x)dt,$$

则得 $u_\lambda(x)$ 的下列方程:

$$u_\lambda(x) = \mathbf{R}_\lambda f(x) - \int R_\lambda(x, dy)u_\lambda(y)\varphi(y), \quad (10)$$

其中 $R_\lambda(x, B) = \mathbf{R}_\lambda \chi_B(x)$. 因为 $\|\mathbf{R}_\lambda\| \leqslant 1/\lambda$, 故当 $\lambda > \|\varphi\|$ 时，方程 (10) 有唯一解(和 $t < \|\varphi\|^{-1}$ 时方程 (9) 完全一样). 若对充分小的 t 知道了函数

$$\mathbf{E}_x \exp\left\{-\int_0^t \varphi(x_s)ds\right\} f(x_t)$$

的值，则利用关系式

$$\mathbf{E}_x \exp\left\{\int_0^t \varphi(x_s)ds\right\} f(x_t) = \mathbf{E}_x \exp\left\{-\int_0^{t-h} \varphi(x_s)ds\right\}$$

$$\cdot \mathbf{E}_{x_{t-h}} \exp\left\{-\int_0^h \varphi(x_s)ds\right\} f(x_h), \quad (11)$$

我们就可以对任意大的 t 确定该函数. 因而，对所有 n 和 m 可以确定函数

$$\mathbf{E}_x \exp\left\{-\frac{1}{m}\int_0^t v_n(x_s)ds\right\} f(x_t),$$

其中当 $v(x) \leqslant n$ 时 $v_n(x) = v(x)$，而当 $v(x) > n$ 时 $v_n(x) = n$. 现在有

$$\int P^0(t, x, dy)f(y) = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_x \cdot \exp\left\{-\frac{1}{m}\int_0^t v_n(x_s)ds\right\} f(x_t). \quad (12)$$

我们研究转移概率 $P^0(t, x, B)$ 的 Feller 性问题，假设一致局部有界条件成立. 因为对 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, $f \geqslant 0$,

$$\int P^0(t, x, dy)f(y) = \lim_{n\to\infty}\int P_n(t, x, dy)f(y),$$

而且积分号下是递增连续函数的序列，故对这样的 f，函数 $\int P^0(t, x, dy)f(y)$ 下半连续. 所以，如果 $\mathbf{R}_\lambda^0 1 \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$，则对所有 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 有 $\mathbf{R}_\lambda^0 f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$. 由 § 2 (15) 式可见，对所有 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$,

$$\int P^0(t, x, dy)(\mathbf{R}_\lambda^0)^2 f(y) \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}.$$

我们现在注意到，由原过程的 Feller 性可知，对任意紧集 K，当 $x \in K$ 时，测度族 $P(t, x, \cdot)$ 弱紧. 由第一卷第六章 § 1 定理 1 可知，对任意 $\varepsilon > 0$ 可以找到一紧集 K_1，使 $P(t, x, \mathscr{X}\setminus K_1) < \varepsilon$, $x \in K$. 因此，当 $x \in K$ 时，

$$P^0(t, x, \mathscr{X}\setminus K_1) \leqslant P(t, x, \mathscr{X}\setminus K_1) < \varepsilon.$$

因为

$$\sup_{x\in K}\left|\int P^0(t, x, dy)f(y) - \int P^0(t, x, dy)\lambda^2(\mathbf{R}_\lambda^0)^2 f(y)\right| \leqslant 2\varepsilon + \sup_{x\in K_1}|f(x) - \lambda^2(\mathbf{R}_\lambda^0)^2 f(x)|,$$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\sup\limits_{x\in K_1}|f(x) - \lambda^2(\mathbf{R}_\lambda^0)^2 f(x)| = 0$，而且在每一紧致上一致有 $\lim\limits_{t\downarrow 0}\int P^0(t, x, dy)f(y) = f(x)$，所以 $\int P^0(t, x, dy)f(y)$ 在每一紧

集上作为 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 中函数的一致极限，它也是 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 中的函数。

利用这个事实，可以引进转移概率 $P^0(t, x, B)$ 的 Feller 性的某些充分条件。

定理 3 在满足一致局部有界条件的情形下，下列每一个条件对于转移概率 $P^0(t, x, B)$ 的 Feller 性充分：

1. 在每一紧集上一致有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_x\mathbf{E}_{x_{\tau_n}}(1-e^{-\lambda\xi})\chi_{\{\tau_n<\infty\}}=0.$$

2. 对任意 t 在每个紧集上一致有

$$\lim_{L\to\infty}\mathbf{P}_x\left\{L<\int_0^t v(x_s)ds<\infty\right\}=0.$$

证. 如果条件 1 成立

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_\lambda^0\mathbf{1}(x)&=\mathbf{E}_x\int_0^\xi e^{-\lambda t}dt=\mathbf{E}_x\frac{1-e^{-\lambda\xi}}{\lambda}\\&=\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_xe^{-\lambda\tau_n}+\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_x[e^{-\lambda\tau_n}-e^{-\lambda\xi}]\chi_{\{\tau_n<\infty\}}\\&=\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_xe^{-\lambda\tau_n}+\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_xe^{-\lambda\tau_n}[1-e^{-\lambda(\xi-\tau_n)}]\chi_{\{\tau_n<\infty\}}\\&=\mathbf{E}_x\int_0^{\tau_n}e^{-\lambda t}dt+\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_xe^{-\lambda\tau_n}\chi_{\{\tau_n<\infty\}}\mathbf{E}_{x_{\tau_n}}[1-e^{-\lambda\xi}].\end{aligned}$$

上式中第二项不大于

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_x\chi_{\{\tau_n<\infty\}}\mathbf{E}_{x_{\tau_n}}[1-e^{-\lambda\xi}],$$

且在每一紧集上一致收敛于 0。对于 $G(x)\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$，当 $x\in U_n$ 时 $G(x)=0$，当 $x\bar{\in}U_n$ 时 $G(x)>0$，函数

$$\mathbf{E}_x\int_0^{\tau_n}e^{-\lambda\tau}dt=\lim_{m\to\infty}\mathbf{E}_x\int_0^\infty\exp\left\{-\lambda t-m\int_0^t G(x_s)ds\right\}dt,$$

作为连续函数的递减序列的极限，它上半连续。这就证明了条件 1 的充分性。对于条件 2，当 $m>n$ 时，

$$\mathbf{E}_x\left[\exp\left\{-\frac{1}{n}\int_0^t v(x_s)ds\right\}-\exp\left\{-\frac{1}{m}\int_0^t v(x_s)ds\right\}\right]$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)L+\mathbf{P}_x\left\{L<\int_0^t v(x_s)ds<\infty\right\}.$$

所以，在每一紧集上 $P_n(t, x, \mathscr{X})$ 一致收敛于 $P^0(t, x, \mathscr{X})$. 因此，对所有 t, $P^0(t, x, \mathscr{X})$ 作为 x 的函数属于 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$. 定理得证.

我们称过程为局部 Feller 的，如果对所有 $f\in\mathscr{C}_0$ 有 $\mathbf{T}_t f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$.

定理 4 设 $\mathfrak{A}$ 是定义在某一集合 $\mathscr{D}_{\mathfrak{A}}\subset\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 上的算子. 假设存在一非负函数 $v(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}v(x)=+\infty$,并且满足下列条件:

1) 对某一 $\lambda>0$ 和所有自然数 n, 算子 $\mathbf{A}_{v,\lambda}^{(n)}$:

$$\mathbf{A}_{v,\lambda}^{(n)}f=\mathfrak{A}f-\left(\lambda+\frac{1}{n}v\right)f$$

定义在 $\mathscr{C}_0$ 中处处稠密的集合 $\mathscr{D}_0^{(n)}$ 上,而且把 $\mathscr{D}_0^{(n)}$ 变为一在 $\mathscr{C}_0$ 中稠密的集;

2) 对所有 n, 该算子满足下述极大值原理: 如果 $f\in\mathscr{D}_0^{(n)}$, 而且 $f(x_0)\geqslant f(x)$, $f(x_0)>0$, 则 $\mathbf{A}_{v,\lambda}^{(n)}f(x_0)\leqslant 0$;

3) 存在一函数 $\chi_n(x)\in\mathscr{D}_0^{(n)}$ 的序列: $\sup\limits_n\chi_n(x)<\infty$, $\chi_n(x)$ 收敛于连续函数 $\chi(x)$, $\sup\limits_n\mathbf{A}_{v,\lambda}^{(n)}\chi_n<\infty$, 而且对所有 x

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{A}_{v,\lambda}^{(n)}\chi_n(x)=-1.$$

那末,上述条件是使算子 $\mathfrak{A}$ 为局部 Feller 过程的特征算子的充分条件; 而如果过程满足局部一致随机连续条件和一致局部有界条件,则上述条件对于 $\mathfrak{A}$ 是局部 Feller 过程的特征算子也是必要的.

证. 在这一小节前面已证明了条件 1) 和 2) 的必要性(应取 $\mathscr{D}_0^{(n)}$ 为以 $P(t, x, B)$ 为转移概率的过程之无穷小算子的定义域). 我们证明条件 3) 的必要性. 设 $\chi_n(x)=\mathbf{R}_\lambda^{(n)}g_n(x)$, 其中 $\mathbf{R}_\lambda^{(n)}$ 是以 $P_n(t, x, B)$ 为转移概率的过程的预解式，而 $g_n(x)\in\mathscr{C}_0$: $\sup\limits_n g_n(x)<\infty$, 在每一紧集上 $g_n(x)$ 一致收敛于 1.

那末

$$\mathbf{A}_{v,\lambda}^{(n)}\chi_n(x) = -\left[\lambda\chi_n(x) - \left(\mathfrak{A} - \frac{1}{n}v\right)\chi_n(x)\right] = -g_n(x).$$

此外，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mathbf{R}_\lambda^{(n)}g_n(x) &= \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}_x \\ &\quad\cdot\exp\left\{-\frac{1}{h}\int_0^t v(x_s)ds\right\}g_n(x_t)dt \\ &= \mathbf{E}_x\int_0^\xi e^{-\lambda t}dt \\ &= \mathbf{R}_\lambda^{(0)}\mathbf{1}(x).\end{aligned}$$

而由过程的 Feller 性知，函数 $\mathbf{R}_\lambda^{(0)}\mathbf{1}(x)$ 连续.

现在证明这些条件的充分性. 根据 § 4 定理 2 可以构造一过程，使它的无穷小算子在 $\mathscr{D}_0^{(n)}$ 上与 $\mathfrak{A}-\frac{1}{n}v$ 重合. 设 $P_n(t, x, B)$是该过程的转移概率，而 $x_t^{(n)}$ 是它的右连续轨道. 对 $m<n$ 记

$$P_m^{(n)}(t, x, B) = \mathbf{E}_x\chi_B(x_t^{(n)})\exp\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\int_0^t v(x_s)ds\right\}.$$

仿照前面容易验证，$P_m^{(n)}(t, x, B)$ 是规则转移概率. 和以 $P_n(t, x, B)$ 为转移概率的过程的算子的定义一样(见本小节前面)，可以定义所构造过程的特征算子. 此即

$$\mathfrak{A}_n + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)v = \mathfrak{A} - \frac{1}{m}v;$$

这里 $\mathfrak{A}_n$ 是过程 $x_t^{(n)}$ 的特征算子. 因为规则过程的转移概率决定于它的特征算子，故

$$P_m^{(n)}(t, x, B) = P_m(t, x, B).$$

所以对 $m<n$

$$\begin{aligned}P_m(t, x, B) &= \mathbf{E}_x\chi_B(x_t^{(n)})\exp\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\int_0^t v(x_s^{(n)})ds\right\} \\ &\leqslant \mathbf{E}_x\chi_B(x_t^{(n)}) = P_n(t, x, B).\end{aligned}$$

从而，存在极限

$$P^0(t, x, B) = \lim_{n\to\infty} P_n(t, x, B).$$

$P^0(t, x, B)$ 是某一过程的转移概率. 对于 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}, f > 0$, 由不等式

$$\int P_n(t, x, dy)f(y) \leqslant \int P^0(t, x, dy)f(y)$$

可见,当 $t \downarrow 0$ 时,在每一紧集上一致有 $\int P_n(t, x, dy)f(y) \to f(x)$.

事实上,若不然,则存在一点列 $x_k \to x_0$ 和 $\varphi \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, 使

$$\overline{\lim_{\substack{k\to\infty \\ t\to 0}}} \left|\varphi(x_k) - \int P^0(t, x_k, dy)\varphi(y)\right| > \delta > 0.$$

设 $\phi(x) \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, $\phi(x) < \phi(x_0) = 1\ (x \neq x_0)$, $V_\rho = \{x: \phi(x) < 1 - \rho\}$. 对点 x_0 的每一邻域 U 存在 $\rho > 0$, 使 $V_\rho \cup U = \mathscr{X}$. 现在选择 n, 邻域 U 和 $h > 0$, 使对 $x \in U$, $t < h$,

$$0 < \phi(x_0) - \int P_n(t, x, dy)\phi(y) < \varepsilon.$$

那末对 $x \in U$, $t < h$,

$$0 < \phi(x_0) - \int P^0(t, x, dy)\phi(y) < \varepsilon,$$

从而当 $x \in U$, $t < h$ 时有 $P^0(t, x, V_\rho) < \varepsilon/(1 - \rho)$. 所以

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{\substack{t\to 0 \\ k\to\infty}}} \left|\varphi(x_k) - \int P^0(t, x_k, dy)\varphi(y)\right| \\
&\quad \leqslant 2\|\varphi\| \overline{\lim_{\substack{t\to 0 \\ k\to\infty}}} P^0(t, x_k, V_\rho) + \sup_{x\in V_\rho} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \\
&\quad \leqslant 2\|\varphi\| \frac{\varepsilon}{1-\rho} + \sup_{x\in V_\rho} |\varphi(x) - \varphi(x_0)|,
\end{aligned}$$

即对任意 $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\delta \leqslant 2\|\varphi\| \dfrac{\varepsilon}{1-\rho} + \sup\limits_{x\in V_\rho} |\varphi(x) - \varphi(x_0)|$.

这与 $\delta > 0$ 矛盾. 这样就证明了,对于转移概率 $P^0(t, x, B)$, 局部一致随机连续条件成立.

我们证明,对所有 $f \in \mathscr{C}_0$, $\mathbf{T}_t^0 f(x) = \int P^0(t, x, dy)f(y)$ 连续, 即证明过程的局部 Feller 性. 注意到,对 $f \geqslant 0$

$$\int P_n(t, x, dy)f(y) \uparrow \int P^0(t, x, dy)f(y).$$

因此,对所有 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, $f > 0$,

$$\mathbf{R}_\lambda^0 f(x) = \int_0^\infty \int P^0(t, x, dy)f(y)e^{-\lambda t}dt$$

是连续函数

$$\mathbf{R}_\lambda^{(n)} f(x) = \int_0^\infty \int P_n(t, x, dy)f(y)e^{-\lambda t}dt$$

的递减序列的极限，所以它下半连续．我们现在证明，对所有 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, $\mathbf{R}_\lambda^0 f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$. 为此只需证明 $\mathbf{R}_\lambda^0 \mathbf{1} \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$. 而这由定理的条件 3) 即可得出,因为

$$\mathbf{R}_\lambda^0 \mathbf{1}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_x \int_0^\infty \exp\left\{-\lambda t - \frac{1}{n}\int_0^t v(x_s)ds\right\} g_n(x_t)dt,$$

其中 $g_n = \mathbf{A}_{v,\lambda}^{(n)} \chi_n$, 而条件 3) 保证了函数 χ_n 的存在性．因而,对所有 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, $\mathbf{R}_\lambda^0 f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$. 由 § 3 (4) 式

$$\mathbf{T}_t(\mathbf{R}_1^0)^2 f = e^t(\mathbf{R}_1^0)^2 f - te^t\mathbf{R}_1^0 f + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\mathbf{R}_\lambda^0 f}{(\lambda-1)^2} e^{\lambda t}d\lambda,$$

其中 $\sigma > 1$. 因此，对所有 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, $\mathbf{T}_t(\mathbf{R}_1^0)^2 f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$. 因为对 $\mu > 0$, $\mathbf{R}_\mu$ 不依赖于 μ, 故对所有 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 和 $\mu > 0$, $\mathbf{T}_t(\mathbf{R}_\mu^0)^2 f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$. 如果 $0 \leqslant g \leqslant f$, $g \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, $f \in (R_\mu^0)^2\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, 则函数 $\mathbf{T}_t(g-f)$ 和 $\mathbf{T}_t f$ 下半连续，而 $\mathbf{T}_t g$ 连续，故 $\mathbf{T}_t f$ 也连续．因为 $(R_\mu^0)^2\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 关于在每一紧集上的有界一致收敛的意义上在 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 中处处稠密，所以对任意非负的有限支集函数 (即在某一紧集之处为 0 的函数)，存在一函数 $f \in (\mathbf{R}_\mu^0)^2\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, 使 $g \leqslant f$. 从而,对 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 中的任意有限支集函数 g, $\mathbf{T}_t g \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$. 因为对于 $\mathscr{C}_0$ 中的函数，都可以用有限支集函数逼近它,故对所有 $f \in \mathscr{C}_0$, $\mathbf{T}_t f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$. 定理得证．

注． 在定理 4 的条件下，在无穷中断的过程未必是 Feller 过程．看下面的例子．

设 $\mathscr{X} = [0, \infty)$. $\mathscr{F}$ 是由区间 $[0, \pi/2 - \alpha)$ 上的函数 $\operatorname{tg}(t + \alpha)$, $0 \leqslant \alpha < \pi/2$, 组成．那末中断时间 ζ 依赖于初始值

$$\mathbf{P}_x\{\zeta = \pi/2 - \operatorname{arctg} x\} = 1,$$

因此 $x = \operatorname{ctg} x$ 是

$$\mathbf{T}_t 1(x) = \begin{cases} 1, & t < \pi/2 - \operatorname{arc\,tg} x, \\ 0, & t \geqslant \pi/2 - \operatorname{arc\,tg} x, \end{cases}$$

的间断点。 但是定理 4 的条件对于该过程成立。 算子 $\mathfrak{A}$ 在可微函数 $f(x)$ 上定义为

$$\mathfrak{A}f(x) = (1 + x^2)f'(x).$$

取 $v(x) = (1 + x^2)$. 那末当 $c > 0$ 时对于所有 $g \in \mathscr{C}_0$, 方程 $\lambda f - \mathfrak{A}f + c(1 + x^2)f = g$ 在 $\mathscr{C}_0$ 中有唯一解:

$$f(x) = \int_x^\infty \frac{g(z)}{1 + z^2} \exp\{c(x - z) + \lambda[\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} z]\}dz,$$

而

$$\mathbf{R}_\lambda^0 \mathbf{1}(x) = e^{\lambda \operatorname{arc\,tg} x} \frac{e^{-\lambda \operatorname{arc\,tg} x} - e^{-\lambda\pi/2}}{\lambda}$$

是连续函数。

如果对给定的 x_0, $\mathbf{T}_t^0 \mathbf{1}(x)$ 在点 t_0 对 t 连续, 则 $\mathbf{T}_{t_0}^0 \mathbf{1}(x)$ 在点 x_0 对 x 连续. 事实上,因为 $\mathbf{T}_t^0 f(x) = P_x^0\{\zeta > t\}$, 当 $x \to x_0$ 时,分布 $\mathbf{P}_x^0\{\zeta < t\}$ 的拉普拉斯变换收敛于分布 $\mathbf{P}_{x_0}^0\{\zeta < t\}$ 的拉普拉斯变换,由此即可得出上述结论. 这说明 $\mathbf{T}_t^0 \mathbf{1}(x)$ 对 t 的连续性保证过程的 Feller 性.

过程有界的条件 考虑不中断过程 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$,假设它的转移概率 $P(t, x, B)$ 满足局部一致随机连续条件. 可以象上一小节所指出的那样, 由该过程构造一过程 $\{\mathscr{F}^0, \mathscr{N}^0, \mathbf{P}_x^0\}$, 使之以 $P^0(t, x, B)$ 为转移概率并且在流出所有紧集的时刻中断. 如果 ζ 是此过程的中断时间,则过程 $\{\mathscr{F}^0, \mathscr{N}^0, \mathbf{P}_x^0\}$ 的轨道 x_t^0 在每个区间 $[0, \zeta - \varepsilon]$ 上有界(即完全处于某一紧集之中); 如果 $\zeta = +\infty$,则 x_t^0 在每个有穷区间上有界;反之, x_t^0 在每个有穷区间上有界是 $\zeta = +\infty$ 的充分条件. 因为过程 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$ 的轨道 x_t 在 $[0, \zeta)$ 上与 x_t^0 重合, 所以过程 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$ 与 $\{\mathscr{F}^0, \mathscr{N}^0, \mathbf{P}^0\}$ 重合, 是过程在每个有穷区间上有界的必要和充分条件(简称这样的过程为**有界的**). 而此条件成立, 当且仅当转移概率 $P(t,$

x, B）与 $P^0(t, x, B)$ 相同. 因为由转移概率 $P(t, x, B)$ 求转移概率 $P^0(t, x, B)$ 并不简单，所以验证上述准则并不甚方便. 下面引进过程有界的某些条件，这些条件的验证往往是比较简便的.

定理 5 假设 $\{\mathscr{T}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$ 是不中断的 Feller 马尔科夫过程，它的轨道满足一致局部有界条件和局部一致连续条件，$\mathfrak{A}$ 是它的特征算子. $\{\mathscr{T}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$ 为有界过程的必要和充分条件是存在一非负连续函数，使

a） $\lim\limits_{x\to\infty} v(x) = +\infty$,

b）对所有 n，$\mathfrak{A} - \frac{1}{n} v$ 是某一规则马尔科夫过程的无穷小算子的扩张，

c）存在一有界收敛于 1 的函数 $\chi_n(x) \in \mathscr{C}_0$ 的序列，使 $\mathfrak{A}\chi_n - \frac{1}{n} v\chi_n \in \mathscr{C}_0$，并且有界收敛于 0.

证. 必要性. 选取 v 为上一小节所说的函数，它满足条件 a）和 b）. 设 $\mathbf{R}_\lambda^{(n)}$ 是以 $\mathfrak{A} - \frac{1}{n} v$ 为无穷小算子的过程的预解式. 令 $\chi_n(x) = \mathbf{R}_\lambda^{(n)} g_n(x)$. 那末

$$\lambda\chi_n(x) - \mathfrak{A}\chi_n(x) + \frac{1}{n} v(x)\chi_n(x) = g_n(x),$$

如果 $g_n(x)$ 有界收敛于 1，则

$$\chi_n(x) = \mathbf{E}_x \int_0^\infty \exp\left\{-\lambda t - \frac{1}{n}\int_0^t v(x_s)ds\right\} g_n(x_t)dt$$

$$\to \mathbf{E}_x \int_0^\zeta e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

因为根据假设 $\zeta = +\infty$，从而 $\left(\mathfrak{A} - \frac{1}{n} v\right)\chi_n$ 有界收敛于 0.

充分性. 设

$$P_n(t, x, B) = \mathbf{E}_x^0 \chi_B(x_t) \exp\left\{-\frac{1}{n}\int_0^t v(x_s)ds\right\}.$$

半群 $\mathbf{T}_t^{(n)}$：

$$\mathbf{T}_t^{(n)} f = \int P_n(t, x, dy) f(y)$$

把 $\mathscr{C}_0$ 变为 $\mathscr{C}_0$，它的特征算子(见上一小节) $\mathfrak{A}^{(n)}$ 定义为

$$\mathfrak{A}^{(n)} f = \mathfrak{A} f - \frac{1}{n} v f.$$

所以根据定理 1，半群 $\mathbf{T}_t^{(n)}$ 的生成算子 $\mathbf{A}^{(n)}$ 对于一切使 $\mathfrak{A} f - \frac{vf}{n} \in \mathscr{C}_0$ 的 $f \in \mathscr{C}_0$ 有定义，并且等于 $\mathfrak{A}^{(n)}$.

因为

$$\mathbf{R}_\lambda^0 \mathbf{1}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_x^0 \int_0^\infty \exp\left\{ -\frac{1}{n} \int_0^t v(x_s) ds - \lambda t \right\} g_n(x_t) dt,$$

其中 $\mathbf{R}_\lambda^0$ 是以 $P^0(t, x, B)$ 为转移概率的过程的预解式，而 $g_n(x)$ 是任意有界收敛于 1 的函数序列，所以如果取函数 $g_n(x)$ 为

$$g_n(x) = \chi_n(x) - \frac{1}{\lambda}\left[\mathfrak{A}\chi_n(x) - \frac{1}{n} v(x) \chi_n(x) \right],$$

其中 χ_n 满足条件 c)，则有

$$\mathbf{R}_\lambda^0 \mathbf{1}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{R}_\lambda^{(n)} \left\{ \chi_n(x) - \frac{1}{\lambda}\left[\mathfrak{A} - \frac{1}{n} v(x) \right] \chi_n(x) \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda} \chi_n(x) = \frac{1}{\lambda},$$

其中 $\mathbf{R}_\lambda^{(n)}$ 是半群 $\mathbf{T}_t^{(n)}$ 的预解式. 由此可见，$P^0(t, x, \mathscr{X}) = 1$；而由于 $P(t, x, B) - P^0(t, x, B) \geqslant 0$，$P(t, x, \mathscr{X}) - P^0(t, x, \mathscr{X}) = 0$，故 $P(t, x, B) = P^0(t, x, B)$. 定理得证.

注 1. 满足局部一致随机连续条件和一致局部有界条件的过程有界的必要和充分条件是：对于任意非负的连续函数 $v(x)$，存在一有界收敛于 1 的函数列 $\bar{\chi}_n(x)$：$\bar{\chi}_n(x) \in \mathscr{C}_0$，$\mathfrak{A}\bar{\chi}_n \in \mathscr{C}_0$ 并且一致收敛于 0，而且对于一切 n 有 $v\bar{\chi}_n \in \mathscr{C}_0$. 事实上，我们选择 $v(x)$，使定理 5 的条件 a) 和 b) 成立. 其次，令 $\lambda_n = \sup_x |v(x) \cdot \bar{\chi}_n(x)|$，并且选取一数列 m_n，使 $\frac{1}{n}\lambda_{m_n} \to 0$ ($\{m_n\}$ 中有的数可能相同，但是 $m_n \to \infty$). 那末定理 5 的条件 c) 对于函数列 $\chi_n = \bar{\chi}_{m_n}$

成立. 如果存在有限支集函数列 χ_n: $\chi_n \in \mathscr{C}_0$ 并且有界地收敛于1,而 $\mathfrak{A}\chi_n \in \mathscr{C}_0$ 并且有界收敛于0,则所列举的条件成立.

注 2. 我们通过过程的预解式来表达它有界的条件. 设

$$R_\lambda(x, B) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P(t, x, B) dt.$$

如果存在一连续函数 $w(x) > 0$, 使对某一 $\lambda > 0$ 和所有 x, 积分

$$\int R_\lambda(x, dy) w(y) = h(x)$$

有定义, $h(x)$ 连续,而且当 $x \to \infty$ 时 $h(x) \to +\infty$, 则过程 x_t 有界. 为证明这一点我们考虑过程

$$\xi(t) = e^{-\lambda t} h(x_t).$$

这个过程是半鞅, 因为

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_x[\xi(t+h) | \xi(s), s \leqslant t] &= e^{-\lambda(t+h)} \mathbf{E}_x[h(x_{t+h}) | \mathscr{N}_t] \\
&= e^{-\lambda(t+h)} \mathbf{E}_{x_t} h(x_h) \\
&= e^{-\lambda(t+h)} \mathbf{E}_{x_t} \mathbf{E}_{x_h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} w(x_s) ds \\
&= e^{-\lambda t} \mathbf{E}_{x_t} \int_h^\infty e^{-\lambda s} w(x_s) ds \\
&\leqslant e^{-\lambda t} \mathbf{E}_{x_t} \int_0^\infty e^{-\lambda s} w(x_s) ds \\
&= \xi(t).
\end{aligned}$$

因此, 根据第一卷第三章 § 4 的定理, 过程 $\xi(t)$ 有界. 所以过程 $h(x_t)$ 有界, 而因为当 $x \to +\infty$ 时 $h(x) \to +\infty$, 故过程 x_t 也有界.

定义 Borel 函数 $h(x)$ 称为过程 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathrm{P}_x\}$ 的 λ 调和的, 若对任意马尔科夫时间 $\tau < \zeta$ (其中 ζ 是首次流出所有紧集的时间) 满足

$$\mathbf{E}_x e^{-\lambda\tau} h(x_\tau) = h(x)$$

(此等式本身也意味着左侧数学期望的存在).

注 3. 不中断过程 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathrm{P}_x\}$ 有界, 当且仅当除 $h \equiv 0$ 外, 再没有其它 λ 调和函数.

事实上，如果 $\zeta=+\infty$，则 $t<\zeta$ 是马尔科夫时间，所以对于有界 λ 调和函数 $h(x)$，有

$$\mathbf{E}_x e^{-\lambda t}h(x_t)=e^{-\lambda t}\mathbf{E}_x h(x_t)=h(x).$$

当 $t\to\infty$ 时取极限，得 $h(x)=0$.

现在假设对某一 x，$\mathbf{P}_x\{\zeta=+\infty\}<1$. 那末

$$h(x)=\mathbf{E}_x e^{-\lambda\zeta}$$

是有界 Borel 函数，而且对任意马尔科夫时间 $\tau<\zeta$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x e^{-\lambda\tau}h(x_\tau)&=\mathbf{E}_x e^{-\lambda\tau}\mathbf{E}_{x_\tau}e^{-\lambda\zeta}\\&=\mathbf{E}_x e^{-\lambda\tau}\mathbf{E}_x(\theta_\tau e^{-\lambda\zeta}|\mathscr{N}_\tau)\\&=\mathbf{E}_x e^{-\lambda\tau}\theta_\tau e^{-\lambda\zeta}\\&=\mathbf{E}_x e^{-\lambda\zeta}\\&=h(x),\end{aligned}$$

因为 $\theta_\tau\zeta=\zeta-\tau$. 因此，$h(x)$ 是过程 $\{\mathscr{F},\mathscr{N},\mathbf{P}_x\}$ 的(在使 $\mathbf{P}_x\{\zeta=+\infty\}<1$ 的点 x)不等于 0 的有界 λ 调和函数. 命题得证.

不中断强马尔科夫过程 设 $\{\mathscr{F},\mathscr{N},\mathbf{P}_x\}$ 是右连续的不中断强马尔科夫过程，满足局部一致连续条件和一致局部有界条件. 设 $\mathfrak{A}$ 是它的特征算子，$\mathbf{R}_\lambda$ 是预解式，x_t 是它的轨道；设 ζ^0 是首次流出所有紧集的时间，x_t^0 是由原过程经在时刻 ζ^0 中断而得到的过程的轨道，$\mathbf{R}_\lambda^0$ 是它的预解式. 我们的目的是描述预解式 $\mathbf{R}_\lambda$；换句话说，就是要描绘所有特征算子为 $\mathfrak{A}$ 的不中断过程. 在研究这个问题时，我们假设下面的"从无穷规则返回的条件"成立.

从无穷规则返回的条件：对任意紧集 K 和 $\varepsilon>0$ 存在一紧集 K_1，使 $\mathbf{P}_x\{x_{\zeta^0}\in K_1\}\geqslant 1-\varepsilon$，$x\in K$.

由等式

$$\mathbf{E}_x\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(x_t)dt=\mathbf{E}_x\int_0^{\zeta^0}e^{-\lambda t}f(x_t)dt+\mathbf{E}_x e^{-\lambda\zeta^0}\int_0^\infty e^{-\lambda s}f(x_{\zeta^0+s})ds$$

明显地可以得到

$$\mathbf{R}_\lambda f = \mathbf{R}_\lambda^0 f + \mathbf{E}_x e^{-\lambda\zeta^0}\mathbf{R}_\lambda f(x_{\zeta^0}). \tag{13}$$

我们引进算子

$$\mathscr{T}_\lambda g(x) = \mathbf{E}_x e^{-\lambda\zeta^0} g(x_{\zeta^0})$$

并且研究它的性质. 对属于算子 $\mathbf{R}_\lambda$ 的值域的所有 g，函数 $\mathscr{T}_\lambda g \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$. 根据从无穷返回的条件，对于任意紧集 K，当 $x \in K$ 时，$\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 上的测度族

$$v_\lambda(x, B) = \mathbf{E}_x e^{-\lambda\zeta^0}\chi_B(x_{\zeta^0})$$

是紧的. 由于当 $x_n \to x_0$ 时测度序列 $v_\lambda(x_n, \cdot)$ 弱紧，而且对所有 $f \in \mathbf{R}_\lambda(\mathscr{C}_{\mathscr{X}})$，有

$$\int v_\lambda(x_0, dy) f(y) = \lim_{n\to\infty}\int v_\lambda(x_n, dy) f(y),$$

可见对一切 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 有

$$\int v_\lambda(x_0, dy) f(y) = \lim_{n\to\infty}\int v_\lambda(x_n, dy) f(y),$$

因为 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 上的任何测度 μ 都唯一地决定于积分

$$\int f(y)\mu(dy), \quad f \in \mathbf{R}_\lambda(\mathscr{C}_{\mathscr{X}}).$$

因为 $\mathscr{T}_\lambda f(x) = \int v_\lambda(x, dy) f(y)$，故对所有 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$，$\mathscr{T}_\lambda f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$.

对所有 $g \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$，函数 $\mathscr{T}_\lambda g$ 是 λ 调和的：

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_x e^{-\lambda\tau}\mathbf{E}_{x_\tau} e^{-\lambda\zeta^0} g(x_{\zeta^0}) &= \mathbf{E}_x e^{-\lambda\tau}\mathbf{E}[e^{-\lambda\theta_\tau\zeta^0} g(\theta_\tau x_{\zeta^0}) \mid \mathscr{N}_\tau] \\
&= \mathbf{E}_x e^{-\lambda\tau}\mathbf{E}[e^{-\lambda(\zeta^0-\tau)} g(x_{\zeta^0}) \mid \mathscr{N}_\tau] \\
&= \mathbf{E}_x e^{-\lambda\zeta^0} g(x_{\zeta^0}) \\
&= \mathscr{T}_\lambda g(x)
\end{aligned}$$

$$(\tau < \zeta^0, \theta_\tau\zeta^0 = \zeta^0 - \tau, \theta_\tau g(x_{\zeta^0}) = g(x_{\zeta^0})).$$

显然，对于 $g \geqslant 0$ 有 $\mathscr{T}_\lambda g \geqslant 0$，而 $\mathscr{T}_\lambda \mathbf{1} = \mathbf{E}_x e^{-\lambda\zeta^0}$.

注意，对任意有界 λ 调和函数 φ，（当 $\zeta^0 < \infty$ 时）存在极限 $\varphi(x_{\zeta^0-0}) = \lim \varphi(x_{\tau_n})$，其中 τ_n 是任一递增的马尔科夫时间序列，$\tau_n \uparrow \zeta^0$. 这由如下事实可知，序列 $e^{-\lambda\tau_n}\varphi(x_{\tau_n})$ 是鞅：

$$\mathbf{E}_x[e^{-\lambda\tau_n}\varphi(x_{\tau_n}) \mid \mathscr{N}_{\tau_{n-1}}]$$

$$= \mathbf{E}_{x_{\tau_{n-1}}}[e^{-\lambda(\tau_n-\tau_{n-1})}\varphi(x_{\tau_n-\tau_{n-1}})]e^{-\lambda\tau_{n-1}}$$
$$= e^{-\tau_{n-1}}\varphi(x_{\tau_{n-1}}),$$

从而存在极限

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\lambda\tau_n}\varphi(x_{\tau_n}) = e^{-\lambda\zeta^0}\lim_{n\to\infty}\varphi(x_{\tau_n}).$$

利用 $\mathbf{R}_\lambda$ 和 $\mathbf{R}_\lambda^0$ 的预解方程，得

$$\begin{aligned}(\mu-\lambda)\mathbf{R}_\lambda\mathbf{R}_\mu &= \mathbf{R}_\lambda - \mathbf{R}_\mu \\ &= \mathbf{R}_\lambda^0 - \mathbf{R}_\mu^0 + \mathscr{T}_\lambda(\mathbf{R}_\lambda - \mathbf{R}_\mu) \\ &\quad + (\mathscr{T}_\lambda - \mathscr{T}_\mu)\mathbf{R}_\mu \\ &= (\mu-\lambda)[\mathbf{R}_\lambda^0 + \mathscr{T}_\lambda\mathbf{R}_\lambda][\mathbf{R}_\mu^0 + \mathscr{T}_\mu\mathbf{R}_\mu] \\ &= (\mu-\lambda)\Big[\frac{\mathbf{R}_\lambda^0 - \mathbf{R}_\mu^0}{\mu-\lambda} + \mathscr{T}_\lambda\mathbf{R}_\lambda\mathbf{R}_\lambda^0 \\ &\quad + \mathbf{R}_\lambda^0\mathscr{T}_\mu\mathbf{R}_\mu + \mathscr{T}_\lambda\mathbf{R}_\lambda\mathscr{T}_\mu\mathbf{R}_\mu\Big].\end{aligned}$$

由此可见

$$\begin{aligned}&\mathscr{T}_\lambda(\mathbf{R}_\lambda - \mathbf{R}_\mu) + (\mathscr{T}_\lambda - \mathscr{T}_\mu)\mathbf{R}_\mu \\ &\quad = (\mu-\lambda)\{\mathscr{T}_\lambda\mathbf{R}_\lambda[\mathbf{R}_\mu^0 + \mathscr{T}_\mu\mathbf{R}_\mu] + \mathbf{R}_\lambda^0\mathscr{T}_\mu\mathbf{R}_\mu\} \\ &\quad = (\mu-\lambda)[\mathscr{T}_\lambda\mathbf{R}_\lambda\mathbf{R}_\mu + \mathbf{R}_\lambda^0\mathscr{T}_\mu\mathbf{R}_\mu].\end{aligned}$$

因此 $(\mathscr{T}_\lambda - \mathscr{T}_\mu)\mathbf{R}_\mu = (\mu-\lambda)\mathbf{R}_\lambda^0\mathscr{T}_\mu\mathbf{R}_\mu.$

因为算子 $\mathbf{R}_\mu$ 可逆，故在算子 $\mathbf{R}_\mu$ 的值域内

$$\mathscr{T}_\lambda - \mathscr{T}_\mu = \mathbf{R}_\lambda^0\mathscr{T}_\mu. \tag{14}$$

由于 (14) 式两侧算子有界可知，(14) 式对所有 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 成立.

由式

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_\lambda^0\mathbf{1}(x) &= \mathbf{E}_x\int_0^{\zeta^0} e^{-\lambda t}dt \\ &= \mathbf{E}\,\frac{1-e^{-\lambda\zeta^0}}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda}[1 - \mathscr{T}_\lambda\mathbf{1}(x)]\end{aligned}$$

可见

$$\mathscr{T}_\lambda\mathbf{1}(x) = 1 - \lambda\mathbf{R}_\lambda^0\mathbf{1}(x), \tag{15}$$

以后我们要用到算子 $\mathscr{T}_\lambda$ 的不变函数．这些函数容易描述 如果 $\varphi\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, $\mathscr{T}_\lambda\varphi=\varphi$, 而马尔科夫时间序列 $\tau_n\uparrow\zeta^0$, 则对任意 $m<n$

$$\mathbf{E}_{x_{\tau_m}}e^{-\lambda\tau_n}\varphi(x_{\tau_n})=\mathbf{E}_{x_{\tau_m}}e^{-\lambda\zeta^0}\varphi(x_{\zeta^0}).$$

由此可见

$$\mathbf{E}_x[e^{-\lambda(\tau_n-\tau_m)}\varphi(x_{\tau_n})|\mathscr{N}_{\tau_n}]=\mathbf{E}[e^{-\lambda(\zeta^0-\tau_m)}\varphi(x_{\zeta^0})|\mathscr{N}_{\tau_m}].$$

先后令 $n\to\infty$ 和 $m\to\infty$,取极限,得

$$\varphi(x_{\zeta^0-0})=\mathbf{E}[\varphi(x_{\zeta^0})|\mathscr{N}_{\zeta^0-0}],$$

其中 $\mathscr{N}_{\zeta^0-0}\equiv\bigcup_{m=1}^{\infty}\mathscr{N}_{\tau_m}$, 因为 $\varphi(x_{\zeta^0-0})$ 关于 $\mathscr{N}_{\zeta^0-0}$ 可测．容易验证，这个条件对于 $\mathscr{T}_\lambda\varphi=\varphi$ 是充分的．为此要利用 ζ^0 的 $\mathscr{N}_{\zeta^0-0}$ 可测性和下面的事实：对于 λ 调和函数 φ

$$\varphi(x)=\mathbf{E}_xe^{-\lambda\zeta^0}\varphi(x_{\zeta^0-0}).$$

算子

$$\mathbf{R}_\lambda^1=\mathbf{R}_\lambda^0+\sum_{k=1}^{\infty}(\mathscr{T}_\lambda)^k\mathbf{R}_\lambda^0, \tag{16}$$

(其中 $(\mathscr{T}_\lambda)^k$ 是算子 $\mathscr{T}_\lambda$ 的 k 次幂)是方程(13)的最小解．我们证明 $\mathbf{R}_\lambda^1$ 也是某一齐次马尔科夫过程的预解式．为此我们引进随机变量 $\zeta_k^0=\theta_{\zeta^0}\zeta_{k-1}^0+\zeta_{k-1}^0$, $k>1$, $\zeta_1^0=\zeta^0$. ζ_k^0 是过程 x_t 首达无穷的时间．所有 ζ_k^0 都是马尔科夫时间．令 $\zeta^1=\sup\limits_k\zeta_k^0$, 它也是马尔科夫时间．由过程的强马尔科夫性可见，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x\int_{\zeta_k^0}^{\zeta_{k+1}^0}e^{-\lambda t}f(x_t)dt&=\mathbf{E}_xe^{-\lambda\zeta_k^0}\mathbf{E}_{x_{\zeta_k^0}}\int_0^{\zeta^0}e^{-\lambda t}f(x_t)dt\\&=\mathbf{E}_xe^{-\lambda\zeta_k^0}\mathbf{R}_\lambda^0f(x_{\zeta_k^0}).\end{aligned}$$

此外

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_xe^{-\lambda\zeta_k^0}g(x_{\zeta_k^0})&=\mathbf{E}_xe^{-\lambda\zeta^0}\mathbf{E}_{x_{\zeta^0}}e^{-\lambda\zeta_{k-1}^0}g(x_{\zeta_{k-1}^0})\\&=\mathscr{T}_\lambda[\mathbf{E}_xe^{-\lambda\zeta_{k-1}^0}g(x_{\zeta_{k-1}^0})].\end{aligned}$$

所以 $\mathbf{E}_xe^{-\lambda\zeta_k^0}g(x_{\zeta_k^0})=(\mathscr{T}_\lambda)^kg(x)$, 而

$$\mathbf{E}_x\int_{\zeta_k^0}^{\zeta_{k+1}^0}e^{-\lambda t}f(x_t)dt=(\mathscr{T}_\lambda)^k\mathbf{R}_\lambda^0f(x).$$

因此

$$\mathbf{R}_\lambda^1 f(x) = \mathbf{R}_\lambda^0 f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathscr{T}_\lambda)^k \mathbf{R}_\lambda^0 f(x)$$

$$= \mathbf{E}_x \left[\int_0^{\zeta} e^{-\lambda t} f(x_t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\zeta_k^0}^{\zeta_{k+1}^0} e^{-\lambda t} f(x_t) dt \right]$$

$$= \mathbf{E}_x \int_0^{\zeta^0} e^{-\lambda t} f(x_t) dt.$$

这样，$\mathbf{R}_\lambda^1$ 是一马尔科夫过程的预解式，它的转移概率为

$$P^1(t, x, B) = \mathbf{P}_x\{x_t \in B, \zeta^1 > t\}.$$

设 $\mathbf{R}_\lambda^0$ 是一在首达无穷时中断的局部 Feller 过程 $\{\mathscr{F}^0, \mathscr{N}^0, \mathbf{P}_x^0\}$ 的预解式，x_t^0 是该过程的轨道. 定理 4 给出了对这类过程的特征算子的描述. 记 H_λ 为过程 $\{\mathscr{F}^0, \mathscr{N}^0, \mathbf{P}_x^0\}$ 的所有连续有界 λ 调和函数的集合. 我们找出为使 (16) 式决定一齐次马尔科夫过程的预解式算子 $\mathscr{T}_\lambda$ 应满足的条件.

引理 6 设从 $\mathscr{C}_x$ 到 H_λ 的算子 $\mathscr{T}_\lambda$ 满足下列条件:

1) 对于 $f \geqslant 0$, $\mathscr{T}_\lambda f \geqslant 0$,

2) $\mathscr{T}_\lambda \mathbf{1} = 1 - \mathbf{R}_\lambda^0 \mathbf{1}$,

3) $\mathscr{T}_\lambda - \mathscr{T}_\mu = (\mu - \lambda) \mathbf{R}_\lambda^0 \mathscr{T}_\mu$.

那末 (16) 式决定一随机连续齐次过程的预解式. 这个过程是局部 Feller 的，如果满足条件

4) $\mathbf{R}_\lambda^1 \mathbf{1}(x) \in \mathscr{C}_x$;

这个条件等价于下面的条件

4′) $\lim\limits_{n\to\infty} (\mathscr{T}_\lambda)^n \mathbf{1}(x) \in \mathscr{C}_x$.

证. 选择一函数 $f_n \in \mathscr{C}_0$ 的序列，使 $\{f_n\}$ 在 $\mathscr{C}_0$ 中(关于 $\mathscr{C}_0$ 中的范数) 处处稠密. 因为 $\mathscr{T}_\lambda f_n(x)$ 是 λ 调和函数，故对任意马尔科夫时间序列 $\tau_n \uparrow \zeta^0$，以概率 $\mathbf{P}_x = 1$ 存在极限

$$\lim_{\tau_n \uparrow \zeta^0} e^{-\lambda \tau_n} \mathscr{T}_\lambda f_m(x_{\tau_n}) = e^{-\lambda \zeta^0} \mathscr{T}_\lambda f_m(x_{\zeta^0 - 0}).$$

记 $\mathscr{F}_0 = \{x_t^0: \mathscr{T}_\lambda f_m(x_{\zeta^0-0})$ 对所有 m 存在$\}$. 那末对所有 $x \in \mathscr{X}$

$$\mathbf{P}_x\{\mathscr{F}_0 \backslash \{\zeta^0 < \infty\}\} = 0.$$

如果 $x_t^0 \in \mathscr{F}_0$，则对所有 $f \in \mathscr{C}_0$，$\mathscr{T}_\lambda f(x_{\zeta^0-0})$ 存在．显然，对于每个 $x_t^0 \in \mathscr{F}_0$，算子 $\mathscr{T}_\lambda f(x_{\zeta^0-0})$ 是 $\mathscr{C}_0$ 上的线性泛函，从而可以表为

$$\mathscr{T}_\lambda f(x_{\zeta^0-0}) = \int m(x^0(\cdot), dy) f(y),$$

其中 $m(x^0(\cdot), \cdot)$ 是 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 上的测度，对所有 $B \in \mathfrak{B}$，$m(x^0(\cdot), B)$ 为 $\mathscr{N}^0$ 可测．注意到，对于有界函数 $f \geqslant 0$，序列

$$e^{-\lambda\tau_n} \mathbf{R}_\lambda^0 f(x_{\tau_n})$$

是有界非负鞅，而且当 $n \to \infty$ 时

$$\mathbf{E}_x^0 e^{-\lambda\tau_n} \mathbf{R}_\lambda^0 f(x_{\tau_n}) = \mathbf{E}_x \int_{\tau_n}^{\zeta^0} e^{-\lambda s} f(x_s) ds \to 0.$$

所以对 $\zeta^0 < \infty$，存在极限

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{R}_\lambda^0 f(x_{\tau_n}) = \mathbf{R}_\lambda^0 f(x_{\zeta^0-0}),$$

而且对任意 x 该极限以概率 $\mathbf{P}_x = 1$ 等于 0。

现在由条件 3) 可见，对任意 $\lambda > 0$ 和 $\mu > 0$，

$$\mathscr{T}_\lambda f(x_{\zeta^0-0}) = \mathscr{T}_\mu f(x_{\zeta^0-0}).$$

由条件 2) 可见，$\mathscr{T}_\lambda \mathbf{1}(x_{\zeta^0-0}) = 1$，即对 $x^0(\cdot) \in \mathscr{F}_0$，$m(x^0(\cdot), \mathscr{X}) = 1$．我们证明，对一切 $f \in \mathscr{C}_x$ 有

$$\mathscr{T}_\lambda f(x) = \mathbf{E}_x^0 e^{-\lambda\zeta^0} \int m(x^0(\cdot), dy) f(y) \tag{17}$$

（当 $\zeta^0 = +\infty$ 时，虽然 $m(x^0(\cdot), \cdot)$ 无定义，但是我们设等式左侧等于 0）．事实上，因为 $\mathscr{T}_\lambda f$ 是 λ 调和函数，故对任意马尔科夫时间 $\tau < \zeta^0$ 有

$$\mathscr{T}_\lambda f(x) = \mathbf{E}_x^0 \mathscr{T}_\lambda f(x_\tau^0) e^{-\lambda\tau}.$$

当 $\tau \uparrow \zeta^0$ 时，在右侧的数学期望号 $\mathbf{E}_x$ 下取极限，即可得 (17) 式。

现在设函数 $v_\lambda(x)$ 可表为

$$v_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} g(t, x) dt.$$

我们考虑 $\mathscr{T}_\lambda v_\lambda(x)$ 的表达式．由 (17) 可见

$$\mathscr{T}_\lambda v_\lambda(x) = \mathbf{E}_x e^{-\lambda\zeta^0} \int m(x^0(\cdot), dy) \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} g(t, dy) dt\right]$$

$$= \mathbf{E}_x e^{-\lambda\zeta^0}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\int m(x^0(\cdot), dy)g(t, y)\right]dt$$

$$= \mathbf{E}_x^0\int_0^\infty e^{-\lambda t}\chi_{\{\zeta^0<t\}}\int g(t-\zeta^0, y)m(x^0(\cdot), dy)dt.$$

从而

$$\mathscr{T}_\lambda v_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\mathbf{E}_x^0\chi_{\{\zeta^0<t\}}\right.$$

$$\left.\cdot\int g(t-\zeta^0, y)m(x^0(\cdot), dy)\right]dt,$$

即 $\mathscr{T}_\lambda v_\lambda(x)$ 也是某一函数的拉普拉斯变换．由这一事实可见，对所有整数 k 存在函数 $g_k(t, x, B)$，使

$$(\mathscr{T}_\lambda)^k\mathbf{R}_\lambda^0 f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int g_k(t, x, dy)f(y)dt; \tag{18}$$

$g_k(t, x, B)$ 关于 B 是测度，它决定于下列递推关系式，

$$g_1(t, x, B) = \mathbf{E}_x^0\chi_{\{\zeta^0<t\}}\int P^0(t-\zeta^0, y, B)m(x^0(\cdot), dy), \tag{19}$$

$$g_k(t, x, B) = \mathbf{E}_x^0\chi_{\{\zeta^0<t\}}\int g_{k-1}(t-\zeta^0, y, B)m(x^0(\cdot), dy),$$
$$k>1. \tag{20}$$

我们证明级数

$$P^1(t, x, B) = P^0(t, x, B) + \sum_{k=1}^\infty g_k(t, x, B) \tag{21}$$

收敛．为此只需证明级数

$$P^0(t, x, \mathscr{X}) + \sum_{k=1}^\infty g_k(t, x, \mathscr{X})$$

收敛．因为

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[P^0(t, x, \mathscr{X}) + \sum_{k=1}^n g_k(t, x, \mathscr{X})\right]dt$$

$$= \mathbf{R}_\lambda^0\mathbf{1}(x) + \sum_{k=1}^n(\mathscr{T}_\lambda)^k\mathbf{R}_\lambda^0\mathbf{1}(x)$$

$$= \frac{1}{\lambda}[1-\mathscr{T}_\lambda\mathbf{1}(x)] + \sum_{k=1}^n(\mathscr{T}_\lambda)^k[1-\mathscr{T}_\lambda\mathbf{1}(x)]$$

$$= \frac{1}{\lambda}[1 - (\mathscr{T}_\lambda)^{n+1}\mathbf{1}(x)],$$

故存在

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\Big[P^0(t, x, \mathscr{X}) + \sum_{k=1}^{n} g_k(t, x, \mathscr{X})\Big]dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Big[P^0(t, x, \mathscr{X}) + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t, x, \mathscr{X})\Big]dt,$$

而且对几乎所有 t

$$P^0(t, x, \mathscr{X}) + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t, x, \mathscr{X}) < \infty.$$

由不等式

$$\chi_{\{\zeta^0<t\}}P^0(t-\zeta^0, y, \mathscr{X}) \geqslant \chi_{\{\zeta^0<s\}}P^0(s-\zeta^0, y, \mathscr{X}),\ t<s,$$

可见，$g_1(t, x, \mathscr{X})$ 对 t 不增．利用数学归纳法由（20）式可知，当 $k>1$ 时，$g_k(t, x, \mathscr{X})$ 对 t 不增．因此对所有 $t>0$，级数

$$P^1(t, x, \mathscr{X}) = P^0(t, x, \mathscr{X}) + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t, x, \mathscr{X})$$

收敛，并且是 t 的非增函数．这样，（21）式完全决定函数 $P^1(t, x, B)$，而且

$$\mathbf{R}_\lambda^1 f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int P^1(t, x, dy)f(y).$$

为证明 $P^1(t, x, B)$ 是一过程的转移概率，我们验证 $\mathbf{R}_\lambda^1$ 满足预解方程：

$$\mathbf{R}_\lambda^1 - \mathbf{R}_\mu^1 = \mathbf{R}_\lambda^0 - \mathbf{R}_\mu^0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\mathscr{T}_\lambda)^k(\mathbf{R}_\lambda^0 - \mathbf{R}_\mu^0)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}[(\mathscr{T}_\lambda)^k - (\mathscr{T}_\mu)^k]\mathbf{R}_\mu^0$$

$$= (\mu-\lambda)\Big[\mathbf{R}_\lambda^0\mathbf{R}_\mu^0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\mathscr{T}_\lambda)^k\mathbf{R}_\lambda^0\mathbf{R}_\mu^0$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1}(\mathscr{T}_\lambda)^i\mathbf{R}_\lambda^0(\mathscr{T}_\mu)^{k-1}\mathbf{R}_\mu^0\Big]$$

$$= (\mu - \lambda)\left[\mathbf{R}_\lambda^0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathscr{T}_\lambda)^k \mathbf{R}_\lambda^0 \right]$$

$$\cdot \left[\mathbf{R}_\mu^0 + \sum_{i=1}^{\infty} (\mathscr{T}_\mu)^i \mathbf{R}_\mu^0 \right]$$

$$= (\mu - \lambda) \mathbf{R}_\lambda^1 \mathbf{R}_\mu^1.$$

从而 $P^1(t, x, B)$ 是转移概率. 现在假设条件 4) 成立. 那末对 $f \geqslant 0, f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$

$$\mathbf{R}_\lambda^1 f = \lim_{n\to\infty}\left[\mathbf{R}_\lambda^0 f + \sum_{k=1}^{n} (\mathscr{T}_\lambda)^k \mathbf{R}_\lambda^0 f \right],$$

因此 $\mathbf{R}_\lambda^1 f$ 下半连续. 由 $\mathbf{R}_\lambda^1 \mathbf{1}$ 的连续性可知, 对于 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, 有 $\mathbf{R}_\lambda^1 f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$. 过程局部 Feller 性的证明和定理 4 完全相同. 引理得证.

注. 我们看如何由过程 $\{\mathscr{F}^0, \mathscr{N}^0, \mathbf{P}_x^0\}$ 构造转移概率为 $P^1(t, x, B)$ 的过程 $\{\mathscr{F}^1, \mathscr{N}^1, \mathbf{P}_x^1\}$. 取 $\mathscr{F}^1$ 为具有如下形状的函数 x_t^1 的集合: 它定义在 $\bigcup_k [\zeta_k^0, \zeta_{k+1}^0)$ 上, 其中 $\zeta_0^0 = 0$, $\zeta_1^0 = \zeta^0$; 当 $t \in [D, \zeta_1^0)$ 时, $x_t^1 = x_t^0$, 其中 x_t^0 是 $\mathscr{F}^0$ 中的某一轨道, $\zeta^0 = \zeta_1^0$ 是它的中断时间; 当 $t \in [\zeta_k^0, \zeta_{k+1}^0)$ 时, $x_t^1 = x_{t-\zeta_k^0}^{0,k}$, 其中 $x_t^{0,k}$ 是 $\mathscr{F}^0$ 中的某一轨道, $\zeta_{k+1}^0 - \zeta_k^0$ 是它的中断时间. 显然, 序列 $\zeta_1^0, \zeta_2^0, \cdots$ 分别是首次, 第二次, … 到达无穷的时间的序列. 如果 $\mathscr{N}^1$ 是包含 $\mathscr{F}^1$ 中柱集的最小 σ 代数, 则这些时间为 $\mathscr{N}^1$ 可测, 而且是马尔科夫时间. 随机变量 $\zeta^1 = \sup_x \zeta_k^0$ 是 x_t^1 的中断时间. 概率 $\mathbf{P}_x^1$ 定义如下. 设 $C_0, C_1, \cdots, C_k$ 是 $\mathscr{N}^0$ 中一集合列, $x_t^0, x_t^{0,1}, \cdots, x_t^{0,k}$ 和 x_t^1 具有上面所说的联系. 那末

$$D = \{x^1(\cdot):\ x_t^0 \in C_0, x_t^{0,1} \in C_1, \cdots, x_t^{0,k} \in C_k\} \in \mathscr{N}^1,$$

而

$$\mathbf{P}_x^1\{x^1(\cdot):\ x_t^0 \in C_0\} = P_x^0(C_0),$$

$$\mathbf{P}_x^1\{x^1(\cdot):\ x_t^0 \in C_0, x_t^{0,1} \in C_1, \cdots, x_t^{0,k} \in C_k\}$$

$$= \mathbf{E}_x^0 \chi_{C_0}(x^0(\cdot)) \int m(x^0(\cdot), dy)$$

$$\times \mathbf{P}_y^1\{x^1(\cdot): x_t^0 \in C_0, x_t^{0,1} \in C_1, \cdots, x_t^{0,k-1} \in C_k\},$$

其中 $m(x^0(\cdot), \cdot)$ 是在引理 6 中所构造的测度. 这些式子对于一切上述形状的集合 D（递推地）定义了测度 $\mathbf{P}_x^1$. 由于这样的 D 产生 σ 代数 $\mathscr{N}^1$，所以这些式子在整个 σ 代数 $\mathscr{N}^1$ 上定义测度 $\mathbf{P}_x^1$. 由 (21) 式和 $g_k(t, x, B)$ 的形状容易看出，由测度 $\mathbf{P}_x^1$ 所构造的转移概率与 $P^1(t, x, B)$ 重合. 由过程 $\{\mathscr{F}^1, \mathscr{N}^1, \mathbf{P}_x^1\}$ 的构造可见，如果把它在首达无穷的时间中断，我们就可以得到过程 $\{\mathscr{F}^0, \mathscr{N}^0, P_x^0\}$. 过程 $\{\mathscr{F}^1, \mathscr{N}^1, \mathbf{P}_x^1\}$ 和 $\{\mathscr{F}^0, \mathscr{N}^0, \mathbf{P}_x^0\}$ 的特征算子重合. 由于对任意马尔科夫时间 τ $(\tau < \zeta^0)$, x_τ^1 和 x_τ^0 的分布相同，故这些过程的 λ 调和函数也相同. 容易看出，不管用什么方法构造以 $P'(t, x, B)$ 为转移概率的过程 $\{\mathscr{F}^1, \mathscr{N}^1, \mathbf{P}_x^1\}$，只要它有右连续轨道，那末上述两个过程的特征算子和调和函数就分别相等.

设 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$ 是不中断的随机连续强马尔科夫过程，x_t 是它的轨道. 我们引进一马尔科夫时间 ζ^α $(\alpha \geqslant 0)$ 的超限序列，其中 α 取遍所有可数序数: ζ^0 是首达无穷的时间; 如果 α 是第一类超限序数，则 $\zeta^\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n^{\alpha-1}$，其中 $\zeta_1^{\alpha-1} = \zeta^{\alpha-1}$, $\zeta_n^{\alpha-1} = \theta_{\zeta^{\alpha-1}} \cdot \zeta_{n-1}^{\alpha-1} + \zeta^{\alpha-1}$; 而若 α 是第二类超限序数，则 $\zeta^\alpha = \sup\limits_{\beta<\alpha} \zeta^\beta$. 也可能出现 $\zeta^\alpha = +\infty$，这时对所有 $\beta > \alpha$, $\zeta^\beta = +\infty$. 我们引进算子

$$\mathscr{T}_\lambda^\alpha f(x) = \mathbf{E}_x e^{-\lambda\zeta^\alpha} f(x(\zeta^\alpha)),$$

它对所有 $f \in B$ 有定义，并且在 B 中取值. 设 H'_λ 是过程的有界（未必连续）λ 调和函数的集合. 那末对所有 α，有 $\mathscr{T}_\lambda^\alpha f \in H'_\lambda$. 我们列举算子 $\mathscr{T}_\lambda^\alpha$ 的一些性质.

1° 如果 $\beta < \alpha$，则 $\mathscr{T}_\lambda^\beta \mathscr{T}_\lambda^\alpha = \mathscr{T}_\lambda^\alpha$. 这由等式 $\theta_{\zeta^\beta}\zeta^\alpha + \zeta^\beta = \zeta^\alpha$ 推出:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_x e^{-\lambda\zeta^\beta} \mathbf{E}_{x(\zeta^\beta)} e^{-\lambda\zeta^\alpha} f(x(\zeta^\alpha)) \\
&\quad = \mathbf{E}_x e^{-\lambda\zeta^\beta} \mathbf{E}[\theta_{\zeta^\beta} e^{-\lambda\zeta^\alpha} f(x(\zeta^\alpha)) | \mathscr{N}_{\zeta^\beta}] \\
&\quad = \mathbf{E}_x e^{-\lambda\zeta^\alpha} f(x(\zeta^\alpha)).
\end{aligned}$$

2° 对 $f \geqslant 0$, $\mathscr{T}_\lambda^\alpha f \geqslant 0$; $\|\mathscr{T}_\lambda^\alpha\| \leqslant 1$.

3° 对所有 $x \in \mathscr{X}$，$\inf\limits_{\alpha} \mathscr{T}_{\lambda}^{\alpha}\mathbf{1}(x) = 0$. 这由等式 $\sup\limits_{\alpha} \zeta^{\alpha} = +\infty$ 可推出. 而该式成立是因为，当 $\zeta^{\alpha} < \infty$ 时，$\zeta^{\alpha+1} > \zeta^{\alpha}$.

我们再引进算子 $\mathbf{R}_{\lambda}^{\alpha}$:

$$\mathbf{R}_{\lambda}^{\alpha} f(x) = \mathbf{E}_x \int_0^{\zeta^{\alpha}} e^{-\lambda t} f(x_t) dt.$$

算子 $\mathbf{R}_{\lambda}^{\alpha}$ 和 $\mathscr{T}_{\lambda}^{\alpha}$ 的联系如下:

4° 如果 $\beta < \alpha$, 则

$$\mathbf{R}_{\lambda}^{\alpha} = \mathbf{R}_{\lambda}^{\beta} + \mathscr{T}_{\lambda}^{\beta} \mathbf{R}_{\lambda}^{\alpha},$$

因为

$$\int_0^{\zeta^{\alpha}} e^{-\lambda t} f(x_t) dt = \int_0^{\zeta^{\beta}} e^{-\lambda t} f(x_t) dt + e^{-\zeta^{\beta}} \theta_{\zeta^{\beta}} \int_0^{\zeta^{\alpha}} e^{-\lambda t} f(x_t) dt.$$

5° 对所有 α, $\mathbf{R}_{\lambda}^{\alpha}$ 满足预解方程

$$\mathbf{R}_{\lambda}^{\alpha} - \mathbf{R}_{\mu}^{\alpha} = (\mu - \lambda) \mathbf{R}_{\lambda}^{\alpha} \mathbf{R}_{\mu}^{\alpha}.$$

6° 对所有 α, $\mathscr{T}_{\lambda}^{\alpha}$ 满足方程

$$\mathscr{T}_{\lambda}^{\alpha} - \mathscr{T}_{\mu}^{\alpha} = (\mu - \lambda) \mathbf{R}_{\lambda}^{\alpha} \mathscr{T}_{\lambda}^{\alpha}.$$

因为 $\mathbf{R}_{\lambda}^{\alpha}$ 是由原过程经在时刻 ζ^{α} 的中断所得过程的预解式，由此可以得出性质 5°. 为证明性质 6°，只需利用 $\mathbf{R}_{\lambda}^{\alpha}$ 和 $\mathbf{R}_{\lambda}^{\beta}$ 的预解方程以及性质 4° (和 (14) 式的推导完全相同).

7° 对所有 $\alpha > 0$，$\mathscr{T}_{\lambda}^{\alpha}\mathbf{1} = 1 - \lambda \mathbf{R}_{\lambda}^{\alpha}\mathbf{1}$，因为

$$\mathbf{E}_x e^{-\lambda \zeta^{\alpha}} = 1 - \lambda \mathbf{E}_x \int_0^{\zeta^{\alpha}} e^{-\lambda t} dt.$$

8° 算子 $\mathbf{R}_{\lambda}^{\alpha+1}$ 可以通过 $\mathbf{R}_{\lambda}^{\alpha}$ 和 $\mathscr{T}_{\lambda}^{\alpha}$ 表为

$$\mathbf{R}_{\lambda}^{\alpha+1} = \mathbf{R}_{\lambda}^{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathscr{T}_{\lambda}^{\alpha})^k \mathbf{R}_{\lambda}^{\alpha}. \tag{22}$$

而若 α 是第二类超限序数，则对 $f \geqslant 0$

$$\mathbf{R}_{\lambda}^{\alpha} f = \sup_{\beta < \alpha} \mathbf{R}_{\lambda}^{\beta} f. \tag{23}$$

由等式

$$\int_0^{\zeta^{\alpha+1}} e^{-\lambda t} f(x_t) dt = \int_0^{\zeta^{\alpha}} e^{-\lambda t} f(x_+) dt + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda \zeta_k^{\alpha}} \theta_{\zeta_k^{\alpha}} \int_0^{\zeta^{\alpha}} e^{-\lambda t} f(x_t) dt,$$

和

$$\mathbf{E}_x e^{-\lambda\zeta_k^\alpha} g(x(\zeta_k^\alpha)) = (\mathscr{T}_\lambda^\alpha)^k g(x)$$

得 (22)，而 (23) 式是等式 $\zeta^\alpha = \sup\limits_{\beta<\alpha} \zeta^\beta$ 的推论.

容易看出，如果 $\mathbf{R}_\lambda^0$ 和 $\mathscr{T}_\lambda^\alpha$ 已知，则 (22) 和 (23) 两式唯一决定算子 $\mathbf{R}_\lambda^\alpha$. 当 $f \geqslant 0$ 时，原过程的预解式 $\mathbf{R}_\lambda$ 决定于

$$\mathbf{R}_\lambda f = \sup_\alpha \mathbf{R}_\lambda^\alpha f. \tag{24}$$

对所有 α 它满足方程

$$\mathbf{R}_\lambda = \mathbf{R}_\lambda^\alpha + \mathscr{T}_\lambda^\alpha \mathbf{R}_\lambda. \tag{25}$$

我们指出 $\mathbf{R}_\lambda^\alpha$ 和算子族 $\mathscr{T}_\lambda^\alpha$ 决定某一不中断过程的预解式 $\mathbf{R}_\lambda$ 的条件.

定理 6 设 $\mathbf{R}_\lambda^0$ 是一随机连续的 Feller 强马尔科夫过程 $\{\mathscr{F}^0, \mathscr{N}^0, \mathbf{P}_x^0\}$ 的预解式，H_λ 是该过程的 λ 调和连续函数的集合. 此外，假设对所有 $\lambda > 0$ 和可数序数 $\alpha(\alpha \geqslant 0)$，给定从 $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 到 H_λ 的算子 $\mathscr{T}_\lambda^\alpha$，满足下列条件:

1) 如果 $\beta < \alpha$，则 $\mathscr{T}_\lambda^\beta \mathscr{T}_\lambda^\beta = \mathscr{T}_\lambda^\alpha$;

2) 对 $f \geqslant 0$，$\mathscr{T}_\lambda^\alpha f \geqslant 0$，$\mathscr{T}_\lambda^\alpha \mathbf{1} \leqslant 1$;

3) 如果 α 是第一类序数，则 $\mathscr{T}_\lambda^\alpha \mathbf{1} = \lim\limits_{n\to\infty} (\mathscr{T}_\lambda^{\alpha-1})^n \mathbf{1}$，而若 α 是第二类序数，则 $\mathscr{T}_\lambda^\alpha \mathbf{1} = \inf\limits_{\beta<\alpha} \mathscr{T}_\lambda^\beta \mathbf{1}$;

4) 如果 α 是第一类序数，则对 $\lambda > 0$, $\mu > 0$

$$\lim_{n\to\infty} (\mathscr{T}_\lambda^{\alpha-1})^n \mathscr{T}_\mu^\alpha = \mathscr{T}_\lambda^\alpha;$$

而若 α 是第二类序数，则对 $f \geqslant 0$, $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$，有

$$\inf_{\beta<\alpha} \mathscr{T}_\lambda^\beta \mathscr{T}_\mu^\alpha f = \mathscr{T}_\lambda^\alpha f;$$

5) 对于 $\lambda>0$, $\mu>0$, $\mathscr{T}_\lambda^0 - \mathscr{T}_\mu^0 = (\mu-\lambda)\mathbf{R}_\lambda^0 \mathscr{T}_\mu$, $\mathscr{T}_\lambda^0 \mathbf{1} = 1 - \lambda \mathbf{R}_\lambda^0 \mathbf{1}$.

那末，存在一不中断随机连续 Feller 马尔科夫过程，它的预解式 $\mathbf{R}_\lambda$ 对所有 α 满足方程 (15)，其中 $\mathbf{R}_\lambda^\alpha$ 对所有 $\alpha > 0$ 决定于 (22) 和 (23).

证. 我们首先证明，所有的算子 $\mathbf{R}_\lambda^\alpha$ 都有定义. 为此我们

证明，级数 (22) 收敛，而 $\sup_{\alpha}\|\mathbf{R}_\lambda^\alpha\|$ 有界. 用数学归纳法来证明. 如果 $\mathbf{R}_\lambda^\alpha$ 有定义，则由 (22) 和 (23) 可见，对于 $f\geqslant 0$ 有 $\mathbf{R}_\lambda^\alpha f\geqslant 0$. 所以，只需证明级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(\mathscr{T}_\lambda^\alpha)^k\mathbf{R}_\lambda^\alpha\mathbf{1}$ 收敛.

当 $\alpha=1$ 时，我们有

$$\mathbf{R}_\lambda^1\mathbf{1}=\lim_{n\to\infty}\left[\mathbf{R}_\lambda^0\mathbf{1}+\sum_{k=1}^{n}(\mathscr{T}_\lambda^0)^k\mathbf{R}_\lambda^0\mathbf{1}\right]$$

$$=\frac{1}{\lambda}\lim_{n\to\infty}[1-(\mathscr{T}_\lambda^0)^{n+1}\mathbf{1}]$$

$$=\frac{1}{\lambda}[1-\mathscr{T}_\lambda^1\mathbf{1}].$$

利用条件 3) 容易证明，

$$\mathbf{R}_\lambda^\alpha\mathbf{1}=\frac{1}{\lambda}(1-\mathscr{T}_\lambda^\alpha\mathbf{1});$$

这样，同时也就证明了 $\mathbf{R}_\lambda^\alpha$ 对所有 α 有定义，而且 $\|\mathbf{R}_\lambda^\alpha\|\leqslant 1/\lambda$.

我们现在证明，对所有 α 和 $\lambda>0,\ \mu>0$

$$\mathscr{T}_\lambda^\alpha-\mathscr{T}_\mu^\alpha=(\mu-\lambda)\mathbf{R}_\lambda^\alpha\mathscr{T}_\mu^\alpha. \tag{26}$$

仍然用数学归纳法来证明. 如果 $\alpha=0$，则由条件 5) 得 (26) 式. 假设 (26) 式对某一 α 成立. 那末由条件 1) 可见

$$(\mu-\lambda)\mathbf{R}_\lambda^{\alpha+1}\mathscr{T}_\mu^{\alpha+1}=(\mu-\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}(\mathscr{T}_\lambda^\alpha)^k\mathbf{R}_\lambda^\alpha\mathscr{T}_\mu^\alpha\mathscr{T}_\mu^{\alpha+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(\mathscr{T}_\lambda^\alpha)^k(\mathscr{T}_\lambda^\alpha-\mathscr{T}_\mu^\alpha)\mathscr{T}_\mu^{\alpha+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(\mathscr{T}_\lambda^\alpha)^k[\mathscr{T}_\lambda^\alpha-\mathscr{T}_\mu^\alpha]\mathscr{T}_\mu^{\alpha+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}[(\mathscr{T}_\lambda^\alpha)^{n+1}\mathscr{T}_\mu^{\alpha+1}-\mathscr{T}_\mu^{\alpha+1}]$$

$$=\mathscr{T}_\lambda^{\alpha+1}-\mathscr{T}_\mu^{\alpha+1}$$

(其中最后一步也用到条件 4)). 如果 (26) 式对所有 $\beta<\alpha$ 成立，其中 α 是第二类序数，则对 $f\in\mathscr{C}_\alpha,\ f\geqslant 0,\ \mu>\lambda$，有

$$
\begin{aligned}
(\mu-\lambda)\mathbf{R}_\lambda^\alpha \mathscr{T}_\mu^\alpha f &= (\mu-\lambda)\sup_{\beta<\alpha}\mathbf{R}_\lambda^\beta \mathscr{T}_\mu^\alpha f \\
&= (\mu-\lambda)\sup_{\beta<\alpha}\mathbf{R}_\lambda^\beta \mathscr{T}_\mu^\beta \mathscr{T}_\mu^\alpha f \\
&= (\mu-\lambda)\sup_{\beta<\alpha}(\mathscr{T}_\lambda^\beta - \mathscr{T}_\mu^\beta)\mathscr{T}_\lambda^\alpha f \\
&= (\mu-\lambda)\,[\mathscr{T}_\lambda^\alpha f - \inf_{\beta<\alpha}\mathscr{T}_\mu^\beta \mathscr{T}_\lambda^\alpha f] \\
&= (\mu-\lambda)[\mathscr{T}_\lambda^\alpha f - \mathscr{T}_\mu^\alpha f].
\end{aligned}
$$

从而(26)得证．我们证明，$\mathbf{R}_\lambda^\alpha$ 对所有 α 是某一齐次随机连续马尔科夫过程的预解式．证明 $\mathbf{R}_\lambda^\alpha$ 满足预解方程．当 $\alpha=0$ 时，这可以由定理的条件得出．如果对某一 α，$\mathbf{R}_\lambda^\alpha$ 满足预解方程，则

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}_\lambda^{\alpha+1} - \mathbf{R}_\mu^{\alpha+1} &= \sum_{k=0}^{\infty}(\mathscr{T}_\lambda^\alpha)^k \mathbf{R}_\lambda^\alpha - \sum_{k=0}^{\infty}(\mathscr{T}_\mu^\alpha)^k \mathbf{R}_\mu^\alpha \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(\mathscr{T}_\lambda^\alpha)^k[\mathbf{R}_\lambda^\alpha - \mathbf{R}_\mu^\alpha] \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1}(\mathscr{T}_\lambda^\alpha)^i[\mathscr{T}_\lambda^\alpha - \mathscr{T}_\mu^\alpha](\mathscr{T}_\mu^\alpha)^{k-i-1}\mathbf{R}_\mu^\alpha \\
&= (\mu-\lambda)\mathbf{R}_\lambda^{\alpha+1}\mathbf{R}_\mu^{\alpha+1}.
\end{aligned}
$$

如果对所有 $\beta<\alpha$ 满足预解方程，而 α 是第二类序数，则对 $f\geqslant 0$，$\beta_n\uparrow\alpha$，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}_\lambda^\alpha f - \mathbf{R}_\mu^\alpha f &= \lim_{n\to\infty}[\mathbf{R}_\lambda^{\beta_n} f - \mathbf{R}_\lambda^{\beta_n} f] \\
&= \lim_{n\to\infty}(\mu-\lambda)\mathbf{R}_\lambda^{\beta_n}\mathbf{R}_\mu^{\beta_n} f \\
&= (\mu-\lambda)\mathbf{R}_\lambda^\alpha \mathbf{R}_\mu^\alpha f + \lim_{n\to\infty}\mathbf{R}_\lambda^{\beta_n}[\mathbf{R}_\lambda^{\beta_n} - \mathbf{R}_\lambda^\alpha]f \\
&\quad + \lim_{n\to\infty}\mathbf{R}_\lambda^\alpha[\mathbf{R}_\mu^{\beta_n} - \mathbf{R}_\mu^\alpha]f \\
&= (\mu-\lambda)\mathbf{R}_\lambda^\alpha \mathbf{R}_\mu^\alpha f,
\end{aligned}
$$

因为对所有 $x\in\mathscr{X}$

$$
|\mathbf{R}_\lambda^{\beta_n}[\mathbf{R}_\mu^{\beta_n} - \mathbf{R}_\lambda^\alpha]f| \leqslant \mathbf{R}_\lambda^\alpha|\mathbf{R}_\mu^\alpha f - \mathbf{R}_\mu^{\beta_n} f|,\ \mathbf{R}_\mu^\alpha f - \mathbf{R}_\mu^{\beta_n} f \downarrow 0,
$$

而

$$
\mathbf{R}_\lambda^\alpha f(x) = \int R_\lambda^\alpha(x,dy)f(y),
$$

其中对固定的 x, $R_\lambda^\alpha(x,\cdot)$ 是 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 上的测度（若对 α 用归纳法，则容易证明这一点）．于是 $\mathbf{R}_\lambda^\alpha$ 满足预解方程．

我们证明，对所有 α，存在随机连续局部 Feller 转移概率，满足

$$\mathbf{R}_\lambda^\alpha f(x)=\int_0^\infty\left[\int P^\alpha(t,x,dy)f(y)\right]e^{-\lambda t}dt. \tag{27}$$

我们用数学归纳法证明．对应于预解式 $\mathbf{R}_\lambda^1$、以 $P^1(t,x,B)$ 为转移概率的过程，是在引理 6 及其注中构造的．进一步的构造完全类似．

设 $\zeta_1^0,\zeta_1^1,\cdots$ 是过程 x_t^1 接连到达无穷的时间序列．那末，对所有 $f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 存在 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{-\lambda\zeta_k^0}\mathscr{T}_\lambda^1 f(x^1(\zeta_k^0))$，因为

$$\mathbf{E}_x^1 e^{-\lambda\zeta_1^0}\mathscr{T}_\lambda^1 f(x^1(\zeta_k^0))=\mathscr{T}_\lambda^0\mathscr{T}_\lambda^1 f(x)=\mathscr{T}_\lambda^1 f(x),$$

从而 $e^{-\lambda\zeta_k^0}\mathscr{T}_\lambda^1 f(x^1(\zeta_k^0))$ 是鞅．如果 $\zeta^1=\sup\limits_k\zeta_k^0<\infty$，则存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\mathscr{T}_\lambda^1 f(x^1(\zeta^0))=\int m^1(x^1(\cdot),dy)f(y);$$

对任意 B，$m^1(x^1(\cdot),B)$ 为 $\mathscr{N}^1$ 可测随机变量．仿照引理 6 可以证明这样测度的存在．这里 $m^1(x^1(\cdot),\mathscr{X})=1$．用与引理 6 中由测度 $m(x^0(\cdot),\cdot)$ 及转移概率 $P^0(t,x,B)$ 构造转移概率 $P^1(t,x,B)$ 的完全相同的方法，可以由测度 $m^1(x^1(\cdot),\cdot)$ 及转移概率 $P^1(t,x,B)$ 构造转移概率 $P^2(t,x,B)$．

设 α 是第一类序数．假设已构造出过程 $\{\mathscr{F}^{\alpha-1},\mathscr{N}^{\alpha-1},\mathbf{P}_x^{\alpha-1}\}$，$x_t^{\alpha-1}$ 是它的轨道，$\zeta^{\alpha-1}$ 是中断时间，$P^{\alpha-1}(t,x,B)$ 是对应于预解式 $\mathbf{R}_\lambda^{\alpha-1}$ 的转移概率．记 $\mathscr{F}^\alpha$ 为定义在 $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}[\zeta_k^{\alpha-1},\zeta_{k+1}^{\alpha-1})$ $(\zeta_0^{\alpha-1}=0,\ \zeta_1^{\alpha-1}=\zeta^{\alpha-1})$ 上的函数 x_t^α 的集合：在 $[0,\zeta_1^{\alpha-1})$ 上，$x_t^\alpha=x_t^{\alpha-1,0}$；在 $[\zeta_k^{\alpha-1},\zeta_{k+1}^{\alpha-1})$ 上，$x_t^\alpha=x_{t-\zeta_k^{\alpha-1}}^{\alpha-1,k}$，其中 $x_t^{\alpha-1,k}\in\mathscr{F}^{\alpha-1}$，$k=0,1,\cdots$；$x_t^{\alpha-1,k}$ 的中断时间等于 $\zeta_{k+1}^{\alpha-1}-\zeta_k^{\alpha-1}$．记 $\mathscr{N}^\alpha$ 为 $\mathscr{F}^\alpha$ 中的柱集产生的 σ 代数．设 $m^{\alpha-1}(x^{\alpha-1}(\cdot),B)$ 是 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 上的测度：对所有 $B\in\mathfrak{B}$，$m^{\alpha-1}(x^{\alpha-1}(\cdot),B)$ 为 $\mathscr{N}^{\alpha-1}$ 可测；对任意马尔科夫时间序

列 $\tau_n \uparrow \zeta^{\alpha-1}$（其中 τ_n 是到达无穷的时间）和所有 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$，成立等式

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{T}_\lambda^{\alpha-1} f(x_{\tau_n}^{\alpha-1}) = \int m^{\alpha-1}(x^{\alpha-1}(\cdot), dy) f(y).$$

那末 $\mathbf{P}_x^\alpha$ 定义如下．设集合序列 $C_0, C_1, \cdots, C_k \in \mathscr{N}^{\alpha-1}$ 是任意的，而在 $x_t^{\alpha-1,i}$ 和 x_t^α 之间存在定义 $\mathscr{T}^\alpha$ 时所指出的联系．我们令

$$\mathbf{P}_x^\alpha\{x^\alpha(\cdot):\ x^{\alpha-1,0}(\cdot) \in C_0\} = \mathbf{P}_x^{\alpha-1}(C_0),$$

$$\mathbf{P}_x^\alpha\{x^\alpha(\cdot):\ x^{\alpha-1,0} \in C_0, \cdots, x^{\alpha-1,k}(\cdot) \in C_k\}$$

$$= \mathbf{E}_x^{\alpha-1} \chi_{C_0}(x_t^{\alpha-1}) \int m^{\alpha-1}(x^{\alpha-1}(\cdot), dy)$$

$$\times \mathbf{P}_y^\alpha\{x^\alpha(\cdot):\ x^{\alpha-1,0}(\cdot) \in C_0, \cdots, x^{\alpha-1,k-1} \in C_{k-1}\}.$$

过程 $\{\mathscr{F}^\alpha, \mathscr{N}^\alpha, \mathbf{P}_x^\alpha\}$ 的转移概率 $P^\alpha(t, x, B)$ 决定于等式

$$\mathbf{P}_x^\alpha\{x^\alpha(t) \in B\} = \sum_{k=0}^{\infty} Q_x^{\alpha,k}(t, B),$$

其中

$$Q_x^{\alpha,k}(t, B) = \mathbf{P}_x^\alpha\{x^\alpha(t) \in B, \zeta_k^{\alpha-1} \leqslant t < \zeta_{k+1}^{\alpha-1}\}.$$

概率 $Q_x^{\alpha,k}(t, B)$ 决定于如下递推公式：

$$Q_x^{\alpha,0}(t, B) = P^{\alpha-1}(t, x, B),$$

$$Q_x^{\alpha,k+1}(t, B) = \mathbf{E}_x^{\alpha-1} \chi_{\{\zeta^{\alpha-1} < t\}} \int m^{\alpha-1}(x^{\alpha-1}(\cdot), dy)$$

$$\cdot Q_y^{\alpha,k}(t - \zeta^{\alpha-1}, B).$$

利用 $\mathbf{R}_\lambda^\alpha f$（对所有 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$）的连续性，和定理 4 完全相同可以证明，$x_t^\alpha$ 是局部 Feller 过程．

设 α 是第二类序数，对于 $\beta < \alpha$ 转移概率 $P^\beta(t, x, B)$ 有定义．那末令

$$P^\alpha(t, x, B) = \sup_{\beta<\alpha} P^\beta(t, x, B)。$$

这时 (27) 式成立． 假设对所有 $\beta < \alpha$ 已经构造出过程 $\{\mathscr{F}^\beta, \mathscr{N}^\beta, \mathbf{P}_x^\beta\}$． 我们来说明，如何构造转移概率为 $P^\alpha(t, x, B)$ 的过程 $\{\mathscr{F}^\alpha, \mathscr{N}^\alpha, \mathbf{P}_x^\alpha\}$． 选择一第二类序数 β_n 的序列，使 $\beta_n \uparrow \alpha$． 记 $\mathscr{F}^\alpha$ 为定义在 $\bigcup_{k=0}^{\infty} [\zeta_k, \zeta_{k+1})$ 上的函数 x_t^α 的集合：在 $[\zeta_k, \zeta_{k+1})$ 上 $x_t^{\alpha,k} = x_{t-\zeta_k}^\alpha \in \mathscr{F}^{\beta_k}$，并且在时刻 $\zeta_{k+1} - \zeta_k$ 中断． 在普通方

法定义 σ 代数 $\mathscr{N}^{\alpha}$. 对 $C_1 \in \mathscr{N}^{\beta_1}, \cdots, C_k \in \mathscr{N}^{\beta_k}$, 我们定义概率 $\mathbf{P}_x^{\alpha}$ 如下:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}_x^{\alpha}\{x^{\alpha}(\cdot): \ & x^{\alpha,1}(\cdot) \in C_1, \cdots, x^{\alpha,k}(\cdot) \in C_k\} \\
= & \mathbf{E}_x^{\beta_1} \chi_{C_1}(x^{\beta_1}(\cdot)) \int m^{\beta_1}(x^{\beta_1}(\cdot), dx_1) \mathbf{E}_{x_1}^{\beta_2} \chi_{C_1}(x^{\beta_2}(\cdot)) \\
& \times \int m^{\beta_2}(x^{\beta_2}(\cdot), dx_2) \cdots \mathbf{E}_{x_{k-1}}^{\beta_{k-1}} \chi_{C_{k-1}}(x^{\beta_{k-1}}(\cdot)) \\
& \times \int m^{\beta_{k-1}}(x^{\beta_{k-1}}(\cdot), dx_k) \mathbf{E}_{x_k}^{\beta_k} \chi_{C_k}(x^{\beta_k}(\cdot)),
\end{aligned}
$$

其中测度 $m^{\beta}(x^{\beta}(\cdot), \cdot)$ 对所有 $\beta < \alpha$ 定义. 对给定的 α, 我们由等式

$$
\int f(y) m^{\alpha}(x^{\alpha}(\cdot), dy) = \lim_{n \to \infty} \mathscr{T}_{\lambda}^{\alpha} f(x^{\alpha}(\zeta_n))
$$

定义 $m^{\alpha}(x^{\alpha}(\cdot), \cdot)$. 这样, 对于所有可数序数, 满足 (27) 式的转移概率 $P^{\alpha}(t, x, B)$ 是用对 α 的超限归纳法来定义的. 它们都满足局部 Feller 性.

最后, 设

$$
P(t, x, B) = \sup_{\alpha} P^{\alpha}(t, x, B).
$$

那末, 对 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, $f \geqslant 0$, 函数 $\int f(y) P(t, x, dy)$ 下半连续. 因为对 $f \geqslant 0$

$$
\int e^{-\lambda t} \int P(t, x, dy) f(y) dt = \mathbf{R}_{\lambda} f(x) = \sup_{\alpha} \mathbf{R}_{\lambda}^{\alpha} f(x),
$$

而

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}_{\lambda} \mathbf{1} = & \sup_{\alpha} \mathbf{R}_{\lambda}^{\alpha} \mathbf{1} \\
& = \sup_{\alpha} \frac{1}{\lambda} (1 - \mathscr{T}_{\lambda}^{\alpha} \mathbf{1}) \\
& = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \inf_{\alpha} \mathscr{T}_{\lambda}^{\alpha} \mathbf{1} \\
& = \frac{1}{\lambda},
\end{aligned}
$$

故 $P(t, x, \mathscr{X}) \equiv 1$ 是连续函数. 所以, 对所有 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ 函数

$\int P(t, x, dy)f(y)$ 连续. 定理证完.

§6. 可乘泛函和可加泛函，过分函数

可加泛函和可乘泛函的定义及其简单性质 设 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$ 是某相空间$\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$中的齐次马尔科夫过程.我们要研究 $\mathscr{N}_t$ 可测数值随机变量的一些特殊性质. 由于它们的可测性. 对其可用推移算子 θ_h.

定义在 $\mathscr{F}$ 上的随机变量族 α_t, $t \geqslant 0$,称为**齐次可乘泛函**,如果它满足条件:

M 1) 对所有 $t \geqslant 0$, α_t 为 $\mathscr{N}_t$ 可测,

M 2) 对所有 $t \geqslant 0$ 和 $h > 0$, 对任意 $x \in \mathscr{X}$, 等式 $\alpha_{t+h} = \alpha_h \theta_h \alpha_t$ 以概率 $\mathbf{P}_x = 1$ 成立.

称定义在 $\mathscr{F}$ 上的随机变量族 φ_t, $t \geqslant 0$, 为**齐次可加泛函**,如果它满足条件:

A 1) 对所有 $t \geqslant 0$, 随机变量 φ_t 为 $\mathscr{N}_t$ 可测,

A 2) 对所有 $t \geqslant 0$ 和 $h > 0$, 对任意 $x \in \mathscr{X}$, 等式 $\varphi_{t+h} = \varphi_h + \theta_h \varphi_t$ 以概率 $\mathbf{P}_x = 1$ 成立.

我们举几个可乘泛函的例子.

I. 设 $\mathscr{X}$ 是一拓扑空间,过程的样本函数 $x(t)$ 右连续, $g(x)$ 是 $\mathscr{X}$ 上的有界连续函数. 那末对所有 t,随机变量

$$\int_0^t g(x_s)ds$$

有定义并且 $\mathscr{N}_t$ 可测. 令

$$\alpha_t = \exp\left\{\int_0^t g(x_s)ds\right\}.$$

因为

$$\theta_h \alpha_t = \exp\left\{\int_0^t \theta_h g(x_s)ds\right\} = \exp\left\{\int_h^{t+h} g(x_s)ds\right\},$$

而

$$\alpha_h\theta_h\alpha_t = \exp\left\{\int_0^h g(x_s)ds\right\}\exp\left\{\int_h^{t+h} g(x_s)ds\right\} = \alpha_{t+h}.$$

故 α_t 是可乘泛函.

II. 设 $\mathscr{X}$ 局部紧，过程右连续，ζ 是首次流出所有紧集的时间. 当 $\zeta > t$ 时，令 $\alpha_t = 1$，当 $\zeta \leqslant t$ 时，令 $\alpha_t = 0$. 那末

$$\alpha_h\theta_h\alpha_t = \chi_{\{\zeta>h\}}\theta_h\chi_{\{\zeta>t\}} = \chi_{\{\zeta>t+h\}} = \alpha_{t+h},$$

从而 α_t 是可乘泛函.

我们感兴趣的是对所有 $x \in \mathscr{X}$ 满足

$$\mathbf{P}_x\{0 \leqslant \alpha_t \leqslant 1\} = 1$$

的那些可乘泛函. 可以利用这样的泛函变换原过程如下. 记 $\tilde{\mathscr{F}}$ 为函数 $\tilde{x}(t)$ 的集合，这些函数是由 $\mathscr{F}$ 中的函数 $x(t)$ 经在某一时刻 $\zeta \leqslant +\infty$ 的中断而得来的；$\tilde{x}(t)$ 定义在 $[0, \zeta)$ 上，而且当 $t < \zeta$ 时，$\tilde{x}(t) = x(t)$；$\tilde{\mathscr{F}}$ 上的 σ 代数 $\tilde{\mathscr{N}}$ 是用通常的方法构造出来的. 最后，对任意 $\tilde{\mathscr{N}}_t$ 可测集 A，我们设

$$\tilde{\mathbf{P}}_x(A) = \int_A \alpha_t(\omega)\mathbf{P}_x(d\omega) \quad (\omega \in \tilde{\mathscr{F}}).$$

$\{\tilde{\mathscr{F}}, \tilde{\mathscr{N}}, \tilde{\mathbf{P}}_x\}$ 是齐次马尔科夫过程，它的转移概率为

$$\tilde{\mathbf{P}}(t, x, B) = \mathbf{E}_x\alpha_t\chi_B(x(t)).$$

可加泛函 φ_t 称为**非负的**，如果对所有 $t > 0$ 和 $x \in \mathscr{X}$

$$\mathbf{P}_x\{\varphi_t \geqslant 0\} = 1.$$

设 α_t 为可乘泛函，满足条件：对所有 $t \geqslant 0$ 和 $x \in \mathscr{X}$，$\mathbf{P}_x\{0 \leqslant \alpha_t \leqslant 1\} = 1$. 那末在可加泛函 φ_t 和满足上述条件的可乘泛函 α_t 之间可以建立一一对应关系：

$$\alpha_t = \exp\{-\varphi_t\}, \quad \varphi_t = -\ln\alpha_t$$

(这时泛函 φ_t 亦可取 $+\infty$ 为值). 以后我们只研究可加泛函. 利用可乘泛函通过可加泛函的表现，可以对可乘泛函表述所得到的结果.

在研究可加泛函时，用到泛函等价的概念. 我们说泛函 φ_t 和 $\tilde{\varphi}_t$ **随机等价**，如果对所有 $t \geqslant 0$ 和 $x \in \mathscr{X}$，有 $\mathbf{P}_x\{\varphi_t = \tilde{\varphi}_t\} = 1$.

称泛函 φ_t 为**几乎可测的**，如果它满足与条件 A·1) 相近的条

件

A 1′) 对所有 x，φ_t 以概率 $\mathbf{P}_x=1$ 与一 $\mathscr{N}_t$ 可测随机变量相等，并且为 $\mathscr{N}_{t+0}$ 可测，其中 $\mathscr{N}_{t+0}=\bigcap_{s>t}\mathscr{N}_s$.

引理 1 对每一非负齐次可加泛函 φ_t，存在一随机等价的几乎可测正可加泛函 $\tilde{\varphi}_t$，使对每个 x，过程 $\tilde{\varphi}_t$ 在概率空间 $\{\mathscr{F},\mathscr{N},\mathbf{P}_x\}$ 上是非减的.

证. 我们定义 φ_t^* 如下：对所有 $t>0$ 令

$$\varphi_t^*=\sup_{r<t}\varphi_r,\quad \varphi_0^*=\varphi_0,$$

其中 r 取有理数. φ_t^* 对所有 $x\in\mathscr{X}$ 以概率 $\mathbf{P}_x=1$ 有定义，$\mathscr{N}_t$ 可测，而且是 t 的非减函数. 显然，

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_x\{\varphi_t^*>\varphi_t\}&\leqslant\sum_{r<t}\mathbf{P}_x\{\varphi_r>\varphi_t\}\\&=\sum_{r<t}\mathbf{P}_x\{\theta_r\varphi_{t-r}<0\}\\&=\sum_{r<t}\mathbf{E}_x\mathbf{P}_{x_r}\{\varphi_{t-r}<0\}\\&=0.\end{aligned}$$

另一方面，若 t 为有理数，则 $\varphi_t^*\geqslant\varphi_t$. 因此对有理 t 和 $x\in\mathscr{X}$

$$\mathbf{P}_x\{\varphi_t^*=\varphi_t\}=1.$$

由单调性，作为 t 的函数 φ_t^* 最多有可数个间断点.

现在设

$$\tilde{\varphi}_t=\begin{cases}\varphi_{t-0}^*, & 若\ \varphi_t<\varphi_{t-0}^*,\\ \varphi_t, & 若\ \varphi_{t-0}^*\leqslant\varphi_t\leqslant\varphi_{t+0}^*,\\ \varphi_{t+0}^*, & 若\ \varphi_t>\varphi_{t+0}^*.\end{cases}$$

因为

$$\mathbf{P}_x\{\varphi_t>\varphi_{t+0}^*\}\leqslant\mathbf{P}_x\left\{\bigcup_{r>t}\{\varphi_t>\varphi_r\}\right\}=0,$$

$$\mathbf{P}_x\{\varphi_t<\varphi_{t-0}^*\}\leqslant\mathbf{P}_x\left\{\bigcup_{r<t}\{\varphi_t<\varphi_r\}\right\}=0,$$

故对所有 $t\geqslant0$ 和 $x\in\mathscr{X}$，$\mathbf{P}_x\{\varphi_t\neq\tilde{\varphi}_t\}=0$. 由

$$\mathbf{P}_x\{\theta_h[\tilde{\varphi}_t-\varphi_t]\neq 0\}=\mathbf{E}_x\mathbf{P}_{x_h}\{\tilde{\varphi}_t-\varphi_t\neq 0\}=0$$

可见，对所有 $h>0$，$t\geqslant 0$ 和 $x\in\mathscr{X}$，$\mathbf{P}_x\{\theta_h\tilde{\varphi}_t=\tilde{\varphi}_{t+h}-\tilde{\varphi}_h\}=1$. 显然，$\tilde{\varphi}_t$ 是几乎可测可加泛函. 引理得证.

注. 容易看出，$\tilde{\varphi}_t$ 是 $\mathscr{N}_{t+0}$ 可测随机变量. 其中 $\mathscr{N}_{t+0}=\bigcap\mathscr{N}_s$. 如果 t 是 $\tilde{\varphi}_t$ 的连续点，即对所有 $x\in\mathscr{X}$，$\mathbf{P}_x\{\tilde{\varphi}_{t+0}-\tilde{\varphi}_{t-0}=0\}=1$，则可以选择 $\tilde{\varphi}_t$ 为 $\mathscr{N}_t$ 可测的.

下面我们要研究非减的几乎可测齐次可加泛函. 考虑随机变量

$$\varphi_{0+}=\lim_{t\downarrow 0}\varphi_t.$$

它关于 $\mathscr{N}_{0+}$ 可测. 因此在很一般的条件下可见，对任意 x，φ_{0+} 关于测度 $\mathbf{P}_x$ 几乎处处等于一常数. 下面的引理给出了这些条件.

引理 2 如果拓扑相空间中的马尔科夫过程右连续（从而它随机连续）并且是 Feller 的，则对于所有 x，任一 $\mathscr{N}_{0+}$ 可测随机变量都 $\mathbf{P}_x$ 几乎处处等于一常数.

证. 只需考虑有界 $\mathscr{N}_{0+}$ 可测随机变量 φ. 设 $f_n(x_1,\cdots,x_n)$ 是一有界连续函数的序列：对每个 n 存在 $t_n^{(n)}>\cdots>t_1^{(n)}>0$，$t_n^{(n)}\to 0$，使

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_x|f_n(x(t_1^{(n)}),\cdots,x(t_n^{(n)}))-\varphi|^2=0.$$

设 $g_n(x)=\mathbf{E}_xf_n(x(t_1^{(n)}),\cdots,x(t_n^{(n)}))$. 那末 $g_n(x)\to\mathbf{E}_x\varphi$. 由过程的右连续性和 Feller 性知，当 $h\downarrow 0$ 时

$$\mathbf{E}_{x(h)}f_n(x(t_1^{(n)}),\cdots,x(t_n^{(n)}))=g_n(x_h)\overset{\mathbf{P}_x}{\to}g_n(x).$$

所以

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x\varphi^2&=\lim_{n\to\infty}\lim_{h\downarrow 0}\mathbf{E}_x\varphi f_n(x(t_1^{(n)}+h),\cdots,x(t_n^{(n)}+h))\\&=\lim_{n\to\infty}\lim_{h\downarrow 0}\mathbf{E}_x\varphi\mathbf{E}_{x_h}f_n(x(t_1^{(n)}),\cdots,x(t_n^{(n)}))\\&=(\mathbf{E}_x\varphi)^2,\end{aligned}$$

于是 $\mathbf{P}_x\{\varphi=\mathbf{E}_x\varphi\}=1$. 引理得证.

注. 在引理的条件下 $\mathscr{N}_{t+0}\subset\bar{\mathscr{N}}_t$，其中 $\bar{\mathscr{N}}_t$ 是 σ 代数 $\mathscr{N}_t$ 关于测度 $\mathbf{P}_x$ 的完备化的交（对所有 $x\in\mathscr{X}$ 的交）.

假设过程是右连续的和强马尔科夫的．设 $a(x) = \mathbf{E}_x\varphi_{0+}$，则 $a(x)$ 是 $\mathfrak{B}$ 可测函数，

$$\mathbf{P}_x\{\varphi_{0+} = a(x)\} = 1, \tag{1}$$

而且对一切 $x \in \mathscr{X}$ 和 $t > 0$ 有

$$\mathbf{P}_x\{\varphi_{t+0} - \varphi_t = \theta_t\varphi_{0+} = a(x_t)\} = 1.$$

我们建立一泛函

$$\psi_t = \sum_{s \leqslant t} a(x_s). \tag{2}$$

它是有穷的齐次可加泛函，而且 $\psi_t \leqslant \varphi_{t+0}$．对所有 $t \geqslant 0$，随机变量 ψ_t 是 $\mathscr{N}_{t+0}$ 可测的．泛函 ψ_t 的值等于它的跳跃度之和．我们现在考虑泛函 $\hat{\varphi}_t = \varphi_t - \psi_t$．它也是几乎可测的齐次可加泛函；此外，它右连续，$\hat{\varphi}_{0+} = 0$．由最后这个关系式可见，对所有 $x \in \mathscr{X}$ 和 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \downarrow 0} \mathbf{P}_x\{\hat{\varphi}_t > \varepsilon\} = 0.$$

我们称满足该条件的泛函为**随机连续的**．如果泛函是非减的和随机连续的，则它右连续，因为对于它有 $a(x) = \mathbf{E}_x\hat{\varphi}_{0+} = 0$．

由 (2) 式所定义的泛函称为**纯断的**．设 $a(s)$ 是 $\mathfrak{B}$ 可测的非负函数．这样的泛函有穷的必要和充分条件是，对任意 $\varepsilon > 0$，在每个有穷时间区间上只存在有穷个 t，使 $a(x(t)) > \varepsilon$．

我们要研究随机连续的非减几乎可测齐次泛函的结构．这里，自然首先考虑随机连续阶梯泛函 φ_t，即（对任意 x）概率空间 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$ 上的随机过程 φ_t 是右连续的阶梯（在每个有穷区间上为分段常值的）过程．事件 $\{\varphi_t = 0\} \in \mathscr{N}_t$．所以，过程 φ_t 首次跳跃的时间 τ_1 是马尔科夫时间．设 $\eta_1 = \varphi_{\tau_1}$．根据过程的强马尔科夫性，如果 τ_2 和 η_2 分别为第二次跳跃的时间和跃度，则 $\tau_2 = \tau_1 + \theta_{\tau_1}$，$\eta_2 = \theta_{\tau_1}\eta_1$，因为 $\theta_{\tau_1}\varphi_t = \varphi_{t+\tau_1} - \varphi_{\tau_1}$．一般，如果 η_n 是过程第 n 次的跳跃度，而 τ_n 是这次跳跃的时间，则

$$\eta_n = \theta_{\tau_1}\eta_{n-1},\quad \tau_n = \theta_{\tau_1}\tau_{n-1} + \tau_{n-1}.$$

因而，为给出阶梯泛函，只需给出变量 τ_1 和 η_1．因 $\varphi(t) = \sum_{\tau_k \leqslant t} \eta_k$

是齐次可加泛函，可知马尔科夫时间 τ_1 应满足

$$\theta_t\{\tau_1 > h\}\cap\{\tau_1 > t\} = \{\tau_1 > t + h\},$$

因为 $\varphi_{t+h} = \varphi_t + \theta_t\varphi_h$，而且由此有 $\{\varphi_{t+h} = 0\} = \{\varphi_t = 0\}\cap\{\theta_t\varphi_h = 0\} = \{\varphi_t = 0\}\cap\{\theta_t\varphi_h = 0\}$. 从而 τ_1 是原过程的到达无穷(中断)时间.

为描绘随机变量 η_1，我们考虑 σ 代数 $\mathscr{M}_{\tau_1}^{(n)}$，它是由形如 $\{k/2^n < \tau_1 \leqslant (k+1)/2^n\}\cap\{x_s \in A\}$, $k \geqslant 0$, $k/2^n < s \leqslant (k+1)/2^n$ 的集产生的. 记 $\mathscr{M}_{\tau_1} = \bigcap\limits_n \mathscr{M}_{\tau_1}^{(n)}$. 那末 η_1 是 $\mathscr{M}_{\tau_1}$ 可测随机变量. 事实上，当 $\varphi_{k/2^n} = 0$, $\varphi_{(k+1)/2^n} > 0$ 时，令 $\eta_1^{(n)} = \varphi_{(k+1)/2^n} - \varphi_{k/2^n}$；它 $\mathscr{M}_{\tau_1}^{(n)}$ 可测. 此外，由 φ_t 的右连续性知 $\eta_1 = \lim\limits_{n\to\infty}\eta_1^{(n)}$，所以对任意 n，随机变量 η_1 关于 $\mathscr{M}_{\tau_1}^{(n)}$ 可测(这里，我们用到明显的包含关系 $\mathscr{M}_{\tau_1}^{(n)} \supset \mathscr{M}_{\tau_1}$).

现在假设 φ_t 是右连续齐次可加泛函. 我们引进泛函 $\psi_t^{(\varepsilon)}$,

$$\psi_t^{(\varepsilon)} = \sum_{s \leqslant t} \chi_\varepsilon(\varphi_s - \varphi_{s-0}),$$

其中当 $\lambda \geqslant \varepsilon$ 时 $\chi_\varepsilon(\lambda) = \lambda$，而当 $\lambda < \varepsilon$ 时 $\chi_\varepsilon(\lambda) = 0$. 容易验证，$\psi_t^{(\varepsilon)}$ 是齐次可加泛函. 它随机连续并且是阶梯的. 如果 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$，则 $\psi_t^{(\varepsilon_1)} \leqslant \psi_t^{(\varepsilon_2)}$；从而存在

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \psi_t^{(\varepsilon)} = \psi_t^{(0)}.$$

$\psi_t^{(0)}$ 也是随机连续的非减齐次可加泛函. 自然称泛函 $\psi_t^{(0)}$ 为**泛函 φ_t 的纯断部分**，而称齐次可加泛函 $\varphi_t^0 = \varphi_t - \psi_t^{(0)}$ 为泛函 φ_t 的**连续部分** ($\varphi_t^{(0)}$ 显然是 t 的非减连续函数). 纯断部分是阶梯泛函的极限这一事实，就完全描述了它. 连续泛函值得更详细地研究.

连续齐次可加泛函 设 φ_t 是非减连续齐次可加泛函. 首先注意到，由连续性 $\varphi_t = \lim\limits_{s\uparrow t}\varphi_s$. 从而，如果 φ_t 为 $\mathscr{N}_{t+0}$ 可测，则它就是 $\mathscr{N}_t$ 可测随机变量. 所以，对于连续泛函，齐次可加泛函定义中的条件 A1) 和 A1') 相同. 此外，对于连续泛函，对一切 x 有

$$\mathbf{P}_x\{\theta_h\varphi_t = \varphi_{t+h} - \varphi_t;\ t \geqslant 0,\ h > 0\} = 1.$$
这由下面的等式即可看出：对于连续泛函

$$\bigcap_{h>0,t\geqslant 0}\{\theta_h\varphi_t = \varphi_{t+h} - \varphi_t\} = \bigcap_{h>0,t\geqslant 0,h,t\in R}\{\theta_h\varphi_t = \varphi_{t+h} - \varphi_t\},$$

其中 R 是有理数集．设 $F_1 \in \mathscr{N}$，而且对所有 $x \in \mathscr{X}$，$\mathbf{P}_x(F_1) = 0$．可以改变泛函在集 F_1 上的值，使对所有 $t \geqslant 0$，$h > 0$，新泛函 φ'_t 满足等式 $\theta_h\varphi'_t = \varphi'_{t+h} - \varphi'_h$.

我们引进函数

$$v(t, x) = \mathbf{E}_x e^{-\varphi_t}.$$

对所有 t 该函数对 x 可测，它非负并且以 1 为界．结果表明，函数 $v(t, x)$ 唯一决定泛函 φ_t（精确到几乎等价性唯一）.

定理 1 对任意 x 和 $t > 0$

$$\varphi_t = \mathbf{P}_x\text{-}\lim_{h\downarrow 0}\int_0^t \frac{1 - v(h, x_s)}{h}ds.$$

证． 首先估计

$$\Delta(n, h, s) = \varphi(nh + s) - \varphi(s) - \sum_{k=0}^{n-1}[1 - v(h, x(kh + s))]$$

（其中 $\varphi(t) = \varphi_t$，$x(t) = x_t$）．我们有

$$\begin{aligned}\Delta(n, h, s) = \sum_{k=1}^{n}(&[\varphi(kh + s) - \varphi((k-1)h + s)] \\ &- [1 - \exp\{-[\varphi(kh + s) \\ &- \varphi((k-1)h + s)]\}]) \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1}[\xi_{k,h,s} - \mathbf{E}(\xi_{k,h,s}|\mathscr{N}_{kh+s})],\end{aligned}$$

其中

$$\xi_{k,h,s} = (1 - \exp\{-[\varphi(kh + h + s) - \varphi(kh + s)]\});$$

这时

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\xi_{k,h,s}|\mathscr{N}_{kh+s}) &= 1 - \mathbf{E}(e^{-\theta_{kh+s}\varphi_h}|\mathscr{N}_{kh+s}) \\ &= 1 - v(h, x(kh + s)).\end{aligned}$$

我们分别估计 $\Delta(n, h, s)$ 表达式中的两个和．因为

$$\sum_{k=1}^{n}[\varphi(kh+s)-\varphi((k-1)h+s)-1$$

$$+\exp\{-[\varphi(kh+s)-\varphi((k-1)h+s)]\}]$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[\varphi(kh+s)-\varphi((k-1)h+s)]^2$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\varphi(nh+s)\sup_{\substack{|t-t_1|<h\\ t\leqslant nh+s}}|\varphi_t-\varphi_{t_1}|,$$

所以，当 $h\downarrow 0$，而且 $nh+s$ 有界时，由 φ_t 的连续性知第一个和关于 s 一致趋于 0. 为估计第二个和，我们引进

$$\chi(N,h,k,s)=\begin{cases}1, & 若 \sum_{i=0}^{k-1}\xi_{i,h,s}^2\leqslant N,\\ 0, & 若 \sum_{i=0}^{k-1}\xi_{i,h,s}^2>N.\end{cases}$$

那末

$$\mathbf{E}_x\left(\sum_{k=0}^{n-1}[\xi_{k,h,s}-\mathbf{E}(\xi_{k,h,s}|\mathcal{N}_{k,h+s})]\chi(N,h,k,s)\right)^2$$

$$=\mathbf{E}_x\sum_{k=0}^{n-1}[\xi_{k,h,s}-\mathbf{E}(\xi_{k,h,s}|\mathcal{N}_{kh+s})]^2\chi(N,h,k,s)$$

$$\leqslant\mathbf{E}_x\sum_{k=0}^{n-1}\xi_{k,h,s}^2\chi(N,h,k,s).$$

现在我们注意到，对 $s\leqslant h$

$$\xi_{k,h,s}^2\leqslant\xi_{l,2h,0}^2+\xi_{l,2h,h},$$

其中 l 是 $k/2$ 的整数部分. 所以

$$\frac{1}{h}\int_0^h\sum_{k=0}^{n-1}\xi_{k,h,s}^2ds\leqslant\sum_{0\leqslant l\leqslant n/2}(\xi_{l,2h,0}^2+\xi_{l,2h,h}^2),$$

而且事件 $\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\xi_{k,h,s}^2>N\right\}$ 是事件 $\left\{\sum_{0\leqslant l<n/2}\xi_{l,2h,0}^2>\frac{N}{2}\right\}$ 或事件 $\left\{\sum_{0\leqslant l<n/2}\xi_{l,2h,h}^2>\frac{N}{2}\right\}$ 的特款. 由此可见

$$\lim_{h\downarrow 0}\mathbf{P}_x\left\{\frac{1}{h}\int_0^h|\Delta(n,h,s)|ds>\varepsilon\right\}$$

$$\leqslant \lim_{h\downarrow 0}\mathbf{P}_x\left\{\frac{1}{h}\int_0^h\left|\sum_{k=0}^{n-1}\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\ [\xi_{k,h,s}-\mathbf{E}(\xi_{k,h,s}|\mathscr{N}_{kh+s})]\right|ds\geqslant\varepsilon\right\}$$

$$\leqslant \lim_{h\downarrow 0}\left[\mathbf{P}_x\left\{\sum_{0\leqslant l<n/2}\xi^2_{l,2h,0}>\frac{N}{2}\right\}\right.$$

$$+\mathbf{P}_x\left\{\sum_{0\leqslant l<n/2}\xi^2_{l,2h,h}>\frac{N}{2}\right\}$$

$$+\mathbf{P}_x\left\{\frac{1}{h}\int_0^h\left|\sum_{k=0}^{n-1}[\xi_{k,h,s}-\mathbf{E}(\xi_{k,h,s}|\mathscr{N}_{kh+s})]\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\cdot\chi(N,h,k,s)\right|ds\geqslant\varepsilon\right\}\right].$$

最后这个式子趋向 0，因为 $\sum_{k=0}^{n-1}\xi^2_{k,h,s}\to 0$，

$$\mathbf{E}_x\frac{1}{h}\int_0^h\left|\sum_{k=0}^{n-1}[\xi_{k,h,s}-\mathbf{E}(\xi_{k,h,s}|\mathscr{N}_{kh+s})]\chi(N,h,k,s)\right|ds$$

$$\leqslant\frac{1}{h}\int_0^h\sqrt{\mathbf{E}_x\sum_{k=0}^{n-1}\xi^2_{k,h,s}\chi(N,h,k,s)}ds,$$

而

$$\sum_{k=0}^{n-1}\xi^2_{k,h,s}\chi(N,h,k,s)\leqslant N+1.$$

因此，对所有 $x\in\mathscr{X}$，依概率 $\mathbf{P}_x$ 有

$$\frac{1}{h}\int_0^h\varphi(nh+s)ds-\frac{1}{h}\int_0^h\varphi(s)ds$$

$$-\frac{1}{h}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^h[1-v(h,x(kh+s))]ds\to 0.$$

若选择 n，使 $nh\to t$，则依概率 $\mathbf{P}_x$ 有

$$\varphi(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^{nh}[1-v(h,x_s)]ds.$$

对 $n_1h < t < n_2h$ 用不等式

$$\int_0^{n_1 h}[1 - v(h, x_s)]ds \leqslant \int_0^t [1 - v(h, x_s)]ds$$
$$\leqslant \int_0^{n_2 h}[1 - v(h, x_s)]ds,$$

即可完成定理的证明.

有了非减连续齐次可加泛函,就可以利用对泛函的积分运算,来构造同种类型的新泛函.

假设过程 $x(t)$ 右连续. 我们定义积分

$$I_t(f; \varphi) = \int_0^t f(x_s)d\varphi_s.$$

(该积分对一切有界 Borel 函数 $f(x)$ 有意义,因为这时 $f(x(s))$, $s \geqslant 0$, 是有界 Borel 函数,而 $\varphi(s)$ 是非降连续函数.) 我们注意到,若 f 连续,则 $f(x(s))$ 右连续,从而

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x_s)d\varphi_s = \lim_{\max \Delta s_k \downarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x(s_{k+1}))[\varphi(s_{k+1}) - \varphi(s_k)], \quad (3)$$

其中 $t_1 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = t_2$, $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$. 由此可见,如果 f 连续,则 $I_t(f; \varphi)$ 是 $\mathscr{N}_t$ 可测变量. 因为 $I_t(f_n; \varphi) \to I_t(f; \varphi)$, 故如果 f_n 有界收敛于 f, 则对任意有界 Borel 函数 $f(x)$, $I_t(f; \varphi)$ 也 $\mathscr{N}_t$ 可测. 对于连续函数 f, 利用 (3) 式容易证明

$$I_{t+h}(f; \varphi) - I_t(f; \varphi) = \int_t^{t+h} f(x_s)d\varphi_s$$
$$= \int_0^h f(x_{s+t})d\varphi_{s+t}$$
$$= \theta_t \int_0^h f(x_s)d\varphi_s.$$

又由函数的有界收敛性可知,对一切有界 $\mathfrak{B}$ 可测函数 f

$$\theta_h I_t(f; \varphi) = I_{t+h}(f; \varphi) - I_h(f; \varphi),$$

即 $I_t(f; \varphi)$ 是可加泛函. 如果 $f > 0$, 则它是非负的和非减的. 它是连续的,因为

$$I_{t+h}(f; \varphi) - I_t(f; \varphi) \leqslant \|f\|(\varphi_{t+h} - \varphi_t),$$

而且泛函 φ_t 连续.

假设 $f(x)>0$ 是无界函数. 那末

$$I_t(f;\varphi)=\int_0^t f(x_s)d\varphi_s$$

可以定义为 $I_t(f_n;\varphi)$ 的极限,其中 f_n 有界,而且 $f_n\uparrow f$. 如果对所有 t, 变量 $I_t(f;\varphi)$ 有限,则它也决定一正的非减连续齐次可加泛函;如果被积函数连续,则由 Lebesgue-Stieltjes 积分对上界的连续性知, $I_t(f;\varphi)$ 连续.

假设函数 f 处处为正. 那末也可以通过 $I_t(f,\varphi)$ 表示 φ_t:

$$\varphi_t=\int_0^t\frac{1}{f(x_s)}dI_s(f;\varphi).$$

一个特别连续泛函类——W泛函起着十分重要的作用,它是 Е. Б. Дынкин 引进的. 所谓W泛函是指非减非负的连续齐次可加泛函 φ_t, 对所有 $t\geqslant 0$ 满足

$$\sup_{x\in\mathscr{X}}\mathbf{E}_x\varphi_t<\infty.$$

为满足该式,只需对某个 $t_0>0$ 使 $\sup\limits_{x\in\mathscr{X}}\mathbf{E}_x\varphi_{t_0}<\infty$, 因为当 $t\leqslant T$ 时有 $\varphi_t\leqslant\varphi_T$, 而且

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathscr{X}}\mathbf{E}_x\varphi_{nt_0}&\leqslant\sup_{x\in\mathscr{X}}\mathbf{E}_x\mathbf{E}_{x((n-1)t_0)}\varphi_{t_0}+\sup_{x\in\mathscr{X}}\mathbf{E}_x\varphi_{(n-1)t_0}\\&\leqslant\sup_{x\in\mathscr{X}}\mathbf{E}_x\varphi_{t_0}+\sup_{x\in\mathscr{X}}\mathbf{E}_x\varphi_{(n-1)t_0}\\&\leqslant n\sup_{x\in\mathscr{X}}\mathbf{E}_x\varphi_{t_0}.\end{aligned}$$

我们证明,任何连续正泛函都可以表为对W泛函的积分. 为此只需证明,对任意W泛函 φ_t 存在一个处处为正的函数 $g(x)$, 使 $I_t(g;\varphi)$ 是W泛函. 为了构造该函数,我们注意到,对 $\bar{t}>0$ 有

$$\int_0^{\bar{t}}e^{-\varphi_{\bar{t}}+\varphi_s}d\varphi_s=1-e^{-\varphi_{\bar{t}}}$$

或

$$1-e^{-\varphi_{\bar{t}}}=\int_0^{\bar{t}}e^{-\theta_s\varphi_{\bar{t}-s}}d\varphi_s.$$

由此可见,

$$\int_0^{\bar{t}/2} e^{-\theta_s \varphi_{\bar{t}/2}} d\varphi_s \leqslant 1,$$

$$\mathbf{E}_x \int_0^{\bar{t}/2} e^{-\theta_s \varphi_{\bar{t}/2}} d\varphi_s \leqslant 1.$$

因为

$$\mathbf{E}_x \int_0^{\bar{t}/2} e^{-\theta_s \varphi_{\bar{t}/2}} d\varphi_s = \mathbf{E}_x \int_0^{\bar{t}/2} \mathbf{E}(e^{-\theta_s \varphi_{\bar{t}/2}} | \mathscr{N}_s) d\varphi_s$$

$$= \mathbf{E}_x \int_0^{\bar{t}/2} \mathbf{E}_{x_s} e^{-\varphi_{\bar{t}/2}} d\varphi_s,$$

故对所有 x

$$\mathbf{E}_x I_{\bar{t}/2}(g; \varphi) \leqslant 1,$$

其中 $g(x) = \mathbf{E}_x e^{-\varphi_{\bar{t}/2}}$. 因此 $I_t(g; \varphi)$ 是W泛函. 因而,对连续泛函的研究可以归结为对W泛函的研究.

W泛函 设$\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$是拓扑空间 $\mathscr{X}$ 中的马尔科夫过程,它的轨道右连续,而 $\varphi(t)$ 非负连续齐次可加泛函,对所有 $t > 0$ 满足 $\sup_x \mathbf{E}_x \varphi(x) < \infty$. 下面的引理在研究$W$泛函时是有用的.

引理 3 对一切自然数 n 和 $t > 0$ 有

$$\sup_x \mathbf{E}_x \varphi^n(t) \leqslant n! [\sup_x \mathbf{E}_x \varphi(t)]^n. \tag{4}$$

证. 因为由 $\varphi(t)$ 的连续性有

$$[\varphi(t)]^n = n \int_0^t [\varphi(t) - \varphi(s)]^{n-1} d\varphi(s),$$

故

$$\mathbf{E}_x \varphi^n(t) = n \mathbf{E}_x \int_0^t [\varphi(t) - \varphi(s)]^{n-1} d\varphi(s)$$

$$= n \mathbf{E}_x \int_0^t \mathbf{E}([\varphi(t) - \varphi(s)]^{n-1} | \mathscr{N}_s) d\varphi(s)$$

$$= n \mathbf{E}_x \int_0^t \mathbf{E}_{x_s} [\varphi(t - s)]^{n-1} d\varphi(s)$$

$$\leqslant n \sup_{y \in \mathscr{X}} \mathbf{E}_y [\varphi(t)]^{n-1} \mathbf{E}_x \varphi(t).$$

因此

$$\sup_x \mathbf{E}_x \varphi^n(t) \leqslant n \sup_x \mathbf{E}_x \varphi(t) \cdot \sup_x \mathbf{E}_x \varphi^{n-1}(t).$$

现在用数学归纳法很容易证明 (4). 引理得证.

可以把每一个W泛函和一函数

$$W(t, x) = \mathbf{E}_x \varphi(t) \tag{5}$$

相联系. 该函数满足下列条件:

W 1) 对每个 $t > 0$, 函数 $W(t, x)$ 关于 x 为 $\mathfrak{B}$ 可测, 而对每个 x, $W(t, x)$ 是 t 的非减连续函数; $\lim\limits_{t \downarrow 0} W(t, x) = 0$; 对所有 $t > 0$, $\sup\limits_x W(t, x) < \infty$;

W 2) 对所有 $t > 0$, $h > 0$ 和 $x \in \mathscr{X}$

$$W(t + s, x) = W(t, x) + \mathbf{E}_x W(s, x_t). \tag{6}$$

因为 $\varphi(t)$ 是非减连续函数, 而且 $\varphi(0) = 0$, $\mathbf{E}_x \varphi(t)$ 有限, 故由此可以推出条件 W 1). 条件 W 2) 是下面的等式的推论:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x \varphi(t + s) &= \mathbf{E}_x \varphi(t) + \mathbf{E}_x \theta_t \varphi(s) \\ &= \mathbf{E}_x \varphi(t) + \mathbf{E}_x \mathbf{E}_{x_t} \varphi(s).\end{aligned}$$

我们称满足条件 W 1) 和 W 2) 的函数 $W(t, x)$ 为W**函数**.

由 (5) 式定义的函数 $W(t, x)$, 精确到随机等价性, 决定了泛函 $\varphi(t)$. 为说明这一点, 我们注意到, 对于任意关于两个变量 $x \in \mathscr{X}$ 和 $s \in [0, \infty)$ 的全体连续的函数 $g(x, s)$, 有

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_x \int_0^t g(x_s, s) d\varphi_s \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \mathbf{E}_x \int_0^t g(x_s, s) \frac{\varphi_{s+h} - \varphi_s}{h} ds \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \mathbf{E}_x \int_0^t g(x_t, s) \frac{W(h, x_s)}{h} ds,\end{aligned}$$

因为对任意连续非减函数 $\alpha(s)$ 和连续函数 $\beta(s)$

$$\int_0^t \beta(s) d\alpha(s) = \lim_{h \downarrow 0} \int_0^t \beta(s) \frac{\alpha(s + h) - \alpha(s)}{h} ds,$$

而

$$\begin{aligned}&\left| \int_0^t g(x_s, s) \frac{\varphi_{s+h} - \varphi_s}{h} ds \right| \\ &\leqslant \|g\| \left(\frac{1}{h} \int_0^{t+h} \varphi_u du - \frac{1}{h} \int_0^t \varphi_u du \right)\end{aligned}$$

$$\leqslant \|g\| \varphi_{t+h},$$

从而可以在数学期望号 $\mathbf{E}_x$ 下取极限. 这样，如果已知函数对充分小的 t 的值，就可以对任意有界 $\mathfrak{B} \times \mathfrak{U}_t$ 可测函数 $g(x, s)$ 确定 $\mathbf{E}_x \int_0^t g(x_s, s) d\varphi_s$ 的值，其中 $\mathfrak{U}_t$ 是 $[0, \infty)$ 上 Borel 集的 σ 代数. 从而，我们可以定义函数序列

$$\begin{aligned} W^{(n)}(t, x) &= \mathbf{E}_x \varphi^n(t) \\ &= n \int_0^t \mathbf{E}_{x_s} \varphi^{n-1}(t-s) d\varphi(s) \\ &= n\, \mathbf{E}_x \int_0^t W^{(n-1)}(t-s, x_s) d\varphi_s. \end{aligned}$$

设 $\lambda > 0$，而且 $\lambda \sup\limits_x W(t_0, x) = q < 1$. 那末对 $t < t_0$ 由引理 3 有

$$\mathbf{E}_x \varphi^n(t) \lambda^n \leqslant n! q^n.$$

因此

$$\mathbf{E}_x e^{-\lambda\varphi(t)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \lambda^n W^{(n)}(t, x) = v_\lambda(t, x).$$

根据定理 1

$$\varphi(t) = \frac{1}{\lambda} \lim_{h \downarrow 0} \int_0^t \frac{1 - v_\lambda(h, x_s)}{h} ds. \tag{7}$$

于是，函数 $W(t, x)$ 确实(精确到随机等价性)决定泛函 $\varphi(t)$.

是否任何 W 函数都对应于一 W 泛函呢? 下面的定理回答了这个问题.

定理 2 设 $\mathscr{X}$ 是可分的完备度量空间，$x(t)$ 是右连续过程，$\varphi(t)$ 是一 W 泛函. 函数 $W(t, x)$ 可以通过 $\varphi(t)$ 表为 (5) 式的必要和充分条件是，它满足条件 W 1)，W 2) 和

W 3) 对所有 $x > 0$ 和 $t > 0$

$$\lim_{\Delta \downarrow 0, h \downarrow 0} \mathbf{E}_x \frac{1}{h} \int_0^t W(h, x_s) W(\Delta, x_s) ds = 0. \tag{8}$$

证. 条件 W 1) 和 W 2) 的必要性已经证明. 我们证明条件 W 3) 的必要性. 有

$$\mathbf{E}_x \frac{1}{h}\int_0^t W(h, x_s)W(\Delta, x_s)ds$$

$$= \mathbf{E}_x \frac{1}{h}\int_0^t [\varphi_{s+h} - \varphi_s]W(\Delta, x_s)ds.$$

因为

$$\eta(\Delta, h) = \frac{1}{h}\int_0^t [\varphi_{s+h} - \varphi_s]W(\Delta, x_s)\,ds$$

以 $\varphi_{t+h}\sup\limits_x W(\Delta, x)$ 的值为界，并且关于 h 是单调的，所以只需证明

$$\mathbf{P}_x - \lim_{\Delta\downarrow 0}\overline{\lim_{h\downarrow 0}}\,\eta(\Delta, h) = 0. \tag{9}$$

注意到，对 $\Delta > h$

$$\eta(\Delta, h) = \frac{1}{h}\int_0^t\int_s^{s+h} d\varphi(u)W(\Delta, x_s)ds$$

$$\leqslant \int_h^{t+h}\left(\frac{1}{h}\int_{u-h}^u W(\Delta, x_s)\,ds\right)d\varphi(u)$$

$$+ \sup_x |W(\Delta, x)|\varphi(h)$$

$$\leqslant \int_h^{t+h}\left(\frac{1}{h}\int_{-h}^0 W(\Delta - s, x_{u+s})ds\right)d\varphi(u)$$

$$+ O(\varphi(h)),$$

$\varphi(h)\downarrow 0$，而 $W(\Delta - s, x_{u+s})$，$s\in[-h, h]$，是半鞅：对 $-h < s_1 < s < h$

$$\mathbf{E}[W(\Delta - s, x_{u+s}) | \mathscr{N}_{u+s_1}]$$

$$= \mathbf{E}_{x(u+s_1)}W(\Delta - s, x_{s-s_1})$$

$$\leqslant W(\Delta - s_1, x_{u+s_1});$$

从而存在极限

$$\lim_{s\uparrow h} W(\Delta + h - s, x_{u+s-h}),$$

记作 $W(\Delta, x_{u-0})$。所以

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_{-h}^0 W(\Delta - s, x_{u+s})ds = W(\Delta, x_{u-0}),$$

而

$$\varlimsup_{h\downarrow 0}\eta(\Delta, h) \leqslant \int_0^t W(\Delta, x_{u-0})d\varphi(u).$$

显然，当 $\Delta_1 > \Delta$ 时，$W(\Delta, x_{u-0}) \leqslant \varliminf_{h\downarrow 0} W(\Delta_1, x_{u-h})$.

设 $\alpha(s)$ 是有界非负 Borel 函数，而 $\beta(s)$ 是非减连续函数. 记

$$\alpha_*(s) = \varlimsup_{h\downarrow 0}\alpha(s-h).$$

那末

$$\int_0^t \alpha_*(s)d\beta(s) \leqslant \int_0^t \alpha(s)d\beta(s),$$

因为对任意 $\varepsilon > 0$，集合 $\{s:\ \alpha_*(s) > \varepsilon + \alpha(s)\}$ 不包含递增的无穷数列，从而它是 $[0, t]$ 上的有限集或可数集. 因此对任意 $\Delta_1 > \Delta$

$$\lim_{h\downarrow 0}\eta(\Delta, h) \leqslant \int_0^t W(\Delta_1, x_u)d\varphi_u,$$

而由于当 $\Delta_1\downarrow 0$ 时对所有 u，$W(\Delta_1, x_u)\downarrow 0$，即可推出 (9). 定理条件的必要性得证.

充分性. 我们首先证明，对所有 x 和 t 存在关于概率 $\mathbf{P}_x$ 的均方极限

$$\lim \int_0^t \frac{1}{h} W(h, x_s)ds. \tag{10}$$

为此我们考虑随机变量

$$\mathbf{E}_x\left[\int_0^t \left(\frac{1}{h} W(h, x_s) - \frac{1}{\Delta} W(\Delta, x_s)\right)ds\right]^2 = \alpha(\Delta, h).$$

我们有

$$\begin{aligned}\alpha(\Delta, h) &= 2\mathbf{E}_x \iint\limits_{0<s<u<t} \left(\frac{1}{h} W(h, x_s) - \frac{1}{\Delta} W(\Delta, x_s)\right) \\ &\quad\times \left(\frac{1}{h} W(h, x_u) - \frac{1}{\Delta} W(\Delta, x_u)\right)dsdu \\ &= 2\mathbf{E}_x \int_0^t \left(\frac{1}{h} W(h, x_s) - \frac{1}{\Delta} W(\Delta, x_s)\right)\end{aligned}$$

$$\times \mathbf{E}\left(\int_s^t \left[\frac{1}{h} W(h, x_u) - \frac{1}{\Delta} W(\Delta, x_u)\right] du \middle| \mathcal{N}_s\right) ds,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\int_s^t W(h, x_u) du \middle| \mathcal{N}_s\right) &= \mathbf{E}\left(\int_0^{t-s} \theta_s W(h, x_u) du \middle| \mathcal{N}_s\right) \\ &= \int_0^{t-s} [W(h+u, x_s) - W(u, x_s)] ds \\ &= -\int_0^h W(u, x_s) du \\ &\quad + \int_{t-s}^{t-s+h} W(u, x_s) du.\end{aligned}$$

由上面两个等式得估计

$$\begin{aligned}\alpha(\Delta, h) \leqslant 2\mathbf{E}_x \Bigg[&\int_0^t \frac{1}{h} W(h, x_s) \frac{1}{h} \int_0^h W(u, x_s) du ds \\ &+ \int_0^t \frac{1}{h} W(h, x_s) \int_0^\Delta \frac{W(u, x_s)}{\Delta} du ds \\ &+ \int_0^t \frac{1}{h} W(\Delta, x_s) \frac{1}{h} \int_0^h W(u, x_s) du ds \\ &+ \int_0^t \frac{1}{h} W(\Delta, x_s) \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta W(u, x_s) du ds \\ &+ \int_0^t \left\{\left[\frac{1}{h} W(h, x_s) + \frac{1}{\Delta} W(\Delta, x_s)\right]\right. \\ &\cdot \left|\frac{1}{h} \int_{t-s}^{t-s+h} [W(u, x_s) - W(t-s, x_s)] du\right. \\ &+ \frac{1}{\Delta} \int_{t-s}^{t-s+\Delta} [W(u, x_s) \\ &\left.\left. - W(t-s, x_s)] du \right|\right\} ds\Bigg] \\ \leqslant 2\mathbf{E}_x &\int_0^t \left[\frac{1}{h} W(h, x_s) + \frac{1}{\Delta} W(\Delta, x_s)\right] \\ &\cdot [W(h, x_s) + W(\Delta, x_s)] ds\end{aligned}$$

$$+ 2\mathbf{E}_x \int_0^t \left\{ \left[\frac{1}{h} W(h, x_s) + \frac{1}{\Delta} W(\Delta, x_s) \right] \right.$$

$$\cdot ([W(t-s+h, x_s) - W(t-s, x_s)]$$

$$\left. + [W(t-s+\Delta, x_s) - W(t-s, x_s)]) \right\} ds.$$

由条件 W 3)

$$\lim_{\Delta \downarrow 0, h \downarrow 0} \mathbf{E}_x \int_0^t \left\{ \left[\frac{1}{h} W(h, x_s) + \frac{1}{\Delta} W(\Delta, x_s) \right] \right.$$

$$\left. \times [W(h, x_s) + W(\Delta, x_s)] \right\} ds = 0. \tag{11}$$

其次

$$\mathbf{E}_x \int_0^t \left\{ \frac{1}{h} W(h, x_s) [W(t-s+\Delta, x_s) \right.$$

$$\left. - W(t-s, x_s)] \right\} ds$$

$$= \mathbf{E}_x \int_0^t \frac{1}{h} W(h, x_s) \mathbf{E}_x W(\Delta, x_{t-s}) ds$$

$$= \mathbf{E}_x \int_0^t \frac{1}{h} W(h, x_s) W(\Delta, x_t) ds$$

$$\leqslant \sqrt{\mathbf{E}_x \left[\int_0^t \frac{1}{h} W(h, x_s) ds \right]^2}$$

$$\cdot \sqrt{\mathbf{E}_x [W(\Delta, x_t)]^2}.$$

因为 $\sup_x W(\Delta, x)$ 有界，而且当 $\Delta \downarrow 0$ 时对所有 x，$W(\Delta, x) \downarrow 0$，所以，当 $\Delta \downarrow 0$ 时，上式最后乘积中的第二个因式趋于 0. 第一个因式关于 h 一致有界：

$$\mathbf{E}_x \left[\int_0^t \frac{1}{h} W(h, x_s) ds \right]^2 \leqslant 2 \sup_x \left[\mathbf{E}_x \int_0^t \frac{1}{h} W(h, x_s) ds \right]^2$$

$$\leqslant 2 \sup_x \left\{ \frac{1}{h} \int_0^t [W(s+h, x) \right.$$

$$\left. - W(s, x)] ds \right\}^2$$

$$\leqslant 2[\sup_x W(t+h, x)]^2.$$

所以

$$\lim_{h\downarrow 0, \Delta\downarrow 0} \mathbf{E}_x \int_0^t \frac{1}{h} W(h, x_s)[W(t-s+\Delta, x_s) - W(t-s, x_s)]ds = 0. \tag{12}$$

由(11)和(12)可见，$\lim\limits_{h\downarrow 0, \Delta\downarrow 0} \alpha(\Delta, h) = 0$；从而极限(10)存在。

我们引进马尔科夫核族

$$Q(t, x, B) = \mathbf{E}_x \exp\{-\gamma_{t,x}\}\chi_B(x), \tag{13}$$

其中

$$\gamma_{t,x} = \lim \int_0^t \frac{1}{h} W(h, x_s)ds$$

是关于 $\mathbf{P}_x$ 的均方极限。因为对任何 $\mathfrak{B}$ 可测的有界函数 f

$$\int Q(t, x, dy)f(y) = \lim_{h\downarrow 0} \mathbf{E}_x \exp\left\{-\frac{1}{h}\int_0^t W(h, x_s)ds\right\} f(x_t) \tag{14}$$

(对任意 $x \in \mathscr{X}$，右侧的极限存在)，所以左侧的积分是 x 的 $\mathfrak{B}$ 可测函数。从而对任意 B，$Q(t, x, B)$ 对 x 为 $\mathfrak{B}$ 可测。现在我们看到

$$\begin{aligned}
\int & Q(t, x, dy)Q(s, y, B) \\
&= \lim_{h\downarrow 0} \mathbf{E}_x \exp\left\{-\frac{1}{h}\int_0^t W(h, x_u)du\right\} Q(s, x_t, B) \\
&= \lim_{h\downarrow 0} \mathbf{E}_x \exp\left\{-\frac{1}{h}\int_0^t W(h, x_u)du\right\} \\
&\qquad \times \lim_{h_1\downarrow 0} \mathbf{E}_{x_t} \exp\left\{-\frac{1}{h_1}\int_0^s W(h_1, x_v)dv\right\}\chi_B(x_s) \\
&= \lim_{h\downarrow 0}\lim_{h_1\downarrow 0} \mathbf{E}_x \exp\left\{-\frac{1}{h}\int_0^t W(h, x_u)du\right\}
\end{aligned}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{h_1}\int_t^{t+h} W(h_1, x_v)dv\right\}\chi_B(x_{s+t})$$

$$= \mathbf{E}_x \lim_{h\downarrow 0}\lim_{h_1\downarrow 0}\exp\left\{-\frac{1}{h}\int_0^t W(h, x_u)du\right.$$

$$+\frac{1}{h_1}\int_0^t W(h_1, x_u)du$$

$$\left.-\frac{1}{h_1}\int_0^{t+s} W(h_1, x_u)du\right\}\chi_B(x_{s+t})$$

$$= \mathbf{E}_x \exp\{-\gamma_{x,t} + \gamma_{x,t} - \gamma_{x,t+s}\}\chi_B(x_{t+s})$$

$$= Q(t+s, x, B).$$

由此可见，$Q(t, x, B)$ 是(时间齐次)马尔科夫核族. 因为

$$Q(t, x, B) \leqslant P(t, x, B),$$

所以由第一章§5定理2可见,存在可乘泛函 μ_t^s，使

$$\mathbf{E}_{s,x}\mu_t^s f(x_t) = \int Q(s, x, t, dy) f(y),$$

其中 $Q(s, x, t, y) = Q(t-s, x, B)$，而数学期望 $\mathbf{E}_{s,x}$ 在 $\mathcal{N}_\infty^s$ 上定义为

$$\mathbf{E}_{s,x}\theta_s\xi = \mathbf{E}_x\xi, \tag{15}$$

(该式对所有 $\mathcal{N}$ 可测随机变量 ξ 成立). 这时，$0 \leqslant \mu_t^s \leqslant 1$，对 $s < u < t$ 以概率 $\mathbf{P}_x = 1$ 有

$$\mu_u^s \mu_t^u = \mu_t^s,$$

而且 μ_t^s 关于 $\mathcal{N}_t^s$ 可测. 我们定义随机变量

$$\varphi_t^s = -\ln \mu_t^s.$$

这些变量为 $\mathcal{N}_t^s$ 可测,非负(亦可取 $+\infty$ 为值),而且当 $s < u < t$ 时以概率 $\mathbf{P}_x = 1$ 有

$$\varphi_u^s + \varphi_t^u = \varphi_t^s,$$

现在我们注意到，对 $h>0$ 随机变量 $\theta_h\mu_t^s$ 也是过程 $x_h(t)=\theta_h x(t)$ 的可乘泛函，而且由 (15) 可见，

$$\mathbf{E}_{s+h,x}[\theta_h\mu_t^s]f(x_{t+h})=\mathbf{E}_{s+h,x}\theta_h[\mu_t^s f(x_t)]$$
$$=\mathbf{E}_{s,x}\mu_t^s f(x_t).$$

泛函 ${}_h\mu_t^s=\mu_{t+h}^{s+h}$ 也是过程 $x_h(t)$ 的可乘泛函. 因为

$$\mathbf{E}_{s+h,x}[{}_h\mu_t^s f(x_{t+h})]=\mathbf{E}_{s+h,x}\mu_{t+h}^{s+h}f(x_{t+h})$$
$$=\mathbf{E}_{s,x}\mu_t^s f(x_t)$$
$$=\mathbf{E}_{s+h,x}[\theta_h\mu_t^s]f(x_{t+h}),$$

所以由第一章 §5 定理 1 可见，过程 $x_h(t)$ 的泛函 $\theta_h\mu_t^s$ 和 μ_{t+h}^{s+h} 随机等价，即对所有 x 和 s 满足等式

$$\mathbf{P}_{s,x}\{\mu_{t+h}^{s+h}=\theta_h\mu_t^s\}=1.$$

由此可见

$$\mathbf{P}_x\{\mu_{t+h}^{s+h}=\theta_h\mu_t^s\}=1 \quad 和 \quad \mathbf{P}_x\{\theta_h\varphi_t^s=\varphi_{t+h}^{s+h}\}=1.$$

令 $\varphi_t=\varphi_t^0$. 那末，对任意 x，$t>0$ 和 $h>0$，以概率 $\mathbf{P}_x=1$ 有 $\theta_h\varphi_t^0=\varphi_{t+h}^h$. 因此

$$\mathbf{P}_x\{\theta_h\varphi_t=\varphi_{t+h}^h=\varphi_{t+h}^0-\varphi_t^0=\varphi_{t+h}-\varphi_t\}=1,$$

即 φ_t 是非负的齐次可加泛函.

我们证明，对所有 x 和 $t>0$

$$\mathbf{P}_x\{\varphi_t=\gamma_{t,x}\}=1. \tag{16}$$

事实上，对 $\mathscr{X}^n$ 上的任一 $\mathfrak{B}^n$ 可测函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$ 有

$$\mathbf{E}_x e^{-\varphi_t}f(x(t_1),\cdots,x(t_n))$$
$$=\int \mathbf{E}_x f(x(t_1),\cdots,x(t_n))\prod_{k=1}^{n}\mu_{t_k}^{t_{k-1}}$$
$$=\mathbf{E}_x\prod_{k=1}^{n-1}\mu_{t_k}^{t_{k-1}}\mathbf{E}_x[f(x(t_1),\cdots,x(t_n))\mu_{t_n}^{t_{n-1}}|\mathscr{N}_{t_{n-1}}]$$
$$=\mathbf{E}_x\prod_{k=1}^{n-1}\mu_{t_k}^{t_{k-1}}\int f(x(t_1),\cdots,x(t_{n-1}),y)$$
$$\times Q(t_n-t_{n-1},x(t_{n-1}),dy)$$

$$= \int \cdots \int f(y_1, \cdots, y_n) Q(t_1, x, dy) \cdots Q(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, dy_n).$$

如果 $f_1, \cdots, f_n$ 为 $\mathfrak{B}$ 可测的有界函数，则

$$\mathbf{E}_x e^{-\gamma_{t,x}} \prod_{k=1}^{n} f_k(x(t_k))$$

$$= \lim_{h_1, \cdots, h_n \to 0} \mathbf{E}_x \exp\left\{- \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{1}{h_k} \cdot W(h, x_s) ds\right\} \prod_{k=1}^{n} f_k(x(t_k))$$

$$= \int \cdots \int \prod_{k=1}^{n} f_k(y_k) Q(t_1, x, dy_1) \cdots Q(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, dy_n).$$

(最后这个等式是利用 (14) 并当 $h_n \to 0, \cdots, h_1 \to 0$ 时依次取极限而得到的.) 因此，对任何 $\mathfrak{B}^n$ 可测的有界函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 和 $0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ 有

$$\mathbf{E}_x [e^{-\varphi_t} - e^{-\gamma_{t,x}}] f(x(t_1), \cdots, x(t_n)) = 0. \qquad (17)$$

随机变量 $e^{-\varphi_t}$ 为 $\mathscr{N}_t$ 可测，而 $e^{-\gamma_{t,x}}$ $\mathbf{P}_x$ 几乎处处等于一 $\mathscr{N}_t$ 可测的随机变量. 所以由 (17) 式可见

$$\mathbf{P}_x\{e^{-\varphi_t} = e^{-\gamma_{t,x}}\} = 1,$$

从而 (16) 成立. 由 (16) 可见

$$\mathbf{E}_x \varphi_t^2 \leqslant 2 \varliminf_{h_1, h_2 \to 0} \mathbf{E}_x \iint_{0 < s < u < t} \frac{1}{h_1} W(h_1, x_s) \cdot \frac{1}{h_2} W(h_2, x_u) ds du$$

$$= 2 \varliminf_{h_1 \to 0} \mathbf{E}_x \int_0^t \frac{1}{h_1} W(h_1, x_s) \varliminf_{h_2 \to 0} \mathbf{E}_x \cdot \left[\int_s^t \frac{1}{h_2} W(h_2, x_u) du \,|\, \mathscr{N}_s \right] ds$$

$$\leqslant 2\varliminf_{h\to 0}\mathbf{E}_x\int_0^t \frac{1}{h}W(h, x_s)W(t, x_s)ds$$
$$\leqslant 2W(t, x)\sup_y W(t, y).$$

所以

$$W(t, x) = \lim_{h\to 0}\mathbf{E}_x\left[\int_0^t \frac{1}{h}W(h, x_s)ds\right]$$
$$= \mathbf{E}_x\left[\lim_{h\to 0}\int_0^t \frac{1}{h}W(h, x_s)ds\right]$$
$$= \mathbf{E}_x\varphi(t).$$

由此可见，泛函 $\varphi(t)$ 随机连续．所以可以假设它是非减的．为证明它的连续性，我们指出，如果非减过程 $\varphi(t)$，$t\in[0, T]$，满足

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\left[\varphi\left(\frac{k}{2^n}T\right)-\varphi\left(\frac{k-1}{2^n}T\right)\right]^2 = 0, \tag{18}$$

则它在 $[0, T]$ 上连续．因为在(18)式的极限号后面的式子关于 n 是不增的，所以为证明它成立，只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\mathbf{E}_x\left[\varphi\left(\frac{k}{2^n}T\right)-\varphi\left(\frac{k-1}{2^n}T\right)\right]^2 = 0.$$

但是

$$\sum_{k=1}^{2^n}\mathbf{E}_x\left[\varphi\left(\frac{k}{2^n}T\right)-\varphi\left(\frac{k-1}{2^n}T\right)\right]^2$$
$$\leqslant 2\sum_{k=1}^{2^n}\lim_{h\to 0}\mathbf{E}_x\frac{1}{h}\int_{(k-1)T\cdot 2^{-n}}^{kT\cdot 2^{-n}}$$
$$\cdot W(h, x_s)W(T\cdot 2^{-n}, x_s)ds.$$

因为条件 W 3) 成立，所以该不等式左侧趋向 0．定理证完．

对于每一W泛函可以使之与一函数族

$$F_\lambda(x) = \mathbf{E}_x\int_0^\infty e^{-\lambda t}d\varphi_t \tag{19}$$

相联系．对于任意 $\lambda > 0$，函数 $F_\lambda(x)$ 唯一决定函数$W(t, x) = \mathbf{E}_x\varphi_t$，从而它(精确到随机等价性)决定泛函 φ_t 本身．事实上，当 $h > 0$ 时

$$\mathbf{E}_x F_\lambda(x_h) = \mathbf{E}_x \mathbf{E}_{x_h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\varphi_t$$

$$= \mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\varphi_{t+h}$$

$$= e^{\lambda h} \mathbf{E}_x \int_h^\infty e^{-\lambda t} d\varphi_t.$$

所以

$$F_\lambda(x) - e^{-\lambda h} \mathbf{E}_x F_\lambda(x_h) = \mathbf{E}_x \int_0^h e^{-\lambda t} d\varphi_t.$$

如果记 $G_\lambda(h, x) = F_\lambda(x) - e^{-\lambda h}\mathbf{E}_x F_\lambda(x_h)$，则

$$\mathbf{E}_x \sum_{kh<t} G_\lambda(h, x_{kh}) = \sum_{kh<t} \mathbf{E}_x \int_0^t e^{-\lambda t} d\varphi_{kh+t}$$

$$= \mathbf{E}_x \int_0^{t_h} \psi_{\lambda,h}(t) d\varphi_t,$$

其中，$t_h = nh$，$(n-1)h < t \leqslant nh$；而 $\psi_{\lambda,h}(t) = e^{-\lambda(t-kh)}$，$kh \leqslant t < (k+1)h$. 因为 $t_h \to t$，而当 $h \downarrow 0$ 时

$$|\psi_{\lambda,h}(t) - 1| \leqslant 1 - e^{-\lambda h} \to 0,$$

故

$$\lim_{h\to 0} \int_0^{t_h} \psi_{\lambda,h}(t) d\varphi_t = \int_0^t d\varphi_s = \varphi_t,$$

$$\lim_{h\to 0} \mathbf{E}_x \sum_{kh<t} G_\lambda(h, x_{kh}) = W(t, x). \tag{20}$$

与(20)式完全类似，可以推出下面的公式（它书写起来更为方便）：

$$W(t, x) = \lim_{h\downarrow 0} \mathbf{E}_x \int_0^t \frac{1}{h} [F_\lambda(x_s) - e^{-\lambda h} \mathbf{T}_h F_\lambda(x_s)] ds, \tag{21}$$

其中 $\mathbf{T}_h$ 是伴随过程的半群算子. 泛函 φ_t 本身也可以通过 $F_\lambda(x)$ 来表示.

引理 4 如果函数 $F_\lambda(x)$ 和 W 泛函以(19)式相联系，则对所有 x 和 t，在关于 $\mathbf{P}_x$ 的均方收敛意义下

$$\varphi_t = \lim_{h\downarrow 0} \int_0^t \frac{1}{h} [F_\lambda(x_s) - e^{-\lambda h} \mathbf{T}_h F_\lambda(x_s)] ds. \tag{22}$$

证. 因为

$$\frac{1}{h}[F_\lambda(x_s)-e^{-\lambda h}\mathbf{T}_h F_\lambda(x_s)]=\frac{1}{h}\mathbf{E}_{x_s}\int_0^h e^{-\lambda u}d\varphi_u,$$

故

$$\mathbf{E}_x\left\{\varphi(t)-\int_0^t\frac{1}{h}[F_\lambda(x_s)-e^{-\lambda h}\mathbf{T}_h F_\lambda(x_s)]ds\right\}^2$$

$$=\mathbf{E}_x\varphi^2(t)+2\mathbf{E}_x\iint_{0<u<s\leqslant t}\left\{\frac{1}{h}\mathbf{E}_{x_u}\left[\int_0^h e^{-\lambda v}d\varphi_v\right]\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{h}\mathbf{E}_{x_s}\left[\int_0^h e^{-\lambda v}d\varphi_v\right]\right\}duds$$

$$-2\mathbf{E}_x\varphi(t)\int_0^t\frac{1}{h}\mathbf{E}_{x_s}\left[\int_0^h e^{-\lambda v}d\varphi_v\right]ds$$

$$=\mathbf{E}_x\varphi^2(t)+2\mathbf{E}_x\iint_{0<u<s\leqslant t}\frac{1}{h^2}\left[\int_0^h e^{-\lambda v}d\varphi_{v+u}\right]$$

$$\times\left[\int_0^h e^{-\lambda v}d\varphi_{v+s}\right]duds-2\mathbf{E}_x$$

$$\times\int_0^t[W(t-s,x_s)+\varphi(s)]\int_0^h e^{-\lambda v}d\varphi_{v+s}ds.$$

由不等式

$$e^{-\lambda h}\varphi(h+u)-\varphi(u)\leqslant\int_0^h e^{-\lambda v}d\varphi_{v+u}\leqslant\varphi(u+h)-\varphi(u)$$

可见

$$\iint_{0<u<s\leqslant t}\frac{1}{h^2}\left[\int_0^h e^{-\lambda v}d\varphi_{v+u}\int_0^h e^{-\lambda v}d\varphi_{v+s}\right]duds$$

$$\leqslant\frac{1}{h^2}\iint_{0<u<s\leqslant t}[\varphi(u+h)-\varphi(u)]$$

$$\cdot[\varphi(s+h)-\varphi(s)]duds$$

$$=\frac{1}{h^2}\int_0^t[\varphi(u+h)-\varphi(u)]$$

$$\cdot\left[\int_t^{t+h}\varphi(s)ds-\int_u^{u+h}\varphi(s)ds\right]du$$

$$\leqslant\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\varphi(s)ds\cdot\frac{1}{h}\int_0^t[\varphi(u+h)-\varphi(u)]du$$

$$\leqslant \left[\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\varphi(s)ds\right]^2$$

$$\leqslant \varphi^2(t+h),$$

而

$$\lim_{h\to 0}\iint_{0<u<s\leqslant t}\frac{1}{h^2}\left[\int_0^h e^{-\lambda v}d\varphi_{v+u}\int_0^h e^{-\lambda v}d\varphi_{v+s}\right]duds$$

$$=\lim_{h_1\to 0, h_2\to 0}\int_0^t \frac{1}{h_1}[\varphi(u+h_1)-\varphi(u)]$$

$$\times\frac{1}{h_2}\left[\int_t^{t+h_2}\varphi(s)ds-\int_u^{u+h_2}\varphi(s)ds\right]du$$

$$=\lim_{h_1\to 0}\int_0^t\frac{1}{h_1}[\varphi(u+h_1)-\varphi(u)][\varphi(t)-\varphi(u)]du$$

$$=\int_0^t[\varphi(t)-\varphi(u)]d\varphi(u)$$

$$=\frac{\varphi^2(t)}{2}.$$

所以

$$\lim_{h\to 0}\mathbf{E}_x\iint_{0<u<s\leqslant t}\frac{1}{h}\left[\int_0^h e^{-\lambda v}d\varphi_{v+u}\int_0^h e^{-\lambda v}d\varphi_{s+v}\right]duds$$

$$=\mathbf{E}_x\frac{\varphi^2(t)}{2}.$$

同理可得

$$\lim_{h\to 0}\mathbf{E}_x\int_0^t[W(t-s,x_s)+\varphi(s)]\left[\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda v}d\varphi_{v+s}\right]ds$$

$$=\mathbf{E}_x\int_0^t[W(t-s,x_s)+\varphi(s)]d\varphi(s)$$

$$=\mathbf{E}_x\int_0^t[\varphi(t)-\varphi(s)+\varphi(s)]d\varphi(s)$$

$$=\mathbf{E}_x\varphi^2(t).$$

因此

$$\lim_{h\downarrow 0}\mathbf{E}_x\left[\varphi(t)-\int_0^t\frac{1}{h}(F_\lambda(x_s)-\mathbf{T}_hF_\lambda(x_s))^2ds\right]=0,$$

引理得证.

我们指出函数 $F_\lambda(x)$ 的两条性质:

E 1) $F_\lambda(x)$ 是非负的可测函数,对所有 x 和 $t>0$ 满足

$$\mathbf{T}_t F_\lambda(x) \leqslant e^{\lambda t} F_\lambda(x);$$

E 2) 对所有 x

$$\lim_{t\to 0} \mathbf{T}_t F_\lambda(x) = F_\lambda(x).$$

这两条性质都可以从

$$F_\lambda(x) - e^{-\lambda t}\mathbf{T}_t F_\lambda(x) = \mathbf{E}_x \int_0^t e^{-\lambda s} d\varphi_s$$

得出.

称具备性质 E 1) 和 E 2) 的函数 $F_\lambda(x)$ 为 λ 过份函数.

对于 λ 过份函数 $F_\lambda(x)$, 在什么条件下存在一 W 泛函使表现 (19) 成立?

定理 3 对于 λ 过份函数 $F_\lambda(x)$, 存在一 W 泛函 φ_t 使表现 (19) 成立, 当且仅当它有界并且满足条件

$$\lim_{h\to 0,\Delta\to 0} \int_0^t \frac{1}{h}[F_\lambda(x_s) - e^{-\lambda h}\mathbf{T}_h F_\lambda(x_s)] \times [F_\lambda(x_s) - e^{-\lambda\Delta}\mathbf{T}_\Delta F_\lambda(x_s)] ds = 0. \tag{23}$$

证. 必要性. 由不等式

$$\frac{1}{h}[F_\lambda(x) - e^{-\lambda h}\mathbf{T}_h F_\lambda(x)] \leqslant W(h, x)$$

和条件 W 3) 即可得该条件的必要性,而由不等式

$$F_\lambda(x) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k} \sup_x W(1, x)$$

可见, $F_\lambda(x)$ 有界.

充分性. 令 $G_\lambda(h, x) = F_\lambda(x) - e^{\lambda h}\mathbf{T}_h F_\lambda(x)$. 那末

$$\begin{aligned} G_\lambda(h, x) &= F_\lambda(x) - e^{\lambda h/2}\mathbf{T}_{h/2} F_\lambda(x) \\ &\quad + e^{\lambda h/2}\mathbf{T}_{h/2}[F_\lambda(x) - e^{\lambda h/2}\mathbf{T}_{h/2} F_\lambda(x)] \\ &= G_\lambda\left(\frac{h}{2}, x\right) + e^{\lambda h/2}\mathbf{T}_{h/2} G_\lambda\left(\frac{h}{2}, x\right). \end{aligned}$$

同理

$$G_\lambda(kh, x) = G_\lambda(h, x) + \sum_{l=1}^{k-1} l^{\lambda lh} \mathbf{T}_{lh} G_\lambda(h, x).$$

设

$$W^{(h)}(t, x) = \frac{1}{h} \mathbf{E}_x \int_0^t G_\lambda(h, x_s) ds.$$

那末

$$\begin{aligned} W^{(h)}(t, x) &= \frac{1}{h} \left[\mathbf{E}_x \int_0^t F_\lambda(x_s) ds - e^{-\lambda h} \mathbf{E}_x \int_h^{t+h} F_\lambda(x_s) ds \right] \\ &= \mathbf{E}_x \left[\frac{e^{-\lambda h} - 1}{h} \int_0^t F_\lambda(x_s) ds \right. \\ &\quad - e^{-\lambda h} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} F_\lambda(x_s) ds \\ &\quad \left. + e^{-\lambda h} \frac{1}{h} \int_0^h F_\lambda(x_s) ds \right]. \end{aligned}$$

因为当 $h \downarrow 0$ 时

$$\mathbf{E}_x \frac{1}{h} \int_0^h F_\lambda(x_t) dt = \mathbf{E}_x \frac{1}{h} \int_0^h \mathbf{T}_t F_\lambda(x) dt \to F_\lambda(x),$$

故存在极限

$$\begin{aligned} W(t, x) &= \lim_{h \downarrow 0} W^{(h)}(t, x) \\ &= F_\lambda(x) - \mathbf{T}_t F_\lambda(x) + \lambda \int_0^t \mathbf{T}_s F_\lambda(x) ds. \end{aligned} \tag{24}$$

因为函数 $W^{(h)}(t, x)$ 满足条件 W 1) 和 W 2)，所以显然 $W(t, x)$ 也满足这些条件. 其次

$$\begin{aligned} W(t, x) &= F_\lambda(x) - e^{-\lambda t} \mathbf{T}_t F_\lambda(x) \\ &\quad + [e^{-\lambda t} - 1] \mathbf{T}_t F_\lambda(x) + \int_0^t \mathbf{T}_s F_\lambda(x) ds \\ &\leqslant G_\lambda(t, x) + t \|F_\lambda\|. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_x \int_0^t \frac{1}{h} W(h, x_s) W(\Delta, x_s) ds \\ &\quad \leqslant \mathbf{E}_x \int_0^t \frac{1}{h} G_\lambda(h, x_s) G_\lambda(\Delta, x_s) ds \end{aligned}$$

$$+\|F_\lambda\|\cdot\mathbf{E}_x\int_0^t W(\Delta, x_s)ds$$

$$+\|F_\lambda\|\cdot\Delta\cdot\mathbf{E}_x\int_0^t\frac{1}{h}$$

$$\cdot G_\lambda(h, x_s)ds+\|F_\lambda\|^2\cdot\Delta.$$

现在由条件(23)和关系式

$$W(\Delta, x)\downarrow,\ \Delta\downarrow 0,$$

$$\lim_{h\downarrow 0}\mathbf{E}_x\int_0^t\frac{1}{h}G_\lambda(h, x_s)ds=W(t, x)$$

可知，函数 $W(t, x)$ 满足条件 W 3)。

由定理 2 可知，存在一W泛函 φ_t，使 $\mathbf{E}_x\varphi_t=W(t, x)$。由(24)式可见

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x\int_0^\infty e^{-\lambda t}d\varphi(t)&=\lambda\mathbf{E}_x\int_0^\infty\varphi(t)e^{-\lambda t}dt\\&=\lambda\int_0^\infty W(t, x)e^{-\lambda t}dt\\&=\lambda\int_0^\infty F_\lambda(x)e^{-\lambda t}dt-\lambda\int_0^\infty\mathbf{T}_tF_\lambda(x)e^{-\lambda t}dt\\&\quad+\lambda^2\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t\mathbf{T}_sF_\lambda(x)dsdt\\&=F_\lambda(x)-\lambda\int_0^\infty\mathbf{T}_tF_\lambda(x)e^{-\lambda t}dt\\&\quad+\lambda^2\int_0^\infty\mathbf{T}_sF_\lambda(x)\int_s^\infty e^{-\lambda t}dtds\\&=F_\lambda(x).\end{aligned}$$

定理得证。

时间的随机替换 设 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$ 是拓扑相空间 $\mathscr{X}$ 中的右连续强马尔科夫过程，φ_t 是它的连续齐次可加泛函。假设对所有 x 和 t

$$\mathbf{P}_x\{\varphi_t>0\}=1.$$

我们称这样的泛函为**严格正的**。显然，在某一 $\mathscr{N}$ 可测子集 $\mathscr{F}'\subset\mathscr{F}$ 上，其中对任意 x 有 $\mathbf{P}_x\{\mathscr{F}'\}=1$，$\varphi_t$ 是 t 的连续单增函数 $(\varphi_0=0)$。以后我们就假设 $\mathscr{F}'=\mathscr{F}$。我们引进一马尔科夫时

间族 τ_t，对所有 $t\in[0,\zeta)$；τ_t 决定于

$$t=\varphi(\tau_t),\tag{25}$$

其中 $\zeta=\varphi(+\infty)=\lim\limits_{t\uparrow+\infty}\varphi(t)$. 对固定的 x，考虑概率空间 $\{\mathscr{F},\mathscr{N},\mathbf{P}_x\}$ 上的过程 $y(t)=x(\tau_t)$. 当 $\varphi((k-1)/n)<t\leqslant\varphi(k/n)$ 时，设 $\tau_t^{(n)}=k/n$. 由于当 $\varphi((k-1)/n)<t\leqslant\varphi(k/n)$ 时

$$x(\tau_t^{(n)})=x\left(\frac{k}{n}\right)$$

（若 $\varphi(+\infty)>t$，则它有定义），故 $x(\tau_t^{(n)})$ 为 $\mathscr{N}$ 可测. 又因为

$$x(\tau_t)=\lim_{n\to\infty}x(\tau_t^{(n)}),$$

所以 $x(\tau_t)$ 为 $\mathscr{N}$ 可测. 这样，我们有一随机过程 $x(\tau_t)$ 的马尔科夫族：每个 x 对应于概率空间 $\{\mathscr{F},\mathscr{N},\mathbf{P}_x\}$ 上的一个随机过程 $x(\tau_t)$. 结果表明，它是马尔科夫随机过程族. 我们构造一齐次马尔科夫过程，使当初始值等于 x 时，它的边沿分布等于过程 $x(\tau_t)$ 在概率空间 $\{\mathscr{F},\mathscr{N},\mathbf{P}_x\}$ 上的边沿分布.

我们引进一函数集合 $\tilde{\mathscr{F}}$：对所有 $x(\cdot)\in\mathscr{F}$ 和 $t\in[0,\zeta)$，$\tilde{x}(t)=x(\tau_t)$，其中 τ_t 决定于 (25) 式，而 $\zeta=\varphi(+\infty)$. 记 $\tilde{\mathscr{N}}$ 为随机变量 $\tilde{x}(t)$ 产生的 σ 代数，而 $\tilde{\mathscr{N}}_t$ 是 $\tilde{x}(s)$，$s\leqslant t$，产生的 σ 代数. 记 $\tilde{\mathbf{P}}_x$ 为 $\tilde{\mathscr{N}}$ 上的测度：对 $\mathscr{N}$ 的任意柱集 C 定义

$$\tilde{\mathbf{P}}_x(C)=\mathbf{P}_x\{x(\tau_\cdot)\in C\};$$

由变量 $x(\tau_t)$ 的 $\mathscr{N}$ 可测性可见，对任意柱集 C，集合 $\{x(\cdot):x(\tau_\cdot)\in C\}$ 为 $\mathscr{N}$ 可测.

为证明 $\{\tilde{\mathscr{F}},\tilde{\mathscr{N}},\tilde{\mathbf{P}}_x\}$ 是马尔科夫过程，只需证明，对任意 $x\in\mathscr{X}$，$B\in\mathfrak{B}$，$t>0$，$h>0$，以概率 $\mathbf{P}_x=1$ 有

$$\tilde{\mathbf{P}}_x\{\tilde{x}(t+h)\in B\,|\,\tilde{\mathscr{N}}_t\}=\tilde{\mathbf{P}}_{\tilde{x}(t)}\{\tilde{x}(h)\in B\}.\tag{26}$$

(26) 式等价于：以概率 1

$$\mathbf{P}_x\{x(\tau_{t+h})\in B\,|\,\mathscr{N}_{\tau_t}\}=\mathbf{P}_{x(\tau_t)}\{x(\tau_t)\in B\}.\tag{27}$$

由过程 $\{\mathscr{F},\mathscr{N},\mathbf{P}_x\}$ 的强马尔科夫性可见，如果以概率 $\mathbf{P}_x=1$ 有

$$\theta_{\tau_t}[x(\tau_h)]=x(\tau_{h+t}),\tag{28}$$

则(27)式成立.

为证明(28)式，我们考虑可加泛函 φ_t 在马尔科夫时刻的值. 我们首先证明，对任意 $x\in\mathscr{X}$ 以概率 $\mathbf{P}_x=1$ 有

$$\varphi_{u+\tau}-\varphi_\tau=\theta_\tau\varphi_u, \tag{29}$$

其中 τ 是马尔科夫时间，而 u 是非随机的. 根据定理1可以构造一个 $\mathfrak{B}$ 可测有界函数 $g_n(x)$ 的序列，使

$$\varphi_t=\lim_{n\to\infty}\int_0^t g_n(x_s)ds$$

以概率 $\mathbf{P}_x=1$ 对一切有理 $t\geqslant 0$ (从而对所有 $t\geqslant 0$) 成立. 那末以概率 $\mathbf{P}_x=1$ 有

$$\begin{aligned}\theta_\tau\varphi_t&=\lim_{n\to+\infty}\theta_\tau\int_0^t g_n(x_s)ds\\&=\lim_{n\to\infty}\int_\tau^{\tau+t}g_n(x_s)ds\\&=\varphi(\tau+t)-\varphi(\tau),\end{aligned}$$

从而(29)得证. 为证明(28)，只需证明以概率 $\mathbf{P}_x=1$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\theta_{\tau_t}[x(\tau_h^{(n)})]=x(\tau_{h+t}). \tag{30}$$

因为当 $\varphi((k-1)/n)<h\leqslant\varphi(k/n)$ 时，$x(\tau_h^{(n)})=x(k/n)$，所以如果 $\theta_{\tau_t}\varphi((k-1)/n)<h\leqslant\theta_{\tau_t}\varphi(k/n)$，即 $\varphi(\tau_t+(k-1)/n)<h+\varphi(\tau_t)\leqslant\varphi(\tau_t+k/n)$，则 $\theta_{\tau_t}[x(\tau_h^{(n)})]=x(\tau_t+k/n)$. 因而

$$\theta_{\tau_t}[x(\tau_h^{(n)})]=x(\zeta^{(n)}),$$

其中当 $\varphi(\tau_t+(k-1)/n)<h+t\leqslant\varphi(\tau_t+k/n)$ 时，$\zeta^{(n)}=\tau_t+k/n$. 所以 $\zeta^{(n)}\geqslant\tau_{t+h}$, $\zeta^{(n)}-\tau_{t+h}\leqslant 1/n$. 由过程的右连续性可知，$\lim\limits_{n\to\infty}x(\zeta^{(n)})=x(\tau_{h+t})$. 这样就证明了(30)式，从而(28)和(27)得证.

现在假设过程 $\{\mathscr{F},\mathscr{N},\mathbf{P}_x\}$ 是随机连续的和 Feller 的. 我们看，过程 $\{\tilde{\mathscr{F}},\tilde{\mathscr{N}},\tilde{\mathbf{P}}_x\}$ 的预解式是如何通过过程 $\{\mathscr{F},\mathscr{N},\mathbf{P}_x\}$ 的特征以及泛函 φ_t 来表示的.

根据定义

$$\tilde{\mathbf{R}}_\lambda f(x)=\mathbf{E}_x\int_0^\infty e^{-\lambda s}f(\tilde{x}_s)ds=\mathbf{E}_x\int_0^{\varphi(+\infty)}e^{-\lambda t}f(x(\tau_t))dt.$$

在最后一个积分中作换元 $t=\varphi(s)$，得

$$\tilde{\mathbf{R}}_\lambda f(x)=\mathbf{E}_x\int_0^\infty e^{-\lambda\varphi(s)}f(x_s)d\varphi(s).$$

假设

$$\varphi(s)=\int_0^s g(x_t)dt,$$

其中 $g(x)$ 是有界的 $\mathfrak{B}$ 可测函数. 那末

$$\tilde{\mathbf{R}}_\lambda f(x)=\tilde{\mathbf{R}}_\lambda^{[g]}f(x)$$
$$=\mathbf{E}_x\int_0^\infty \exp\left\{-\lambda\int_0^t g(x_s)ds\right\}f(x_t)g(x_t)dt.$$

设

$$Q_\lambda^{[g]}(t,x;f)=\mathbf{E}_x\exp\left\{-\lambda\int_0^t g(x_s)ds\right\}f(x_t).$$

利用第一章 §5 的方程(12)，容易得到 $Q_\lambda^{[g]}(t,x;f)$ 的下列积分方程:

$$Q_\lambda^{[g]}(t,x;f)$$
$$=\mathbf{T}_t gf(x)-\lambda\int_0^t \mathbf{T}_s[gQ_\lambda^{[g]}(t-s,\cdot;f)](x)ds. \tag{31}$$

因为它右侧的积分算子的范数小于 1，所以它对 $\lambda t\|g\|<1$ 有唯一解. 如果对充分小的 t 和有界 $\mathfrak{B}$ 可测的 f 知道了 $Q_\lambda^{[g]}(t,x;f)$ 的值,则利用等式 $Q_\lambda^{[g]}(t,x;f)=Q_\lambda^{[g]}(t-s,x,Q_\lambda^{[g]}(s,\cdot;f))$，就可以求出它对所有 t 的值，而上述等式对所有 $0<s<t$ 均成立. $\tilde{\mathbf{R}}_\lambda^{[g]}f(x)$ 通过 $Q_\lambda^{[g]}$ 表示如下:

$$\tilde{\mathbf{R}}_\lambda^{[g]}f(x)=\int_0^\infty Q_\lambda^{[g]}(t,x;fg)dt.$$

现在设

$$v(h,x)=\mathbf{E}_x e^{-\varphi_h},\quad g_h(x)=\frac{1}{h}[1-v(h,x)].$$

那末

$$\tilde{\mathbf{R}}_\lambda(g)=\lim_{h\downarrow 0}\int_0^\infty Q_\lambda^{[g_h]}(t,x;fg_h)dt. \tag{32}$$

第三章 跳 跃 过 程

§ 1. 跳跃过程的一般定义与性质

在第一章已经定义了广义跳跃过程. 作为该定义的基础是这样一种体系，它在落入它所处的每个状态后，逗留一正时间段，然后跳跃地转移到另一个状态中去.

然而，前面给出的定义并没有明显地依赖过程的这些性质，而是借助于对转移概率所提出的分析上的要求来叙述的. 本节中，我们从运动轨道的性质出发，给出跳跃马尔科夫过程的直接定义，研究它的一般性质，并叙述跳跃过程的构造. 本章下面几节将研究几类重要的跳跃过程.

设 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 为可测空间，$\mathfrak{B}$ 包含空间 $\mathscr{X}$ 中的单点集. 在 $\mathscr{X}$ 中引进离散拓扑，亦即我们将把 $\mathscr{X}$ 当作是距离 $r(x', x'') = 1$, $x' \neq x''$, 的度量空间.

定义 1 相空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 中的马尔科夫过程 $\{\xi(t, \omega), \mathfrak{S}_t^t, \mathbf{P}_{t,x}\}$ 称为**跳跃过程**，如果它是正规的，且对任意 (t, ω), $(t < \zeta)$, 存在 $\delta = \delta(t, \omega)$, 使得当 $h \in [0, \delta)$ 时，$\xi(t + h) = \xi(t)$; 这里 $\zeta = \zeta(\omega)$ 是过程的生存时间，并且对任意 $s < \zeta$, 函数 $\xi(t)$ 在区间 $[0, s]$ 上只有有限多个跳跃点. 如果对每个 ω，函数 $\xi(\omega)$ 在每个有穷区间 $[0, s]$ 上都只有有限多个跳跃点，则称此马尔科夫过程为**阶梯的**.

由跳跃过程的定义可推出函数 $\xi(t)$ 是右连续的(因此，是右可分的)，而且对一切 $t < \zeta$, 有左极限.

由第一章 § 6 定理 2 可得下面结果.

定理 1 为使可分马尔科夫过程与阶梯过程随机等价，只须对任意 $t^* > 0$, 有

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\substack{(s,x)\in[0,\ t^*]\times\mathscr{X} \\ |t-s|<\delta}} P(s,\ x,\ t,\ \mathscr{X}\setminus\{x\}) = 0.$$

下面(定理 4)将证明：相当广泛的跳跃过程类是强马尔科夫的. 因此我们先研究强马尔科夫过程.

考虑某一强马尔科夫跳跃过程 $\{\xi(t,\ \omega),\ \mathfrak{S}'_t,\ \mathbf{P}_{s,x}\}$. 引进事件

$$A_{st} = \{\xi(u) = \xi(s),\ u\in(s,\ t)\}.$$

显然，$A_{st}\in\mathfrak{N}^s_t$，这里 $\mathfrak{N}^s_t$ 是由随机元 $\xi(u)$，$u\in[s,\ t]$，所产生的 σ 代数. 因此，

$$q(x,\ s,\ t) = \mathbf{P}_{s,x}(A_{st})$$

是变元 x 的 $\mathfrak{B}$ 可测函数. 设 $s<t_1<t_2$，由

$$\begin{aligned} q(x,s,t_2) &= \mathbf{E}_{s,x}\chi(A_{st_2}) = \mathbf{E}_{s,x}\chi(A_{st_1})\chi(A_{t_1t_2}) \\ &= \mathbf{E}_{s,x}\chi(A_{st_1})\mathbf{E}_{t_1,\xi(t_1)}\chi(A_{t_1t_2}) \\ &= \mathbf{E}_{s,\bar{x}}\chi(A_{st_1})q(\xi(t_1),\ t_1,\ t_2) \end{aligned}$$

可得

$$q(x,s,t_2) = q(x,s,t_1)q(x,t_1,t_2)\ (s<t_1<t_2). \qquad (1)$$

特别地，由上式可知，$q(x,s,t)$ 是 t 的单调不增函数.

设 A_s 是如下的事件：存在一个时间区间 $[s,s+h)$，$h>0$，在该时间区间中，过程不改变自己的状态. 显然，

$$A_s = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{ss_n},$$

其中 $s_n\downarrow s$，$s_n>s$. 因此有

$$1 = \mathbf{P}_{s,x}(A_s) = \lim \mathbf{P}_{s,x}(A_{ss_n}) = \lim q(x,s,s_n).$$

从而，

$$q(x,\ s,\ s+) = 1.$$

由关系式(1)可知，函数 $q(x,s,t)$ 关于 t 右连续. 此外，如 $t>s$，则

$$\begin{aligned} q(x,s,t-) &= \lim_{t_n\uparrow t} \mathbf{P}_{s,x}(A_{st_n}) \\ &= \mathbf{P}_{s,x}\{\xi(u)=\xi(s),\ u\in(s,t)\}. \end{aligned}$$

特别，如果过程 $\xi(t)$ 是随机连续的（对于测度 $\mathbf{P}_{s,x}$，任意 $t>s$)，则 $q(x,s,t)$ 是 t 的连续函数 $(t>s)$.

类似地可证明作为 s 的函数，$q(x, s, t)$ 也是右连续的. 实际上

$$q(x, s+, t) = \lim_{s_n \downarrow s} q(x, s_n, t) = \frac{q(x, s, t)}{\lim\limits_{s_n \downarrow s} q(x, s, s_n)}$$

$$= \frac{q(x, s, t)}{q(x, s, s+)} = q(x, s, t).$$

这样，就证明了

引理 1 函数 $q(x, s, t)(x \in \mathscr{X}, s \geqslant 0, t \geqslant s)$ 作为 x 的函数是 $\mathfrak{B}$ 可测的；而作为 $t, t \geqslant s$ 的函数（作为 $s, s < t$ 的函数），它是右连续的，并且是单调不增(不减)的，它满足函数方程(1)与条件

$$q(x, s, s+) = 1.$$

我们引进随机变量 τ_1，它是时刻 s 后，函数 $\xi(t)$ 的首次跳跃时刻，即

$$\tau_1 = \inf\{t: t > s, \xi(t) \neq \xi(s)\}^{*)},$$

如果上式中相应的集非空；如对一切 $t > s$, $\xi(t) = \xi(s)$，则令 $\tau_1 = \infty$. 由函数 $\xi(t)$ 的右连续性可知，τ_1 是随机时间，而且 $\xi(\tau_1) \neq \xi(s)$. 此外，

$$\mathbf{P}_{s,x}\{\tau_1 > t\} = q(x, s, t),$$

而 $\mathbf{P}_{s,x}\{\tau_1 = \infty\} = q(x, s, \infty)$是系统于时刻 s 落入相空间的点 x，并且永远不再离开的概率.

添加点∞于半直线 (s, ∞) 使之封闭，我们在区间 $(s, \infty]$ 的 Borel 集的 σ 代数 $\mathscr{T}^s_\infty$ 上构造测度 $q(x, s, K)$：令

$$q(x, s, (uv]) = q(x, s, u) - q(x, s, v) \quad (s < u < v),$$

$$q(x, s, \{\infty\}) = q(x, s, \infty),$$

再利用通常的方法将此定义扩张到整个 $\mathscr{T}^s_\infty$ 上去. 这时，$q(x, s, K) = \mathbf{P}_{s,x}\{\tau_1 \in K\}$, $K \in \mathscr{T}^s_\infty$.

与前面一样，对任意 ω，我们约定 $\xi(\infty) = \mathrm{b}$.

设 $\mathscr{Y} = [0, \infty) \times \mathscr{X}$, $\mathfrak{A} = \mathscr{T} \times \mathfrak{B}$. 空间 $\mathscr{Y}$ 的元是“对

---

*) 原书误为 $\tau_1 = \inf\{t: t > s, \xi(t) = \xi(s)\}$.——译者注

偶" $y=(t,x)$, $t\geqslant 0$, $x\in\mathscr{X}$. 我们引进半随机核 $Q(y,A)$, $y\in\mathscr{Y}$, $A\in\mathfrak{A}$, 对 $A=K\times B(K\in\mathscr{T}, B\in\mathfrak{B})$, 令

$$Q(s,x,K,B)=Q((s,x),A)$$
$$=\mathbf{P}_{s,x}\{\tau_1\in K\cap[s,\infty), \xi(\tau_1)\in B\}.$$

此式唯一确定了 σ 代数 $\mathfrak{A}$ 上的核 $Q(y,A)$. 因为

$$Q(s,x,K,B)\leqslant q(x,s,K),$$

故由 Radon-Nikodym 定理，存在函数 $\Pi_s(t,x,B)$，使得对任意 u, $v(s\leqslant u<v)$,

$$Q(s,x,(u,v],B)=\int_u^v \Pi_s(t,x,B)q(x,s,dt). \quad (2)$$

由函数 $\Pi_s(t,x,B)$ 的定义可知，$\Pi_s(\tau_1,x,B)$ 是关于随机变量 τ_1 的事件 $\xi(\tau_1)\in B$ 的(对测度 $\mathbf{P}_{s,x}$ 的)条件概率.

我们自然希望函数 $\Pi_s(t,x,B)$ 不依赖于 s. 下面证明这一事实. 设 $s<s'\leqslant u<v$. 则

$$Q(s,x,(u,v],B)=\mathbf{E}_{s,x}\chi\{u<\tau_1\leqslant v\}\chi\{\xi(\tau_1)\in B\}$$
$$=\mathbf{E}_{s,x}\mathbf{E}_{s,x}\{\chi\{\tau_1>s'\}\chi\{u<\tau_1\leqslant v\}\chi\{\xi(\tau_1)\in B\}|\mathfrak{S}_{s'}^{s}\}.$$

因为事件 $\{\tau_1>s'\}$ 是 $\mathfrak{S}_{s'}^{s}$ 可测的，故由等式 (1)，上面最后一式等于

$$\mathbf{E}_{s,x}\chi\{\tau_1>s'\}\mathbf{E}_{s',x}\chi\{u<\tau_1\leqslant v\}\chi\{\xi(\tau_1)\in B\}$$
$$=q(x,s,s')\int_u^v \Pi_{s'}(t,x,B)q(x,s',dt)$$
$$=\int_u^v \Pi_{s'}(t,x,B)q(x,s,dt).$$

将此式与等式(2)比较，可得 $\Pi_s(t,x,B)=\Pi_{s'}(t,x,B)$ 关于测度 $q(x,s,\cdot)$ 几乎处处成立.

以下设

$$\Pi_s(t,x,B)=\Pi_0(t,x,B)=\Pi(t,x,B),$$

于是

$$Q(s,x,(u,v],B)=\int_u^v \Pi(t,x,B)q(x,s,dt). \quad (3)$$

考虑事件列

$$C^n = \bigcup_{s+\frac{j-1}{2^n}\in(u,v]} \left\{ \xi\left(s+\frac{k}{2^n}\right) = \xi(s),\ k=1, 2, \cdots, j-1, \right.$$

$$\left. \xi\left(s+\frac{j}{2^n}\right) \neq \xi(s),\ \xi\left(s+\frac{j}{2^n}\right) \in B \right\}.$$

显然，C^n 单调下降，且由过程 $\xi(t)$ 的右连续性，$\{\tau_1 \in [u, v],$

$\xi(\tau_1) \in B^{*)}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n \in \mathfrak{N}^t$. 故函数 $Q(s, x, (u, v], B)$ 是 x 的 $\mathfrak{B}$ 可测函数. 由此不难得到，对固定的 (t, B)，$\Pi(t, x, B)$ 是 $\mathfrak{B}$ 可测的. 此外，作为 t 的函数，它还是 $\mathscr{T}$ 可测的，并且对任意固定的 (x, B_n)，$n = 1, 2, \cdots, B_n \in \mathfrak{B}$，当 $n \neq k$ 时，$B_n \cap B_k = \phi$，有

$$\Pi\left(t, x, \bigcup_1^{\infty} B_n\right) = \sum_1^{\infty} \Pi(t, x, B) \quad (\mathrm{mod}\, q(s, x, \cdot)).$$

再注意到

$$Q(s, x, (u, v], \{x\}) = 0,$$

于是得

$$\Pi(t, x, \{x\}) = 0$$

对几乎一切 t (对 $q(x, s, \cdot)$) 及 $x \in \mathscr{X}$ 成立.

与空间 $\{\mathscr{Y}, \mathfrak{A}\}$ 同时，我们还要考虑它的扩张 $\{\mathscr{Y}^*, \mathfrak{A}^*\}$，其中 $\mathscr{Y}^* = [0, \infty] \times \mathscr{X}_b$，$\mathfrak{A}^* = \mathscr{T}_\infty^0 \times \mathfrak{B}_b$.

引进取值于可测空间 $\{\mathscr{Y}^*, \mathfrak{A}^*\}$ 的随机元 $\eta_1 = (\tau_1, \xi(\tau_1))$，并在 $\{\mathscr{Y}^*, \mathfrak{A}^*\}$ 中定义随机核 $Q(y, A)$：对 $y = (s, x) \in \mathscr{Y}$，$A \in \mathfrak{A}$，令

$$Q(y, A) = \mathbf{P}_{s,x}\{(\tau_1, \xi(\tau_1)) \in A\}.$$

如 $A = (u, v] \times B$，$s \leqslant u$，$y = (s, x)$，则 $Q(y, A) = Q(s, x, (u, v], B)$.

注意核 $Q(y, A)$ 仅在集 $A_s = \{(t, x') : t \geqslant s, x' \in \mathscr{X}\}$ 上异于零，所以 $Q(y, A) = Q(y, A \cap A_s)$.

---

*) 原书误为 $\xi(\tau) \in B$.——译者注

因为函数 $Q(s, x, (u, v], B)$ 对 $s(s \leqslant u)$ 右连续(这可由(1)与(2)推得)，且对 x 可测，所以是变元 (s, x) 的 $\mathscr{T} \times \mathfrak{B}$ 可测函数，因此，对固定的 $A \in \mathfrak{A}$，函数 $Q(y, A)$ 是 $\mathfrak{A}$ 可测的.

在 $(\mathscr{Y}^*, \mathfrak{A}^*)$ 上补定义核 $Q(y, A)$，令

$$Q((\infty, x), \{\infty\} \times \{\mathfrak{b}\}) = 1,\ Q((s, \mathfrak{b}), \{\infty\} \times \{\mathfrak{b}\}) = 1, \quad (4)$$

$$Q((s, x), (u, v] \times \{\mathfrak{b}\}) = 1 - Q(s, x, (u, v], \mathscr{X}), \quad (5)$$

$$Q((s, x), \{\infty\} \times B) = q(x, s, \infty)\chi(B, \mathfrak{b}).$$

上面关系式中的第一式等价于 $\xi(\infty) = \mathfrak{b}$; 第二式表示状态 $\mathfrak{b}$ 是吸收的;第三式表示系统落入点 $\mathfrak{b}$ 后就从相空间消失;最后一式表示,如果系统落入吸收状态 x,则我们仍然认为 $\xi(\infty) = \mathfrak{b}$. 显然，核 $Q(y, A)((y, A) \in \mathscr{Y}^* \times \mathfrak{A}^*)$ 对固定的 A 是 $\mathfrak{A}^*$ 可测函数，并且对 $(s, x, A) \in [0, \infty) \times \mathscr{X}_{\mathfrak{b}} \times \mathfrak{A}^*$, $Q(y, A) = \mathbf{P}_{s,x}\{(\tau_1, \xi(\tau_1)) \in A\}$.

用归纳法，可如下定义一列马尔科夫时间 τ_n, $n = 1, 2, \cdots$, 和随机元 $\eta_n = (\tau_n, \xi(\tau_n))$: 如 $\tau_n \neq \infty$，则 τ_{n+1} 是在 τ_n 以后，首次使 $\xi(\tau_{n+1}) \neq \xi(\tau_n)$ 的时刻(如果这样的时刻存在);对其它所有情况，定义 $\tau_{n+1} = \infty$, $\xi(\tau_{n+1}) = \mathfrak{b}$.

定理 2 设 $\{\mathfrak{S}_t^s, \mathbf{P}_{s,x}, \xi(t, \omega)\}$ 是强马尔科夫跳跃过程. 则序列

$$\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_n, \cdots, \eta_0 = (s, x), \eta_n = (\tau_n, \xi(\tau_n))$$

构成相空间$\{\mathscr{Y}^*, \mathfrak{A}^*\}$上转移概率为 $Q(y, A)$ 的马尔科夫链. 这时，函数 $Q((s, x), (t, \infty) \times \mathscr{X}) = q(s, x, t)(t > s)$ 具有引理 1 所述的性质，并且 $\tau_{n+1} \geqslant \tau_n$, $n = 1, 2, \cdots$.

证. 先考察条件概率 $\mathbf{P}_{s,x}\{\eta_n \in A | \mathfrak{S}_{\tau_{n-1}}^s\}$, 这里 $\mathfrak{S}_{\tau_{n-1}}^s$ 是由随机时间 τ_{n-1} 产生的 σ 代数. 设 $A = [u, v) \times B$, 注意到事件

$$C^m = \bigcup_{j, \tau_{n-1} + \frac{j-1}{2^m} \in [u, v)} \left(\bigcup_{k=1}^{j-1} \left\{ \xi\left(\tau_{n-1} + \frac{k}{2^m} \right) = \xi(\tau_{n-1}) \right\} \right)$$

$$\cap \left\{ \xi\left(\tau_{n-1} + \frac{j}{2^m} \right) \in B \right\} \cap \left\{ \xi\left(\tau_{n-1} + \frac{j}{2^m} \right) \neq \xi(\tau_{n-1}) \right\}$$

单调下降，且由函数 $\xi(t)$ 的右连续性，有

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} C^m = \{\eta_n \in A\}.$$

因此,

$$\mathbf{P}_{s,x}\{\eta_n \in A \mid \mathfrak{S}^s_{\tau_{n-1}}\} = \mathbf{E}_{s,x}(\chi\{\eta_n \in A\} \mid \mathfrak{S}^s_{\tau_{n-1}}) = \lim_{m\to\infty} \mathbf{E}_{s,x}(\chi\{C^m\} \mid \mathfrak{S}^s_{\tau_{n-1}}).$$

再由过程的强马尔科夫性与第一章 §4 定理 5 可得

$$\mathbf{E}_{s,x}\{\chi(C^m) \mid \mathfrak{S}^s_{\tau_{n-1}}\} = \mathbf{E}_{(s,x)}\chi(C^m)|_{(s,x)=(\tau_{n-1},\xi(\tau_{n-1}))}.$$

这样一来,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{s,x}\{\eta_n \in A \mid \mathfrak{S}^s_{\tau_{n-1}}\} &= \lim_{m\to\infty} \mathbf{E}_{s,x}\chi(C^m)|_{(s,x)=(\tau_{n-1},\xi(\tau_{n-1}))} \\ &= \mathbf{E}_{\tau_{n-1},\xi(\tau_{n-1})}\chi(\eta_n \in A) \\ &= Q((\tau_{n-1}, \xi(\tau_{n-1})), A).\end{aligned}$$

由已证的关系式,利用这种情况下通常的论证方法,不难得出,对任意函数 $f \in b(\mathfrak{A})$[1],都有

$$\mathbf{E}_{s,x}\{f(\eta_n) \mid \mathfrak{S}^s_{\tau_{n-1}}\} = \int f(y_n) Q(y_{n-1}, dy_n)|_{y_{n-1}=(\tau_{n-1},\xi(\tau_{n-1}))}.$$

由此不难得到

$$\mathbf{E}_{s,x}\left\{\prod_{k=1}^{n} f_k(\eta_k)\right\}$$

$$= \int\cdots\int \prod_{k=1}^{n} f(y_k) Q(y_0, dy_1) Q(y_1, dy_2) \cdots Q(y_{n-1}, dy_n),$$

其中 $f_k \in b(\mathfrak{A})$.

上面最后一式可以立刻推广到任意函数 $f = f(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in b(\mathfrak{A}^n)$ 的情况,对此,上式成为

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_{s,x}(f(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)) \\ &\quad = \int\cdots\int f(y_1, \cdots, y_n) Q(y_0, dy_1) Q(y_1, dy_2) \cdots \\ &\qquad \times Q(y_{n-1}, dy_n),\end{aligned} \tag{6}$$

同样,也可以推广到函数 $f \in b(\mathfrak{A}^{*n})$ 的情况.

---

1) $b(\mathfrak{A})$ 是 $\mathfrak{A}$ 可测有界函数族.

定理证毕.

系 对任意强马尔科夫跳跃过程，都存在一相空间为 $\{\mathscr{Y}^*, \mathfrak{A}^*\}$，转移概率为 $Q(y, A)$ 的齐次马尔科夫链 $\{\eta_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$，$\eta_n=(\tau_n, \varepsilon_n)$，它满足定理 2 的条件，并使

$$\xi(t)=\xi_n, \qquad \text{当 } \tau_n \leqslant t<\tau_{n+1},$$
$$\xi(t)=\mathfrak{b}, \qquad \text{当 } t \geqslant \sup \tau_n.$$

为证明这一事实，只需指出，如 $t_0=\sup \tau_n<\infty$，则 t_0 是函数 $\xi(t)$ 跳跃时刻的极限点，根据跳跃过程的定义，$\zeta(\omega) \leqslant t_0$.

现在我们来证明相反的结论，亦即，设已给 $\{\mathscr{Y}, \mathfrak{A}\}$ 上的半随机核 $Q(y, A)$. 令 $Q(s, x, K, B)=Q((s, x), K \times B)$. 假定核 $Q(y, A)$ 有下面性质:

a) $Q(s, x,(u, v], B)=0$, 当 $u<v \leqslant s$ 时; (7)

b) $Q(s, x,(u, v],\{x\})=0$; (8)

c) 函数 $q(x, s, t)=Q(s, x, [t, \infty], \mathscr{X})$ 关于变元 t 和 $s(s \leqslant t)$ 右连续，且满足函数方程

$$q(x, s, t')=q(x, s, t) q(x, t, t'), \quad s \leqslant t \leqslant t'. \tag{9}$$

如前面证明的那样，由已作的假定可知，存在函数 $\Pi(t, x, B)$，使得

$$Q(s, x, K, B)=\int_K \Pi(t, x, B) q(x, s, dt).$$

因此，如 $K \subset(u, \infty]$，$s \leqslant u$，那么由等式(9)有

$$Q(s, x, K, B)=q(x, s, u) \int_K \Pi(t, x, B) q(x, u, dt),$$

由此可得

$$Q(s, x, K, B)=q(x, s, u) Q(u, x, K, B), \quad s \leqslant u, \quad K \subset(u, \infty]. \tag{10}$$

下面指出，如何构造强马尔科夫跳跃过程 $\{\xi(t, \omega), \mathfrak{S}_t^s, \mathbf{P}_{s,x}\}$，使

$$\mathbf{P}_{s,x}\{\tau_1 \in(u, v], \xi(\tau_1) \in B\}=Q(s, x,(u, v], B) \quad (s \leqslant u<v),$$

其中 τ_1 有如前面确定的定义. 为此，引进序列

$$\omega = (y_0, y_1, y_2, \cdots)$$
的空间 Ω，这里 $y_k \in \mathscr{Y}^*$，并用 γ 表示 Ω 中的 σ 代数，它是由集类 $\{\omega: y_k \in A_k\}$，$k = 0, 1, 2, \cdots$，$A_k \in \mathfrak{A}^*$ 产生的. 利用公式(4)和(5)可将核 $Q(y, A)$ 扩张到 $(\mathscr{Y}^*, \mathfrak{A}^*)$ 上去. 对扩张后的核保持原先的符号. 依照定理3(第一卷第二章§4)，根据核 $Q(y, A)$ 和 $\{\mathscr{Y}^*, \mathfrak{A}^*\}$ 上之任一概率测度 q，可以构造 $\{\Omega, \gamma\}$ 上的概率测度 $\mathbf{P}^{(q)}$，使得函数 $\eta(n, \omega) = y_n$，$n = 0, 1, 2, \cdots$，是相空间 $\{\mathscr{Y}^*, \mathfrak{A}^*\}$ 上的齐次马尔科夫链，它有转移概率 $Q(y, A)$ 和开始分布 q.

设 $\eta_n = \eta(n, \omega) = (\tau_n, \xi_n)$，$n = 0, 1, \cdots$，其中 $\tau_n \in [0, \infty]$，$\xi_n \in \mathscr{X}_b$. 由公式(4)和(5)可知，对任意开始分布 q，已构造的链以概率 1 有下列性质：如果 $\tau_n = \infty$，则 $\xi_n = \mathfrak{b}$，如果 $\xi_n = \mathfrak{b}$，则 $\xi_{n+1} = \xi_{n+2} = \cdots = \mathfrak{b}$，而 $\tau_{n+1} = \tau_{n+2} = \cdots = \infty$.

我们约定，如 $\tau_n = \infty$，则 $\tau_{n+1} - \tau_n = \infty$. 再注意到由函数 $q(x, s, t)$ 的右连续性可推得

$$Q(t, x, (t, \infty], \mathscr{X}_b) = \lim_{h \downarrow 0} q(x, t, t + h) = 1.$$

由此可得

$$\mathbf{P}^{(q)}\{\tau_{n+1} - \tau_n > 0\} = \mathbf{E}^{(q)} Q(\tau_n, \xi_n, (\tau_n, \infty], \mathscr{X}_b) = 1.$$

进而，由等式(8)，还有

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}^{(q)}\{\xi_{n+1} \neq \xi_n, \xi_n \neq \mathfrak{b}\} \\ &= \mathbf{E}^{(q)} Q(\tau_n, \xi_n, (\tau_n, \infty], \mathscr{X}_b \setminus \{\xi\}) \chi(\mathscr{X}, \xi_n) \\ &= \mathbf{E}^{(q)} \chi(\mathscr{X}, \xi_n) = \mathbf{P}^{(q)}\{\xi_n \neq \mathfrak{b}\}. \end{aligned}$$

从而，如 $\xi_n \neq \mathfrak{b}$，则以概率 1 有 $\xi_{n+1} \neq \xi_n$.

记 Ω' 为所有序列 $\omega = \{y_0, y_1, \cdots, y_n, \cdots\}$ 的集合，其中 $y_n = (t_n, x_n)$，$t_n \in [0, \infty]$，$x_n \in \mathscr{X}_b$，并满足条件：如 $t_n = \infty$，则 $x_n = \mathfrak{b}$；如 $x_n = \mathfrak{b}$，则 $x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = \mathfrak{b}$，而

$$t_{n+1} = t_{n+2} = \cdots = \infty;$$

如 $t_n \neq \infty$，则 $t_{n+1} > t_n$；如 $x_n \neq \mathfrak{b}$，则 $x_{n+1} = x_n$. 此时，对每一初始分布 q，$\mathbf{P}^{(q)}(\Omega') = 1$. 用 $\mathfrak{S}'$ 表示 σ 代数 $\mathfrak{S}$ 在 Ω' 上的限制，也就是形如 $A' = A \cap \Omega'$，$A \in \mathfrak{S}$ 的集 A' 的 σ 代数. 显见，

$$\eta_n = \eta(n, \omega)$$
是$\{\Omega', \mathfrak{S}', \mathbf{P}^{(q)}\}$上具有上述转移概率$Q(y, A)$的马尔科夫链.

以下我们约定,略去记号Ω'和$\mathfrak{S}'$中的撇号,因而Ω表示具有刚刚列举的那些性质的所有序列$(y_0, y_1, \cdots, y_n, \cdots)$的集类.此外,作为$\mathscr{Y}^*$中的开始分布,我们考虑集中在一点$(s, x)$的分布,并把$\{\Omega, \mathfrak{S}\}$上相应的概率记为$\mathbf{P}^{(s,x)}$.

下面转到我们感兴趣的随机过程的构造问题.

令$\zeta(\omega)$等于使$\xi_n = \mathfrak{b}$的最小的τ_n,如果这样的n存在的话.否则,令$\zeta(\omega) = \sup\tau_n$. 令$y_0 = (s, x)$固定,$\omega = (y_0, y_1, \cdots)$且

$$\xi_{s,x}(t) = \xi_{s,x}(t, \omega) = \xi_n, \qquad \text{如 } \tau_{n-1} \leqslant t < \tau_n,$$
$$n = 1, 2, \cdots, t < \zeta(\omega),$$
$$\xi_{s,x}(t) = \xi_{s,x}(t, \omega) = \mathfrak{b}, \text{ 如 } t \geqslant \zeta(\omega).$$

函数$\xi_{s,x}(t, \omega)$当$t \geqslant s$时在空间Ω的子空间$\Omega_{s,x}$上是有定义的,$\Omega_{s,x}$由所有那些$\omega \in \Omega$, $\omega = (y_0, y_1, \cdots)$组成,这里$y_0 = (s, x)$.

设$\mathfrak{S}_{s,x} = \{A : A = B \cap \Omega_{s,x}, B \in \mathfrak{S}\}$. 注意到测度$\mathbf{P}^{(s,x)}$集中在$\Omega_{s,x}$上. 我们用$\mathfrak{N}_t^{s,x}$记由随机元$\xi_{s,x}(u)$, $u \in [s, t]$, 产生的σ代数. 定义在$\{\Omega_{s,x}, \mathfrak{S}_{s,x}\}$上之可测函数关于测度$\mathbf{P}^{(s,x)}$的积分记为$\mathbf{E}_{s,x}$.

定理 3 概率空间$\{\Omega_{s,x}, \mathfrak{N}_t^{s,x}, \mathbf{P}^{(s,x)}\}$上的随机函数族$\{\xi_{s,x}(t), t \geqslant s\}$是马尔科夫的.

证. 只需证明,对任意函数$f \in b\ (\mathfrak{B}_b)$,当$s < u < t$时下式成立:

$$\mathbf{E}_{s,x}\{f(\xi_{s,x}(t)) \mid \mathfrak{N}_u^{s,x}\} = \mathbf{E}_{u,z} f(\xi_{u,z}(t))\big|_{z=\xi_{s,x}(u)}. \tag{11}$$

为此只需证明

$$\mathbf{E}_{s,x}\left\{\prod_{k=1}^{n} f_k(\xi_{s,x}(t_k))\right\}$$
$$= \mathbf{E}_{s,x}\left\{\prod_{k=1}^{n-1} f_k(\xi_{s,x}(t_k))\,[\mathbf{E}_{t_{n-1},z} f(\xi_{t_{n-1},z}(t_n))]_{z=\xi_{s,x}(t_{n-1})}\right\} \tag{12}$$

对任意 $n=2,3,\cdots$, $f_k(x)\in b(\mathfrak{B}_b)$, $s<t_1<t_2<\cdots<t_n$ 成立. 实际上, 如此式成立, 则对任意随机变量 $\eta\in b(\mathfrak{N}^{s,x})$, $u<t$, 和函数 $f(x)\in b(\mathfrak{B}_b)$ 有等式

$$\mathbf{E}_{s,x}\eta f(\xi_{s,x}(t_n))=\mathbf{E}_{s,x}\{\eta[\mathbf{E}_{u,z}f(\xi_{u,z}(t_k))]_{z=\xi_{s,x}(u)}\},$$

由此可得(11).

现证关系式(12). 注意,我们只需考虑函数 $f_k(x)$ 在点 b 等于 0 的情况.

首先我们要找 $\mathbf{E}_{u,z}f(\xi_{u,z}(t))$ 的表达式,这里 $u<t$.

设 $\chi_n(t)$ 表示事件 $\tau_n\leqslant t<\tau_{n+1}$的示性函数,这时,

$$\left\{\omega:\sum_0^\infty\chi_n(t)=1,\tau_0=u\right\}$$

$$=\{\omega:t\in[u,\ \sup\tau_n),\ \tau_0=u\}$$

$$=\{\omega:t<\zeta,\tau_0=u\}.$$

因此,

$$\mathbf{E}_{u,z}f(\xi_{u,z}(t))=\sum_{n=0}^\infty\mathbf{E}_{u,z}f(\xi_{u,z}(t))\chi_n(t).$$

进而,

$$\mathbf{E}_{u,z}f(\xi_{u,z}(t))\chi_n(t)=\mathbf{E}_{u,z}f(\xi_n)\chi\{\tau_n\leqslant t<\tau_{n+1}\}$$

$$=\int_{\mathscr{X}}\int_u^t f(z')q(z',v,t)Q^n(u,z,dv,dz'),$$

这里 $Q^n(y,A)$ 表示马尔科夫链 $\{\eta_n,n=0,1,2,\cdots\}$的 n 步转移概率,而 $Q^n(s,x,K,B)=Q^n((s,x),K\times B)$. 于是有

$$\mathbf{E}_{u,z}f(\xi_{u,z}(t))=\sum_{n=0}^\infty\int_{\mathscr{X}}\int_u^t f(z')q(z',v,t)Q^n(u,z,dv,dz').$$

类似地计算量 $\mathbf{E}_{s,x}f(\xi_{s,x}(t))g(\xi_{s,x}(u))$, $(s\leqslant u\leqslant t)$, 可得等式

$$\mathbf{E}_{s,x}f(\xi_{s,x}(t))g(\xi_{s,x}(u))$$

$$=\mathbf{E}_{s,x}\sum_{n,m=0}^\infty f(\xi_n)g(\xi_m)\chi_n(t)\chi_m(u),$$

式中,如 $m>n$, 则 $\chi_n(t)\chi_m(u)=0$. 其次,对 $m<n$,

$$\mathbf{E}_{s,x}f(\xi_n)g(\xi_m)\chi_n(t)\chi_m(u)$$

$$=\int_{\mathscr{X}}\int_u^t\int_{\mathscr{X}}\int_u^{t_n}\int_{\mathscr{X}}\int_s^u f(z_n)g(z_m)Q^m(s,x,dt_m,dz_m)$$

$$\times Q(t_m,z_m,dt_{m+n},dz_{m+1})Q^{n-m-1}(t_{m+1},z_{m+1},dt_n,dz_n)$$

$$\times Q(t_n,z_n,[t,\infty],\mathscr{X}_b).$$

在所考察的积分域内,由等式(9),

$$Q(t_m,z_m,dt_{m+1},dz_{m+1})$$

$$=q(z_m,t_m,u)Q(u,z_m,dt_{m+1},dz_{m+1}).$$

再考虑到

$$Q(t_n,z_n,[t,\infty),\mathscr{X}_b)$$

$$=q(z_n,t_n,t)\int_{\mathscr{X}}\int_u^{t_n}Q(u,z_m,dt_{m+1},dz_{m+1})$$

$$\times Q^{n-m-1}(t_{m+1},z_{m+1},dt_n,dz_n)$$

$$=Q^{n-m}(u,z_m,dt_n,dz_n),$$

我们可得

$$\mathbf{E}_{s,x}f(\xi_n)g(\xi_m)\chi_n(t)\chi_m(u)$$

$$=\int_{\mathscr{X}}\int_s^u g(z_m)q(z_m,t_m,u)Q^m(s,x,dt_m,dz_m)$$

$$\times\int_{\mathscr{X}}\int_u^t f(z_n)q(z_n,t_n,t)Q^{n-m}(u,z_m,dt_n,dz_n).$$

不难看出,上式当 $n=m+1$ 和 $n=m$ 时也成立,这时有 $Q^0(s,x,K,B)=\chi(K,s)\chi(B,x)$. 考虑到公式(11),可得

$$\mathbf{E}_{s,x}f(\xi_{s,x}(t))g(\xi_{s,x}(u))$$

$$=\mathbf{E}_{s,x}g(\xi_{s,x}(u))(\mathbf{E}_{u,z}f(\xi_{u,z}(t)))|_{z=\xi_{s,x}(u)}.$$

类似地,当 $n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_m$ 时可得

$$\mathbf{E}_{s,x}\left\{\prod_{k=1}^{n}f_k(\xi_{n_k})\chi_{n_k}(u_k)\right\}$$

$$=\int_{\mathscr{X}}\int_s^{u_1}f_1(z_{n_1})q(z_{n_1},t_{n_1},u_1)Q^{n_1}(s,x,dt_{n_1},dz_{n_1})$$

$$\times \int_{\mathscr{X}} \int_{u_1}^{u_2} f_2(z_{n_2}) q(z_{n_2}, t_{n_1}, u_2) Q^{n_2}(t_{n_1}, z_{n_1}, dt_{n_2}, dt_{z_{n_2}}) \times$$

$$\cdots \times \int_{\mathscr{X}} \int_{u_{n-1}}^{u_n} f_m(z_{n_m}) q(z_{n_m}, t_{n_m}, u_n) Q^{n_m}(t_{n_{m-1}}, z_{n_{m-1}},$$

$$dt_{n_m}, dz_{n_m}),$$

将此式对满足条件 $0 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_m < \infty$ 的一切 $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 求和，并利用归纳法，可推得等式(12)，定理证完.

注. 由上面证明可知

$$\mathbf{E}_{s,x}\{f(\xi_{s,x}(t)) | \xi_{s,x}(u)\} = \mathbf{E}_{u,x} f(\xi_{u,x}(t))|_{x=\xi_{s,x}(u)},$$

而马尔科夫函数族 $\xi_{s,x}(t)$ 的转移概率 $P(s, x, t, B)$ 为

$$P(s, x, t, B) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_s^t \int_B q(z, v, t) Q^n(s, x, dv, dz), \quad (13)$$

其中 $Q^n(y, A)$ 是核 $Q(y, A)$ 的 n 重卷积. 上式右端的每一被加项都有简单的(理论)概率意义：它等于过程 $\xi_{s,x}(t)$ 在时间区间 (s, t) 内恰有 n 次跳跃，并且 n 次跳跃后，系统落入集 B 的概率.

实际上，如前所证，我们有

$$\mathbf{P}_{s,x}\{\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}, \xi_n \in B\} = \int_s^t \int_B q(z, v, t) Q^n(s,$$

$$x, dv, dz).$$

与前面已证明的(第一章 § 6 定理1)一样，可以由马尔科夫函数族 $\{\xi_{s,x}(t), t \geqslant s\}$ 构造一马尔科夫过程 $\{\xi(t, \omega), \mathfrak{S}_t^s, \mathbf{P}_{s,x}\}$，使它的样本函数都具有如 $\xi_{s,x}(t)$ 一样的光滑的性质. 在这种情况下，$\xi(t)$ 是离散拓扑中的右连续函数，当 $t < \zeta$ 时有左极限，且在每一区间 $[0, t]$ 上它只有有穷次跳跃，$t < \zeta$. 因而构造出的过程是跳跃过程.

定理 4 上面构造的跳跃马尔科夫过程是关于 σ 代数流 $\{\mathfrak{S}_t^s\}$ 的强马尔科夫过程.

证. 由函数 $q(x, s, t)$ 的右连续性可知，$Q(s, x, (t, t+h], B)$ 以及函数 $Q^n(s, x, (t, t+h], B)$ 是 s 与 t 的右连续函

数. 由此推得，$P(s, x, t, B)$ 作为 (s, x, t) 的函数是 $\mathscr{T} \times \mathfrak{B}_b \times \mathscr{T}$ 可测的. 由过程 $\xi(t)$ 的右连续性可知，它是循序可测的. 其次，对任意有界函数 $f(x)$，函数 $f(\xi(t))$ 右连续，这是因为 $\xi(t)$ 在离散拓扑下右连续. 由这些结果出发，几乎可以逐字重复第一章§4定理 7 的证明(那里的假设中，只有 $\mathfrak{B}$ 是度量空间 $\mathscr{X}$ 的 Borel 集所成 σ 代数的扩张这一条件不满足). 这就证明了过程的强马尔科夫性.

§ 2. 可列状态齐次马尔科夫过程

本章以下研究离散空间中的齐次马尔科夫过程.

我们先从较简单的，即相空间 $\mathscr{X}$ 至多可列的情况开始. 此时，自然地令 $\mathscr{X}$ 与一切整数集，或者与其子集相等. 下面写 $\mathscr{I}$ 代替 $\mathscr{X}$，$\mathscr{I}$ 为整数的某子集，$\mathscr{I}$ 的点表示为 $i, k, l, m, \cdots$

转移概率；预解式 可列状态过程的转移概率定义为一组函数 $p_{ij}(t) = P(t, i, \{j\})$，其中 $\{j\}$ 是由一个点 j 组成的集合；i, j 属于 $\mathscr{I}$. 函数 $p_{ij}(t)$ 满足条件：

a) $0 \leqslant p_{ij}(t) \leqslant 1$,

b) $\sum_{j \in \mathscr{I}} p_{ij}(t) \leqslant 1$ (如研究的是不断过程，则不等式改为等式),

c) 当 $t > 0, s > 0$ 时，对一切 $i, j \in \mathscr{I}$

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k \in \mathscr{I}} p_{ik}(t) p_{kj}(t)$$

(此即 Колмогоров-Chapman 方程).

如还满足条件

d) $\lim_{t \downarrow 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij}$,

则转移概率及过程本身称为随机连续的. 此时，由于

$$|p_{ij}(t+s) - p_{ij}(t)| \leqslant \sum_{k \in \mathscr{I}} |p_{ik}(s) - \delta_{ik}| p_{kj}(t)$$

$$\leqslant 1 - p_{ii}(s) + \sum_{k \neq i} p_{ik}(s) \leqslant 2(1 - p_{ii}(s)),$$

函数 $p_{ii}(t)$ 在 $t > 0$ 一致连续.

以下,我们只考虑随机连续过程.

对 $\mathrm{Re}\lambda > 0$, 令

$$r_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_{ij}(t)\, dt$$

由数 $r_{ij}(\lambda)$, $i, j \in \mathscr{I}$,组成的矩阵 $\mathbf{R}(\lambda)$ 称为过程的**预解式**. $r_{ij}(\lambda)$ 满足以下条件:

1) 当 $\lambda > 0$ 时, $r_{ij}(\lambda) \geqslant 0$,

2) $\sum_{j \in \mathscr{I}} r_{ij}(\lambda) \leqslant \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}$,

3) 当 $\mathrm{Re}\lambda > 0$, $\mathrm{Re}\mu > 0$ 时, $r_{ij}(\lambda)$ 满足预解方程

$$r_{ij}(\lambda) - r_{ij}(\mu) = (\mu - \lambda) \sum_{k \in \mathscr{I}} r_{ik}(\lambda) r_{kj}(\mu).$$

对随机连续的可列状态马尔科夫过程,以下引理给出了预解式的构造.

引理 1 如矩阵 $\mathbf{R}(\lambda)$ 的元 $r_{ij}(\lambda)$ 当 $\mathrm{Re}\lambda > 0$ 时有定义,且除满足条件 1)—3) 外还满足条件

4) $\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda r_{ij}(\lambda) = \delta_{ij}$,

则 $\mathbf{R}(\lambda)$ 是某随机连续过程的预解式,即有

$$r_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_{ij}(t)\, dt,$$

其中 $p_{ij}(t)$ 满足条件 a)—d).

证. 利用第二章 § 3 的结果. 我们把 $\mathscr{I}$ 当作是有距离

$$r(i, j) = \delta_{ij}$$

的度量空间. 这时,连续有界函数 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{I}}$ 是有界序列 f_j, $j \in \mathscr{I}$. 在 $\mathscr{C}_{\mathscr{I}}$ 上定义算子 $\mathbf{R}(\lambda)$:

$$[\mathbf{R}(\lambda) f]_j = \sum_{k \in \mathscr{I}} r_{jk}(\lambda) f_k.$$

容易验证,算子族 $\mathbf{R}(\lambda)$ 满足第二章 § 3 条件 1)—4). 在第二章 § 3 中已证明了,对每 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{I}}$ 存在函数 $\mathbf{T}_t f$, 使

$$[\mathbf{R}(\lambda)f]_i = \int_0^\infty e^{-\lambda t}[\mathbf{T}_t f]_i dt.$$

取 $f_i = \delta_{kj}$，可知存在函数 $p_{kj}(t) = [\mathbf{T}_t f_j]_k$，使

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} p_{kj}(t)\, dt = r_{kj}(\lambda).$$

那里还证明了，当 $f \geqslant 0$ 时，$\mathbf{T}_t f \geqslant 0$. 所以，$p_{kj}(t) \geqslant 0$. 由不等式 $\sum_k r_{ik}(\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}$ 对 $\lambda > 0$ 时的正确性，容易得到条件 b).

由预解方程，比较

$$\int_0^\infty\int_0^\infty p_{ij}(t+s)e^{-\lambda t-\mu s}dt\,ds \text{ 与 } \int_0^\infty\int_0^\infty \sum_k p_{ik}(t)p_{kj}(s)e^{-\lambda t-\mu s}dt\,ds,$$

可知，p_{ij} 对几乎一切 t 与 s，满足 Колмогоров-Chapman 方程. 记 S 为 $[0, \infty)$ 上(有完全 Lebesgue 测度)的子集，使对 $t \in S$，$s \in S$，p_{ij} 满足 Колмогоров-Chapman 方程. 这时，对 $t \in S$，$s \in S$，有

$$p_{ii}(t+s) \geqslant p_{ii}(t)p_{ii}(s).$$

如对 $t_0 \in S$，$p_{ii}(t_0) \leqslant \delta$，那么，对几乎一切 $u \in (0, t_0)$，或者

$$p_{ii}(u) \leqslant \sqrt{\delta},$$

或者 $p_{ii}(t_0 - u) \leqslant \sqrt{\delta}$. 可见

$$\frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} p_{ii}(u)du = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} \frac{p_{ii}(u) + p_{ii}(t_0 - u)}{2} du \leqslant \frac{1+\sqrt{\delta}}{2}.$$

因此，如存在序列 $t_n \downarrow 0$，$t_n \in S$，使 $\overline{\lim_{n\to\infty}} p_{ii}(t_n) < 1$，则有关系式

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} p_{ii}(u)du < 1. \tag{1}$$

另一方面，

$$\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} (1 - p_{ii}(u))du \leqslant \frac{e^{\lambda t_n}}{t_n}\int_0^\infty (1 - p_{ii}(u))e^{-\lambda u}du$$

$$= \frac{e^{\lambda t_n}}{\lambda t_n}[1 - \lambda r_{ii}(\lambda)].$$

令 $\lambda = \frac{1}{t_n}$，并利用性质4)可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}(1-p_{ii}(u))du=0.$$

这与(1)矛盾．这样一来，我们得到：$\lim\limits_{t\downarrow 0, t\in S}p_{ii}(t)=1$.

因为对 $t\in S$, $h\in S$,

$$|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|\leqslant\sum_k|p_{ik}(h)p_{kj}(t)-\delta_{ik}p_{kj}(t)|$$
$$\leqslant 2(1-p_{ii}(h)),$$

所以 $p_{ij}(t)$ 在 S 上一致连续．既然 S 在$[0, \infty)$上处处稠密，$p_{ij}(t)$ 就可以拓展成 $[0, \infty)$ 上的一致连续函数．这就是我们要找的函数．引理证完．

注．显然，条件 4) 还是 $\mathbf{R}(\lambda)$ 为随机连续过程的预解式的必要条件．因此，条件 1)—4) 完全刻划了随机连续过程的预解式．

下面，在构造各种过程的例子时，我们将方便地利用预解式来给出．这时，我们利用事实：转移概率，并因之马尔科夫过程，都与满足条件 1)—4) 的 -切矩阵函数 $\mathbf{R}(\lambda)$ 相对应．有时，在构造过程时要利用极限过渡的方法．为此，需要下面引理．

引理 2 如果 a) $\mathbf{R}_n(\lambda)=(r_{ij}^n(\lambda))$ 是某转移概率的预解式，b)对一切 $i, j\in\mathscr{I}$ 和 $\mathrm{Re}\lambda>0$，存在极限

$$r_{ij}(\lambda)=\lim_{n\to\infty}r_{ij}^n(\lambda),$$

c) 对一切 $i\in\mathscr{I}$ 与 $\mathrm{Re}\lambda>0$ 级数 $\sum\limits_j|r_{ij}^n(\lambda)|$ 关于 n 一致收敛，

d) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(1-\lambda r_{ii}^n(\lambda))=0$，则矩阵 $\mathbf{R}(\lambda)=(r_{ij}(\lambda))$ 是某随机连续过程的预解式．

证．$\mathbf{R}(\lambda)$ 满足条件 1) 和 2) 是显然的．条件 4) 可由引理条件 d) 推得．关系式

$$r_{ij}^n(\lambda)-r_{ij}^n(\mu)=(\mu-\lambda)\sum_k r_{ik}^n(\lambda)r_{kj}^n(\mu)$$

当 $n\to\infty$ 时，极限过渡的可能性由 $r_{kj}^n(\mu)$ 的有界性与级数 $\sum\limits_k|r_{ik}^n(\lambda)|$ 关于 n 的一致收敛性得以保证．引理证完．

注. 如 $\lambda > 0$ 时, $\sum_j r_{ij}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$, 则引理之条件 c) 满足. 事实上,对任意 $\varepsilon > 0$, 可找有穷集 $\mathscr{J}_\varepsilon \subset \mathscr{J}$, 使

$$\sum_{j \in \mathscr{J}_\varepsilon} r_{ij}(\lambda) \geqslant \frac{1}{\lambda} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

这时,对一切满足

$$\sum_{j \in \mathscr{J}_\varepsilon} |r_{ij}^n(\lambda) - r_{ij}(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

的 n, 都满足不等式

$$\sum_{j \in \mathscr{J}_\varepsilon} r_{ij}^n(\lambda) \geqslant \frac{1}{\lambda} - \varepsilon.$$

这意味着对充分大的 n, 有

$$\sum_{j \bar{\in} \mathscr{J}_\varepsilon} |r_{ij}^n(\lambda)| \leqslant \sum_{j \bar{\in} \mathscr{J}_\varepsilon} r_{ij}^n(\mathrm{Re}\lambda)$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda} - \left(\frac{1}{\lambda} - \varepsilon\right) = \varepsilon.$$

转移概率的可微性 假定函数 $p_{ij}(t)$ 在 0 点已补充定义为 $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$. 我们研究 $p_{ij}(t)$ 在 0 点右导数的存在问题.

定理 1 总存在有限或无穷的极限

$$a_{ij} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h) - \delta_{ij}}{h}.$$

如果 $i \neq j$, 则 a_{ij} 有限; a_{ii} 或有限或 $a_{ii} = -\infty$; 在所有情况下

$$\sum_{j \neq i} a_{ij} \leqslant -a_{ii}.$$

证. 设 $i = j$, 规定

$$s = \sup_{h > 0} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h}.$$

s 可等于 $+\infty$. 如 $c < s$ 而 $\frac{1 - p_{ii}(t_0)}{t_0} > c$, 则当

$$\frac{t_0}{n+1} \leqslant \tau < \frac{t_0}{n}$$

时，考虑到不等式 $p_{ii}(t+h) \geqslant p_{ii}(t)p_{ii}(h)$，我们有

$$c < \frac{1}{t_0}\,[1 - [p_{ii}(\tau)]^n p_{ii}(t_0 - n\tau)] < \frac{1 - [p_{ii}(\tau)]^n}{n\tau} + \frac{1 - p_{ii}(t_0 - n\tau)}{t_0}.$$

因此，

$$c < \frac{n(1 - p_{ii}(\tau))}{n\tau} + \frac{1 - p_{ii}(t_0 - n\tau)}{t_0} = \frac{1 - p_{ii}(\tau)}{\tau} + \frac{1 - p_{ii}(t_0 - n\tau)}{t_0}.$$

既然 $\lim_{n\to\infty}(1 - p_{ii}(t_0 - n\tau)) = 0$，故对一切 $c < s$，可找 δ，使当 $\tau < \delta$ 时

$$c < \frac{1 - p_{ii}(\tau)}{\tau} \leqslant s.$$

由此可知，

$$s = \lim_{\tau\downarrow 0}\frac{1 - p_{ii}(\tau)}{\tau}.$$

现设 $i \neq j$. 取 δ，使当 $0 < s \leqslant nh < \delta$ 时，$p_{ii}(s) > c$. 我们考虑取值于 $\mathscr{I}$，具有一步转移概率 $p_{kl} = p_{kl}(h)$ 的马尔科夫链 ξ_n. 这时

$$\begin{aligned}
p_{ij}(nh) &= \mathbf{P}\{\xi_n = j \mid \xi_0 = i\} \\
&\geqslant \sum_{r=0}^{n-1} \mathbf{P}\{\xi_1 \neq j, \cdots, \xi_{r-1} \neq j, \xi_r = i \mid \xi_0 = i\} p_{ij} \\
&\quad \times \mathbf{P}\{\xi_n = j \mid \xi_{r+1} = j\} \\
&\geqslant c\, p_{ij} \sum_{r=0}^{n-1} \mathbf{P}\{\xi_1 \neq j, \cdots, \xi_{r-1} \neq j, \xi_r = i \mid \xi_0 = i\}.
\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{\xi_1 \neq j, \cdots, \xi_{r-1} \neq j, \xi_r = i \mid \xi_0 = i\} &= \mathbf{P}\{\xi_r = i \mid \xi_0 = i\} \\
&\quad - \sum_{l<r} \mathbf{P}\{\xi_1 \neq j, \cdots, \xi_{l-1} \neq j, \xi_l = j \mid \xi_0 = i\} \\
&\quad \times \mathbf{P}\{\xi_r = i \mid \xi_l = j\} \geqslant c - (1 - c)
\end{aligned}$$

$$\times \sum_{l<r} \mathbf{P}\{\xi_1 \neq j, \cdots, \xi_{l-1} \neq j, \xi_l = j\} \geqslant 2c - 1.$$

因此

$$p_{ij}(nh) \geqslant c(2c-1)np_{ij}(h),$$

或对 $t < \delta$ 有

$$\frac{p_{ij}(t)}{t} \geqslant c(2c-1)p_{ij}\left(\frac{t}{n}\right)\frac{n}{t}.$$

用$\left[\frac{t}{\tau}\right]$表示 $\frac{t}{\tau}$ 的整数部分，此时有

$$\frac{p_{ij}(\tau)}{\tau} \leqslant \frac{1}{c(2c-1)} \frac{p_{ij}\left(\left[\frac{t}{\tau}\right] \cdot \tau\right)}{\left[\frac{t}{\tau}\right]\tau}.$$

令 $\tau \to 0$，取极限，可得

$$\overline{\lim_{\tau\downarrow 0}} \frac{p_{ij}(\tau)}{\tau} \leqslant \frac{1}{c(2c-1)} \frac{p_{ij}(t)}{t} < \infty.$$

因此

$$\overline{\lim_{\tau\downarrow 0}} \frac{p_{ij}(\tau)}{\tau} \leqslant \frac{1}{c(2c-1)} \underline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{p_{ij}(t)}{t} < \infty.$$

由于 $t\downarrow 0$ 时，$p_{ii}(t) \to 1$，$p_{jj}(t) \to 1$，可知 c 可任意接近于 1，于是

$$\overline{\lim_{\tau\downarrow 0}} \frac{p_{ij}(\tau)}{\tau} \leqslant \underline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{p_{ij}(t)}{t} < \infty.$$

由此可知，存在有限极限 a_{ij}.

因对一切不包含 i 的有限集 $\mathscr{J}_1 \subset \mathscr{J}$ 有

$$\frac{1 - p_{ii}(t)}{t} \geqslant \sum_{j \in \mathscr{J}_1} \frac{p_{ij}(t)}{t},$$

故 $-a_{ii} \geqslant \sum_{j\in\mathscr{J}_1} a_{ij}$. 因此，$\sum_{j\neq i} a_{ij} \leqslant -a_{ii}$. 定理证完.

我们可以根据 a_{ii} 将过程的状态分类. 如 $a_{ii} = -\infty$，称状态 i 为**瞬时的**，否则就称之为**非瞬时的**或者是**逗留的**. 称非瞬时状态 i 为**规则的**，如果满足关系式

$$\sum_{j\neq i} a_{ij} = -a_{ii}.$$

否则,就称之为**不规则的**. 如过程的所有状态都是规则的,就称此过程为**局部规则的**.

如果状态 i 是非瞬时的,而过程是可分的(即有 $[0, \infty)$ 上之处处稠密的可列集 Λ, 使当 $t\in \Lambda\cap(\alpha, \beta)$ 时, 由 $x(t)=i$ 可推出对一切 $t\in(\alpha, \beta)$, $x(t)=i$), 必存在某随机区间 $(0, \delta)$, 使

$$\mathbf{P}_i\{x(t)=i,\ t\in(0, \delta)\}=1.$$

实际上, 设 $0=t_{n0}<t_{n1}<\cdots<t_{nn}=t$, 集列

$$\Lambda_n=\{t_{n0}, t_{n1}, \cdots, t_{nn}\}$$

单调增,且 $\bigcup \Lambda_n=[0, t]\cap\Lambda$, 此时,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_i\{x(t)=i,\ t\in\Lambda\cap[0, t]\}&=\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{x(t)=i,\ t\in\Lambda_n\}\\&=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n-1}p_{ii}(t_{n,k+1}-t_{nk})\\&=\exp\left\{-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\log p_{ii}(t_{n,k+1}-t_{nk})\right\}=e^{a_{ii}t},\end{aligned}$$

这是因为 $\ln p_{ii}(t)=a_{ii}t+o(t)$. 这样一来, τ_i 为首次流出状态 i 的时刻,它有以 $-a_{ii}$ 为参数的指数分布.

状态 i 为瞬时状态时, $\mathbf{P}\{\tau_i>0\}=0$.

显然,总有不等式

$$p_{ii}(t)\geqslant e^{a_{ii}t}. \tag{2}$$

假定状态 i 是规则的. 此时,对任意 $h>0$ 与 $i\neq j$ 有

$$p_{ij}(t)=\sum_{0<r<\frac{t}{h}}[p_{ii}(h)]^{r-1}\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t-rh).$$

(由 i 转移到 j 与下列事件之一同时出现: 过程在时刻 $h, \cdots, rh-h$ 位于i,而后于时刻 rh 转移到 $k\neq i$, 又由 k 经时间 $t-rh$ 转移到 j.) 注意到

$$\begin{aligned}&\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t-rh)\\&=\sum_{k\neq i}a_{ik}hp_{kj}(t-rh)+\sum_{k\neq i}(p_{ik}(h)-a_{ik}h)p_{kj}(t-rh)\end{aligned}$$

$$=h\sum_{k\neq i}a_{ik}p_{kj}(t-rh)+O\left(h\sum_{k\neq i}\left|\frac{p_{ik}(h)}{h}-a_{ik}\right|\right).$$

而对一切有穷集 $\mathscr{J}_1\subset\mathscr{J}$，$i\bar{\in}\mathscr{J}_1$，

$$\overline{\lim_{h\downarrow 0}}\sum_{k\neq i}\left|\frac{p_{ik}(h)}{h}-a_{ik}\right|\leqslant -a_{ii}+\sum_{k\in\mathscr{J}_1}a_{ik}$$

$$+\overline{\lim_{h\downarrow 0}}\frac{1}{h}\left(1-p_{ii}(h)-\sum_{k\in\mathscr{J}_1}p_{ik}(h)\right)$$

$$\leqslant 2\left(-a_{ii}+\sum_{k\in\mathscr{J}_1}a_{ik}\right).$$

因此，

$$p_{ij}(t)=\sum_{1\leqslant r<\frac{t}{h}}(p_{ii}(h))^{r-1}h\sum_{k\neq i}a_{ik}p_{kj}(t-rh)$$

$$+\frac{o(h)}{1-p_{ii}(h)}=h\sum_{1\leqslant r<\frac{t}{h}}[e^{a_{ii}h}$$

$$+o(h)]^{r-1}\sum_{k\neq i}a_{ik}p_{kj}(t-rh)+o(1).$$

令 $h\downarrow 0$，取极限，可得；$j\neq i$ 时

$$p_{ij}(t)=\int_0^t e^{a_{ii}s}\sum_{k\neq i}a_{ik}p_{kj}(t-s)ds. \tag{3}$$

引进记号 $a_{ii}=-\lambda_i$，$a_{ik}=\lambda_i\pi_{ik}$（当 $a_{ii}\neq 0$ 时）。于是

$$\sum_{k\neq i}\pi_{ik}=1.$$

(3)可改写为

$$p_{ij}(t)=\int_0^t\lambda_i e^{-\lambda_i s}\sum_{k\neq i}\pi_{ik}p_{kj}(t-s)ds \tag{4}$$

由于 $\lambda_i e^{-\lambda_i s}$ 是随机变量 τ_i 的分布密度，上式可解释为：为由 i 经时间 t 转移到 j，只需在某时刻 s 首次离开 i，在该时刻由 i 转移到 k，而后经时间 $t-s$ 再从 k 转移到 j. 这样，π_{ik} 自然解释为过程在流出状态 i 的时刻转移到状态 k 的概率。可以证明，当状态 k 是非瞬时状态时，这也同样正确. 与(4)式类似，可得等式

$$p_{ii}(t)=e^{-\lambda_i t}+\int_0^t\lambda_i e^{-\lambda_i s}\sum_{k\neq i}\pi_{ik}p_{ki}(t-s)ds, \tag{5}$$

从(4)和(5)，对 t 微分(代换 $s=t-u$ 后)，我们得到

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(t)=\lambda_i\sum_{k\neq i}\pi_{ik}p_{kj}(t)-\lambda_i^2\int_0^t e^{-\lambda_i(t-s)}\sum_{k\neq i}\pi_{ik}p_{kj}(s)ds$$

$$=-\lambda_i p_{ij}(t)+\sum_{k\neq i}\lambda_i\pi_{ik}p_{kj}(t)\quad(i\neq j),\tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}p_{ii}(t)=-\lambda_i e^{-\lambda_i t}+\lambda_i\sum_{k\neq i}\pi_{ik}p_{ki}(t)$$

$$-\lambda_i\int_0^t\lambda_i e^{-\lambda_i(t-s)}\sum_{k\neq i}\pi_{ik}p_{ki}(s)ds$$

$$=-\lambda_i p_{ii}(t)+\lambda_i\sum_{k\neq i}\pi_{ik}p_{ki}(t).\tag{7}$$

回忆 a_{ij} 与 λ_i，π_{ij} 之间的关系，(6) 与 (7) 可统一成一个方程:

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(t)=\sum_k a_{ik}p_{kj}(t)\quad(j\in\mathscr{I}).\tag{8}$$

此方程称为 Колмогоров 向后方程，如果它对一切 $i\in\mathscr{I}$ 成立的话。当过程为局部规则过程时，确实如此.

我们指出，对有穷集 $\mathscr{I}$，过程的一切状态都是规则的，实际上

$$\frac{p_{ii}(h)-1}{h}=-\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h},$$

且由于上式右边是有穷和，并且每一被加项的极限都是有穷的，可见 $a_{ii}>-\infty$。在有穷和中取极限，可得

$$a_{ii}=-\sum_{k\neq i}a_{ik}.$$

除 Коломогоров 向后方程外，局部规则过程的转移概率还满足 Коломогоров 向前方程.

引理 3 如果过程的一切状态都是非瞬时的，而且 a_{ii} 有界，则过程是局部规则的，并且其转移概率满足方程组

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(t)=\sum_k p_{ik}(t)a_{kj}.\tag{9}$$

称(9)为 Колмогоров 向前方程

证。当 $h>0$ 时，

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}=\sum_k p_{ik}(t)\frac{p_{kj}(h)-\delta_{kj}}{h}. \qquad (10)$$

因为

$$\left|\frac{p_{kj}(h)-\delta_{kj}}{h}\right|\leqslant\frac{1-p_{kk}(h)}{h}\leqslant -a_{kk}$$

(最后的不等式从定理1证明中得到),故(10)右边当$h\downarrow 0$时可逐项取极限. 我们有

$$\frac{d^+p_{ij}(t)}{dt}=\sum_k p_{ik}(t)a_{kj},$$

其中$\frac{d^+}{dt}$表示右导数. 既然$p_{ij}(t)$的右导数连续,而且函数本身也连续,故由右导数的存在性可推得导数存在且就等于右导数.因而,(9)成立.

由(9)可得

$$p_{ij}(t)=\delta_{ij}+\int_0^t p_{ij}(t)a_{jj}\,dt+\int_0^t\sum_{k\neq j}p_{ik}(t)a_{kj}dt.$$

将此式对j求和,得

$$\begin{aligned}1&=1+\sum_j\int_0^t p_{ij}(t)a_{jj}dt+\sum_j\int_0^t\sum_{k\neq j}p_{ik}(t)a_{kj}dt\\&=1+\int_0^t\left(\sum_k p_{ik}(t)a_{kk}+\sum_k p_{ik}(t)\sum_{j\neq k}a_{kj}\right)dt\\&=1+\int_0^t\sum_k p_{ik}(t)\sum_j a_{kj}dt.\end{aligned}$$

(之所以能象改变两次求和的次序那样改变积分与求和之次序,是由于积分号下的每个和中,被加项都是同号的). 因此,

$$\int_0^t\sum_k p_{ik}(t)\sum_j a_{kj}dt=0.$$

因为$p_{ik}(t)\geqslant 0$及$\sum_j a_{kj}\leqslant 0$,故由函数$\sum_k p_{ik}(t)\sum_j a_{kj}$的连续性,知它等于0. 令$t\downarrow 0$,取极限得

$$\sum_j a_{ij}=0.$$

这对一切i都正确. 所以过程的一切状态都是规则的.引理证毕.

定理2 设 $i,j\in\mathscr{J}$ 时，数 a_{ij} 满足条件： 1）$a_{ij}\geqslant 0$，如 $i\neq j$; 2）$a_{ii}\leqslant 0$，3）$\sum_j a_{ij}=0$，4）$\sup_i|a_{ii}|<\infty$. 此时，方程(8)有唯一有界解，而方程(9)有唯一满足条件

$$\sum_k |p_{ik}(t)|<\infty,$$

初始条件为 $p_{ik}(+0)=\delta_{ik}$ 的解. 这些解是转移概率，即满足条件 a)—d).

证. 先考虑方程(8). 设$\mathbf{A}$为元 a_{ij} 组成的矩阵. 我们考虑有界序 列 $f(j)$，$j\in\mathscr{J}$，组成的集 $\mathscr{C}_{\mathscr{J}}$. 设 $\|f\|=\sup_j\{f(j)\}$，则 $\mathscr{C}_{\mathscr{J}}$ 成为 Banach 空间. 在 $\mathscr{C}_{\mathscr{J}}$ 上定义算子 $\mathbf{A}$:$\mathbf{A}f(j)=\sum a_{ji}f(i)$. 此算子有界，这因为

$$\|\mathbf{A}\|=\sup_{j,\|f\|\leqslant 1}\left|\sum_i a_{ji}f(i)\right|\leqslant\sup_j\sum_i|a_{ji}|=\sup_j 2|a_{jj}|.$$

记 $p_{ij}(t)=f_t(j)$，对 f_t，由(8)可得方程

$$\frac{d}{dt}f_t=\mathbf{A}f_t.$$

设 $u_t=e^{-t\mathbf{A}}f_t$. 对固定的 t,u_t 属于 $\mathscr{C}_{\mathscr{J}}$，这是由于从算子 $\mathbf{A}$ 的有界性可知算子 $e^{-t\mathbf{A}}$ 也有界；此时$\|e^{-t\mathbf{A}}\|\leqslant e^{t\|\mathbf{A}\|}$. 因为

$$\frac{d}{dt}u_t=e^{-t\mathbf{A}}\frac{d}{dt}f_t-e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{A}f_t$$

$$=e^{-t\mathbf{A}}\left(\frac{d}{dt}f_t-\mathbf{A}f_t\right)=0,$$

所以 $u_t=u_0=f_0$. 故 $f_t=e^{t\mathbf{A}}f_0$. 方程(8)之有界解的存在性与唯一性得证.

注意到 $f_0(j)=\delta_{ij}$，故用 $\mathbf{P}_t$ 记 $p_{ij}(t)$ 组成之矩阵，有

$$\mathbf{P}_t=e^{t\mathbf{A}}\mathbf{E}=e^{t\mathbf{A}},$$

其中 $\mathbf{E}$ 为单位矩阵. 为证明 $\mathbf{P}_t$ 是转移概率，我们先指出

$$\mathbf{P}_t 1(\cdot)=1(\cdot),$$

这里 $1(\cdot)$表示 $\mathscr{C}_{\mathscr{J}}$ 中每个元都等于 1 的序列. 这可由

$$\mathbf{A}1(\cdot)=0$$

与微分方程 $\frac{d}{dt}1(\cdot)=\mathbf{A}1(\cdot)$ 的解的唯一性得到。因为

$$\mathbf{P}_{t+\tau}=\mathbf{P}_t\mathbf{P}_\tau,$$

剩下的只要证明 $p_{ij}(t)\geqslant 0$。记 $m_j(t)=\inf\limits_{i,s\leqslant t} p_{ij}(s)$。此时由 (8) 可得

$$\frac{d}{dt}[p_{ij}(t)e^{-a_{ii}t}]=\sum_{k\neq i}a_{ik}p_{kj}(t)e^{-a_{ii}t}$$

$$\geqslant -a_{ii}m_j(t)e^{-a_{ii}t}.$$

所以

$$p_{ij}(t)e^{-a_{ii}t}\geqslant \delta_{ij}-\int_0^t a_{ii}m_j(s)e^{-a_{ii}s}ds$$

$$\geqslant \delta_{ij}+m_j(t)[e^{-a_{ii}t}-1],$$

$$p_{ij}(t)\geqslant m_j(t)(1-e^{a_{ii}t}).$$

取 i，使 $p_{ij}t\leqslant m_j(t)+\varepsilon$，我们有

$$m_j(t)+\varepsilon\geqslant m_j(t)(1-e^{a_{ii}t}),m_j(t)\geqslant -\varepsilon e^{-a_{ii}t}.$$

由 a_{ii} 的有界性与 $\varepsilon>0$ 的任意性，可得 $m_j(t)\geqslant 0$。

方程(9)的解的存在性可由关系式

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}_t=e^{t\mathbf{A}}\mathbf{A}=\mathbf{P}_t\mathbf{A},$$

得到，其中 $\mathbf{P}_t=e^{t\mathbf{A}}$。解的唯一性由以下事实推出：方程(9)的满足零初始条件和 $\sum\limits_k|p_k(t)|<\infty$ 的任意解 $p_k(t)$，都有

$$\sum_k|p_k(t)|\leqslant\|\mathbf{A}\|\int_0^t\sum_k|p_k(s)|ds,$$

$$\sum_k|p_k(t)|=0.$$

定理全部证完.

注. 如上面指出的，对局部规则过程，$\lambda_k=-a_{kk}$ 和

$$\pi_{ki}=\frac{1}{\lambda_k}a_{ki}$$

分别表示过程本身首次跑出状态 k 的时刻的指数分布的参数，以及跑出状态 k 时立即落入状态 i 的概率。因此，如 λ_i 有界，则这

些量唯一确定过程的转移概率．这一事实下面还要用到．

用 Laplace 变换于 Колмогоров 向后方程，可知，在定理 2 的条件下，过程的预解式的元满足下面两个方程组：

$$\lambda r_{kj}(\lambda) = \sum_i a_{ki} r_{ij}(\lambda) + \delta_{kj}, \tag{11}$$

$$\lambda r_{kj}(\lambda) = \sum_i r_{ki}(\lambda) a_{ij} + \delta_{kj}, \tag{12}$$

并且它们有满足 1) 与 2) 的唯一解．

利用 Колмогоров 向后方程，可得 $p_{ii}(t)$ 的一个上界．首先，我们指出，当 $k \neq i$ 时，

$$\frac{d}{dt} p_{ki}(t) \leqslant a_{kk} p_{ki}(t) + \sum_{j \neq k} a_{kj}$$

$$= a_{kk} p_{ki}(t) - a_{kk}.$$

由此可知

$$\frac{d}{dt}(p_{ki}(t) e^{-a_{kk}t}) \leqslant -a_{kk} e^{-a_{kk}t},$$

从而有

$$p_{ki}(t) \leqslant 1 - e^{a_{kk}t}.$$

将此不等式代入关于 $p_{kk}(t)$ 的微分方程，可得

$$\frac{d}{dt} p_{kk}(t) \leqslant a_{kk} p_{kk}(t) - a_{kk}[1 - e^{a_{kk}t}].$$

因此

$$p_{kk}(t) \leqslant 1 + t a_{kk} e^{a_{kk}t}.$$

用 Laplace 变换于最后的不等式，可得关于 $r_{kk}(\lambda)$ 的不等式

$$r_{kk}(\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda} + \frac{a_{kk}}{(\lambda - a_{kk})^2}. \tag{13}$$

不规则过程的例　我们构造一些例，说明当 $\mathscr{I}$ 无限时，过程可含有瞬时、或非瞬时的不规则状态．

例 1．构造过程，它有一个瞬时状态，其余都是规则状态，设 $\mathscr{I} = \{1, 2, \cdots\}$，$\gamma_n \downarrow 0$，$n > 1$，使 $\sum_n \gamma_n < \infty$，而 $a_n > 0$ 使

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. 记 $\mathscr{J}_n=\{1,\cdots,n\}$，且按下面方法定义 $\mathscr{J}_n$ 上的过程 $x_n(t)$：过程由状态 $k(1<k<n)$转移到 $k+1$ 时，在 k 持续时间有以 $1/\gamma_k$ 为参数的指数分布；由点 n 转移到点 1 时，在 n 持续时间有以 $1/\gamma_n$ 为参数的指数分布；在点 1 过程持续时间有以 $\sum\limits_{k=2}^{n} a_k$ 为参数的指数分布，而以概率 $a_k\left(\sum\limits_{j=2}^{n} a_j\right)^{-1}$ 离开该点后落入点 $k, 1<k\leqslant n$. 过程可被这些量唯一确定(见定理 2 系).

为确定过程的预解式，引进离开初始状态后，首次落入状态 1 的时刻η. 这时，如 $i\neq 1$ 或 $j\neq 1$, 则

$$\mathbf{P}\{x_n(t)=i|x_n(0)=j\}=\mathbf{P}\{x_n(t)=i,\eta>t|x_n(0)=j\}$$
$$+\int_0^t \mathbf{P}\{\eta\in ds|x_n(0)=j\}$$
$$\times\mathbf{P}\{x_n(t-s)=i|x_n(0)=1\},$$

而

$$\mathbf{P}\{x_n(t)=1|x_n(0)=1\}=\exp\left\{-t\sum_{k=2}^{n} a_k\right\}$$
$$+\int_0^t \mathbf{P}\{\eta\in ds|x_n(0)=1\}$$
$$\times\mathbf{P}\{x_n(t-s)=1|x_n(0)=1\}.$$

将这些式子乘以 $e^{-\lambda t}$ 并由 0 到∞积分之，得

$$r_{ij}^{(n)}(\lambda)=\int_0^\infty \mathbf{P}\{x_n(t)=i,\eta>t|x_n(0)=j\}e^{-\lambda t}dt$$
$$+\mathbf{E}(e^{-\lambda\eta}|x_n(0)=j)r_{1j}^{(n)}(\lambda),$$

如果 $i\neq 1$ 或 $j\neq 1$, 而

$$r_{11}^{(n)}(\lambda)=\frac{1}{\lambda+\sum\limits_{k=2}^{n} a_k}+\mathbf{E}(e^{-\lambda\eta}|x_n(0)=1)\,r_{11}^{(n)}(\lambda),$$

其中 $r_{ij}^{(n)}(\lambda)$ 表示过程 $x_n(t)$ 的预解式的元. 设 $q_n(\lambda)$ 为于状态 k

逗留时间的 Laplace 变换:

$$q_k(\lambda) = \frac{1}{1 + \gamma_k \lambda}.$$

这时,

$$\mathbf{E}(e^{-\lambda\eta} | x_n(0) = 1) = \frac{\sum_2^n a_k}{\lambda + \sum_2^n a_k} \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{\sum_2^n a_k} \prod_{j=k}^n q_j(\lambda)$$

$$= \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{\lambda + \sum_2^n a_k} \prod_{j=k}^n q_j(\lambda).$$

由于

$$\mathbf{P}\{x_n(t) = j, \eta > t | x_n(0) = 1\}$$

$$= \int_0^t \exp\left\{-s \sum_2^n a_i\right\} \sum_{k=2}^j a_k \mathbf{P}\{x_n(t-s) = j,$$

$$\eta > t - s | x_n(0) = k\},$$

而且函数 $\mathbf{P}\{x_n(t) = j, \eta > t | x_n(0) = k\}$ 当 $1 < k \leqslant j$ 时不依赖于 n, 故用 $q_{kj}(\lambda)$ 表示其 Laplace 变换,可得

$$\int_0^\infty \mathbf{P}\{x_n(t) = j, \eta > t | x_n(0) = 1\} e^{-\lambda t} dt = \sum_{k=2}^j \frac{a_k q_{kj}(\lambda)}{\lambda + \sum_2^n a_i}.$$

现于 $r_{ij}^{(n)}(\lambda)$ 的表达式中令 $i = 1$, 我们有

$$r_{11}^{(n)}(\lambda) = \left[\lambda + \sum_{k=2}^n a_k \left(1 - \prod_{j=k}^n q_j(\lambda)\right)\right]^{-1},$$

$$r_{1j}^{(n)}(\lambda) = r_{11}^{(n)}(\lambda) \sum_{k=2}^j a_k q_{kj}(\lambda).$$

如 $i \neq 1$, 则当 $j < i$ 时,

$$\mathbf{P}\{x_n(t) = j, \eta > t | x_n(0) = i\} = 0.$$

当 $i < j$ 时,令 $q_{ij}(\lambda) = 0$, 可得

$$r_{ij}^{(n)}(\lambda) = q_{ij}(\lambda) + \left(\prod_{k=i}^{n} q_k(\lambda)\right) r_{1j}^{(n)}(\lambda).$$

不难看出

$$\left|1 - \prod_{j=k}^{n} q_j(\lambda)\right| \leqslant \lambda \sum_{j=k}^{n} \gamma_k.$$

如果 $\sum_{k=2}^{\infty} a_k \sum_{j=k}^{\infty} \gamma_j < \infty$，则存在极限

$$r_{11}(\lambda) = \left[\lambda + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \left(1 - \prod_{j=k}^{\infty} q_j(\lambda)\right)\right]^{-1},$$

$$r_{1j}(\lambda) = \sum_{k=2}^{j} a_k q_{kj}(\lambda) \left(\lambda + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \left(1 - \prod_{i=k}^{\infty} q_i(\lambda)\right)\right)^{-1} \quad (j > 1),$$

$$r_{ij}(\lambda) = q_{ij}(\lambda) + \left(\prod_{k=i}^{\infty} q_k(\lambda)\right) r_{1j}(\lambda) \quad (i > 1).$$

由于 $\mathbf{P}\{x_n(t) = i, \eta > t \mid x_n(0) = k\}$ 当$1 < k \leqslant i$时与

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{j=i}^{k-1} \tau_j \leqslant t \leqslant \sum_{j=i}^{k} \tau_j\right\}$$

$$= \mathbf{P}\left\{\sum_{j=i}^{k-1} \tau_j \leqslant t\right\} - \mathbf{P}\left\{\sum_{j=i}^{k} \tau_j \leqslant t\right\}$$

(其中 τ_j, $j \geqslant 2$, 为相互独立的、以 $1/\gamma_i$ 为参数的指数分布的量)相同,所以

$$q_{ki}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{j=i}^{k-1} q_j(\lambda)\right)(1 - q_k(\lambda)),$$

$$\left(\prod_{j=i}^{i-1} = 1\right).$$

利用这一事实,我们得到,当 $i \neq 1$ 时,

$$\sum_j r_{ij}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \lim_{\lambda \to \infty} \lambda r_{ij}(\lambda) = \delta_{ij}.$$

余下的是验证关系式

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\left[\lambda+\sum_{k=2}^{\infty}a_k\left(1-\prod_{j=k}^{\infty}q_j(\lambda)\right)\right]^{-1}=1.$$

它可由不等式

$$1\geqslant\lambda\left[\lambda+\sum_{k=2}^{\infty}a_k\left(1-\prod_{j=k}^{\infty}q_j(\lambda)\right)\right]^{-1}$$

$$\geqslant\lambda\left[\lambda+\sum_{k=2}^{N}a_k+\lambda\sum_{k=N+1}^{\infty}a_k\sum_{j=k}^{\infty}\gamma_j\right]^{-1}$$

推出，这因为上式右边趋近于表达式

$$\left[1+\sum_{k=N+1}^{\infty}a_k\sum_{j=k}^{\infty}\gamma_j\right]^{-1},$$

而由 $\sum_{k=2}^{\infty}a_k\sum_{j=k}^{\infty}\gamma_j$ 的收敛性和N的任意性，此式可以任意趋近于1. 因此根据引理2及其附注，矩阵 $\mathbf{R}(\lambda)=(r_{ij}(\lambda))$ 是某一随机连续过程的预解式. 状态1是该过程的瞬时状态，因为

$$a_{11}=\lim_{h\downarrow 0}\frac{p_{11}(h)-1}{h}=\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\lambda r_{11}(\lambda)-1]$$

$$=-\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\frac{\sum_{k=2}^{\infty}a_k\left(1-\prod_{j=k}^{\infty}q_j(\lambda)\right)}{\lambda+\sum_{k=2}^{\infty}a_k\left(1-\prod_{j=k}^{\infty}q_j(\lambda)\right)}$$

$$=-\sum_{k=2}^{\infty}a_k=-\infty.$$

例2. 构造只由不规则但非瞬时状态组成的过程. 取直线上全体有理点集R作为状态集，对一切 $r\in R$，设 η_r 为有参数 $1/\gamma_r$ 的指数分布的量，此外，对任意 n

$$\sum_{r<n}\gamma_r<\infty,\qquad 而\ \sum\gamma_r=+\infty.$$

假定诸 η_r 相互独立. 对 $r\in R$，$s\in R$，我们按如下方法确定转移概率 $p_{rs}(t)$：$p_{rr}(t)=\mathbf{P}\{\eta_r>t\}$；$s<r$ 时，$p_{rs}(t)=0$；$s>r$ 时，

$$p_{rs}(t)=\mathbf{P}\left\{\sum_{r\leqslant a<s}\eta_a<t<\sum_{r\leqslant a\leqslant s}\eta_a\right\}.$$

容易证明，函数 $p_{rs}(t)$满足条件 a)与 b)．其 Колмогоров-Chapman 方程可由等式

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{r\leqslant\alpha<s}\eta_\alpha<t+h<\sum_{r\leqslant\alpha\leqslant s}\eta_\alpha\right\}$$
$$=\sum_{r\leqslant\beta\leqslant s}\mathbf{P}\left\{\sum_{r\leqslant\alpha<\beta}\eta_\alpha<t<\sum_{r\leqslant\alpha\leqslant\beta}\eta_\alpha\right\}$$
$$\times\mathbf{P}\left\{\sum_{\beta\leqslant\alpha<s}\eta_\alpha<h<\sum_{\beta\leqslant\alpha\leqslant s}\eta_\alpha\right\}$$

推出，而随机连续性可由关系式

$$\lim_{t\downarrow 0}p_{rr}(t)=\lim_{t\downarrow 0}\mathbf{P}\{\eta_r>t\}=\mathbf{P}\{\eta_r>0\}=1$$

得到．进而还有

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1-p_{rr}(t)}{t}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\mathbf{P}\ \{\eta_r\leqslant t\}=\frac{1}{\gamma_r},$$

当 $r<s$ 时

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{p_{rs}(t)}{t}\leqslant\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\mathbf{P}\left\{\sum_{r\leqslant\alpha<s}\eta_\alpha\leqslant t\right\}=0,$$

这因为 $\sum\limits_{r\leqslant\alpha<s}\eta_\alpha$ 在 0 点的密度等于 0，这样一来，过程的一切状态即使是非瞬时的，也都是不规则的．

例 3． 构造一个所有的状态都是瞬时状态的过程．设 $\mathscr{X}$ 是一切二进位有理点的集合，$\mathscr{X}_m$ 是形如 $\frac{k}{2^m}$，$k=0$，± 1，± 2，$\cdots$，的点的集合．对一切 $\alpha\in\mathscr{X}$，定义数 λ_α，使 $\sum\lambda_\alpha^{-1}<\infty$．我们在 $\mathscr{X}_m$ 上定义过程 $x_m(t)$：它首次离开状态 α 以前的时间有参数为 $2^m\lambda_\alpha$ 的指数分布，离开状态 α 后以概率 $\frac{1}{2}$ 转移到状态 $\alpha\pm\frac{1}{2^m}$ 之一中去．这样，对过程 $x_m(t)$，系数 $a_{\alpha\beta}^{(m)}$ 可如通常的过程的系数 a_{kj} 同样地确定，形如

$$a_{\alpha\alpha}^{(m)}=-2^m\lambda_\alpha,\qquad a^{(m)}{}_{\alpha,\alpha\pm\frac{1}{2^m}}=2^{m-1}\lambda_\alpha,$$

$$a_{\alpha\beta}^{(m)}=0,\ |\alpha-\beta|>\frac{1}{2^m}.$$

由(11)，过程 $x_m(t)$ 的预解式的元 $r_{\alpha\beta}^{(m)}(\lambda)$ 满足方程组

$$\lambda r_{\alpha\beta}^{(m)}(\lambda)=2^{m-1}\lambda_\alpha[r_{\alpha-\frac{1}{2^m},\beta}^{(m)}(\lambda)-2r_{\alpha\beta}^{(m)}(\lambda)+r_{\alpha+\frac{1}{2^m},\beta}^{(m)}(\lambda)]+\delta_{\alpha\beta},\tag{14}$$

从而被唯一确定. 仍设 $\alpha,\beta\in\mathscr{R}_m$，利用(14)可得

$$\lambda r_{\alpha\beta}^{(m+1)}(\lambda)=2^{m-1}\lambda_\alpha[r_{\alpha-\frac{1}{2^m},\beta}^{(m+1)}(\lambda)-2r_{\alpha\beta}^{(m+1)}(\lambda)+r_{\alpha+\frac{1}{2^m},\beta}^{(m+1)}(\lambda)+v_{\alpha\beta}^{(m)}],\tag{15}$$

其中

$$v_{\alpha\beta}^{(m)}=-\frac{\lambda}{2}\left[\frac{1}{\lambda+2^{m+1}\lambda_{\alpha-\frac{1}{2^{m+1}}}}(r_{\alpha-\frac{1}{2^m},\beta}^{(m+1)}(\lambda)+r_{\alpha\beta}^{(m+1)}(\lambda))+\frac{1}{\lambda+2^{m+1}\lambda_{\alpha+\frac{1}{2^{m+1}}}}(r_{\alpha\beta}^{(m+1)}(\lambda)+r_{\alpha+\frac{1}{2m},\beta}^{(m+1)}(\lambda))\right],$$

$$|v_{\alpha\beta}^{(m)}|\leqslant\frac{c}{2^{m+1}}\left(\frac{1}{\lambda_{\alpha-\frac{1}{2^{m+1}}}}+\frac{1}{\lambda_{\alpha+\frac{1}{2^{m+1}}}}\right),$$

这里，c 是常数.

如果对一切 $\alpha\in\mathscr{R}_m$，序列 u_α 满足关系式

$$\lambda u_\alpha=\gamma_\alpha(u_{\alpha-\frac{1}{2^m}}-2u_\alpha+u_{\alpha+\frac{1}{2^m}})+v_\alpha,$$

又序列 u_α，γ_α，v_α 有界，则

$$\sup_\alpha|u_\alpha|\leqslant\frac{1}{\lambda}\sup_\alpha|v_\alpha|.\tag{16}$$

事实上，如 $\sup\limits_\alpha u_\alpha=u$，而 $u-u_\beta<\varepsilon$，那么

$$\lambda u_\beta\leqslant\gamma_\beta(2u-2u_\beta)+v_\beta\leqslant v_\beta+2\varepsilon\gamma_\beta,$$

因此，由 $\varepsilon>0$ 的任意性，$\lambda u\leqslant\sup\limits_\beta v_\beta$.

类似的估计对量 $\sup\limits_\alpha(-u_\alpha)$ 也成立：

$$\lambda\sup_\alpha(-u_\alpha)\leqslant\sup_\alpha(-v_\alpha).$$

由这两个不等式即可导出(16). 从(14)减去(15)并利用估

计式(16)，我们得到

$$\left|r_{\alpha\beta}^{(m)}(\lambda)-r_{\alpha\beta}^{(m+1)}(\lambda)\right|\leqslant\frac{c}{2}\lambda_{\alpha}\left(\frac{1}{\lambda_{\alpha-\frac{1}{2^{m+1}}}}+\frac{1}{\lambda_{\alpha+\frac{1}{2^{m+1}}}}\right).$$

类似地，

$$\left|r_{\alpha\beta}^{(m+1)}(\lambda)-r_{\alpha\beta}^{(m+2)}(\lambda)\right|\leqslant\frac{c}{2}\lambda_{\alpha}\left(\frac{1}{\lambda_{\alpha-\frac{1}{2^{m+2}}}}+\frac{1}{\lambda_{\alpha+\frac{1}{2^{m+2}}}}\right),$$

$$\left|r_{\alpha\beta}^{(m+k-1)}(\lambda)-r_{\alpha\beta}^{(m+k)}(\lambda)\right|\leqslant\frac{c}{2}\lambda_{\alpha}\left(\frac{1}{\lambda_{\alpha-\frac{1}{2^{m+k}}}}+\frac{1}{\lambda_{\alpha+\frac{1}{2^{m+k}}}}\right).$$

所以有

$$\left|r_{\alpha\beta}^{(m)}-r_{\alpha\beta}^{(m+k)}\right|\leqslant\frac{\lambda_{\alpha}c}{2}\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\lambda_{\alpha-\frac{1}{2^{m+i}}}\right)^{-1}+\left(\lambda_{\alpha+\frac{1}{2^{m+i}}}\right)^{-1}\right],$$

并由此知对一切 α, β 存在极限

$$r_{\alpha\beta}(\lambda)=\lim_{m\to\infty}r_{\alpha\beta}^{(m)}(\lambda).$$

因(14)和(15)允许按 β 求和，故根据不等式

$$\sum_{\beta}\left|v_{\alpha\beta}^{(m)}\right|\leqslant\frac{c_1}{2^{m+1}}\left(\frac{1}{\lambda_{\alpha-\frac{1}{2^m}}}+\frac{1}{\lambda_{\alpha+\frac{1}{2^m}}}\right),$$

可证明

$$\sum_{\beta\in\mathscr{X}_m}\left|r_{\alpha\beta}^{(n)}(\lambda)-r_{\alpha\beta}^{(m+k)}(\lambda)\right|$$

$$\leqslant\frac{c_1\lambda_{\alpha}}{2}\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\lambda_{\alpha-\frac{1}{2^{m+i}}}\right)^{-1}+\left(\lambda_{\alpha+\frac{1}{2^{m+i}}}\right)^{-1}\right].$$

因此，级数 $\sum_{\beta}r_{\alpha\beta}^{(m)}(\lambda)$ 关于 m 一致收敛. 最后，由于对一切 α, β 和 n, $\lambda r_{\alpha\beta}^{(n)}(\lambda)\leqslant 1$，有

$$\left|\lambda r_{\alpha\alpha}^{(m)}(\lambda)-\lambda r_{\alpha\alpha}^{(m+1)}(\lambda)\right|\leqslant 2^{m-1}\lambda_{\alpha}\sup_{\beta\in\mathscr{X}_{m+1}}\left|v_{\beta\alpha}^{(m)}\right|$$

$$\leqslant c_2\lambda_{\alpha}\left[\left(\lambda_{\alpha-\frac{1}{2^{m+1}}}\right)^{-1}+\left(\lambda_{\alpha+\frac{1}{2^{m+1}}}\right)^{-1}\right].$$

所以，对一切 $\lambda>0$，一致地有 $\lambda r_{\alpha\alpha}^{(m)}(\lambda)\to\lambda r_{\alpha\alpha}(\lambda)$，又因为

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda r_{\alpha\alpha}^{(m)}(\lambda)=1,$$

故

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda r_{\alpha\alpha}(\lambda)=1.$$

这就是说，引理 2 的条件全部满足，并且以 $r_{\alpha\beta}(\lambda)$ 为元的矩阵 $\mathbf{R}(\lambda)$（我们假定 $\alpha\in\mathscr{X}$ 已排好某一次序）是相空间 $\mathscr{X}$ 中某马尔科夫过程的预解式。

下面指出，以 $\mathbf{R}(\lambda)$ 为预解式的过程的所有状态 α 都是瞬时的。设 $p_{\alpha\beta}(t)$ 为该过程的转移概率。如果

$$a_{\alpha\alpha}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{p_{\alpha\alpha}(t)-1}{t}>-\infty,$$

则由 (2)

$$r_{\alpha\alpha}(\lambda)\geqslant\frac{1}{\lambda-a_{\alpha\alpha}}=\int_0^\infty e^{-\lambda t+a_{\alpha\alpha}t}dt.$$

利用不等式(13)，得估计式

$$r_{\alpha\alpha}^{(m)}(\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda}-\frac{\lambda_\alpha 2^m}{(\lambda+\lambda_\alpha 2^m)^2}.$$

因 $\lambda r_{\alpha\alpha}^{(m)}(\lambda)\to\lambda r_{\alpha\alpha}(\lambda)$ 关于 m 一致地成立，故对任意 $\varepsilon>0$，当 m 充分大时

$$\frac{1}{\lambda-a_{\alpha\alpha}}\leqslant\frac{1+\varepsilon}{\lambda}-\frac{\lambda_\alpha 2^m}{(\lambda+\lambda_\alpha 2^m)^2}.$$

取 $\lambda=\lambda_\alpha 2^m$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_\alpha 2^m-a_{\alpha\alpha}}&\leqslant\frac{1+\varepsilon}{\lambda_\alpha 2^m}-\frac{1}{4}\,\frac{1}{\lambda_\alpha 2^m}\\&=\left(\frac{3}{4}+\varepsilon\right)\frac{1}{\lambda_\alpha 2^m},\end{aligned}$$

亦即

$$\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\lambda_\alpha 2^m\leqslant-\left(\frac{3}{4}+\varepsilon\right)a_{\alpha\alpha},$$

这与 $a_{\alpha\alpha}>-\infty$ 矛盾。过程之状态的瞬时性证完。

规则过程 设相空间 $\mathscr{J}$ 中的过程 $x(t)$ 是局部规则过程。如

前面一样，记一 $a_{ii}=\lambda_i, a_{ik}=\lambda_i\pi_{ik}, k\neq i$. 如$\lambda_i>0$，令 $\pi_{ii}=0$；如 $\lambda_i=0$，则当 $i\neq k$ 时，令 $\pi_{ik}=0$，而 $\pi_{ii}=1$. 设过程是可分的. 此时，过程在每一状态直到离开它之前，都要停留一正时间段. 此外，过程离开状态 i 同时立即落入状态 k 的概率为 π_{ik}. 如状态 i 是吸收的，则过程永远不离开这一状态，这时，我们认为离开该状态的时间等于$+\infty$. 如果把 $\mathscr{I}$ 看成是带有离散拓扑的空间，那么过程就是右连续的、Feller 的，并因此是强马尔科夫的.

设 τ 是首次离开初始状态的时刻. 我们引进时刻 τ_n 的序列：$\tau_1=\tau$，$\tau_n=\theta_{\tau_{n-1}}\tau$，这里 θ_τ 为伴随过程的推移算子（见第二章 §§ 1 和 5）. 这时，τ_2 是过程在离开初始状态（第一状态）后，在所到达的状态上停留的时间，这个状态称为第二状态；τ_3 为过程在第三状态（过程由第二状态转移到此状态）上停留的时间；τ_n 为过程在第 n 个状态（过程由第 $n-1$ 个状态转移到此状态）上停留的时间. 要注意，同一状态可能对应于不同的号码（例如，第一状态可能与第三状态重合）. 用 x_k 表示过程第 k 个状态（显然，它依赖于过程的轨道）. 如 $\tau_k=+\infty$，则当 $j>k$ 时，状态 x_j 不确定. 为使过程总有停留时间和状态的无穷序列，我们约定，当 $\tau_k=+\infty$ 时，对一切 $j>k$，$\tau_j=+\infty$，而 $x_j=x_k$. 显然，如只有 i 是非吸收状态，则

$$\pi_{ij}=\mathbf{P}\{x(\tau)=j\,|\,x(0)=i\}.$$

反之，设 $x(+\infty)=\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=x(0)$，我们有

$$\mathbf{P}\{x(\tau_1)=j\,|\,x(0)=i\}=\delta_{ij}.$$

因此，总可认为

$$\mathbf{P}_i\{x(\tau_1)=j\}=\mathbf{P}\{x(\tau_1)=j\,|\,x(0)=i\}=\pi_{ij}.$$

由强马尔科夫性，当 $\tau_1<\infty$ 时，

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{x(\tau_1+\theta_{\tau_1}\tau_1)=j\,|\,x(\tau_1)=i,\ x(0)=i_0\}\\ =\mathbf{P}_i\{x(\tau_1)=j\}=\pi_{ij}.\end{aligned}\tag{17}$$

如 $\tau_1=+\infty$，则

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{x(\tau_1+\theta_{\tau_1}\tau_1)=j\,|\,x(\tau_1)=x(0)=i\}\\ =\mathbf{P}\{x(+\infty)=j\,|\,x(0)=i\}=\delta_{ij}=\pi_{ij}.\end{aligned}$$

所以,(17)总是成立的. 类似的讨论可知,序列 $x_n = x(\zeta_n)$, 其中 $\zeta_0 = 0$, $\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} \tau_k$,构成以 $\Pi = (\pi_{ij})$ 为转移概率矩阵的齐次马尔科夫链.

称过程为**规则过程**,如果对一切 $i \in \mathscr{J}$, 在每一有限区间上,它以概率 $\mathbf{P}_i = 1$ 仅有有限次转移,亦即对一切 $i \in \mathscr{J}$, 成立

$$\mathbf{P}_i\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \tau_k = +\infty\right\} = 1. \tag{18}$$

在这一小节中,我们将研究保证过程规则性的条件. 为此,求出量 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$ 和 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的联合分布是有益的.

引理 4 对任意 $\lambda > 0$ 和 $\mathscr{J}$ 上有界函数 $f(j)$, 都有

$$\mathbf{E}_i e^{-\lambda\tau_1} f(x(\tau_1)) = \frac{\lambda_i}{\lambda + \lambda_i} \sum_{j \neq i} f_j \pi_{ij}, \tag{19}$$

对局部规则过程成立

证. 为证明(19),只要对在有穷集上不为 0 的 f 证明即可. 如 $\lambda_i = 0$, 则(19)显然. 如 $\lambda_i > 0$,则 $\mathbf{P}_i\{x(\tau_1) = i\} = 0$, 不失一般性,可认为 $f(i) = 0$, 此时

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_i e^{-\lambda\tau_1} f(x(\tau_1)) &= \lim_{h \downarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda kh} \mathbf{E}_i f(x((k+1)h)) \chi\{\tau_1 > kh\} \\
&= \lim_{h \downarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda kh} \mathbf{P}_i\{\tau > kh\} \mathbf{E}_i f(x(h)) \\
&= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathbf{E}_i f(x(h)) \lim_{h \downarrow 0} h \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(\lambda+\lambda_i)kh} \\
&= \frac{1}{\lambda + \lambda_i} \lim_{h \downarrow 0} \sum_{j \neq i} f(j) \frac{p_{ij}(h)}{h} \\
&= \frac{1}{\lambda + \lambda_i} \sum_{j \neq i} f(j) a_{ij} \\
&= \frac{\lambda_i}{\lambda + \lambda_i} \sum_{j \neq i} f(j) \pi_{ij}.
\end{aligned}$$

系 1) 如 $u_k > 0$, 而 $f_k \in \mathscr{C}_f$, 则令 $i = i_0$ 我们有

$$\mathbf{E}_i \prod_{k=1}^{n} e^{-u_k\tau_k} f_k(x_{k+1})$$

$$= \sum_{i_1,\cdots,i_n} \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\lambda_{i_k}}{\lambda_{i_k}+u_{k+1}}\pi_{i_k i_{k+1}} f_k(i_{k+1})\right). \tag{20}$$

为证明 (20) 需利用 (19) 式与关系式

$$\mathbf{E}_i \prod_{k=1}^{n} e^{-u_k\tau_k} f_k(x_{k+1})$$

$$= \mathbf{E}_i e^{-u_1\tau_1} f_1(x(\tau_1)) \mathbf{E}_{x(\tau_1)} \prod_{k=2}^{n} e^{-u_k\tau_{k-1}} f_k(x_k).$$

2) 如 $u_k > 0$，则以概率 $\mathbf{P}_i = 1$ 有

$$\mathbf{E}_i\left(\prod_{k=1}^{n} e^{-u_k\tau_k} \mid x_1 = i_0, \cdots, x_{n+1} = i_n\right)$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{i_k}}{\lambda_{i_k}+u_k}. \tag{21}$$

等式 (21) 可由 (20) 以及x_k构成有转移概率Π的马尔科夫链这一事实得到.

这样一来，如果已知过程的状态序列，则过程在这些状态上停留时间成为独立的，具有参数 λ_{i_k}(它由状态序列确定)的指数分布的量.

定理 3 为使过程是规则过程，必须且只需对一切 $i \in \mathscr{J}$

$$\mathbf{P}_i\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{x_k})^{-1} = +\infty\right\} = 1 \tag{22}$$

$\left(\text{此处，约定 } \frac{1}{0} = +\infty\right)$.

证. 由(21)可知

$$\mathbf{E}_i\left(\prod_{k=1}^{n} e^{-\lambda\tau_k} \mid x_1, \cdots, x_{n+1}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{x_k}}{\lambda_{x_k}+\lambda}.$$

亦即

$$\mathbf{E}_i \exp\left\{-\lambda \sum_{k=1}^{n} \tau_k\right\} = \mathbf{E}_i \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{x_k}}{\lambda_{x_k}+\lambda}$$

与

$$\mathbf{E}_i\exp\left\{-\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k\right\}=\mathbf{E}_i\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{x_k}}{\lambda_{x_k}+\lambda}.$$

进而有

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_i\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k=+\infty\right\}&=1-\lim_{\lambda\to0}\mathbf{E}_i\exp\left\{-\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k\right\}\\&=1-\lim_{\lambda\to0}\mathbf{E}_i\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{x_k}}{\lambda_{x_k}+\lambda}\\&=1-\mathbf{E}_i\lim_{\lambda\to0}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{x_k}}{\lambda_{x_k}+\lambda}\\&=1-\mathbf{P}_i\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{x_k}}<+\infty\right\}\\&=\mathbf{P}_i\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{x_k}}=+\infty\right\},\end{aligned}$$

这是由于 $b_k>0$ 时

$$\lim_{\lambda\downarrow0}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{b_k+\lambda}=\lim_{\lambda\downarrow0}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda}{b_k}\right)^{-1}=\begin{cases}1,\ 如\sum\dfrac{1}{b_k}<\infty,\\0,\ 如\sum\dfrac{1}{b_k}=+\infty.\end{cases}$$

定理于是证完。

系 由已证的定理，可推出过程规则性的两个简单条件。

1. 如 λ_i 有界，则过程是规则的。

这因为 $\lambda_i\leqslant c$ 时，

$$\sum_{1}^{n}\frac{1}{\lambda_{x_k}}\geqslant\frac{n}{c}$$

从而条件(22)满足。

2. 如马尔科夫链是返回的，则过程是规则的。

事实上，这时级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{x_k})^{-1}$$

以概率 $\mathbf{P}_i=1$ 含有无穷多个相同的正数项，因此是发散的.

过程规则性的另一个充要条件可用某线性方程组的解的唯一性来描述.

定理 4 为使局部规则过程是规则过程的充要条件是对某 $\lambda>0$，关于 φ_i 的方程组

$$\lambda_i\sum_j \pi_{ij}\varphi_j=(\lambda_i+\lambda)\varphi_i,\quad i\in\mathscr{J},\tag{23}$$

有唯一有界解 $\varphi_i=0,\ i\in\mathscr{J}$.

证. 如过程是不规则的，则对一切 $\lambda>0$，函数

$$\mathbf{E}_i\exp\left\{-\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k\right\}$$

有界，且不恒等于 0 . 令

$$\varphi_i=\mathbf{E}_i\exp\left\{-\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k\right\},$$

可得

$$\begin{aligned}\varphi_i&=\mathbf{E}_ie^{-\lambda\tau_1}\mathbf{E}_i\left(\exp\left\{-\lambda\sum_{k=2}^{\infty}\tau_k\right\}\Big|\mathscr{N}_{\tau_1}\right)\\&=\mathbf{E}_ie^{-\lambda\tau_1}\,\mathbf{E}_{x(\tau_1)}\exp\left\{-\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k\right\}\\&=\mathbf{E}_ie^{-\lambda\tau_1}\varphi_{x(\tau_1)}=\frac{\lambda_i}{\lambda+\lambda_i}\sum\pi_{ij}\varphi_j,\end{aligned}$$

于是，φ_i 是满足(23)的有界但并不恒等于 0 的序列.

现设 (23) 有异于 0 的有界解. 这时

$$\varphi_i=\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\lambda}\sum\pi_{ij}\varphi_j=\mathbf{E}_ie^{-\lambda\tau_1}\varphi_{x(\tau_1)}.$$

由此不难得到，对任意 n

$$\varphi_i=\mathbf{E}_i\exp\left\{-\lambda\sum_{k=1}^{n}\tau_k\right\}\varphi_{x\left(\sum_{k=1}^{n}\tau_k\right)}.$$

因此有

$$|\varphi_i| \leqslant \mathbf{E}_i \exp\left\{-\lambda \sum_{k=1}^{n} \tau_k\right\} \|\varphi\|$$

或

$$\mathbf{E}_i \exp\left\{-\lambda \sum_{k=1}^{n} \tau_k\right\} \geqslant \frac{|\varphi_i|}{\|\varphi\|}.$$

设$|\varphi_i| > 0$. 令$n \to \infty$, 取极限,可得

$$\mathbf{P}_i\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \tau_k = +\infty\right\} < 1,$$

即过程是不规则的. 这就证明了(23)具有非0解是过程不规则的充要条件,因此,不存在这样的解是过程规则的充要条件. 定理证完.

注. 由定理4可推出,过程的规则性的必要条件是 Колмогоров 向后方程组的解的唯一性. 事实上,如存在两个解 $p_{ij}(t)$ 和 $\bar{p}_{ij}(t)$, 那么设

$$\varphi_i = \int_0^\infty [p_{ij}(t) - \bar{p}_{ij}(t)] e^{-\lambda t} dt,$$

就有

$$\lambda \varphi_i = \sum a_{ik} \varphi_k = -\lambda_i \varphi_i + \lambda_i \sum \pi_{ik} \varphi_k,$$

由此可知, φ_i 满足方程组(23). 实际上, Колмогоров 向后方程组的解的唯一性也是过程规则性的充分条件, 这可由以下一些结果得到. 下面将用给定的特征算子来描述过程.

设 Π_λ 为元 $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda + \lambda_i} \pi_{ij}\right)$ 组成之矩阵. 我们将把此矩阵看成为 $\mathscr{C}_f$ 上的算子. 此时,对一切 $f \in \mathscr{C}_f$

$$\mathbf{E}_i e^{-\lambda \tau_1} f(x(\tau_1)) = \frac{\lambda_i}{\lambda + \lambda_i} \sum \pi_{ij} f(j) = \Pi_\lambda f(i).$$

由此可知,对一切 $f \in \mathscr{C}_f$

$$\mathbf{E}_i \exp\left\{-\lambda \sum_1^n \tau_k\right\} f\left(x\left(\sum_1^n \tau_k\right)\right) = \Pi_\lambda^n f(i),$$

其中 Π_λ^n 表示算子 Π_λ 的 n 次幂.

用算子 Π_λ 容易表示出规则过程的预解式. 对一切函数 $f\in\mathscr{C}_\mathscr{J}$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_\lambda f(i) &= \mathbf{E}_i\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(x_t)dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty \mathbf{E}_i\int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} e^{-\lambda t}dt f(x_{\zeta_k}) \\ &= \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^\infty \mathbf{E}_i e^{-\lambda\zeta_k}f(x_{\zeta_k})\mathbf{E}_{x_{\zeta_k}}[1-e^{-\lambda\tau_1}] \\ &= \sum_{k=0}^\infty \Pi_\lambda^k(\Lambda+\lambda\mathbf{I})^{-1}f(i),\end{aligned}$$

其中 Λ 是 $\mathscr{C}_\mathscr{J}$ 上的算子,它由下式定义:

$$\Lambda f(i)=\lambda_i f(i),$$

即 Λ 是具有对角矩阵 $(\lambda_i\delta_{ij})$ 的算子,而 $\mathbf{I}f=f$. 所以,

$$\mathbf{R}_\lambda=\sum_{k=0}^\infty \Pi_\lambda^k(\Lambda+\lambda\mathbf{I})^{-1}.$$

条件

$$\lim_{n\to\infty}\Pi_\lambda^n 1(i)=0$$

显然是过程的规则性的充要条件.

现求规则过程的生成算子. 这里我们将研究弱生成算子: 算子$\mathbf{A}$的定义域包含一切函数 $f\in\mathscr{C}_\mathscr{J}$, 对这些函数, 表达式

$$\frac{1}{t}[\mathbf{T}_t f(i)-f(i)]=\frac{1}{t}\left[\sum_j p_{ij}(t)f(j)-f(i)\right]$$

有界,并对一切 $i\in\mathscr{J}$, 存在极限

$$\mathbf{A}f(i)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}[\mathbf{T}_t f(i)-f(i)]$$

注意到对局部规则过程而言,对 $f\in\mathscr{C}_\mathscr{J}$, 特征算子

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}f(i) &= \frac{\mathbf{E}_i f(x_{\tau_1})-f(i)}{\mathbf{E}_i\tau_1}=\lambda_i\left[\sum_j \pi_{ij}f(j)-f(i)\right] \\ &= \sum_j a_{ij}f(j)\end{aligned}$$

是确定的(这里 τ_1 是首次离开初始状态的时刻). $\mathfrak{A}f(i)$ 未必是有界函数,令 $\mathscr{D}_{\mathfrak{A}}$ 表示使 $\mathfrak{A}f\in\mathscr{C}_f$ 的 $f\in\mathscr{C}_f$ 的集. 由特征算子的一般性质可推出 $\mathscr{D}_{\mathfrak{A}}\supset\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$ 并且在 $\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$ 上 $\mathfrak{A}=\mathbf{A}$.

定理 5 对规则过程, $\mathscr{D}_{\mathfrak{A}}=\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$, 且在 $\mathscr{D}_{\mathfrak{A}}$ 上 $\mathfrak{A}=\mathbf{A}$.

证. 我们指出,对一切 $f\in\mathscr{D}_{\mathfrak{A}}$ 成立关系式

$$\mathbf{T}_t f(i)-f(i)=\int_0^t \mathbf{T}_s\mathfrak{A}f(i)ds. \tag{24}$$

为此,我们考虑 (24) 右边的 Laplace 变换:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t \mathbf{T}_s\mathfrak{A}f(i)ds&=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{T}_t\mathfrak{A}f(i)dt\\&=\frac{1}{\lambda}\mathbf{R}(\lambda)\mathfrak{A}f(i)\\&=\frac{1}{\lambda}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n \Pi_\lambda^k(\Lambda+\mathbf{I})^{-1}\mathfrak{A}f(i).\end{aligned}$$

因为

$$\Pi_\lambda=\Lambda(\Lambda+\lambda\mathbf{I})^{-1}\Pi,\qquad \mathfrak{A}=\Lambda(\Pi-\mathbf{I}),$$

其中, $\mathscr{C}_f$ 上算子 Π 由下式确定

$$\Pi f(i)=\sum_j \pi_{ij}f(j),$$

故

$$\begin{aligned}&\Pi_\lambda^k(\Lambda+\lambda\mathbf{I})^{-1}\Lambda(\Pi-\mathbf{I})\\&\qquad=\Pi_\lambda^k(\Lambda+\lambda\mathbf{I})^{-1}\Lambda\Pi-\Pi_\lambda^k(\Lambda+\lambda\mathbf{I})^{-1}\Lambda\\&\qquad=\Pi_\lambda^{k+1}-\Pi_\lambda^k(\Lambda+\lambda\mathbf{I})^{-1}(\Lambda+\lambda\mathbf{I}-\lambda\mathbf{I})\\&\qquad=\Pi_\lambda^{k+1}-\Pi_\lambda^k+\lambda\Pi_\lambda^n(\Lambda+\lambda\mathbf{I})^{-1}.\end{aligned}$$

因此,对一切 $f\in\mathscr{D}_{\mathfrak{A}}$ 成立等式

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\mathbf{R}_\lambda\mathfrak{A}f(i)&=\frac{1}{\lambda}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n[\Pi_\lambda^{k+1}-\Pi_\lambda^k+\lambda\Pi_\lambda^k(\Lambda+\lambda\mathbf{I})^{-1}]f(i)\\&=\frac{1}{\lambda}\lim_{n\to\infty}\Big(\lambda\sum_{k=0}^n\Pi_\lambda^k(\Lambda+\lambda\mathbf{I})^{-1}f(i)-f(i)\\&\qquad+\Pi_\lambda^{n+1}f(i)\Big)=\mathbf{R}_\lambda f(i)-\frac{1}{\lambda}f(i),\end{aligned}$$

这因为由过程的规则性，

$$\lim_{n\to\infty}\Pi_\lambda^n f(i)=0 \qquad (|\Pi_\lambda^{(n)} f|\leqslant\|f\|\Pi_\lambda^n 1).$$

然而

$$\mathbf{R}_\lambda f(i)-\frac{1}{\lambda}f(i)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}[\mathbf{T}_t f(i)-f(i)]\,dt.$$

可见，(24) 式右边和左边的 Laplace 变换相合，又由于 (24) 式右边关于 t 连续，而左边右连续，于是 (24) 式成立.

因 $\lim\limits_{t\downarrow 0}\mathbf{T}_t\mathfrak{A}f(i)=\mathfrak{A}f(i)$ 及 $|\mathbf{T}_t\mathfrak{A}f|\leqslant\|\mathfrak{A}f\|$，故由 (24) 可推出，对一切 $f\in\mathscr{D}_\mathfrak{A}$

$$\left|\frac{\mathbf{T}_t f(i)-f(i)}{t}\right|\leqslant\|\mathfrak{A}f\|$$

及

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{\mathbf{T}_t f(i)-f(i)}{t}=\mathfrak{A}f(i).$$

定理证毕.

系 如 $f\in\mathscr{D}_\mathfrak{A}$，则 $\mathbf{T}_t f$ 关于 t 连续，且满足微分方程

$$\frac{d}{dt}\mathbf{T}_t f=\mathbf{T}_t\mathfrak{A}f$$

(这可由关系式 (24) 推出).

特别地，如函数 $\delta_i(j)=\delta_{ij}$ 属于 $\mathscr{D}_\mathfrak{A}$，即

$$\mathfrak{A}\delta_i(j)=\sum a_{jk}\delta_i(k)=a_{ji}$$

对 i 有界，则

$$\frac{d}{dt}\mathbf{T}_t\delta_i(j)=T_t\mathfrak{A}\delta_i(j) \text{ 或 } \frac{d}{dt}p_{ji}(t)=\sum_k p_{jk}(t)a_{ki},$$

即 $p_{ji}(t)$，$j\in\mathscr{J}$，满足 Колмогоров 向前方程组.

这说明，对规则过程上面最后一式总是成立的.

定理 6 如过程是规则过程，则其转移概率满足 Колмогоров 向前方程组.

证. 由 Колмогоров 向后方程组可知 $\frac{d}{dt}p_{ki}(t)$ 存在. 此外

$$a_{ii}p_{ik}(t) \leqslant \frac{d}{dt} p_{ik}(t) \leqslant \sum_{j\neq i} a_{ij}p_{ik}(t),$$

即 $\left|\frac{d}{dt} p_{ik}(t)\right| \leqslant |a_{ii}|$. 对关系式

$$\frac{p_{ki}(t+h) - p_{ki}(t)}{h} + \frac{p_{ki}(t)[1 - p_{ii}(h)]}{h}$$
$$= \sum_{j\neq k} p_{kj}(t) \frac{p_{ji}(h)}{h},$$

令 $h\downarrow 0$ 取极限，可得

$$\frac{d}{dt} p_{ki}(t) \geqslant \sum_{j} p_{kj}(t)a_{ji}. \tag{25}$$

特别地，由不等式 (25) 可知，右边的级数收敛，这因为它所有的项除一项外，都是非负的. 我们要证明 (25) 只能是等式. 对 (25) 从 0 到 t 积分之，可得

$$p_{ki}(t) - \delta_{ki} \geqslant \int_0^t \sum_j p_{kj}(s)a_{ji}ds. \tag{26}$$

如果我们能证明 (26) 只能是等式，那么就证明了 (25) 也只能是等式. 由于 (26) 两边都是 t 的连续函数，故 (26) 两边当且仅当它们的 Laplace 变换相等时方能相等. (26) 两边取 Laplace 变换可得

$$r_{ki}(\lambda) - \frac{\delta_{ki}}{\lambda} \geqslant \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t \sum_j p_{kj}(s)a_{ji}ds\,dt$$
$$= \frac{1}{\lambda}\sum_j r_{kj}(\lambda)a_{ji} \tag{27}$$

(级数可逐项积分系由其所有项除一项外均非负得到).

设 $r_{kj}^{(n)}(\lambda)$ 是矩阵 $\sum_{l=0}^{n} \Pi_\lambda^l(\lambda \mathbf{I} + \Lambda)^{-1}$ 的元. 于是，当 $n\to\infty$ 时，$r_{kj}^{(n)}(\lambda)\uparrow r_{kj}(\lambda)$. 因此

$$\sum_{j\neq i} r_{kj}(\lambda)a_{ji} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j\neq i} r_{kj}^{(n)}(\lambda)a_{ji},$$

而

$$r_{ki}(\lambda)a_{ii} = \lim_{n\to\infty} r_{ki}^{(n)}(\lambda)a_{ii},$$

所以

$$\sum_j r_{kj}(\lambda)a_{ji} = \lim_{n\to\infty}\sum_j r_{kj}^{(n)}(\lambda)a_{ji}.$$

注意到 $\sum_j r_{kj}^{(n)}(\lambda)a_{ji}$ 是算子

$$\sum_{l=0}^{n} \Pi_\lambda^l(\lambda\mathbf{I}+\Lambda)^{-1}\mathfrak{A} = \sum_{l=0}^{n} \Pi_\lambda^l(\lambda\mathbf{I}+\Lambda)^{-1}\Lambda(\Pi-\mathbf{I})$$

$$= \lambda\sum_{l=0}^{n} \Pi_\lambda^l(\lambda\mathbf{I}+\Lambda)^{-1} + \Pi_\lambda^{n+1} - \mathbf{I}$$

之矩阵的元. 既然当 $n\to\infty$时, 由规则性, $\Pi_\lambda^{n+1}1\to 0$, 故矩阵 Π_λ^{n+1} 的所有的元当 $n\to\infty$ 时都趋于 0 ,从而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{l=0}^{n} \Pi_\lambda^l(\lambda\mathbf{I}+\Lambda)^{-1} = \mathbf{R}_\lambda.$$

此即

$$\sum_j r_{kj}(\lambda)a_{ji} = \lambda r_{ki}(\lambda) - \delta_{ki}.$$

故 (27) 中等式成立. 定理证完.

我们再指出一过程规则性的条件.

定理 7 使局部规则过程有规则性的充分条件是其转移概率 $p_{ki}(t)$ 对一切 $i\in\mathscr{I}$ 和 $t>0$, 满足条件

$$\lim_{k\to\infty} p_{ki}(t) = 0.$$

证. 我们把 $\mathscr{I}$ 看作是带有离散拓扑的局部紧空间. 此时, $\mathscr{I}$ 中的紧集只有有穷集. 因此,对一切紧集 K

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i\in K} p_{ki}(t) = 0.$$

即过程的转移概率按第二章§ 4 的意义是规则的. 由此可知,过程无第二类间断, 即在每一有限区间上只有有限次跳跃 (见第二章§ 4 定理 2 注). 定理证完.

在无穷中断的过程 考虑以 $\mathfrak{A}$ 为特征算子的局部规则过程. 如果 τ_1, τ_2, $\cdots$分别为过程在第一、第二等等状态上的停留时间,

则我们认为过程将在时刻 $\zeta=\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k$ 中断．这样的过程将由特征算子唯一确定．我们来求此过程的预解式．与前一段一样，先在 $\mathscr{C}_{\mathscr{J}}$ 上定义算子 Π_λ:

$$\Pi_\lambda f(i)=\mathbf{E}_i e^{-\lambda\tau_1}f(x(\tau_1))=\frac{\lambda_i}{\lambda+\lambda_i}\sum_j \pi_{ij}f(j).$$

仍同前完全一样，有

$$\mathbf{R}_\lambda f(i)=\sum_{k=0}^{\infty}\Pi_\lambda^k(\Lambda+\lambda\mathbf{I})^{-1}f(i).$$

注意，对不规则过程，当 $k\to\infty$ 时 $\Pi_\lambda^k 1$ 已不趋于 0．

中断过程的转移概率也可相当简单地求出．设 $\{\xi_i, i\in\mathscr{J}\}$ 为独立随机变量集，其中每一 ξ_i 都有参数为 1 的指数分布．此时

$$p_{ij}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}q_{ij}^{(n)}(t),$$

这里

$$q_{ij}^{(0)}(t)=\delta_{ij}e^{-\lambda_i t},$$

$$q_{ij}^{(n)}(t)=\sum_{i_1,\cdots,i_{n-1}}\pi_{ii_1}\cdots\pi_{i_{n-1}j}\mathbf{P}\left\{\frac{\xi_i}{\lambda_i}+\cdots+\frac{\xi_{i_{n-1}}}{\lambda_{i_{n-1}}}<t<\frac{\xi_i}{\lambda_i}+\cdots+\frac{\xi_{i_n}}{\lambda_{i_n}}\right\}.$$

由于过程是局部规则的，故转移概率满足 Колмогоров 向后方程组．我们研究过程的生成算子的形式．因特征算子已知，故只需求出生成算子的定义域 $\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$.

设 $\mathbf{T}_t$ 是 $\mathscr{C}_{\mathscr{J}}$ 上对应于此过程的算子半群．如 $f\in\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$，则

$$\mathbf{T}_t f-f=\int_0^t \mathbf{T}_s\mathfrak{A}f\,ds. \tag{28}$$

等式两边换成其 Laplace 变换，我们有

$$\mathbf{R}_\lambda f-\frac{1}{\lambda}f=\frac{1}{\lambda}\mathbf{R}_\lambda\mathfrak{A}f. \tag{29}$$

因为

$$\mathbf{R}_\lambda \mathfrak{A} f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \Pi_\lambda^k (\Lambda + \lambda\mathbf{I})^{-1} \Lambda (\Pi - \mathbf{I}) f$$
$$= \lambda \mathbf{R}_\lambda f - f + \lim_{n\to\infty} \Pi_\lambda^{n+1} f$$

(最后的极限的存在性由极限$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \Pi_\lambda^k (\Lambda + \lambda\mathbf{I})^{-1}$ 的存在性推出)，故 (29) 成立并与此等价地，(28) 成立的充要条件为，对一切 $i \in \mathscr{J}$

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_\lambda^n f(i) = 0. \tag{30}$$

可见，$\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$ 由所有满足 (30) 的 $f \in \mathscr{D}_{\mathfrak{A}}$ 组成。

我们指出，关系式 (30) 只要对一个 $\lambda > 0$ 成立，就可推出对一切 $\lambda > 0$ 都成立. 事实上，如 (30) 对某 $\lambda > 0$ 满足，则对此λ，(29)也满足. 以 $\mathbf{R}_\mu$ 作用于 (29) 后，再利用预解方程，可得

$$\frac{1}{\mu-\lambda}[\mathbf{R}_\lambda - \mathbf{R}_\mu] f - \frac{1}{\lambda} \mathbf{R}_\mu f = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\mu-\lambda} [\mathbf{R}_\lambda - \mathbf{R}_\mu] \mathfrak{A} f.$$

因为由 (29) 有

$$\frac{1}{\mu-\lambda} \mathbf{R}_\lambda f - \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\mu-\lambda} \mathbf{R}_\lambda \mathfrak{A} f = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\mu-\lambda} f,$$

故

$$\frac{1}{\lambda-\mu} \mathbf{R}_\mu f = \frac{1}{\lambda} \mathbf{R}_\mu f + \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\mu-\lambda} f + \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\lambda-\mu} \mathbf{R}_\mu \mathfrak{A} f,$$

由此可见，$\mu \mathbf{R}_\mu f = f + \mathbf{R}_\mu \mathfrak{A} f$ 对一切 $\mu > 0$ 成立. 此即 $f \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}}$ 且 (30) 对一切 $\lambda > 0$ 成立.

最后，我们建立转移概率满足 Колмогоров 向前方程组的条件. 重温定理 6 的讨论可知，为满足 Колмогоров 向前方程组的充要条件是对 $\mathscr{J}$ 中的一切 k 和 i，(27) 的不等式成为等式. 而后者当且仅当算子 Π_λ^n 的矩阵的所有元当 $n \to \infty$ 时趋于 0 方能成立(见定理 6 证明). 这一条件可写成下面形式. 设 $\delta_i(\cdot)$ 是 $\mathscr{C}_{\mathscr{J}}$ 中的函数，$\delta_i(k) = \delta_{ik}$. 为满足 Колмогоров 向前方程组的充要条

件是对一切 $i\in\mathscr{J}$ 和 $k\in\mathscr{J}$

$$\lim_{n\to\infty}\Pi_\lambda^n\delta_i(k)=0. \tag{31}$$

我们证明 (31) 总是满足的．设

$$\eta_n=\exp\left\{-\lambda\sum_1^n\tau_k\right\}\delta_i\left(x\left(\sum_1^n\tau_k\right)\right).$$

显然，$0\leqslant\eta_n\leqslant1$ 且 $\mathbf{E}_k\eta_n=\Pi_\lambda^n\delta_i(k)$．因此，为证 (31) 只要证明对任意 $k\in\mathscr{J}$ 以概率 $\mathbf{P}_k=1$ 有 $\eta_n\to0$． 为证此，只要注意到或者从某 n 开始

$$\delta_i\left(x\left(\sum_1^n\tau_k\right)\right)=0,$$

或者 $x\left(\sum_1^n\tau_k\right)$ 无穷次取值 i，而此时级数 $\sum_1^\infty\tau_k$ 包含无穷多个异于 0 的独立同分布的量，并因此它的和等于 $+\infty$．这样一来就证明了

定理 8 在无穷中断的局部规则过程的转移概率满足 Колмогоров 向后与向前方程组．

可以指出，$\mathscr{C}_f$ 中满足

$$\Pi_\lambda f(i)=f(i) \tag{32}$$

的函数 f 是所论过程的有界 λ 调和函数． 事实上，由关系式(32)可推出随机变量序列

$$\eta_n=\exp\left\{-\lambda\sum_{k=1}^n\tau_k\right\}f\left(x\left(\sum_{k=1}^n\tau_k\right)\right)$$

构成有界鞅，亦即对一切 $i\in\mathscr{J}$，以概率 $\mathbf{P}_i=1$ 存在极限

$$\eta=\lim_{n\to\infty}\eta_n.$$

容易证明，对一切马尔科夫时间 $\tau<\zeta=\sum_1^\infty\tau_k$，关系式

$$\theta_\tau\,\eta=e^{\lambda\tau}\eta$$

满足．此外，$f(i)=\mathbf{E}_i\eta$． 因此

$$\mathbf{E}_ie^{-\lambda\tau}f(x_\tau)=\mathbf{E}_ie^{-\lambda\tau}\mathbf{E}_{x_\tau}\eta=\mathbf{E}_ie^{-\lambda\tau}\theta_\tau\eta=\mathbf{E}_i\eta=f(i).$$

由于 $\Pi_\lambda 1 < 1$，且对 $f \geqslant 0$，$\Pi_\lambda f \geqslant 0$，故 $\Pi_\lambda^n 1$ 构成 $n \to \infty$ 时的单调下降的函数列．因此存在极限

$$\lim_{n \to \infty} \Pi_\lambda^n 1 = \varphi_\lambda.$$

φ_λ 是有界的 λ 调和函数．对一切 λ 调和函数 f

$$|f| = |\Pi_\lambda^n f| \leqslant \|f\| \Pi_\lambda^n 1.$$

令 $n \to \infty$ 取极限，可得

$$|f| \leqslant \|f\| \varphi_\lambda.$$

由此可见如 $\varphi_\lambda = 0$，已给过程就不存在有界 λ 调和函数．

指出下面事实是有用的．由关系式

$$\begin{aligned} \Pi_\lambda^n 1(i) &= \mathbf{E}_i \exp\left\{-\lambda \sum_1^n \tau_k\right\} \\ &\leqslant \left(\mathbf{E}_i \exp\left\{-\lambda s \sum_1^n \tau_k\right\}\right)^{1/s} \\ &= (\Pi_{\lambda s}^n 1(i))^{1/s} \end{aligned}$$

与

$$\Pi_\lambda^n 1(i) \leqslant e^{-N\lambda} + e^{N(\mu-\lambda)} \Pi_\mu^n 1(i) \qquad (\mu > \lambda)$$

（最后一式由不等式 $e^{-\lambda x} \leqslant e^{N(\mu-\lambda)} e^{-\mu x} + e^{-N\lambda}$ 推出），为使等式 $\lim_{n \to \infty} \Pi_\lambda^n 1(i) = 0$ 对一切 $\lambda > 0$ 成立，只要它对某一个 $\lambda > 0$ 成立即可．

不中断过程 在第二章§ 5 中已构造了所有的不中断过程，它具有已给的满足某些附加条件（Feller 性，一致局部有界性及局部一致随机连续性）的特征算子．因为 $\mathscr{I}$ 可看作为带有离散拓扑的局部列紧空间，所以第二章§5 中的构造方法也可用于可列状态过程．因为对离散拓扑而言只有有限集是 $\mathscr{I}$ 中的紧集，而且 $\mathscr{I}$ 上一切有界函数都是连续的，故一切局部规则过程都满足第二章§ 5 中引进的 Feller 性条件、一致局部有界条件、局部一致随机连续条件及从无穷远规则可回条件．这样一来，第二章§ 5 中《不中断过程》那一小节中之构造方法完全适用于我们的情况，只不过这里稍微简单一些．

设 $x(t)$ 是 $\mathscr{J}$ 上不中断齐次局部规则马尔科夫过程. 假定它是强马尔科夫的和右连续的. 我们注意,如过程 $x(t)$ 是可分的和强马尔科夫的;那么它(在局部规则性条件下)就是右连续的. 这是因为 1) 可分过程可在每一状态上停留一段正的时间, 2) 对每一马尔科夫时间 τ, $x(\tau)$ 有定义,并且对某 $\varepsilon > 0$, 当 $s < \varepsilon$ 时,有 $x(\tau + s) = x(\tau)$. 我们引进时刻 ξ_α 的超限序列,这里, ξ_α 是过程由一个状态转移到另一状态的时刻, 它由以下方式确定: 如 α 是第一类超限序数,则

$$\xi_\alpha = \xi_{\alpha-1} + \theta_{\xi_{\alpha-1}}\xi_1,$$

其中 ξ_1 是首次离开初始状态的时刻. 如 α 是第二类超限序数, 则

$$\xi_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \xi_\beta.$$

过程 $x(t)$ 在每一区间 $[\xi_\alpha, \xi_{\alpha+1})$ 上都是连续的(常数),并因此是右连续的: 如 $t_n \downarrow t_0$, $t_0 \in [\xi_\alpha, \xi_{\alpha+1})$, 则由某 n 开始, $x(t_n) = x(t_0)$.

我们按下面方式引进马尔科夫时间 ζ^α 的超限链:

$$\zeta^0 = \sum_1^\infty \tau_k$$

(量 τ_k 即前面引进的);如 α 为第一类序数,则

$$\zeta^\alpha = \sup_n \zeta_n^{\alpha-1},\ \zeta_1^{\alpha-1} = \zeta^{\alpha-1},\ \zeta_n^{\alpha-1} = \zeta^{\alpha-1} + \theta_{\zeta^{\alpha-1}}\zeta_{n-1}^{\alpha-1} \quad (n > 1),$$

如 α 为第二类序数,则 $\zeta^\alpha = \sup\limits_{\beta<\alpha} \zeta^\beta$. 设对 $\lambda > 0$

$$\Gamma_\lambda^\alpha f(k) = \mathbf{E}_k e^{-\lambda\zeta^\alpha} f(x(\zeta^\alpha)), \tag{33}$$

Γ_λ^α 是 $\mathscr{C}_\mathscr{J}$ 上的算子;用 $\gamma_{ki}^\alpha(\lambda)$ 表示该算子矩阵的元:

$$\Gamma_\lambda^\alpha f(k) = \sum_{i\in\mathscr{J}} \gamma_{ki}^\alpha(\lambda) f(i).$$

与第二章 § 5 的推导一样,算子 Γ_λ^α (或矩阵 $(\gamma_{ki}^\alpha(\lambda))$) 满足下列条件.

1. $0 \leqslant \gamma_{ki}^\alpha(\lambda) \leqslant 1$ 且对一切 $k \in \mathscr{J}$

$$\sum_{i\in\mathscr{J}} \gamma_{ki}^\alpha(\lambda) = \mathbf{E}_k e^{-\lambda\zeta^\alpha} < 1.$$

2. 当 $\beta < \alpha$ 时, $\Gamma_\lambda^\beta \Gamma_\lambda^\alpha = \Gamma_\lambda^\alpha$, 即

$$\sum_{i\in \mathscr{J}} \gamma_{ki}^{\beta}(\lambda)\gamma_{ij}^{\alpha}(\lambda) = \gamma_{kj}^{\alpha}(\lambda).$$

3. 对一切 $i\in \mathscr{J}$, $\gamma_{ki}^{\alpha}(\lambda)$ 作为 k 的函数是 λ 调和函数.

4. 如 α 是第一类序数,则

$$\Gamma_\lambda^\alpha 1 = \lim_{n\to\infty}(\Gamma_\lambda^{\alpha-1})^n 1, \qquad \lim_{n\to\infty}(\Gamma_\lambda^{\alpha-1})^n\Gamma_\mu^\alpha = \Gamma_\lambda^\alpha;$$

如 α 是第二类序数,则

$$\Gamma_\lambda^\alpha 1 = \inf_{\beta<\alpha}\Gamma_\lambda^\beta 1$$

且对 $f\geqslant 0, f\in \mathscr{C}_{\mathscr{J}}$,

$$\inf_{\beta<\alpha}\Gamma_\lambda^\beta\Gamma_\mu^\alpha f = \Gamma_\lambda^\alpha f.$$

5. 设

$$\mathbf{R}_\lambda^0 f(k) = \mathbf{E}_k\int_0^{\zeta^0} e^{-\lambda t}f(x_t)\,dt,$$

于是 $\Gamma_\lambda^0 1 = 1-\lambda\mathbf{R}_\lambda^0 1$, 并且当 $\lambda>0$, $\mu>0$ 时

$$\Gamma_\lambda^0-\Gamma_\mu^0 = (\mu-\lambda)\mathbf{R}_\lambda^0\Gamma_\mu^0.$$

与第二章§5 定理 6 的推导一样,如果 $\mathfrak{A}$ 是在无穷中断的过程的特征算子,而且定义在 $\mathscr{C}_{\mathscr{J}}$ 上的算子族 Γ_λ^α 满足条件 1—5, 那么存在唯一(在随机等价意义下)过程 $x(t)$, 它以 $\mathfrak{A}$ 为特征算子,并对一切 α 满足关系式 (33).

注. 假定对某 $\lambda>0$ 过程的有界 λ 调和函数的全体构成的集 H_λ 有有穷维数 m. 此时必有 $\Gamma_\lambda^m=0$. 事实上, 作为算子 Γ_λ^k 值域的集 H_λ^k 是 H_λ 的子空间, 并且 $H_\lambda^k\supset H_\lambda^{k+1}$、因 $\Gamma_\lambda^k f=f, f\in H_\lambda^{k+1}$, 而且当 $\Gamma_\lambda^k 1\neq 0$ 时,假如 $\Gamma_\lambda^k 1$ 对一个 i 满足不等式

$$(\Gamma_\lambda^k)^2 1(i) < \Gamma_\lambda^k 1(i),$$

则 $\Gamma_\lambda^k 1\bar{\in} H_\lambda^{k+1}$. 可见,如 H_λ^k 不是由一个点 0 组成的,那么 H_λ^{k+1} 的维数必小于 H_λ^k 的维数,因此,H_λ^m 可以仅由点 0 组成.

§3. 半马尔科夫过程

半马尔科夫过程的构造性定义 设 $\mathscr{X}$ 为任意空间, $\mathfrak{B}$ 为其子集的某 σ 代数,它含有一切单点集. 又设在 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 中已给强

马尔科夫过程 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$，其样本函数在 $\mathscr{X}$ 的离散拓扑中右连续，离散拓扑是由距离

$$r(x, y) = \begin{cases} 0; & x = y, \\ 1; & x \neq y, \end{cases}$$

产生的.

过程在每一状态中停留某一段正的时间，而且如 τ 是首次离开初始状态的时刻，则 τ 有参数为 $\lambda(x)$ 的指数分布，$\lambda(x)$ 自然依赖于初始状态.

记

$$\pi(x, B) = \mathbf{P}_x\{x(\tau) \in B\}, \quad B \in \mathfrak{B}. \tag{1}$$

过程 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$ 的特征算子对所有 $\mathfrak{B}$ 可测有界函数 $f(x)$ 由关系式

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}f(x) &= \frac{\mathbf{E}_x f(x_\tau) - f(x)}{\mathbf{E}_x \tau} \\ &= \lambda(x) \left(\int f(y) \pi(x, dy) - f(x) \right) \end{aligned} \tag{2}$$

确定.

过程直到无穷多个跳跃点的第一个聚点以前可由下面方法描述：设

$$x_0 = x(0), \; x_1 = x(\tau), \cdots, \; x_n = \theta_\tau x_{n-1}, \cdots.$$

显然，$\{x_n\}$ 构成以 $\pi(x, B)$ 为一步转移概率的马尔科夫链. 再引进随机变量

$$\tau_1 = \tau, \cdots, \tau_n = \theta_\tau \tau_{n-1}, \cdots,$$

这时，如 $\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k$，则对 $t < \zeta$，我们有

$$x(t) = x_n, \; 其中 \; \sum_{k=1}^{n} \tau_k \leqslant t < \sum_{k=1}^{n+1} \tau_k \; \left(\sum_{1}^{0} = 0 \right). \tag{3}$$

随机变量 $x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$ 和 $\tau_1, \cdots, \tau_n, \cdots$ 的联合分布可如§2中(见引理4及系)当 $\mathscr{X}$ 为可数集时情况类似得到.

引理1 对一切 $\lambda > 0$ 和有界 $\mathfrak{B}$ 可测函数 $f(x)$ 成立关系式

$$\mathbf{E}_x e^{-\lambda\tau} f(x_\tau) = \frac{\lambda(x)}{\lambda + \lambda(x)} \int \pi(x, dy) f(y). \tag{4}$$

证．由

$$\frac{\lambda(x)}{\lambda + \lambda(x)} = \mathbf{E}_x e^{-\lambda\tau} \text{ 及} \int \pi(x, dy) f(y) = \mathbf{E}_x f(x_\tau),$$

可知，为推出 (4) 式，只须证明随机变量 τ 与 $x(\tau)$ 独立．实际上，因为 $t < \tau$ 时 $\theta_t x_\tau = x_\tau$，于是

$$\mathbf{P}_x\{\tau > t, x_\tau \in B\} = \mathbf{E}_x \chi_{\{\tau > t\}} \chi_B(x_\tau) = \mathbf{E}_x \chi_{\{\tau > t\}} \theta_t \chi_B(x_\tau),$$

又由 $\chi_{\{\tau > t\}}$ 的 $\mathscr{N}_t$ 可测性，有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x\{\tau > t, x_\tau \in B\} &= \mathbf{E}_x \chi_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}_{x_t} \chi_B(x_\tau) \\ &= \mathbf{E}_x \chi_{\{\tau > t\}} \pi(x_t, B) = \mathbf{E}_x \chi_{\{\tau > t\}} \pi(x, B) \\ &= \mathbf{P}_x\{\tau > t\} \, \mathbf{P}_x\{x_\tau \in B\} \end{aligned}$$

（利用了 $\tau > t$ 时，$x_t = x$）．引理证完．

系 1 如 § 2 引理 4 的系一样，我们有

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_{x_0} \prod_{k=1}^{n} e^{-u_k \tau_k} f_k(x_k) \\ &= \int \cdots \int \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{\lambda(y_{k-1})}{\lambda(y_{k-1}) + u_k} f_k(y_k) \pi(y_{k-1}, dy_k) \right] \end{aligned} \tag{5}$$

$(y_0 = x_0)$，并且对给定的 $x_0, x_1, \cdots, x_m (m \geqslant n)$，$\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$ 的联合分布与相应的具有 $\lambda(x_0), \cdots, \lambda(x_{n-1})$ 为参数的指数分布的独立随机变量的联合分布重合．

得到的结果使我们能根据函数 $\lambda(x)$ 与 $\pi(x, B)$ 按下面方法构造过程．先在相空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 里构造以 $\pi(x, B)$ 为转移概率的马尔科夫链$\{x_n\}$．然后令 $\tau_1, \tau_2, \cdots$ 是这样的一列随机变量，它们的联合分布(对已给的 $x_0, x_1, \cdots$)与具有以相应的$\lambda(x_0), \lambda(x_1), \cdots$ 为参数的指数分布的独立随机变量的联合分布重合．序列 $\tau_1, \tau_2, \cdots$ 可如下法构造：先取独立同分布的随机变量 ξ_k，有参数为 1 的指数分布，再令

$$\tau_k = \frac{1}{\lambda(x_{k-1})} \xi_k, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

利用量 x_k 及 τ_k 根据公式(3)就可定义过程 x_t．因而，过程 x_t

对 $t\in\left[0,\ \sum_{k=1}^{\infty}\tau_k\right)$ 有定义，并且是具有按公式(2)给出的特征算子 $\mathfrak{A}$ 的马尔科夫过程.

利用得到的马尔科夫过程的构造性的定义，我们给出相空间 $(\mathscr{X},\ \mathfrak{B})$ 中的半马尔科夫过程的构造性定义.

假定某一族概率空间 $(\Omega,\ \mathfrak{S},\ \mathbf{P}_x)$ 是已给的，其中测度 $\mathbf{P}_x$ 对一切 $x\in\mathscr{X}$ 有定义. 设在 $(\Omega,\ \mathfrak{S},\ \mathbf{P}_x)$ 上已给齐次马尔科夫链: $\{x_0(\omega),\ x_1(\omega),\ \cdots,\ x_n(\omega),\ \cdots\}$，其相空间为 $(\mathscr{X},\ \mathfrak{B})$，转移概率为 $\pi(x,\ B)$，它满足 $\mathbf{P}_x(x_0(\omega)=x)=1$. 又设 $\eta_1(\omega),\ \eta_2(\omega),\ \cdots$ 为独立同分布的随机变量序列，它不依赖于 $\{x_n(\omega);n=0,1,\cdots\}$ 的总合，并且对任意 $\mathbf{P}_x$，其中的每个随机变量都有 $[0,\ 1]$ 上的均匀分布. 对每对 $x,\ y\in\mathscr{X}$，预先给定非负随机变量的分布函数 $F_{x,y}(t)$，然后定义 $[0,\ 1]$ 上的函数 $\varphi_{x,y}(t)$，使得量 $\varphi_{x,y}(\xi)$ (其中 ξ 有 $[0,\ 1]$ 上的均匀分布)恰有分布函数 $F_{x,y}(t)$. 最后令

$$\tau_k=\varphi_{x_{k-1},\ x_k}(\eta_k),$$

$$x(t)=x_{k-1},\ \text{如}\ \sum_{j=1}^{k-1}\tau_j\leqslant t<\sum_{j=1}^{k}\tau_j\left(\sum_{j=1}^{0}=0\right).$$

这样定义的过程叫做**半马尔科夫过程**. 与马尔科夫过程同样，它所取的一系列状态构成马尔科夫链，但是在马尔科夫过程的情况中，在某状态的逗留时间仅与该状态有关，而且一定有指数分布；对半马尔科夫过程，逗留时间则还依赖于过程将要转移到的状态，而且逗留时间的分布可以是任意的.

由于半马尔科夫过程不是马尔科夫的，故为确定其边缘分布，只确定转移概率或二维分布是不够的.

我们指出，在

$$\zeta=\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k=+\infty$$

以概率 $\mathbf{P}_x=1$ 成立时，原则上应如何确定边沿分布. 显然，只需对每一 x 和 $t_1,\ t_2,\cdots,t_n\in[0,\infty)$ 及有界 $\mathfrak{B}$ 可测函数 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 确定式子

$$\mathbf{E}_x f_1(x(t_1))\cdots f_n(x(t_n)). \tag{6}$$

用 $\exp\left\{-\sum_{1}^{n} s_k t_k\right\}$ 乘上式并对 $t_1, \cdots, t_n$ 由 0 到∞积分，即考虑函数 (6) 的 Laplace 变换. 这时可得

$$\mathfrak{L}_{s_1,\cdots,s_n}(f_1, \cdots, f_n) = \mathbf{E}_x \prod_{k=1}^{n} \int_0^\infty e^{-s_k t} f_k(x_t) dt.$$

由 $x(t)$ 定义可知

$$\int_0^\infty e^{-s_k t} f_k(x_t) dt$$

$$= \frac{1}{s_k} \sum_{n=0}^{\infty} f_k(x_n) \left[\exp\left\{-s_k \sum_{1}^{n} \tau_m\right\} - \exp\left\{-s_k \sum_{1}^{n+1} \tau_m\right\}\right].$$

所以

$$\mathfrak{L}_{s_1,\cdots,s_n}(f_1, \cdots, f_n)$$

$$= \mathbf{E}_x \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{s_k} \sum_{N=0}^{\infty} f_k(x_N) \exp\left\{-s_k \sum_{1}^{N} \tau_m\right\} \times [1 - e^{-s_k \tau_{N+1}}]. \tag{7}$$

记

$$\int_0^\infty e^{-st} d_t F_{x,y}(t) = \phi_{x,y}(s).$$

这时，先于 (7) 中取条件数学期望(对给定的 x_n, $n = 0, 1, \cdots$)，再利用此时条件 τ_m 的独立性及有分布函数 $F_{x_{m-1},x_m}(t)$，我们得到

$$\mathfrak{L}_{s_1,\cdots,s_n}(f_1, \cdots, f_n)$$

$$= \frac{1}{s_1\cdots s_n} \mathbf{E}_x \sum_{N_1,\cdots,N_n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} f_k(x_{N_k}) K^{(n)}_{s_1,\cdots,s_n}(N_1, \cdots, N_n), \tag{8}$$

其中 $K^{(n)}_{s_1,\cdots,s_n}(N_1, \cdots, N_n)$ 为随机变量，它是 $x_0, \cdots, x_N$,

$$(N = \max_i N_i)$$

的函数，由下列条件定义:

a）它对数 $s_1, \cdots, s_n$ 与 $N_1, \cdots, N_n$ 的同样的排列不变，也即是对偶 (s_k, N_k) 的对称函数；

b）设

$$G_{l,N}(s)=\prod_{k=l}^{N}\phi_{x_{k-1},x_k}(s)\quad (l\geqslant N\text{时，}G_{l,N}(s)=1),\tag{9}$$

$$\begin{aligned}H_N^{(i)}(s, s_1, \cdots, s_i)&=\phi_{x_N,x_{N+1}}(s)-\sum_{j=1}^{i}\phi_{x_N,x_{N+1}}(s+s_j)\\&+\sum_{1\leqslant k<j\leqslant i}\phi_{x_N,x_{N+1}}(s+s_j+s_k)+\cdots\\&+(-1)^i\phi_{x_N,x_{N+1}}\left(s+\sum_{j=1}^{i}s_j\right),\end{aligned}\tag{10}$$

这时，当

$$\begin{aligned}N_1=N_2=\cdots=N_{i_1}<N_{i_1+1}=\cdots=N_{i_2}<\cdots\\<N_{i_k}=N_n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K^{(n)}_{s_1,\cdots,s_n}=G_{1,\ N_{i_1}}(s_1+\cdots+s_n)\,&H^{(i_1)}_{N_{i_1}}(s_{i_1+1}+\cdots\\&+s_n,\ s_1,\ \cdots,\ s_{i_1})G_{N_{i_1+1},\ N_{i_2}}(s_{i_1+1}\\&+\cdots+s_n)H^{(i_2-i_1)}_{N_{i_2}}(s_{i_2+1}+\cdots\\&+s_n,\ s_{i_1+1},\cdots,\ s_{i_2})\times\cdots\\&\times G_{N_{i_{k-1}+1},N_n}(s_{i_{k-1}+1}+\cdots+s_n)\\&\times H^{(n-i_{k-1})}_{N_n}(0,\ s_{i_{k-1}+1},\ \cdots,\ s_n).\end{aligned}\tag{11}$$

公式(8)与(9)—(11)是很繁的. 我们给出 $x(t)$ 的分布的 Laplace 变换的一个较简单的公式:

$$\mathfrak{L}_s(\varphi)=\frac{1}{s}\sum_{N=0}^{\infty}\mathbf{E}_x\varphi(x_N)\left(\prod_{k=1}^{N}\phi_{x_{k-1},x_k}(s)\right)[1-\phi_{x_N,x_{N+1}}(s)].\tag{12}$$

由于下面的事实，研究半马尔科夫过程会方便得多.

引理 2 考虑相空间 $\mathscr{X}\times\mathscr{R}_+$, $\mathscr{R}_+=[0,\infty)$ 中的随机过程 $(x(t), \xi(t))$，其中 $x(t)$ 是半马尔科夫过程，而

$$\xi(t)=t-\sum_{1}^{k-1}\tau_i,\quad 当\ \sum_{1}^{k-1}\tau_i\leqslant t<\sum_{1}^{k}\tau_i.$$

这时，对一切 x，它是概率空间 $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}_x\}$ 上的齐次马尔科夫函数，其转移概率由下列关系式给出：

$$P(t, (x;s), B \times \{t+s\}) = \chi_B(x)\mathbf{P}_x\{\tau_1 > t+s\}/\mathbf{P}_x\{\tau_1 > s\},$$

$$P(t, (x; s), B \times E) = \frac{1}{\mathbf{P}_x\{\tau_1 > s\}} \iint_s^{s+t} d_u F_{x,y}(u)\pi(x, dy)P(t+s-u, (y; 0), B \times E), \tag{13}$$

$B \in \mathfrak{B}$, $E \in \mathfrak{B}_+$ 为 $\mathscr{R}_+$ 中 Borel 集的 σ 代数，$t+s\bar{\in}E$. 概率 $P(t, (x; 0), B \times [0, T])$ 由下式定义：

$$\int_0^\infty e^{-st}P(t, (x; 0), B \times [0, T])dt = \frac{1}{s}\mathbf{E}_x \sum_{N=0}^\infty \chi_B(x_N)G_N(s)[1 - \phi_{x_N, x_{N+1}}(s, T)], \tag{14}$$

其中 $G_N(s) = G_{1,N}(s)$由等式 (9) 确定，而

$$\phi_{x,y}(s, T) = \int_0^T e^{-st}dF_{x,y}(t) + e^{-sT}[1 - F_{x,y}(T)]. \tag{15}$$

注意，$\mathbf{P}_x\{\tau_1 > t\}$ 由下式给出：

$$\mathbf{P}_x\{\tau_1 > t\} = \int [1 - F_{x,y}(t)]\pi(x, dy). \tag{16}$$

证. 区间 $[0, T]$ 上的过程 $(x(t); \xi(t))$的性态可被量 x_0, $(x_1; \tau_1)$, $\cdots$, $(x_N; \tau_N)$ $\left(\text{其中}N\text{为使} \sum_1^N \tau_k \leqslant T < \sum_1^{N+1} \tau_k \text{成立的}N\right)$ 的值完全确定.

设 $\mathfrak{F}_T$ 为 Ω 中的 σ 代数，它可由区间 $[0, T]$ 上的过程 $(x(t); \xi(t))$ 的性态确定. 这时，在集 $\Omega_N = \left\{\omega: \sum_1^N \tau_k \leqslant T < \sum_1^{N+1} \tau_k\right\}$ 上测度

$$\mathbf{P}_x\{x(t+T) \in B, \xi(t+T) \in \Lambda | \mathfrak{F}_T\}, B \in \mathfrak{B}, \Lambda \in \mathfrak{B}_+,$$

仅仅是 $x_0 = x$, x_1, τ_1, $\cdots$, x_N, τ_N 的函数. 此外，在集 Ω_N 上还有

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}_x\{x(t+T)\in B,\ \xi(t+T)\in \Lambda \mid x_0, x_1, \tau_1, \cdots, x_N, \tau_N\}\\
&\quad = \mathbf{E}_x(\mathbf{P}_x\{x(t+T)\in B,\ \xi(t+T)\in \Lambda \mid x_0, x_1,\\
&\quad\quad \tau_1, \cdots, x_{N+1}, \tau_{N+1}\}\chi_{\Omega_N} \mid x_0, \cdots, x_N, \tau_N).
\end{aligned}
$$

但在集 Ω_N 上，

$$
\mathbf{P}_x\{x(t+T)\in B,\ \xi(t+T)\in \Lambda \mid x_0, x_1, \tau_1, \cdots, x_{N+1}, \tau_{N+1}\}
$$

$$
= \begin{cases}
\chi_B(x_N)\chi_\Lambda\left(t+T-\sum_1^N \tau_k\right), & \text{如} \sum_1^{N+1}\tau_k > T+t,\\
\mathbf{P}_x\left\{x(t+T)\in B,\ \xi(t+T)\in \Lambda \,\middle|\, x_{N+1}, \sum_1^{N+1}\tau_k\right\}, & \text{如} \sum_1^{N+1}\tau_k \leqslant T+t.
\end{cases}
$$

不难看出，若令 $s=\sum_1^{N+1}\tau_k$，则

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}_x\left\{x(t+T)\in B,\ \xi(t+T)\in \Lambda \,\middle|\, x_{N+1}, \sum_1^{N+1}\tau_k\right\}\\
&\quad = \mathbf{P}_{x_{N+1}}\{x(t+T-s)\in B,\ \xi(t+T-s)\in \Lambda\},
\end{aligned}
$$

这是因为可以用与由量 $x_0, x_1, \tau_1, \cdots$ 构造过程 $(x(t);\xi(t))$ 完全相同的方法，由量 $x_{N+1}, x_{N+2}, \tau_{N+2}, \cdots$ 来构造过程

$$
\left(x\left(t+\sum_1^{N+1}\tau_k\right);\ \xi\left(t+\sum_1^{N+1}\tau_k\right)\right).
$$

可见

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}_x\{x(t+T)\in B,\ \xi(t+T)\in \Lambda \mid x_0, x_1, \tau_1, \cdots, x_N, \tau_N\}\\
&\quad = \mathbf{E}_x\left\{\chi_B(x_N)\chi_\Lambda\left(t+T-\sum_1^N\tau_k\right)\chi_{\left\{\sum_1^{N+1}\tau_k > T+t\right\}} \,\middle|\, x_0,\right.\\
&\quad\quad \left. x_1, \cdots, x_N, \tau_N\right\} + \mathbf{E}_x\left(\tilde{P}\left(t+T-\sum_1^{N+1}\tau_k,\right.\right.\\
&\quad\quad \left.\left.(x_{N+1};0),\ B\times\Lambda\right)\chi_{\left\{T<\sum_1^{N+1}\tau_k<T+t\right\}} \,\middle|\, x_0, x_1,\right.
\end{aligned}
$$

$$\cdots, x_N, \tau_N\Big), \tag{17}$$

其中

$$\tilde{P}(t, (x; 0), B \times \Lambda) = \mathbf{P}_x\{x(t) \in B, \xi(t) \in \Lambda\}.$$

注意到在 Ω_N 上，$T - \sum_1^N \tau_k = \xi(T)$. 所以，

$$\mathbf{E}_x\left(\chi_B(x_N)\chi_\Lambda\left(t + T - \sum_1^N \tau_k\right)\chi_{\left\{\sum_1^{N+1}\tau_k > T+t\right\}}\middle| x_0, x_1,\right.$$

$$\left.\cdots, x_N, \tau_N\right) = \mathbf{E}_x\left(\chi_B(x_N)\chi_\Lambda(t + \xi(T))\chi_{\{\tau_{N+1} > \xi(T)+t\}}\middle| x_N, \sum_1^N \tau_k\right)$$

$$= \chi_B(x_N)\chi_\Lambda(t + \xi(T))\mathbf{P}_x\{\tau_{N+1} > \xi(T) + t | x_N\}.$$

由于 $\Omega_N = \left\{\sum_1^N \tau_k < T\right\} \cap \{\tau_{N+1} > \xi(T)\}$，故在 Ω_N 上有

$$\mathbf{P}_x\left\{\tau_{N+1} > \xi(T) + t \middle| x_N, \sum_1^N \tau_k, \tau_{N+1} > \xi(T)\right\}$$

$$= \frac{\mathbf{P}_x\{\tau_{N+1} > \xi(T) + t | x(T), \xi(T)\}}{\mathbf{P}_x\{\tau_{N+1} > \xi(T) | x(T), \xi(T)\}}. \tag{18}$$

类似地，在 Ω_N 上还有

$$\mathbf{E}_x\left(\tilde{P}\left(t + T - \sum_1^{N+1}\tau_k, (x_{N+1}; 0),\right.\right.$$

$$\left.\left. B \times \Lambda\right)\chi_{\left\{T < \sum_1^{N+1}\tau_k < T+t\right\}}\middle| x_0, x_1, \cdots, x_N, \tau_N\right)$$

$$= \mathbf{E}_x\Big(\tilde{P}(t + \tau_{N+1} + \xi(T), (x_{N+1}; 0),$$

$$B \times \Lambda)\chi_{\{\xi(T) < \tau_{N+1} < \xi(T)+t\}}\left| x_N, \sum_1^N \tau_k, \tau_{N+1} > \xi(T)\right)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{P}_x\{\tau_{N+1} > \xi(T) | x_N, \xi(T)\}}\mathbf{E}_x\Big(\int_{\xi(T)}^{\xi(T)+t}\tilde{P}(t$$

$$+ \xi(T) - u, (x_{N+1}; 0), B \times \Lambda)$$

$$\times dF_{x_N, x_{N+1}}(u)\Big| x_N, \xi(T)\Big). \tag{19}$$

由于在 Ω_N 上 $x(T)=x_N$，从而就证明了

$$\mathbf{P}_x\{x(t+T)\in B,\ \xi(t+T)\in\Lambda|\mathfrak{F}_T\} \tag{20}$$

只依赖于 $x(T)$ 与 $\xi(T)$，亦即 $(x(t);\xi(t))$ 是马尔科夫随机函数，而且由公式 (17)—(19) 确定的概率(20)的表达式表明，该马尔科夫随机函数的转移概率确实可以由等式 (12)—(14) 确定. 引理全部证完.

现在我们构造具有转移概率 (12)—(14) 的马尔科夫过程. 作为样本函数空间，我们取函数 $(x(t);\ \xi(t))$ 的空间 $\mathscr{F}$，其中 $(x(t);\xi(t))$ 为如下形式的函数：$\xi(t)\geqslant 0$，$\xi(t)$ 逐段线性，右连续，且在 $\xi(t)$ 的线性区间 $[\alpha,\ \beta)$ 上 $\xi(t)=\xi(\alpha)+t-\alpha$；如果 $[\alpha,\beta)$ 是 $\xi(t)$ 的线性区间，则对 $\alpha\leqslant t<\beta$ 令 $x(t)=x(\alpha)$，如果 β 是 $\xi(t)$ 的间断点，则令 $\xi(\beta+0)=0$. 为了证明可以在 $\mathscr{F}$ 上利用转移概率 (12)—(14) 确定一个测度，我们指出 $\mathscr{F}$ 包含轨道 $\theta_s(x(t);\ \xi(t))$ 的集，而在此集上可以利用转移概率 (12)—(14) 构造测度. 这样一来，有特殊形式的“二维”马尔科夫过程就可以和半马尔科夫过程联系起来了，此时，$x(t)$ 是过程在时刻 t 的状态；而 $\xi(t)$ 是过程在该状态的逗留时间.

半马尔科夫过程的一般定义 我们说半马尔科夫过程已经给定，如果已给

a) 可测空间 $(\mathscr{X},\mathfrak{B})$，称它为过程的相空间；

b) 定义于 $[0,\infty)$，取值于 $\mathscr{X}\times\mathscr{R}_+$，$\mathscr{R}_+=[0,\infty]$ 的函数的空间 $\mathscr{F}_{(\mathscr{X},\mathscr{R}_+)}$，它由如下形式的函数构成：如 $(x(t);\ \xi(t))\in\mathscr{F}_{(\mathscr{X},\mathscr{R}_+)}$，则 $\xi(t)$ 为右连续的逐段线性函数；如 $[\alpha,\ \beta)$ 为 $\xi(t)$ 的线性区间，则对 $t\in[\alpha,\beta)$，$\xi(t)=\xi(\alpha)+t-\alpha$；如 β 为 $\xi(t)$ 的间断点，则令 $\xi(\beta+0)=0$；在 $\xi(t)$ 的每一个线性区间 $[\alpha,\beta)$ 上 $x(\alpha)=x(t)$，如 β 为 $\xi(t)$ 的间断点，则

$$x(\beta)\neq x(\beta-0),$$

$x(t)$ 在 $\mathscr{X}$ 中给定的离散拓扑上右连续；称 $x(t)$ 为过程在时刻 t 的状态，$\xi(t)$ 称为过程直到时刻 t 在该状态的逗留时间；$x(t)$ 又称为相分量，而 $\xi(t)$ 称为半马尔科夫过程的时间分量；

c) 齐次马尔科夫过程 $\{\mathscr{F}_{(\mathscr{X},\mathscr{R}+)}, \mathscr{N}_{(\mathscr{X},\mathscr{R}+)}, \mathbf{P}_{x,s}\}$，其中 $\mathscr{N}_{(\mathscr{X},\mathscr{R}_+)}$ 为 $\mathscr{F}_{(\mathscr{X},\mathscr{R}_+)}$ 中的柱集产生的 σ 代数.

当然还可研究中断半马尔科夫过程，这时如何修改定义是显然的.

我们下面只考虑强马尔科夫过程 $(x(t); \xi(t))$. 设 τ 为分量 $\xi(t)$ 首次取 0 值的时刻. 这时，$\xi(t)$ 在 $[0, \tau)$ 上是线性的，而 $x(t)$ 是常数. 显然，τ 是马尔科夫时间. 令 $\zeta_1 = \tau$,

$$\zeta_n = \theta_\tau \zeta_{n-1} + \tau,$$

则 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots$ 也是马尔科夫时间，于是量$\{(x(\zeta_n); \xi(\zeta_n)), n = 1, 2, \cdots\}$ 构成马尔科夫链. 但注意到对一切 n，$\xi(\zeta_n) = 0$，故 $\{x(\zeta_n), n = 1, 2, \cdots\}$ 也是马尔科夫链. 此链的转移概率可由下式得到:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{x(\zeta_{n+1}) \in B | x(\zeta_n)\} &= \mathbf{E}(\mathbf{P}\{x(\zeta_{n+1}) \in B | \mathscr{N}_{\zeta_n}\} | x(\zeta_n)) \\
&= \mathbf{E}(\mathbf{P}\{\theta_{\zeta_n} x(\tau) \in B | \mathscr{N}_{\zeta_n}\} | x(\zeta_n)) \\
&= \mathbf{E}(\mathbf{P}_{x(\zeta_n),\xi(\zeta_n)}\{x(\tau) \in B\} | x(\zeta_n)) \\
&= \mathbf{P}_{x(\zeta_n),0}\{x(\tau) \in B\}.
\end{aligned}$$

由此可见，此马尔科夫链为齐次的，并且其一步转移概率 $\pi(x, B)$ 为下式所确定:

$$\pi(x, B) = \mathbf{P}_{x,0}\{x(\tau) \in B\}. \tag{21}$$

令 $x(0) = x_0, \cdots, x(\zeta_n) = x_n, \zeta_n - \zeta_{n-1} = \tau_n$. 可以指出，$\{(x_n; \tau_n), n = 1, 2, \cdots\}$ 也构成齐次马尔科夫链. 实际上，如 Λ 为 $\mathscr{R}_+$ 上的 Borel 集，那么，

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{x,s}\{x(\zeta_n) \in B, \tau_n \in \Lambda | \mathscr{N}_{\zeta_{n-1}}\} \\
&= \mathbf{P}\{\theta_{\zeta_{n-1}} x(\tau) \in B, \theta_{\zeta_{n-1}} \tau \in \Lambda | \mathscr{N}_{\zeta_{n-1}}\} \\
&= \mathbf{P}_{x_{n-1},\xi(\zeta_{n-1})}\{x(\tau) \in B, \tau \in \Lambda\} \\
&= \mathbf{P}_{x_{n-1},0}\{x(\tau) \in B, \tau \in \Lambda\} \quad (n > 1).
\end{aligned} \tag{22}$$

因为当 $k \leqslant n - 1$ 时，$(x_k; \tau_k)$ 对 $\mathscr{N}_{\zeta_{n-1}}$ 可测，故由此推得我们的结论.

显然，为确定过程 $(x(t); \xi(t))$在时间区间 $[0, \zeta^1)$ (这里 $\zeta^1 = \sup \zeta_n$)上的轨道，只需给出 $x_0, x_1, \cdots, \xi(0), \tau_1, \tau_2, \cdots$. 此时，如

$\zeta_n \leqslant t < \zeta_{n+1}$, $x(t) = x_n$; 如 $t < \tau_1$, $\xi(t) = \xi(0) + t$; 如 $\zeta_n \leqslant t < \zeta_{n+1}$, $n \geqslant 1$, $\xi(t) = t - \zeta_n$. 如果已经给定 x_0 及 $\xi(0) = s$, 则为了给出量 $\{(x_k; \tau_k), k = 1, 2, \cdots\}$ 的联合分布，只需给出 $(x_1; \tau_1)$ 的联合分布:

$$\mathbf{P}_{x_0,s}\{x(\tau) \in B, \ \tau \in \Lambda\},$$

及由公式(22)定义的链 $\{(x_n; \tau_n)\}$ 的转移概率.

因为 $\mathbf{P}_{x,0}\{x(\tau) \in B, \tau \in \Lambda\}$ 作为 B 上的测度，对于 $\pi(x, B)$ 绝对连续，故

$$\mathbf{P}_{x,0}\{x(\tau) \in B, \ \tau \in \Lambda\} = \int_B F_{x,y}(\Lambda)\pi(x, dy).$$

$F_{x,y}(\Lambda)$ 作为 Λ 的函数，是在条件 $x(0) = x$, $x(\tau) = y(\xi(0) = 0)$ 下，τ 的条件分布. 约定

$$F_{x,y}(t) = F_{x,y}([0, t)),$$

我们得到用以构造性地定义半马尔科夫过程的那些特征.

可以指出，$\mathbf{P}_{x,s}\{x(\tau) \in B, \ \tau \in \Lambda\}$ 以某种方式与 $\pi(x, B)$ 及 $F_{x,y}(\Lambda)$ 有关. 实际上，

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{x,0}\{x(\tau) \in B, \tau \in \Lambda + s\} &= \mathbf{P}_{x,0}\{\tau > s, \theta_s x(\tau) \in B, \tau \in \Lambda\} \\ &= \mathbf{P}_{x,0}\{\tau > s\}\mathbf{P}_{x,s}\{x_\tau \in B, \ \tau \in \Lambda - s\}\end{aligned}$$

(这里 $\Lambda - s$ 表示使 $s + u \in \Lambda$ 的 u 的集合). 如有 $\mathbf{P}_{x,0}\{\tau > s\} > 0$, 则

$$\mathbf{P}_{x,s}\{x(\tau) \in B, \ \tau \in \Lambda\} = \frac{1}{\mathbf{P}_{x,0}\{\tau > s\}}\int_B F_{x,y}(\Lambda - s)\pi(x, dy). \tag{23}$$

如 $\mathbf{P}_{x,0}\{\tau > s\} = 0$, 则 (23) 式无意义.

这一小节中定义的过程不同于用构造性方法建立的过程的地方是，它可以有不止一个跳跃点的聚点.

在研究非规则过程时，特征算子和 λ 调和函数起了重要作用(见第二章 § 5). 现寻找过程 $(x(t); \xi(t))$的特征算子. 设 τ 为分量 $\xi(t)$ 首次取 0 值的时刻(如 $\xi(0) = 0$, 则 τ 为 $\xi(t)$ 变为正的以后第一次取 0 值的时刻), $\tau_\varepsilon = \min[\tau, \varepsilon]$. 定义于 $\mathscr{X} \times \mathscr{R}_+$ 上，对 $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}_+$ (这里 $\mathfrak{B}_+$ 为 $\mathscr{R}_+$ 上 Borel 集的 σ 代数)可测的函数

$f(x, s)$ 属于过程的特征算子 $\mathfrak{A}$ 的定义域，如果对一切 $x \in \mathscr{X}$ 和 $s \in \mathscr{R}_+$ 存在极限

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\mathbf{E}_{x,s}\tau_\varepsilon} [\mathbf{E}_{x,s} f(x(\tau_\varepsilon), s + \tau_\varepsilon) - f(x, s)] = \mathfrak{A} f(x, s).$$

设

$$\mathbf{P}_{x,s}\{x(\tau) \in B, \tau < t\} = \Phi_{x,s}(B, t).$$

这时，

$$\mathbf{E}_{x,s}\tau_\varepsilon = \varepsilon \mathbf{P}_{x,s}\{\tau > \varepsilon\} + \int_0^\varepsilon u d_u \Phi_{x,s}(\mathscr{X}, u),$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_{x,s} f(x(\tau_\varepsilon), s + \tau_\varepsilon) \\
&= f(x, s + \varepsilon)\mathbf{P}_{x,s}\{\tau > \varepsilon\} + \mathbf{E}_{x,s} f(x(\tau), 0)\chi_{\{\tau < \varepsilon\}} \\
&= f(x, s + \varepsilon)\mathbf{P}_{x,s}\{\tau > \varepsilon\} + \int_{\mathscr{X}} \Phi_{x,s}(dy, \varepsilon) f(y, 0).
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} f(x, s) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} & \frac{1}{\varepsilon \mathbf{P}_{x,s}\{\tau > \varepsilon\} + \int_0^\varepsilon u d\Phi_{x,s}(\mathscr{X}, u)} \\
& \times \left[\int_{\mathscr{X}} \Phi_{x,s}(dy, \varepsilon)(f(y, 0) - f(x, s)) \right. \\
& \left. + \mathbf{P}_{x,s}\{\tau > \varepsilon\}(f(x, s + \varepsilon) - f(x, s)) \right].
\end{aligned}$$

由过程的右连续性可知，$\varepsilon \downarrow 0$ 时 $\mathbf{P}_{x,s}\{\tau \leqslant \varepsilon\} \downarrow 0$。因此有

$$\varepsilon \mathbf{P}_{x,s}\{\tau > \varepsilon\} + \int_0^\varepsilon u d_u \Phi_{x,s}(\mathscr{X}, u) \sim \varepsilon,$$

并且

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} f(x, s) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} & \left[\int \Phi_{x,s}(dy, \varepsilon)(f(y, 0) - f(x, s)) \right. \\
& \left. + \mathbf{P}_{x,s}\{\tau > \varepsilon\}(f(x, s + \varepsilon) - f(x, s)) \right].
\end{aligned}$$

假设 (23) 式正确，于是

$$\mathfrak{A} f(x, s) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon \mathbf{P}_{x,0}\{\tau > s\}} \left[\int (F_{x,y}(s + \varepsilon) - F_{x,y}(s)) \right.$$

$$\times (f(y,0) - f(x,s))\pi(x,dy)$$

$$+ \int (1 - F_{x,y}(s+\varepsilon))\pi(x,dy)(f(x,s+\varepsilon)$$

$$- f(x,s))\Big] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Big[\frac{1}{\varepsilon \mathbf{P}_{x,0}\{\tau > s\}} \int (F_{x,y}(s+\varepsilon)$$

$$- F_{x,y}(s))(f(y,0) - f(x,s+\varepsilon))\pi(x,dy)$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}(f(x,s+\varepsilon) - f(x,s))\Big].$$

如果 $F_{x,y}(s)$ 对 s 可微且对 s 的导数有界，则有 $f \in \mathscr{D}_{\mathfrak{A}}$；如果 $f(x,s)$ 对 s 可微，则

$$\mathfrak{A}f(x,s) = \frac{1}{\mathbf{P}_{x,0}\{\tau > s\}} \int \frac{\partial}{\partial s} F_{x,y}(s)(f(y,0) - f(x,s))\pi(x,dy) + \frac{\partial}{\partial s} f(x,s). \tag{24}$$

考虑到

$$\mathbf{P}_{x,0}\{\tau > s\} = \int [1 - F_{x,y}(s)]\pi(x,dy),$$

可将(24)写成

$$\mathfrak{A}f(x,s) = \frac{1}{\mathbf{P}_{x,0}\{\tau > s\}} \frac{\partial}{\partial s} \int [1 - F_{x,y}(s)][f(y,0) - f(x,s)]\pi(x,dy). \tag{25}$$

(25)式甚至当 $F_{x,y}(s)$ 不可微时也是有意义的，而且如(23)式成立，$F_{x,y}(t)$ 对 t 连续，$F_{x,y}(0)=0$ 又函数 $f(x,s)$ 对 s 连续，则(25)总是正确的.

现我们在过程于跳跃点的第一个聚点处中断的条件下，考虑过程的预解式 $\mathbf{R}_\lambda^0$ 的表达式. 我们假定(23)式对一切 x 与 $s>0$ 成立. 这时对一切有界 $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}_+$ 可测函数和 $\mathfrak{B}$ 可测集 B 有

$$\mathbf{E}_{x,s} \int_0^\tau f(x(t), \xi(t)) e^{-\lambda t} dt \chi_B(x_\tau)$$

$$= \mathbf{E}_{x,s} \int_0^\tau f(x, s+t) e^{-\lambda t} dt \chi_B(x_\tau)$$

$$= \mathbf{E}_{x,s} \int_0^\infty f(x, s+t) e^{-\lambda t} \chi_{\{\tau > t\}} \chi_B(x_\tau) dt$$

$$= \frac{1}{\mathbf{P}_{x,0}\{\tau > s\}} \int_0^\infty f(x, s+t) e^{-\lambda t} \int_B [1 - F_{x,y}(t + s)] \pi(x, dy) dt.$$

因为

$$\mathbf{E}_{x,s} \int_0^{\zeta^1} f(x(t), \xi(t)) e^{-\lambda t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_{x,s} \int_{\zeta_n}^{\zeta_{n+1}} f(x(t), \xi(t)) e^{-\lambda t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_{x,s} e^{-\lambda \zeta_n} \mathbf{E}_{x(\zeta_n),0} \int_0^{\tau} f(x(t), \xi(t)) e^{-\lambda t} dt + \mathbf{E}_{x,s} \int_0^{\tau} f(x(t), \xi(t)) e^{-\lambda t} dt,$$

所以

$$\mathbf{R}_\lambda^0 f(x, s) = \frac{1}{\mathbf{P}_{x,0}\{\tau > s\}} \iint_0^\infty f(x, t+s) e^{-\lambda t} [1 - F_{x,y}(t + s)] \pi(x, dy) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_{x,s} e^{-\lambda \zeta_n} \iint_0^\infty f(x(\zeta_n), t) \times [1 - F_{x(\zeta_n),y}(t)] dt \pi(x, dy).$$

再假设

$$\psi_\lambda(x, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dF_{x,y}(t), \tag{26}$$

$$\psi_\lambda(x, y; s) = \frac{1}{\mathbf{P}_{x,0}\{\tau > s\}} \int_0^\infty e^{-\lambda t} d_t F_{x,y}(t + s), \tag{27}$$

$$K^{(1)}(x, B) = \int_B \psi_\lambda(x, y) \pi(x, dy),$$

$$K_\lambda^{(0)}(x, B) = \chi_B(x), \tag{28}$$

$$K_\lambda^{(n)}(x, B) = \int \psi_\lambda(x, y) \pi(x, dy) K_\lambda^{(n-1)}(y, B) \quad (n > 1). \tag{29}$$

因为

$$\mathbf{E}_{x,s} e^{-\lambda \zeta_n} f(x(\zeta_n)) = \mathbf{E}_{x,s} e^{-\lambda \tau} \mathbf{E}_{x(\tau),0} e^{-\lambda \zeta_{n-1}} f(x(\zeta_{n-1})) = \int \psi_\lambda(x, y; s) \mathbf{E}_{y,0} e^{-\lambda \zeta_{n-1}} f(x(\zeta_{n-1})) \pi(x, dy),$$

$$\mathbf{E}_{x,0} e^{-\lambda \zeta_n} f(x(\zeta_n)) = \int K_\lambda^{(n)}(x, dy) f(y),$$

由此可得

$$\mathbf{R}_\lambda^0 f(x, s) = \frac{1}{\mathbf{P}_{x,0}\{\tau > s\}} \iint_0^\infty e^{-\lambda t}[1 - F_{x,y}(t+s)] f(x, t+s)$$

$$\times dt\pi(x, dy) + \int \psi_\lambda(x, y; s) \sum_{n=0}^\infty \int K_\lambda^{(n)}(y, dz)$$

$$\times \iint_0^\infty f(z, t)[1 - F_{z,v}(t)] e^{-\lambda t} dt\pi(z, dv). \tag{30}$$

现在我们来考虑过程的 λ 调和函数，它可描述成下面的

引理 3 设 (23) 式满足，这时过程的一切有界 λ 调和函数有形如

$$f(x, s) = \mathbf{E}_{x,s} e^{-\lambda\tau} f(x_\tau) = \int \psi_\lambda(x, y; s) f(y) \pi(x, dy), \tag{31}$$

其中 $f(y)$ 为 $\mathfrak{B}$ 可测有界函数，它满足关系

$$f(x) = \int f(y) K_\lambda^{(1)}(x, dy). \tag{32}$$

证. 如 $f(x, s)$ 为 λ 调和函数，则对一切马尔科夫时间 $\eta < \zeta^1$

$$\mathbf{E}_{x,s} e^{-\lambda\eta} f(x(\eta), \xi(\eta)) = f(x, s).$$

取使分量首次取 0 为值的时刻 τ 为 η，取函数 $f(x, 0)$ 作为 $f(x)$，可得到 (31). 于 (31) 中令 $s = 0$ 可得 (32).

现证 $f(x)$ 满足 (32) 时，形如 (31) 的函数是 λ 调和函数. 为此我们指出，由 (32)，序列

$$e^{-\lambda\zeta_n} f(x(\zeta_n)) \qquad (n > 1)$$

组成概率空间 $\{\mathscr{F}_{(\mathscr{X}, \mathscr{R}_+)}, \mathscr{N}_{(\mathscr{X}, \mathscr{R}_+)}, \mathbf{P}_{x,s}\}$ (对任意 $x \in \mathscr{X}, s \in \mathscr{R}_+$) 上的有界鞅:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_{x,s}(e^{-\lambda\zeta_n} f(x(\zeta_n)) \mid \mathscr{N}_{\zeta_{n-1}}) \\ &= \mathbf{E}_{x,s}(e^{-\lambda\zeta_{n-1}} \theta_{\zeta_{n-1}} e^{-\lambda\tau} f(x_\tau) \mid \mathscr{N}_{\zeta_{n-1}}) \\ &= e^{-\lambda\zeta_{n-1}} \mathbf{E}_{x(\zeta_{n-1}),0} e^{-\lambda\tau} f(x_\tau) = e^{-\lambda\zeta_{n-1}} f(x(\zeta_{n-1})). \end{aligned}$$

因此，以概率 $\mathbf{P}_{x,s} = 1$ 存在极限

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\lambda\zeta_n} f(x(\zeta_n)).$$

如 η 为某一满足不等式 $\zeta_m \leqslant \eta < \zeta_{m+1}$ 的马尔科夫时间，则当 $n > m+1$ 时

$$\theta_\eta f(x(\zeta_n)) = f(x(\zeta_{n-m-1})).$$

因此

$$\begin{aligned} e^{-\lambda\eta}\theta_\eta \lim_{n\to\infty} e^{-\lambda\zeta_n} f(x(\zeta_n)) &= \lim_{n\to\infty} e^{-\lambda\eta} e^{-\lambda(\zeta_n-\eta)} f(x(\zeta_{n-m-1})) \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{-\lambda\zeta_n} f(x(\zeta_{n-m-1})) = \lim_{n\to\infty} e^{-\lambda\zeta_{n-m-1}} f(x(\zeta_{n-m-1})) \\ &\quad + \lim_{n\to\infty}(e^{-\lambda\zeta_n} - e^{-\lambda\zeta_{n-m-1}}) f(x(\zeta_{n-m-1})) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x(\zeta_n)), \end{aligned}$$

这里 $\lim\limits_{n\to\infty}(e^{-\lambda\zeta_n} - e^{-\lambda\zeta_{n-m-1}}) = 0$ 是由于 $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-\lambda\zeta_n}$ 的存在性（ζ_n 单增）. 于是对一切满足不等式 $\eta < \zeta^1$ 的马尔科夫时间 η，都有

$$e^{-\lambda\eta}\theta_\eta \lim_{n\to\infty} e^{-\lambda\zeta_n} f(x(\zeta_n)) = \lim_{n\to\infty} e^{-\lambda\zeta_n} f(x(\zeta_n)).$$

也就是对一切 n

$$\begin{aligned} f(x, s) = \mathbf{E}_{x,s} e^{-\lambda\tau} f(x(\tau)) &= \mathbf{E}_{x,s} e^{-\lambda\zeta_n} f(x(\zeta_n)) \\ &= \mathbf{E}_{x,s} \lim_{n\to\infty} e^{-\lambda\zeta_n} f(x(\zeta_n)). \end{aligned}$$

如 η 为马尔科夫时间，且 $\eta < \zeta^1$，则

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{x,s} e^{-\lambda\eta} &\mathbf{E}_{x(\eta),\xi(\eta)} \lim_{n\to\infty} e^{-\lambda\zeta_n} f(x(\zeta_n)) \\ &= \mathbf{E}_{x,s} e^{-\lambda\eta}\theta_\eta \lim_{n\to\infty} e^{-\lambda\zeta_n} f(x(\zeta_n)) \\ &= \mathbf{E}_{x,s} \lim_{n\to\infty} e^{-\lambda\zeta_n} f(x(\zeta_n)) = f(x, s). \end{aligned}$$

引理证完.

知道了 $\mathbf{R}_\lambda^0$ 及调和函数，就可以用第二章§5的方法刻画一切具有已给特征算子的马尔科夫过程.

现在我们讨论半马尔科夫过程的 Feller 性. 设 $F_{x,y}(t)$ 对一切 $x, y \in \mathscr{X}$ 是 t 的连续函数，且对一切 $x \in \mathscr{X}$，$\mathbf{P}_{x,0}\{\tau > t\} > 0$. 此时(23)式成立. 由于在 $\mathscr{X}$ 中的拓扑是离散拓扑，所以函数 $f(x, s)$ 在 $\mathscr{X} \times \mathscr{R}_+$ 上的连续性只不过是它对 s 的连续性. 在上述假设下，一切有界 λ 调和函数都是连续的；这可由(31)式以及(27)中的函数 $\psi_\lambda(x, y; s)$ 对 s 的连续性（这因为

$$\mathbf{P}_{x,0}\{\tau > s\} = \int (1 - F_{x,y}(s))\pi(x, dy)$$

对 s 连续)推出.

现设 $P(t, (x; s), \cdot)$ 为某半马尔科夫过程的转移概率，该过程到时刻 ζ^1 以前的分布特性由函数 $\pi(x, B)$ 与 $F_{x,y}(t)$ 所表征. 显然，这个转移概率满足下列积分方程:

$$P(t, (x; s), B \times \Lambda) = \chi_B(x)\chi_\Lambda(t + s)\frac{\mathbf{P}_{x,0}\{\tau > t + s\}}{\mathbf{P}_{x,0}\{\tau > s\}}$$

$$+ \iint_0^t \frac{d_u F_{x,y}(u + s)}{\mathbf{P}_{x,0}\{\tau > s\}} P(t - u, (x; 0),$$

$$B \times \Lambda)\pi(x, dy).$$

如 $\mathbf{T}_t$ 为转移概率 $P(t, (x; s), \cdot)$ 产生的半群，则

$$\mathbf{T}_t f(x, s) = f(x, s + t) \frac{\mathbf{P}_{x,0}\{\tau > t + s\}}{\mathbf{P}_{x,0}\{\tau > s\}}$$

$$+ \iint_0^t \mathbf{T}_{t-u} f(y, 0) \frac{d_u F_{x,y}(u + s)}{\mathbf{P}_{x,0}\{\tau > s\}} \pi(x, dy). \quad (33)$$

如 $f(x, s)$对 s 连续，则由 (33) 可推得 $t \downarrow 0$ 时 $\mathbf{T}_t f(x, s) \longrightarrow f(x, s)$，这因为 (33) 左边的积分被量

$$\|f\| \frac{\mathbf{P}_{x,0}\{s < \tau \leqslant t + s\}}{\mathbf{P}_{x,0}\{\tau > s\}}$$

限制，第一个被加项趋近于 $f(x, s)$. 所以，对一切 s 的连续函数 $f(x, s)$，函数 $\mathbf{T}_t f(x, s)$ 对 t 右连续.

可以证明，$\mathbf{T}_t f(x, s)$ 对 s 连续. (33)右边第一个被加项有这一性质. 为证明(33)右边第二个被加项对 s 连续，只要证明对一切 $y \in \mathscr{X}$

$$\int_0^t \mathbf{T}_{t-u} f(y, 0) d_u \frac{F_{x,y}(u + s)}{\mathbf{P}_{x,0}\{\tau > s\}} \quad (34)$$

对 s 连续. 因为测度

$$\mu_s(\Lambda) = \frac{1}{\mathbf{P}_{x,0}\{\tau > s\}} \int_\Lambda d_u F_{x,y}(u + s)$$

对 s 弱连续，故

$$\lim_{s \to s_0} \int g(u)\mu_s(du) = \int g(u)\mu_{s_0}(du) \tag{35}$$

对一切有界可测函数 $g(u)$ 成立，$g(u)$ 的间断点集合为测度 μ_{s_0} 的 0 测集(见第一卷，第六章 § 1 引理 1)．因为 $\mathbf{T}_{t-u}f(y, 0)$ 对 u 左连续，故此函数的间断点集至多可数，但测度 μ_{s_0} 连续，所以一切可数集的测度等于 0．这样一来，如令 $g(u) = \mathbf{T}_{t-u}f(y, 0)$，(35) 式成立．(34) 对 s 的连续性得以确立．

于是我们证得下面定理：

定理 1 半马尔科夫过程(对此过程函数

$$F_{x,y}(t) = \mathbf{P}_{x,0}\{\tau < t | x(\tau) = y\}$$

对 t 连续，且对一切 $t > 0$，$\mathbf{P}_{x,0}\{\tau > t\} > 0$) 在下述意义上是 Feller 过程：相应于该过程的半群，将对 s 连续的有界 $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}_+$ 可测函数 $f(x, s)$ 的集合变到自身，一切有界 λ 调和函数也属于这一集合．

具有半马尔科夫随机扰动的过程 具有半马尔科夫随机扰动的过程通常理解为用下面方法构造性地刻画的过程．设在某相空间 $(\mathscr{Y}, \mathfrak{L})$ 上，已给半马尔科夫过程 $(y(t); \xi(t))$，并设在相空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$上有与每一 $y \in \mathscr{Y}$ 有关的马尔科夫过程 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x^{(y)}\}$ (轨道空间 $\mathscr{F}$ 与 σ 代数 $\mathscr{N}$ 也对一切 $y \in \mathscr{Y}$ 是相同的)，其轨道记为 $x(t, y)$．这时，过程 $z(t) = x(t, y(t))$就是具有半马尔科夫随机扰动的过程．

相应于这个过程，我们在 $\{\mathscr{F}^*, \mathscr{N}^*\}$ 上构造测度，这里 $\mathscr{F}^*$ 为如下函数 $x(t)$ 的集合：它定义于区间的和 $\bigcup [t_k, t_{k+1})$ 上，$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots$，$t_n \to \infty$ (假设半马尔科夫过程是规则的)，且对一切 k 存在函数 $x_k(t) \in \mathscr{F}$，使当$0 \leqslant t < t_{k+1} - t_k$ 时，$x(t - t_k) = x_k(t)$；而 $\mathscr{N}^*$为 $\mathscr{F}^*$ 中的柱集所产生的σ 代数．这样的测度将依赖于 x 和 y，后者分别是马尔科夫和半马尔科夫过程的初始值．

设 $\mathscr{F}_{\mathscr{Y}}$ 为取值于 $\mathscr{Y}$ 的逐段为常数的函数 $y(t)$ 的集合．令 $y(t) = y_k$，如果 $\zeta_k \leqslant t < \zeta_{k+1}$，$0 = \zeta_0 < \zeta_1 < \cdots < \zeta_n < \cdots$，

$\zeta_n \uparrow \infty$. 我们用下面的方法把 $\{\mathscr{F}^*, \mathscr{N}^*\}$ 上的测度 $\mathbf{P}_x^{y(\cdot)}$ 与函数 $y(\cdot)$ 联系起来：如果

$$A = \bigcap_{k=0}^{n} \theta_{\zeta_k} A_k,$$

(这里 A_k 为 $\mathscr{F}^*$ 中的柱集，它由 $0 \leqslant t < \zeta_{k+1} - \zeta_k$ 时的 $x(t)$ 的值确定)，则

$$\mathbf{P}_x^{y(\cdot)}(A) = \int \mathbf{P}_x^{y_0}\{A_0 \cap C_{\zeta_1}(dx_1)\} \int \mathbf{P}_{x_1}^{y_1}\{A_1 \cap C_{\zeta_2-\zeta_1}(dx_2)\}$$

$$\times \cdots \times \int \mathbf{P}_{x_{n-1}}^{y_{n-1}}\{A_{n-1} \cap C_{\zeta_n-\zeta_{n-1}}(dx_n)\}\mathbf{P}_{x_n}^{y_n}(A_n),$$

$$C_t(B) = \{x(\cdot); x(t) \in B\}. \tag{36}$$

容易看出，$\mathbf{P}_x^{y(\cdot)}(A)$ 是 $\mathscr{F}_{\mathscr{Y}}$ 上的 $\mathscr{N}_{\mathscr{Y}}$ 可测函数，其中 $\mathscr{N}_{\mathscr{Y}}$ 为 $\mathscr{F}_{\mathscr{Y}}$ 中的柱集产生的 σ 代数. 因此积分

$$\mathbf{P}_{y,x}(A) = \int \mathbf{P}_x^{y(\cdot)}(A)\mu_{\mathscr{Y}}(dy(\cdot)), \tag{37}$$

是有意义的，这里 $\mu_{\mathscr{Y}}(\cdot)$ 为 $\{\mathscr{F}_{\mathscr{Y}}, \mathscr{N}_{\mathscr{Y}}\}$ 上之测度，它对应于半马尔科夫过程的分量.

为确定过程的边缘分布我们再次计算函数

$$\mathbf{M}_{y,x} f_1(z(t_1)) \cdots f_m(z(t_m))$$

(关于 $t_1, \cdots, t_m$) 的 Laplace 变换(其中 $f_1, \cdots, f_m$ 为定义于 $\mathscr{X}$ 上的有界 $\mathfrak{B}$ 可测函数)：

$$L_{y,x}(f_1, \cdots, f_m; \lambda_1, \cdots, \lambda_m)$$

$$= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \mathbf{E}_{y,x} f_1(z(t_1)) \cdots f_m(z(t_m)) e^{-\lambda_1 t_1 - \cdots - \lambda_m t_m} dt_1 \cdots dt_m$$

$$= \mathbf{E}_{y,x} \prod_{k=1}^{m} \int_0^\infty f_k(z(t)) e^{-\lambda_k t} dt.$$

我们利用以前的记号： $0 = \zeta_0 < \zeta_1 < \cdots$ 为半马尔科夫过程的跳跃时刻，$y_n = y(\zeta_n)$. 设 $\zeta_n \uparrow \infty$，即设半马尔科夫过程是规则的. 这时

$$\int_0^\infty f_k(z(t))\, e^{-\lambda_k t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_k \zeta_n} \int_{\zeta_n}^{\zeta_{n+1}} f_k(x(t; y_n)) e^{-\lambda(t-\zeta_n)} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_k \xi_n} \theta_{\zeta_n} \int_0^{\zeta_1} f_k(x(t,\ y_0)) e^{-\lambda t} dt,$$

这里 θ_{ζ_n} 为半马尔科夫过程的推移算子，$\theta_{\zeta_n} x(t) = x(t + \zeta_n)$.

记

$$\mathbf{E}_x^{(y)} \chi_B(x_s) \int_0^s f(x(t)) e^{-\lambda t} dt = R_\lambda^{(y)}(s,\ B) f(x).$$

容易证明

$$V_{\lambda_1 \cdots, \lambda_k}^y (s,\ x,\ B;\ f_1,\ \cdots,\ f_k)$$

$$= \mathbf{E}_x^{(y)} \chi_B(x_s) \prod_{j=1}^k \int_0^s f_j(x(t)) e^{-\lambda_j t} dt$$

$$= S_{1,\cdots,k} \int_{0<s_1<\cdots<s_k<s} \cdots \int d_{s_1} \int R_{\lambda_1}^y(s_1, dx_1) f_1(x) \cdots d_{s_k} R_{\lambda_k}^y(s_k - s_{k-1}, B) f_k(x_{k-1}),$$

其中 $S_{1,\cdots,k}$ 表示对组码 $1,\cdots,k$ 的一切排列求和.

我们有

$$L_{y,x}(f_1,\ \cdots,\ f_m;\ \lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_m)$$

$$= E_{y,x} \prod_{k=1}^m \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_k \zeta_n} \theta_{\zeta_n} \int_0^{\zeta_1} f_k(x(t, y_0)) e^{-\lambda_k t} dt$$

$$= \sum_{n_1,\cdots,n_m} \mathbf{E}_{y,x} \prod_{k=1}^m e^{-\lambda_k \zeta_{n_k}} \theta_{\zeta_{n_k}} \int_0^{\zeta_1} f_k(x(t,\ y_0)) e^{-\lambda_k t} dt$$

$$= \sum_{n_1,\cdots,n_m} L_{y,x}^{(n_1,\cdots,n_m)}(f_1,\ \cdots, f_m;\ \lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_m).$$

设 $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_m$ 及

$$n_1 = \cdots = n_{i_1} = N_1 < \cdots < n_{i_1+\cdots+i_{r-1}+1} = \cdots = n_m = N_r.$$

这时，若令 $\bar{\lambda}_k = \Sigma \lambda_i \delta_{N_k i}$，$\lambda_j^{(k)} = \lambda_{i_1+\cdots+i_{k-1}+j}$，$f_j^{(k)} = f_{i_1+\cdots+i_{k-1}+j}$，我们可得

$$L_{y,x}^{(n_1,\cdots,n_m)}(f_1,\ \cdots,\ f_m;\ \lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_m)$$

$$= \mathbf{E}_{y,x} \mathbf{E}_{y,x} \left(\prod_{k=1}^m e^{-\lambda_k \zeta_{n_k}} \theta_{\zeta_{n_k}} \int_0^{\zeta_1} f(x(t,\ y_0)) e^{-\lambda_k t} dt \,\middle|\, y_n,\ \zeta_n,\ n = 0,\ 1,\ \cdots \right)$$

$$= \mathbf{E}_{y,x}\mathbf{E}_{y,x}\left(\prod_{k=1}^{r} e^{-\lambda_k \zeta_{N_k}} \prod_{j=1}^{m} \left[\theta_{\zeta_{N_k}} \int_0^{\zeta_1} f_j(x(t, y_0)) e^{-\lambda_j t} dt\right]^{\delta_{N_k}^j} \middle| y_n, \zeta_n, n = 0, 1, \cdots\right)$$

$$= \mathbf{E}_{y,x} \exp\left\{-\sum_{k=1}^{r} \zeta_{N_k} \sum_{j=k}^{r} \bar{\lambda}_j\right\} \int\cdots\int V^{y_{N_1}}_{\lambda_1^{(1)},\cdots,\lambda_{i_1}^{(1)}}(\zeta_{N_1+1} - \zeta_{N_1}, x, dx_1; f_1^{(1)}, \cdots, f_{i_1}^{(1)}) P^{y_{N_1+1},\cdots,y_{N_2}}_{\zeta_{N_1},\cdots,\zeta_{N_2}}(x_1, dx_2) V^{y_{N_2}}_{\lambda_1^{(2)},\cdots,\lambda_{i_2}^{(2)}}(\zeta_{N_2+1} - \zeta_{N_2}, x_1, dx_2; f_1^{(2)}, \cdots, f_{i_2}^{(2)}) \times \cdots \times V^{y_{N_r}}_{\lambda_1^{(r)},\cdots,\lambda_{i_r}^{(r)}}(\zeta_{N_r+1} - \zeta_{N_r}, x_{r-1}, \mathscr{X}; f_1^{(r)}, \cdots, f_{i_r}^{(r)}),$$

这里，如 $N > n$，

$$P^{y_n,\cdots,y_N}_{\zeta_n,\cdots,\zeta_N}(x, B) = \int\cdots\int P^{y_n}(\zeta_{n+1} - \zeta_n, x, dx_{n+1}) \cdots P^{y_{N-1}}(\zeta_N - \zeta_{N-1}, x_{N-1}, B).$$

而 $n = N$ 时，$P^{y_n,y_N}_{\zeta_n,\zeta_N}(x, B) = \chi_B(x)$.

记

$$\mathbf{E}_{y,x} P^{y_0,\cdots,y_N}_{\zeta_0,\cdots,\zeta_N}(x, B) e^{-\lambda \zeta_N} \chi_C(y_N) = Q^{(N)}_{y,x}(\lambda, C, B).$$

这时，在上述假设下，对 $n_1, \cdots, n_m$ 有

$$L^{(n_1,\cdots,n_m)}_{y,x}(f_1, \cdots, f_m; \lambda_1, \cdots, \lambda_m) = \int Q^{(N_1)}_{y,x}\left(\sum_{k=1}^{r} \bar{\lambda}_k, dy_1, dx_1\right) V^{y_1}_{\lambda_1^{(1)},\cdots,\lambda_{i_1}^{(1)}}(t_1, x_1, d\bar{x}_1; f_1^{(1)}, \cdots, f_{i_1}^{(1)}) d_{t_1} F_{y_1,\bar{y}_1}(t_1) \pi(y_1, d\bar{y}_1) \times \cdots \int Q^{(N_r - N_{r-1})}_{\bar{y}_{r-1},\bar{x}_{r-1}}(\bar{\lambda}_r, dy_r, dx_r) V^{y_r}_{\lambda_1^{(r)},\cdots,\lambda_{i_r}^{(r)}}(t_r, x_r, \mathscr{X}; f_1^{(r)}, \cdots, f_{i_r}^{(r)}) d_{t_r} F_{y_r,\bar{y}_r}(t_r) \pi(y_r, d\bar{y}_r).$$

为得到 $L^{(n_1,\cdots,n_m)}$ 当 $n_1, \cdots, n_m$ 间有其它关系时的值，只需指出 L 对 n，f 和 λ 的组码的同样的排列是不变的。

利用公式 (36)，(37)，类似于在引理 2 中所作的，可以证实三维过程 $(x(t, y(t)); y(t); \xi(t))$ 是马尔科夫函数，它有如下的齐次转移概率：

$$\mathbf{P}\{x(t+h, y(t+h))\in B, y(t+h)\in C, \xi(t+h)\in \Lambda | x(t, y(t)), y(t), \xi(t)\} = P(h; (x(t, y(t)); y(t); \xi(t)), B\times C\times \Lambda),$$

其中 $P(h; (x; y; s), B\times C\times \Lambda) = \mathbf{E}_{y,s}\mathbf{P}_x^{y(\cdot)}\{C_h(B)\}$，而 $\mathbf{E}_{y,s}$ 为对于概率 $\mathbf{P}_{y,s}$ 的数学期望；概率 $\mathbf{P}_{y,s}$ 对应于条件 $y(0)=y$，$\xi(0)=s$ 的半马尔科夫过程 $(y(t); \xi(t))$，$C_h(B)$ 为 $\mathscr{F}^*$ 中使 $x(h)\in B$ 的函数 $x(t)$ 的集合.

这样一来，若记 $\mathfrak{Z}=\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ 与 $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\times\mathfrak{L}$，则 $(z(t); \xi(t))$ 为相空间 $\mathfrak{Z}\times\mathscr{R}_+$ 中的马尔科夫过程，这里 $z(t)=x((t, y(t)); y(t))$，而分量 $\xi(t)$ 逐段线性且具有半马尔科夫过程时间分量的所有性质. 所以，自然可给出具有半马尔科夫随机扰动的过程的下列一般定义.

假设在空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})\times(\mathscr{R}_+, \mathfrak{B}_+)$ 中已给齐次马尔科夫过程 $\{\mathscr{F}_{(\mathscr{X},\mathscr{R}+)}, \mathscr{N}_{(\mathscr{X},\mathscr{R}+)}, \mathbf{P}_{x,s}\}$. $\mathscr{F}_{(\mathscr{X},\mathscr{R}+)}$ 为其轨道 $(x(t); \xi(t))$ 的集合，满足 $\xi(t)\geqslant 0$，右连续且对一切 t 可找到区间 $[\alpha, \beta)\ni t$，在该区间上 $\xi(s)=\xi(\alpha)+s-\alpha$；如 α 为 $\xi(s)$ 的间断点，则 $\xi(\alpha)=0$. $\mathscr{N}_{(\mathscr{X},\mathscr{R}+)}$ 表示由柱集产生的、$\mathscr{F}_{(\mathscr{X},\mathscr{R}+)}$ 的子集的 σ 代数. 如前面一样，分量 $x(t)$ 称为过程的相位分量，而分量 $\xi(t)$ 称为过程的时间分量. 我们还设 $\mathscr{X}$ 为拓扑空间、过程 $(x(t); \xi(t))$ 右连续且为强马尔科夫过程.

记 τ 为过程 $\xi(t)$ 首次等于 0 的时刻. 过程 $(x(t); \xi(t))$ 在 $[0, \tau)$ 上也是齐次马尔科夫(中断的)过程.

引进函数

$$Q_{x,s}(t, B_1, B_2) = \mathbf{P}_{x,s}\{\tau > t, x(t)\in B_1, x(\tau)\in B_2\}. \quad (38)$$

通过这个函数可以确定过程$(x(t); \xi(t))$的预解式，该过程在 $\xi(t)$ 的跳跃点的第一个聚点 ζ^1 处中断. 实际上，如 $f(x, s)$ 为 $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}_+$ 可测有界函数，则

$$\mathbf{R}_\lambda^1 f(x, s) \overset{\frown}{=} \mathbf{E}_{x,s}\int_0^{\zeta^1} e^{-\lambda t} f(x(t), \xi(t))dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_{x,s} e^{-\lambda\zeta_n}\int_{\zeta_n}^{\zeta_{n+1}} f(x(t), \xi(t)) e^{-\lambda(t-\zeta_n)}dt,$$

其中 $\zeta_0 = 0$，$\zeta_1 = \tau$，$\zeta_{n+1} = \zeta_n + \theta_\tau \zeta_n$，$\zeta_n$ 为马尔科夫时间.因为对 $n \geqslant 1$

$$\mathbf{E}_{x,s}\left(\int_{\zeta_n}^{\zeta_{n+1}} f(x(t), \xi(t)) e^{-\lambda(t-\zeta_n)} dt \,\middle|\, \mathscr{N}_{\zeta_n}\right)$$

$$= \mathbf{E}_{x(\zeta_n),0} \int_0^\tau f(x(t), t) e^{-\lambda t} dt$$

$$= \mathbf{E}_{x(\zeta_n),0} \int_0^\infty f(x(t), t) e^{-\lambda t} \chi_{\{\tau > t\}} dt$$

$$= \iint\limits_0^\infty Q_{x(\zeta_n),0}(t, dx_1, \mathscr{X}) f(x_1, t) e^{-\lambda t} dt,$$

$$\mathbf{E}_{x,s} e^{-\lambda \zeta_n} g(x(\zeta_n)) = \int K_\lambda^{(n)}(x, s, dx_1) g(x_1),$$

其中

$$K_\lambda^{(1)}(x, s, B) = \mathbf{E}_{x,s} e^{-\lambda\tau} \chi_B(x_\tau)$$

$$= \mathbf{E}_{x,s}\left(1 - \lambda \int_0^\tau e^{-\lambda t} dt\right) \chi_B(x_\tau)$$

$$= Q_{x,s}(0, \mathscr{X}, B) - \lambda \int_0^\infty Q_{x,s}(t, \mathscr{X}, B) e^{-\lambda t} dt,$$

$$K_\lambda^{(n)}(x, s, B) = \int K_\lambda^{(n-1)}(x, s, dy) K_\lambda^{(1)}(y, 0, B),$$

而

$$\mathbf{E}_{x,s} \int_0^\tau f(x(t), s + t) e^{-\lambda t} dt$$

$$= \iint\limits_0^\infty Q_{x,s}(t, dx_1, \mathscr{X}) f(x_1, t + s) e^{-\lambda t} dt,$$

所以有

$$\mathbf{R}_\lambda^1 f(x, s) = \iint\limits_0^\infty Q_{x,s}(t, dx_1, \mathscr{X}) f(x_1, t + s) e^{-\lambda t} dt,$$

$$+ \sum_{n=1}^\infty \int K_\lambda^{(n)}(x, s, dx_1) \iint\limits_0^\infty Q_{x_1,0}(t, dx_2, \mathscr{X}) f(x_2, t) e^{-\lambda t} dt. \quad (39)$$

如 $\zeta^1 = +\infty$，则过程称为规则过程. 如 $\zeta^1 < \infty$，则为了构

造性态在 $[0, \tau]$ 上被已给函数 $Q_{x,s}(t, B_1, B_2)$ 所确定的一切过程，还必须研究过程的调和函数. 与在引理3中一样，可以指出，过程的一切有界的 λ 调和函数的集合与形如

$$f(x, s) = \int K_\lambda^{(1)}(x, s, dy) f(y), \tag{40}$$

的函数集重合，这里 $f(y)$ 为有界函数，它满足

$$f(x) = \int K_\lambda^{(1)}(x, 0, dy) f(y). \tag{41}$$

知道了过程的调和函数及 $\mathbf{R}_\lambda^1$，就可以用第二章§5中指出的方法来构造一切具有离散随机扰动及已给函数 $Q_{x,s}(t, B_1, B_2)$ 的过程.

具有离散随机扰动的过程的遍历性定理 设 $(x(t); \xi(t))$ 为相空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 中具有离散随机扰动的过程. 我们假定它是规则的，即在每一有限区间上 $\xi(t)$ 只有有限多个跳跃点. 我们来研究当 $T\to\infty$时，平均值

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x(t), \xi(t))\, dt \tag{42}$$

的行为，这里 $f(x, s)$ 是 $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}_+$可测函数. 下面将找出当 $T\to\infty$ 时(42)式以概率1有极限的充分条件，这一极限形如

$$S(f) = \frac{\displaystyle\iiint_0^\infty Q_{x,0}(t, dy, \mathscr{X}) f(y, t)\, dt\, \pi(dx)}{\displaystyle\iint_0^\infty Q_{x,0}(t, \mathscr{X}, \mathscr{X})\, dt\, \pi(dx)}, \tag{43}$$

其中 $Q_{x,0}(t, B_1, B_2)$ 与由关系式(38)及具有离散随机扰动的过程相联系的函数，而 $\pi(dx)$ 为 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 中具有转移概率

$$\pi(x, B) = Q_{x,0}(0, \mathscr{X}, B) \tag{44}$$

的马尔科夫链的平稳分布，即对一切 $B\in\mathfrak{B}$

$$\pi(B) = \int \pi(dx)\pi(x, B). \tag{45}$$

为使(43)式有意义必须存在满足(45)的测度 π，而函数 $f(y, t)$ 应使

$$\iiint_0^\infty Q_{x,0}(t, dy, \mathscr{X})|f(y, t)|dt\pi(dx) < \infty. \tag{46}$$

回忆下面事实：($\mathscr{X}$, $\mathfrak{B}$) 中的马尔科夫链 $\{x_n\}$，如果它有平稳分布 $\pi(dx)$，且对一切 $x \in \mathscr{X}$ 及 $\mathfrak{B}$ 可测函数 f $\left(对此\ f,\ \int |f(x)|\pi(dx) < \infty\right)$ 以概率 $\mathbf{P}_{x,0} = 1$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int f(x)\pi(dx),$$

则称此链为**遍历的**

定理 2 设 ($\mathscr{X}$, $\mathfrak{B}$) 中具有一步转移概率 $\pi(x, B)$ 的马尔科夫链$\{x_n\}$是遍历的，它有平稳分布$\pi(B)$，函数$Q_{x,0}(t, B_1, B_2)$使得

$$\iint_0^\infty Q_{x,0}(t, \mathscr{X}, \mathscr{X})dt\pi(dx) < \infty,$$

而函数 $f(x, t)$ $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}_+$ 可测且满足条件 (46). 则对几乎一切 x（关于测度 π），以概率 $\mathbf{P}_{x,0} = 1$ 有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x(t), \xi(t))dt = S(f).$$

证. 考虑量

$$\eta_k = \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} f(x(t), \xi(t))dt$$

(ζ_k 是在前一小节中定义的). 记 $\mathscr{N}_{\zeta_k}$ 为过程到时刻 ζ_k（ζ_k 为马尔科夫时间）以前的行为所确定的事件的 σ 代数. 这时由过程的强马尔科夫性，我们有

$$\mathbf{E}_{x,0}(\eta_k|\mathscr{N}_{\zeta_k}) = \mathbf{E}_{x(\zeta_k),0}\int_0^\tau f(x(t), t)dt = \varphi(x(\zeta_k)),$$

这里

$$\varphi(x) = \mathbf{E}_{x,0}\int_0^\infty f(x(t), t)\chi_{\{\tau>t\}}dt$$

$$= \int_0^\infty\int Q_{x,0}(t, dy, \mathscr{X})f(y, t)\,dt$$

（由条件 (46)，函数 $\varphi(x)$ 对几乎一切 x（关于测度 π）是确定的）.

令

$$\psi_k = \eta_k - \varphi(x(\zeta_k)),$$

可证明依测度 $\mathbf{P}_{x,0}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi_k = 0$$

对几乎一切 x (关于测度 π) 成立。

因为

$$\mathbf{E}_{x,0}|\eta_k| \leqslant \mathbf{E}_{x,0}\mathbf{E}_{x(\zeta_k),0}\int_0^{\tau}|f(x(t),t)|dt$$

$$= \int \pi^{(k)}(x,dy)\iint_0^{\infty} Q_{y,0}(t,dz,\mathscr{X})|f(z,t)|dt,$$

这里

$$\pi^{(k)}(x,B) = \int \pi^{(k-1)}(x,dy)\pi(y,B),$$

$$\pi^{(1)}(x,B) = \pi(x,B)$$

又

$$\int \pi^{(k)}(x,B)\pi(dx) = \pi(B),$$

所以

$$\int \pi(dx)\mathbf{E}_{x,0}|\eta_k| = \int \pi(dy)\iint_0^{\infty} Q_{y,0}(t,dz,\mathscr{X})|f(z,t)|dt < \infty,$$

亦即对几乎一切 x (关于测度 π) $\mathbf{E}_{x,0}|\eta_k| < \infty$.

以下,我们还须有

引理 4 设 $G(t)$ 为 $(-\infty,\infty)$ 上二次连续可微的偶函数,它满足条件

a) $G(t) \geqslant 0$, $G(0) = 0$;

b) t 由 0 增加到 ∞ 时, $G'(t) \geqslant 0$ 为变化缓慢的函数, 且 $G'(t)\uparrow\infty$.

c) $G''(t) > 0$ 且 $t\uparrow+\infty$ 时, $G''(t)\downarrow 0$.

这时,存在常数 L,使对一切 s 与 t 成立不等式

$$\frac{G(t+s)-G(t)-G'(t)s}{G(s)} \leqslant L, \tag{47}$$

证．由于G为偶函数，我们只需考虑$t>0$的情况．如$t+s>0$，则函数$g(t)=G(t+s)-G(t)-G'(t)s$对t是下降的，这由于

$$g'(t)=G'(t+s)-G'(t)-G''(t)s$$
$$=s[G''(t+\theta s)-G''(t)]\leqslant 0\qquad(0<\theta<1).$$

因此 $g(t)\leqslant g(0)=G(s)-G'(0)s\leqslant G(s)$，当$s>0$时成立，于是(47)对$L=1$成立．

如$t>0$，$s<0$，$t+s>0$，则

$$g(t)\leqslant g(-s)=-G(-s)+sG'(-s)\leqslant 0^{*)}$$

如$t>0$，而$t+s<0$，则

$$\frac{G(t+s)-G(t)-G'(t)s}{G(s)}\leqslant\frac{|G(|t+s|)-G(|t|)|}{G(|s|)}$$
$$+\frac{G'(|s|)|s|}{G(s)}.$$

由于$|t+s|<|s|$，$t<|s|$及G是单调的，第一个被加项不超过1，而第二个被加项对s有界，这是因为由$G''(s)$的连续性有$\lim\limits_{s\downarrow 0}(G'(s)s)/G(s)=2$，由$G'(s)$变化缓慢有$\lim\limits_{s\uparrow\infty}(G'(s)s)/G(s)=1$．引理证完．

现在我们再回到定理的证明来．设G满足引理4的条件，且

$$\int\pi(dx)\mathbf{E}_{x,0}G(\eta_1)<\infty.$$

这时，由(47)可得

$$\int\pi(dx)\mathbf{E}_{x,0}G\left(\frac{1}{n}\sum_1^m\phi_k\right)$$
$$\leqslant\int\pi(dx)\mathbf{E}_{x,0}\left[G\left(\frac{1}{n}\sum_1^{m-1}\phi_k\right)\right.$$

---

*) 此式有误．应改为 $g(t)\leqslant g(-s)=-G(-s)-sG'(-s)$，所以

$$\frac{G(t+s)-G(t)-G'(t)s}{G(s)}\leqslant -1+\frac{G'(|s|)|s|}{G(s)}$$

再与下面类似讨论可知有界．——译者注

$$+ G'\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{m-1}\psi_k\right)\frac{1}{n}\psi_m + LG\left(\frac{1}{n}\psi_m\right)\Bigg].$$

由于 $\sum_{1}^{m-1}\psi_k$ 为 $\mathscr{N}_{\zeta_m}$ 可测变量，故

$$\mathbf{E}_{x,0}G'\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{m-1}\psi_k\right)\psi_m = \mathbf{E}_{x,0}G'\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{m-1}\psi_k\right)\mathbf{E}_{x(\zeta_m),0}\psi_m = 0.$$

因此

$$\int \pi(dx)\mathbf{E}_{x,0}G\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{m}\psi_k\right)$$

$$\leqslant L\sum_{k=1}^{m}\int \pi(dx)\mathbf{E}_{x,0}G\left(\frac{1}{n}\psi_k\right)$$

$$= L\sum_{k=1}^{m}\iint \pi(dx)\pi^{(k)}(x,dy)\mathbf{E}_{y,0}G\left(\frac{1}{n}\psi_1\right)$$

$$= Lm\int \pi(dx)\mathbf{E}_{x,0}G\left(\frac{1}{n}\psi_1\right).$$

令 $m(\Lambda) = \int \pi(dx)\mathbf{P}_{x,0}\{\psi_1 \in \Lambda\}$. 于是

$$\int \pi(dx)\mathbf{E}_{x,0}G\left(\frac{1}{n}\psi_1\right) = \int G\left(\frac{1}{n}t\right)m(dt).$$

由 $G(t)$ 的性质可知，$G(t)$ 是次可加的：对 $t>0$，$s>0$，

$$G(t+s) \leqslant G(t) + G(s).$$

所以有

$$nG\left(\frac{1}{n}t\right) \leqslant G(t),$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty} nG\left(\frac{1}{n}t\right) = G'(0) = 0,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\int \pi(dx)\,\mathbf{E}_{x,0}G\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\psi_k\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \int G\left(\frac{1}{n} t\right) m(dt) = 0.$$

这就证明了 $\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\psi_k \to 0$（依概率 $\mathbf{P}_{x,0}$）对几乎一切 x（对测度 π）成立。

现记 $\mathbf{P}_{\pi,0}$ 与 $\mathbf{E}_{\pi,0}$ 分别为 $\{\mathscr{F}_{(\mathscr{X},\mathscr{R}_+)}, \mathscr{N}_{(\mathscr{X},\mathscr{R}_+)}\}$ 上之概率与关于此概率的数学期望，它由关系式

$$\mathbf{P}_{\pi,0}(A) = \int \pi(dx)\mathbf{P}_{x,0}(A)$$

确定. 这时，$\{x(\zeta_n)\}$ 组成遍历马尔科夫链，且因为

$$\mathbf{P}_{\pi,0}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\varphi(x(\zeta_k)) = \int \varphi(x)\pi(dx)\right\} = 1,$$

所以对几乎一切 x（对测度 π）以概率 $\mathbf{P}_{x,0} = 1$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(x(\zeta_k)) = \int \varphi(x)\pi(dx),$$

及依概率 $\mathbf{P}_{x,0}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\zeta_n} f(x(s), \xi(s))ds$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\psi_k + \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\varphi(x(\zeta_k))\right) = \int \varphi(x)\pi(dx).$$

令 $f \equiv 1$，可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\zeta_n = \iint_0^{\infty} \mathbf{P}_{x,0}(t, \mathscr{X}, \mathscr{X})dt\pi(dx)$$

依测度 $\mathbf{P}_{x,0}$，对几乎一切 x（对测度 π）成立。 于是对几乎一切 x（对测度 π），依概率 $\mathbf{P}_{x,0}$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\zeta_n}\int_0^{\zeta_n} f(x(s), \xi(s))ds = S(f).$$

为证明定理，现在只需证明对几乎一切 x（对测度 π），以概率 $\mathbf{P}_{x,0} = 1$ 存在极限

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x(s),\ \xi(s))ds.$$

考虑 $\mathscr{X}\times\mathscr{R}_+$ 中由等式

$$\pi(B\times\Lambda)=\iint_\Lambda Q_{x,0}(t,\ B,\mathscr{X})dt\pi(dx)\Big/\iint_0^\infty Q_{x,0}(t,\ \mathscr{X},\ \mathscr{X})dt\pi(dx) \quad (48)$$

确定的测度.

我们可证明这个测度对过程 $(x(t);\ \xi(t))$ 是平稳的. 为此只要证明

$$\int\pi(dx\times ds)\mathbf{E}_{x,s}f(x(t),\xi(t))=\int\pi(dx\times ds)f(x,s) \quad (49)$$

对一切有界 $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}_+$ 可测函数 $f(x,s)$ 成立. 容易看出

$$\mathbf{E}_{x,s}f(x(t),\ \xi(t))=\int Q_{x,s}(t,dy,\mathscr{X})f(y,t+s)$$

$$-\int_0^t\int d_uQ_{x,s}(u,\mathscr{X},dy)\mathbf{E}_{y,0}f(x(t-u),\xi(t-u)). \quad (50)$$

其次

$$\int Q_{z,0}(s,dx,\mathscr{X})Q_{x,s}(t,B,B_1)=Q_{z,0}(t+s,\ B,\ B_1),$$

$$\int_0^\infty ds\int Q_{z,0}(s,\ dx,\ \mathscr{X})\int_0^t\int d_uQ_{x,s}(u,\mathscr{X},dy)\times$$

$$\varphi(y,\ u)=\int_0^\infty ds\iint_0^t d_uQ_{z,0}(s+u,\ \mathscr{X},\ dy)\varphi(y,\ u)$$

$$=-\int_0^t\int Q_{z,0}(u,\ \mathscr{X},\ dy)\varphi(y,\ u)du$$

对一切 $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}_+$ 可测有界函数 φ 成立. 所以令

$$c=\int_0^\infty\int\pi(dz)Q_{z,0}(t,\ \mathscr{X},\ \mathscr{X})dt,$$

我们有

$$\iint\pi(dx\times ds)\mathbf{E}_{x,s}f(x(t),\ \xi(t))$$

$$
= \frac{1}{c}\int_0^\infty \int Q_{z,0}(t+s, dy, \mathscr{X}) f(y, t+s) ds\pi(dz)
$$

$$
+ \frac{1}{c}\int_0^t \iint Q_{z,0}(u, \mathscr{X}, dy) \mathbf{E}_{y,0} f(x(t-u), \xi(t-u)) du\pi(dz)
$$

$$
= \int_t^\infty \int \pi(dx \times ds) f(x, s)
$$

$$
+ \frac{1}{c}\int_0^t \iint Q_{z,0}(0, \mathscr{X}, dy) \mathbf{E}_{y,0} f(x(t-u), \xi(t-u)) du\pi(dz) + \frac{1}{c}\int_0^t \iint [Q_{z,0}(u, \mathscr{X}, dy) - Q_{z,0}(0, \mathscr{X}, dy)] \mathbf{E}_{y,0} f(x(t-u), \xi(t-u)) du\pi(dz).
$$

根据测度 $\pi(dz)$ 的定义有

$$
\int Q_{z,0}(0, \mathscr{X}, dy)\pi(dz) = \pi(dy).
$$

此外，

$$
\left| \int [Q_{z,0}(0, \mathscr{X}, dy) - Q_{z,0}(u, \mathscr{X}, dy)] F(y) \right| \leqslant \|F\|(1 - Q_{z,0}(u, \mathscr{X}, \mathscr{X})),
$$

又由 (50) 得

$$
\left| \mathbf{E}_{y,0} f(x(t-u), \xi(t-u)) - \int Q_{y,0}(t-u, dy, \mathscr{X}) f(y, t-u) \right| \leqslant \|f\|(1 - Q_{y,0}(t-u, \mathscr{X}, \mathscr{X})).
$$

因此

$$
\int_0^\infty \int \pi(dx \times ds) \mathbf{E}_{x,s} f(x(t), \xi(t))
$$

$$
= \int_t^\infty \int \pi(dx \times ds) f(x, s)
$$

$$
+ \frac{1}{c}\int_0^t \int \pi(dy) Q_{y,0}(t-u, dz, \mathscr{X}) f(z, t-u) du
$$

$$
+ O\left(\int_0^t \int [1 - Q_{y,0}(u, \mathscr{X}, \mathscr{X})] du\pi(dy) \right)
$$

$$= \int_0^\infty \int \pi(dx \times ds) f(x, s) + O\left(\int_0^t \int [1 - Q_{y,0}(u, \mathscr{X}, \mathscr{X})] du \pi(dy)\right). \quad (51)$$

记

$$\int_0^\infty \int \pi(dx \times ds) \mathbf{E}_{x,s} f(x(t), \xi(t)) = F(t).$$

在 (51) 中用函数 $\mathbf{E}_{x,s} f(x(T), \xi(T))$ 代换 $f(x, s)$，可得

$$|F(t+T) - F(T)| \leqslant G \int_0^t [1 - Q_{y,0}(u, \mathscr{X}, \mathscr{X})] du \pi(dy), \quad (52)$$

这里常数 c_1 不依赖于 t. 由 (51) 可推得

$$\lim_{t \downarrow 0} F(t) = \int_0^\infty \int \pi(dx \times ds) \mathbf{E}_{x,s} f(x(t), \xi(t)),$$

而由 (52) 可推得 $F'(t) = 0$. 因此

$$F(t) = F(+0) = \int_0^\infty \int \pi(dx \times ds) \mathbf{E}_{x,s} f(x(t), \xi(t)),$$

即 (49) 得证.

现在我们在概率空间 $\{\mathscr{F}_{(\mathscr{X}, \mathscr{R}+)}, \mathscr{N}_{(\mathscr{X}, \mathscr{R}+)}, \mathbf{P}_\pi\}$ 上考虑过程 $(x(t); \xi(t))$，$\mathbf{P}_\pi$ 对一切 $A \in \mathscr{N}_{(\mathscr{X}, \mathscr{R}+)}$ 由下式确定:

$$\mathbf{P}_\pi(A) = \int \pi(dx \times ds) \mathbf{P}_{x,s}(A).$$

此过程是强平稳的，这因为当 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，$C_k \in \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}_+$，$k = 1, \cdots, n$ 时

$$\int \pi(dx \times ds) \mathbf{P}_{x,s}\{(x(t_k); \xi(t_k)) \in C_k, k = 1, \cdots, n\}$$

$$= \int \pi(dx \times ds) \mathbf{E}_{x,s} \chi_{C_1}(x(t_1); \xi(t_1)) \times \mathbf{P}_{x(t_1), \xi(t_1)}\{(x(t_k - t_1); \xi(t_k - t_1)) \in C_k, k = 2, \cdots, n\} = \int \pi(dx, ds) \chi_{C_1}((x; s)) \times \mathbf{P}_{x,s}\{(x(t_k - t_1); \xi(t_k - t_1)) \in C_k, k = 2, \cdots, n\},$$

此即是

$$\mathbf{P}_\pi\{\theta_{t_1} A\} = \mathbf{P}_\pi(A).$$

因此，根据遍历定理（第一卷第二章§8）以概率 $\mathbf{P}_{\pi}=1$ 存在极限

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x(s),\ \xi(s))ds. \tag{53}$$

设 $\mathscr{F}'\subset\mathscr{F}_{(\mathscr{X},\mathscr{R}+)}$ 为使极限(53)存在的子集。显然，对一切 $t>0$，$\theta_t\mathscr{F}'=\mathscr{F}'$。因为

$$1=\int\pi(dx\times ds)\mathbf{P}_{x,s}(\mathscr{F}')$$

$$=\frac{1}{c}\int\pi(dz)\iint_0^\infty Q_{z,0}(s,\ dy,\ \mathscr{X})\mathbf{P}_{y,s}(\mathscr{F}')ds,$$

$$\int\pi(dz)\int_0^\infty Q_{z,0}(s,\ \mathscr{X},\ \mathscr{X})ds$$

$$=\int\pi(dz)\iint_0^\infty Q_{z,0}(s,\ dy,\ \mathscr{X})\mathbf{P}_{y,s}(\mathscr{F}')ds,$$

故在 $\mathscr{R}_+$ 上对几乎一切 z（对测度 π）及一切 s（对 Lebesgue 测度）有

$$\int Q_{z,0}(s,\ dy,\ \mathscr{X})\mathbf{P}_{y,s}(\mathscr{F}')=1.$$

但对一切 $A\in\mathscr{N}_{(\mathscr{X},\mathscr{R}+)}$ 有

$$\int Q_{z,0}(s,\ dy,\ \mathscr{X})\mathbf{P}_{y,s}(A)\leqslant\mathbf{P}_{z,0}(A).$$

所以 $\mathbf{P}_{z,0}(\mathscr{F}')=1$ 对几乎一切 z（对测度 π）成立。剩下的只要指出，对几乎一切 x（对测度 π）以概率 $\mathbf{P}_{x,0}=1$，$\zeta_n\to+\infty$，因为 ζ_n 随 n 而增大且依测度 $\mathbf{P}_{x,0}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\zeta_n=\iint_0^\infty Q_{x,0}(t,\ \mathscr{X},\ \mathscr{X})dt\pi(dx)$$

对几乎一切 x（对测度 π）成立。所以极限(53)与极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\zeta_n}\int_0^{\zeta_n}f(x(s),\ \xi(s))ds$$

相同，而后者等于 $S(f)$，这因为极限号下的量依概率 $\mathbf{P}_{x,0}$ 对几乎一切 x（对测度 π）收敛于 $S(f)$。定理全部证完。

由已证明的定理容易导出半马尔科夫过程与跳跃马尔科夫过程的遍历定理。

§4. 具有离散分量的马尔科夫过程

定义 基本特征. 设$(\mathscr{Z},\mathfrak{B}_{\mathscr{Z}})$为带有 Borel 集的$\sigma$代数的某拓扑空间,而$(\mathscr{Y},\mathfrak{B}_{\mathscr{Y}})$为带有离散拓扑的任意一个度量空间,$\sigma$代数$\mathfrak{B}_{\mathscr{Y}}$包含一切单点集. 记$\mathscr{X}=\mathscr{Z}\times\mathscr{Y}$, $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_{\mathscr{Z}}\times\mathfrak{B}_{\mathscr{Y}}$. $\mathscr{X}$也是拓扑空间. 空间$\mathscr{X}$的点记为$x=(z;y)$, $z\in\mathscr{Z}$, $y\in\mathscr{Y}$.

我们考虑相空间$(\mathscr{X},\mathfrak{B})$中的右连续强马尔科夫过程$\{\mathscr{F},\mathscr{N},\mathbf{P}_x\}$. 记$x(t)=(z(t);\ y(t))$为过程的轨道. 由于过程右连续及$\mathscr{Y}$中的拓扑离散,若$\tau$为$y(t)$首次离开$y(0)$点的时刻,则

$$\mathbf{P}_x(\tau>0)=1$$

对一切$x\in\mathscr{X}$成立.

上述类型的过程称为**具有离散分量**的马尔科夫过程.

上面引进的时刻τ满足条件: $t<\tau$时,$\theta_t\tau=\tau-t$,即τ为中断时刻. 因此,函数

$$Q_y(t,z,A)=\mathbf{P}_x\{\tau>t,z(t)\in A\},\ z\in\mathscr{Z},\ A\in\mathfrak{B}_{\mathscr{Z}}$$

对一切$y\in\mathscr{Y}$为$(\mathscr{Z},\mathfrak{B}_{\mathscr{Z}})$上的转移概率:

$$\begin{aligned}Q_y(t+s,z,A)&=\mathbf{P}_x\{\tau>t+s,z(t+s)\in A\}\\&=\mathbf{E}_x\chi_{\{\tau>t\}}\theta_t\chi_{\{\tau>s\}}\chi_A(z(s))\\&=\mathbf{E}_x\chi_{\{\tau>t\}}\mathbf{E}_{x(t)}\chi_{\{\tau>s\}}\chi_A(z(s))\\&=\mathbf{E}_x\chi_{\{\tau>t\}}Q_{y(t)}(s,\ z(s),\ A)\\&=\int Q_y(t,z,dz_1)Q_y(s,z_1,A).\end{aligned}$$

容易看出,$Q_y(t,z,A)$是齐次马尔科夫过程$\{\mathscr{F}_{\mathscr{Z}},\mathscr{N}_{\mathscr{Z}},\mathbf{P}_z^y\}$的转移概率,其中$\mathscr{F}_{\mathscr{Z}}$为定义于$[0,\tau)$上的函数$z(t)$的集合,$z(t)$与$(z(t);y(t))$的第一个分量相等;$\mathscr{N}_{\mathscr{Z}}$为$\mathscr{F}_{\mathscr{Z}}$中的柱集产生的$\sigma$代数;而测度$\mathbf{P}_z^y$对一切$C\in\mathscr{N}_{\mathscr{Z}}(t)$(这里$\mathscr{N}_{\mathscr{Z}}(t)$为$\mathscr{N}_{\mathscr{Z}}$在子集$\{\tau>t\}=\{z(\cdot):\ z(t)\in\mathscr{Z}\}$上的限制)由下式定义:

$$\mathbf{P}_z^y\{C\}=\mathbf{P}_x\{\{(z(\cdot);\ y(\cdot)):z(\cdot)\in C,\ \tau>t\}\}.$$

这样一来,依赖于参数y的一族马尔科夫过程$\{\mathscr{F}_{\mathscr{Z}},\mathscr{N}_{\mathscr{Z}},$

$\mathbf{P}_z^y\}$ 与过程 $\{\mathscr{F},\mathscr{N},\mathbf{P}_x\}$ 建立了联系。过程 $\{\mathscr{F}_\mathfrak{Z},\mathscr{N}_\mathfrak{Z},\mathbf{P}_z^y\}$ 自然可解释为过程 $x(t)$ 当第二个分量等于固定的 y 时，第一个分量 $z(t)$ 所形成的过程。

因过程 $x(t)$ 是强马尔科夫过程，故量 $x(\tau)$ 是确定的。我们引进函数

$$v_\lambda(x, B) = v_\lambda^{(y)}(z, B) = \mathbf{E}_x e^{-\lambda\tau}\chi_B(x_\tau), \tag{1}$$

$\lambda > 0$，$B \in \mathfrak{B}$，$x \in \mathscr{X}$。下面将证明，如果过程在其离散分量的无穷多个跳跃点的第一个聚点 ζ 时中断，那么转移概率 $Q_y(t, z, A)$ 与函数 (1) 可完全确定其预解式。假设对一切有界的 $\mathfrak{B}_\mathfrak{Z}$ 可测函数 g，

$$\mathbf{R}_\lambda^{(y)}g(z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int Q_y(t, z, dy)g(y)dt, \tag{2}$$

又对 $\mathscr{X}$ 上一切连续有界 $\mathfrak{B}$ 可测函数 f，

$$\mathbf{R}_\lambda f(x) = \mathbf{E}_x\int_0^\zeta e^{-\lambda t}f(xt)\,dt\,. \tag{3}$$

这时，令 $\zeta_n = \theta_\tau\zeta_{n-1} + \tau$，$\zeta_0 = 0$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_\lambda f(x) &= \mathbf{E}_x\sum_{n=0}^\infty\int_{\zeta_n}^{\zeta_{n+1}} e^{-\lambda t}f(x_t)dt\\ &= \mathbf{E}_x\sum_{n=0}^\infty e^{-\lambda\zeta_n}\mathbf{E}_{x(\zeta_n)}\int_0^\tau e^{-\lambda t}f(z(t), y(\zeta_n))dt\\ &= \sum_{n=0}^\infty \mathbf{E}_x e^{-\lambda\zeta_n}\mathbf{R}_\lambda^{(y(\zeta_n))}f(z(\zeta_n), y(\zeta_n)).\end{aligned}$$

最后的表达式中，算子 $\mathbf{R}_\lambda^{(y)}$ 作用于 y 固定时的函数 $f(z) = f(z,y)$（这时，作为 z 的函数，是 $\mathfrak{B}_\mathfrak{Z}$ 可测的），$\mathbf{R}_\lambda^{(y)}$ 作用之后，再用 $y(\zeta_n)$ 代替 y。函数

$$\mathbf{R}_\lambda^{(y)}f(z, y) = \mathbf{E}_x\int_0^\tau e^{-\lambda t}f(x_t)dt$$

是 $\mathfrak{B}$ 可测的，且因此

$$\mathbf{R}_\lambda^{(y(\zeta_n))}f(z(\zeta_n), y(\zeta_n))$$

为 $\mathscr{N}$ 可测的随机变量。

设

$$v_\lambda^{(n)}(x, B) = \mathbf{E}_x e^{-\lambda\zeta_n}\chi_B(x_{\zeta_n}).$$

这时，

$$\begin{aligned} v_\lambda^{(n)}(x, B) &= \mathbf{E}_x e^{-\lambda\tau}\theta_\tau e^{-\lambda\zeta_{n-1}}\chi_B(x(\zeta_{n-1})) \\ &= \mathbf{E}_x e^{-\lambda\tau}\mathbf{E}_{x(\tau)} e^{-\lambda\zeta_{n-1}}\chi_B(x_{\zeta_{n-1}}) \\ &= \mathbf{E}_x e^{-\lambda\tau} v_\lambda^{(n-1)}(x_\tau, B) \\ &= \int v_\lambda(x, dx_1) v_\lambda^{(n-1)}(x_1, B) \quad (n > 1), \end{aligned}$$

$$v_\lambda^{(1)}(x, B) = v_\lambda(x, B), \quad v_\lambda^{(0)}(x, B) = \chi_B(x)$$

且

$$\mathbf{R}_\lambda f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int v_\lambda^{(n)}(x, dx_1)\mathbf{R}_\lambda^{(y_1)} f(z_1, y_1), \tag{4}$$

其中 $x_1 = (z_1; y_1)$.

函数 $v_\lambda(x, B)$以一定的方式与转移概率 $Q_y(t, z, A)$相联系. 实际上，

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x e^{-\lambda\tau}\chi_B(x_\tau) &\geqslant \mathbf{E}_x e^{-\lambda\tau}\chi_B(x_\tau)\chi_{\{\tau>t\}} \\ &= \mathbf{E}_x\chi_{\{\tau>t\}} e^{-\lambda t}\theta_t e^{-\lambda\tau}\chi_B(x_\tau) \\ &= e^{-\lambda t}\mathbf{E}_x\chi_{\{\tau>t\}}\mathbf{E}_{x_t} e^{-\lambda\tau}\chi_B(x_\tau) \\ &= e^{-\lambda t}\int Q_y(t, x, dz_1) v_\lambda((z_1; y), B). \end{aligned}$$

除此之外，$t \downarrow 0$ 时，

$$v_\lambda^{(y)}(z, B) - e^{-\lambda t}\mathbf{E}_z^y v_\lambda^{(y)}(z_t, B) \leqslant \mathbf{P}_x\{\tau \leqslant t\} \to 0.$$

所以函数 $v_\lambda^{(y)}(z, B)$ 为过程 $\{\mathscr{F}_{\mathfrak{x}}, \mathscr{N}_{\mathfrak{x}}, \mathbf{P}_z^y\}$ 的 λ 过份函数.

现再假定函数 $Q_y(t, z, A)$ 对一切 $y \in \mathscr{Y}$ 和 $z \in \mathscr{Z}$

$$\lim_{\Delta\downarrow 0, h\downarrow 0} \mathbf{E}_z^y \int_0^t \frac{1}{h}(1 - Q_y(h, z_s, \mathscr{Z}))(1 - Q_y(\Delta, z_s, \mathscr{Z}))ds = 0. \tag{5}$$

这时，利用不等式

$$v_\lambda^{(y)}(z, B) - e^{-\lambda t}\mathbf{E}_z^y v_\lambda^{(y)}(z_t, B) \leqslant 1 - Q_y(t, z, \mathscr{Z})$$

及第二章 § 6 定理 4，可证明存在过程 $\{\mathscr{F}_{\mathfrak{x}}, \mathscr{N}_{\mathfrak{x}}, \mathbf{P}_z^y\}$ 的 W 泛函 $\varphi_t^y(B)$，使

$$v_\lambda(x, B) = \mathbf{E}_z^y \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\varphi_t^y(B).$$

我们注意，对 $\mathfrak{B}$ 中任一两两不相交的集列 B_k，泛函 $\sum\varphi_t^y(B_k)$ 与泛函 $\varphi_t^y(\bigcup B_k)$ 是等价的. 如果泛函 $\varphi_t^y(B)$ 是单调且连续的，那么 $z(\cdot)\in\mathscr{F}_{\mathfrak{X}}$ 的集（在这些集上，对一切 $t_1<t_2$ 有

$$\varphi_{t_2}^y(B)-\varphi_{t_1}^y(B)\leqslant\varphi_{t_2}^y(\mathscr{X})-\varphi_{t_1}^y(\mathscr{X})$$

成立），对所有的 $z\in\mathfrak{X}$ 都有完全测度 $\mathbf{P}_z^y$. 记此集为 $\mathscr{F}'_{\mathfrak{X}}$. 这时，对 $z(\cdot)\in\mathscr{F}'_{\mathfrak{X}}$，$\varphi_t^y(B)$ 作为 t 的函数对于 $\varphi_t^y(\mathscr{X})$ 绝对连续，亦即

$$\varphi_t^y(B)=\int_0^t g(s,B)d\varphi_s^y(\mathscr{X}),\tag{6}$$

这里，$g(s,B)$ 可由下式确定：

$$g(s,B)=\overline{\lim_{h_n\downarrow 0}}\frac{\varphi_{s+h_n}^y(B)-\varphi_s^y(B)}{\varphi_{s+h_n}^y(\mathscr{X})-\varphi_s^y(\mathscr{X})},\tag{7}$$

h_n 为任一收敛于 0 的序列，$(h_n>0)$. 由(7)可得对一切 $z\in\mathfrak{X}$，以概率 $\mathbf{P}_z^y=1$ 有

$$g(s,B)=\hat{\theta}_s g(0,B),$$

其中 $\hat{\theta}_s$ 为 $\mathscr{F}_{\mathfrak{X}}$ 上的推移算子. 其次，$g(0,B)$ 为 $\mathscr{N}_{\mathfrak{X}}(+0)$ 可测的变量，这里 $\mathscr{N}_{\mathfrak{X}}(t)$ 为 $s\leqslant t$ 的那些随机变量 $z(s)$ 产生的 σ 代数.

然后，再设过程 $\{\mathscr{F}_{\mathfrak{X}},\mathscr{N}_{\mathfrak{X}},\mathbf{P}_z^y\}$ 满足条件：对一切 z，依概率 $\mathbf{P}_z^y$，$\mathscr{N}_{\mathfrak{X}}(+0)$ 可测的变量与某些常数重合（例如，对随机连续的 Feller 过程这是成立的；见第二章§6引理1）. 这时，存在 $\mathfrak{B}_{\mathfrak{X}}$ 可测函数 $G^y(z,B)$，使得对一切 $z\in\mathfrak{X}$，

$$\mathbf{E}_z^y g(0,B)=G^y(z,B),\quad g(s,B)=G^y(z_s,B)$$

几乎处处（对测度 $\mathbf{P}_z^y$）成立. 因而，若设 $\varphi_t^y=\varphi_t^y(\mathscr{X})$，我们有

$$\varphi_t^y(B)=\int_0^t G^y(z_s,B)d\varphi_s^y.\tag{8}$$

同所有的 W 泛函一样，泛函 φ_t^y 在随机等价的意义上被函数

$$\mathbf{E}_z^y\varphi_t^y=\mathbf{E}_z^y\chi_{\{\tau<t\}}=1-Q_y(t,z,\mathfrak{X})$$

所确定，这因为由 (6) 式，有

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}_z^y d\chi_{\{\tau<t\}}=\mathbf{E}_z^y\int_0^\infty e^{-\lambda t}d_t\chi_{\{\tau<t\}}$$

$$= \mathbf{E}_z^y e^{-\lambda\tau} = v_\lambda^{(y)}(z, \mathscr{X}).$$

这样一来，为了确定过程的概率特征，除了一族转移概率 $Q_y(t, z, A)$ 以外，只需再给出函数 $G^y(z, B)$ 即可. 这函数非负，对 z 关于 $\mathfrak{B}_\mathscr{Z}$ 可测。如 $B = \bigcup B_k$，B_k 两两不相交，则由泛函 $\varphi_t^y(B)$ 与 $\sum_k \varphi_t^y(B_k)$ 的等价性可得，等式

$$G^y(z_u, B) = \sum_k G^y(z_u, B_k)$$

对几乎一切 u（对测度 $d\varphi_u^y$）成立. 此外，有 $G^y(z, \mathscr{X}) = 1$. 换言之，$G^y(z_u, B)$ 具有转移概率的性质. 其次，如第二章 § 6 定理 3 的证明中导出的那样，还有

$$\varphi_t^y = \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_0^t \mathbf{E}_{z_t}^y \varphi_h^y dt$$

$$= \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_0^t \mathbf{P}_{z_t}^y\{\tau \leqslant h\}dt = \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_0^t \mathbf{P}_{x_t}\{\tau \leqslant h\}dt,$$

$$\varphi_t^y(B) = \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_0^t \mathbf{P}_{x_t}\{\tau \leqslant h, x(\tau) \in B\}dt.$$

因此，

$$G^y(x, B) = \varlimsup_{t\to 0}\frac{\varphi_t^y(B)}{\varphi_t^y}$$

$$= \varlimsup_{t\to 0}\lim_{h\downarrow 0}\frac{\int_0^t \mathbf{P}_{x_s}\{\tau \leqslant h, x(\tau)\in B\}ds}{\int_0^t \mathbf{P}_{x_s}\{\tau \leqslant h\}ds}$$

$$= \lim_{h\downarrow 0}\frac{\mathbf{P}_x\{\tau \leqslant h, x(\tau)\in B\}}{\mathbf{P}_x\{\tau \leqslant h\}},$$

这里假定了可以交换极限的次序，且所有的极限都存在. 最后的极限可以解释为过程由点 x 出发，在其离散分量的跳跃之前于跳跃的瞬时，直接落入集 B 的转移概率. 这只是函数 $G^y(x, B)$ 的直观的解释，而函数 $G^y(x, B)$ 只是当 $x(\tau - 0)$ 不存在时才有定义.

下面，我们将考虑这样的过程，对于它，函数

$$G^y(x, B) = G_x(B)$$

满足下列条件:

G.1. 当 $B \in \mathfrak{B}$ 时,函数 $G_x(B)$,对 x 是 $\mathfrak{B}$ 可测函数.

G.2. 对一切 $x \in \mathscr{X}$,函数 $G_x(B)$ 是 $\mathfrak{B}$ 上的概率测度.

特征算子. 调和函数 为了确定过程的预解式(该过程在其跳跃点的聚点处中断),利用过程的特征算子是很方便的. 由于 $\mathscr{Y}$ 中的拓扑是离散的,故过程的特征算子可由公式

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{U \downarrow x} \frac{\mathbf{E}_x f(x(\tau_U)) - f(x)}{\mathbf{E}_x \tau_U}$$

确定,其中 $\tau_{\mathfrak{A}}$ 为首次离开点 x 的邻域 U 的时刻,$U = U' \times \{y\}$,U' 为 $\mathscr{Z}$ 中点 z 的邻域,$\{y\}$为 $\mathscr{Y}$ 中由点 y 组成的单点集.所以,$\tau_{\mathfrak{A}} = \min[\tau_{U'}, \tau]$,这里 $\tau_{U'}$ 为过程离开邻域 $U' \times \mathscr{Y}$ 的时刻. 我们指出,τ_U 与过程 $\{\mathscr{F}_{\mathfrak{Z}}, \mathscr{N}_{\mathfrak{Z}}, \mathbf{P}_z^y\}$ 离开邻域 U' 的时刻一致. 也就是说有

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_x f(x(\tau_{\mathfrak{A}})) - f(x) \\
&= \mathbf{E}_z^y f(z(\tau_{\mathfrak{A}}), y) - f(z, y) + \mathbf{E}_x[f(x(\tau_v)) \\
&\qquad - f(z(\tau_v), y)] \\
&= \mathbf{E}_z^y f(z(\tau_{v'}), y) - f(z, y) + \mathbf{E}_x[f(x(\tau)) \\
&\qquad - f(z(\tau), y)]\chi_{\{\tau \leqslant \tau_{\mathfrak{A}'}\}} \\
&= \mathbf{E}_z^y f(z(\tau_{\mathfrak{A}'}), y) - f(z, y) + \mathbf{E}_x[f(x(\tau)) \\
&\qquad - f(z(\tau), y)] - \mathbf{E}_x \chi\{_{\tau_{\mathfrak{A}'}, \tau<\tau}\} \mathbf{E}_{x(\tau_{\mathfrak{A}'})}[f(x(\tau)) \\
&\qquad - f(z(\tau), y)].
\end{aligned}$$

设

$$\begin{aligned}
\Gamma f(x) &= \mathbf{E}_x[f(x(\tau)) - f(z(\tau), y)] \\
&= \int [f(z_1, y_1) - f(z_1, y)] v_0(x, dx_1),
\end{aligned} \tag{9}$$

其中,函数 $v_0(x, B)$ 由 $\lambda = 0$ 时的(1)式确定. 这时,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_x f(x(\tau_{\mathfrak{A}})) - f(x) \\
&= \mathbf{E}_z^y[f(z(\tau_{\mathfrak{A}'}), y) - \Gamma f(z(\tau_{\mathfrak{A}'}), y)] - [f(z, y) \\
&\qquad - \Gamma f(z, y)],
\end{aligned}$$

这意味着，如果对一切 y，函数 $f(z, y) - \Gamma f(z, y)$ 作为 z 的函数属于过程 $\{\mathscr{F}_{\mathfrak{Z}}, \mathscr{N}_{\mathfrak{Z}}, \mathbf{P}_z^y\}$ 的特征算子 $\mathfrak{A}^y$ 的定义域，则 $\mathfrak{A}f$ 是确定的．这时，

$$\mathfrak{A}f(x) = \mathfrak{A}^y[f(z, y) - \Gamma f(z, y)] \tag{10}$$

（算子 $\mathfrak{A}^y$ 对固定的 y 作用于函数）．

我们指出，算子 Γ 可由函数 $G^y(x, B)$ 和 $Q_y(t, z, A)$ 简单地表出．实际上，

$$\begin{aligned} v_0(x, B) &= \mathbf{E}_z^y \int_0^\infty G^y(z_s, B) d\varphi_s^y \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \mathbf{E}_z^y \frac{1}{h} \int_0^\infty G^y(z_s, B)[1 - Q_y(h, z_s, \mathfrak{Z})] ds \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^\infty \int Q_y(s, z, dz_1) G^y(z_1, B)[1 \\ &\quad - Q_y(h, z_1, \mathfrak{Z})] ds. \end{aligned}$$

现在我们来看，是否总能根据已给的函数 $G^y(x, B)$ 及 $Q_y(t, z, B)$ 来构造过程 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}, \mathbf{P}_x\}$．取函数 $x(t) = (z(t); y(t))$ 的集作为 $\mathscr{F}$，这里 $y(t)$ 为阶梯函数，$x(t)$ 定义在 $[0, \zeta)$ 上，ζ 使 $y(t)$ 在 $[s, \zeta)$，$s < \zeta$，有无限多次跳跃；如不存在有限的这样的 ζ，就令 $\zeta = +\infty$．我们将根据转移概率 $Q_y(t, z, A)$ 构造马尔科夫过程 $\{\mathscr{F}_{\mathfrak{Z}}, \mathscr{N}_{\mathfrak{Z}}, \mathbf{P}_z^y\}$．假定这个过程对一切 $z(t) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{Z}}$，只是在 $\tau < \infty$ 时才存在 $z(\tau - 0)$．这是可能的，例如，当 $\mathfrak{Z}$ 为局部紧空间，而过程 $\{\mathscr{F}_{\mathfrak{Z}}, \mathscr{N}_{\mathfrak{Z}}, \mathbf{P}_z^y\}$ 为规则过程时．现在，我们在 $\mathscr{F}$ 中只留下可使函数 $z(t - \zeta_n)$ 在 $[0, \zeta_{n+1} - \zeta_n)$ 上能与 $\mathscr{F}_{\mathfrak{Z}}$ 中某函数重合的那样的函数 $x(t) = (z(t); y(t))$，这里 ζ_n 为函数 $y(t)$ 逐个的跳跃时刻．

我们先确定转移概率：

$$P(t, x, B) = \sum_{n=0}^\infty Q^{(n)}(t, x, B), \tag{11}$$

其中

$$Q^{(0)}(t, x, B) = Q_y(t, z, B^y), \quad B^y = \{z: (z; y) \in B\},$$

$$Q^{(n)}(t, x, B) = \iint_0^t \mathbf{P}_z^y\{\tau \in ds, z(\tau - 0) \in dz_1\}$$

$$\times G^y(z_1, dx_2)Q^{(n-1)}(t-s, x_2, B). \quad (12)$$

$\left(\int G^y(z, dx_1)Q^{(n-1)}(t, x_1, B)\right.$ 作为变量 z, y, t 的整体的函数关于 $\mathfrak{B}_z \times \mathfrak{B}_y \times \mathfrak{B}_+$ 的可测性容易由归纳法证得.）下面验证函数(11)满足 Колмогоров-Chapman 方程. 显然,

$$Q^{(0)}(t+s, x, B) = \int Q^{(0)}(t, x, dx_1)Q^{(0)}(s, x_1, B).$$

其次,

$$Q^{(1)}(t+s, x, B) = \int_0^t \int \mathbf{P}_z^y\{\tau \in du, z(\tau-0) \in dz_1\}$$
$$\times \iint G^y(z_1, dx_2)Q^{(0)}(t-u, x_2, dx_3)Q^{(0)}(s, x_3, B) + \int_t^{t+s} \iint \mathbf{P}_z^y\{\tau > t, z(t) \in dz_1\}$$
$$\times \mathbf{P}_{z_1}^y\{\tau + t \in du, z(\tau - 0) \in dz_2\} \int G^y(z_2, dx_3)Q^{(0)}(t + s - u, x_3, B)$$
$$= \int Q^{(1)}(t, x, dx_1)Q^{(0)}(s, x_1, B) + \int Q^{(0)}(t, x, dx_1)Q^{(1)}(s, x_1, B).$$

这里,我们利用等式: 对 $\alpha > t$

$$\mathbf{P}_z^y\{\alpha < \tau < \beta, z(\tau-0) \in A\}$$
$$= \mathbf{E}_z^y \chi_{\{\tau>t\}}\theta_t[\chi_{\{\alpha-t<\tau<\beta-t\}}\chi_A(z(\tau-0))]$$
$$= \mathbf{E}_z^y \chi_{\{\tau>t\}}\mathbf{P}_{z(t)}^y\{\alpha < \tau + t < \beta, z(\tau-0) \in A\}.$$

可以类似地证明关系式:

$$Q^{(n)}(s+t, x, B) = \sum_{k=0}^{n} \int Q^{(k)}(s, x, dx_1)Q^{(n-k)}(t, x_1, B). \quad (13)$$

因此,

$$\int P(s, x, dx_1)P(t, x_1, B)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \int Q^{(k)}(s, x, dx_1)Q^{(n-k)}(t, x_1, B)$$

$= P(s+t, x, B).$

根据转移概率(11)先在 $\mathscr{N}$ 中的柱集上构造测度，然后再把它扩张到 $\mathscr{N}$ 上去.

现推导已构造的过程的预解式 $\mathbf{R}_\lambda$. 若记

$$q_\lambda^{(n)}(x, B) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q^{(n)}(t, x, B)dt$$

及

$$v_\lambda(x, B) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} \int \mathbf{P}_x^y\{\tau \in ds, z(\tau - 0) \in dz_1\} G^y(z_1, B),$$

由(12)可见

$$q_\lambda^{(n)}(x, B) = \int v_\lambda(x, dx_1) q_\lambda^{(n-1)}(x_1, B).$$

于是，如

$$v_\lambda^{(n)}(x, B) = \int v_\lambda^{(n-1)}(x, dx_1) v_\lambda(x_1, B), \text{ 对 } n > 1,$$

$$v_\lambda^{(1)}(x, B) = v_\lambda(x, B),$$

由等式

$$q_\lambda^{(0)}(x, B) = \mathbf{R}_\lambda^y \chi_{B^y}(z),$$

(这里 $\mathbf{R}_\lambda^y$ 为过程 $\{\mathscr{F}_x, \mathscr{N}_x, \mathbf{P}_x^y\}$的预解式)我们可得对 $\mathbf{R}_\lambda f$ 需要的公式(4).

为了构造过程在时刻 ζ 以后的延续部分，我们要求此过程的有界调和函数. 容易证明，过程的一切有界 λ 调和函数都满足

$$\varphi_\lambda(x) = \mathbf{E}_x e^{-\lambda\tau} \varphi_\lambda(x_\tau) = \int \varphi_\lambda(x_1) v_\lambda(x, dx_1). \tag{14}$$

并且，任一满足(14)的函数都是 λ 调和函数(这一结论的证明类似于§3 引理 3；见那里的等式(31)).

第四章　独立增量过程

§1. 定义. 一般性质

设 $\mathscr{X}$ 是线性空间，而 $\mathfrak{B}$ 是它的子集的 σ 代数，具备下列性质：a) 对任意 $x\in\mathscr{X}$ 和 $A\in\mathfrak{B}$，集 $A_x=\{y: y-x\in A\}\in\mathfrak{B}$ (即 $\mathscr{X}$ 中的一切推移都关于 $\mathfrak{B}$ 可测)；b) 对任意 $A\in\mathfrak{B}$，$\{(x, y): x+y\in A\}$ 是 $\mathscr{X}\times\mathscr{X}$ 中的 $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$ 可测集.

设过程 $\xi(t)$ 定义在某一集合 $T\subset\mathscr{R}$ 上，取值于 $\mathscr{X}$. 称 $\xi(t)$ 为**独立增量过程**，如果对所有 $t_0<t_1<\cdots<t_n$，$t_k\in T$，$k=0, 1, \cdots, n$，随机变量 $\xi(t_0)$，$\xi(t_1)-\xi(t_0), \cdots, \xi(t_n)-\xi(t_{n-1})$ 相互独立. 加在 $\mathfrak{B}$ 上的条件保证 $\xi(t)-\xi(t_1)$ 是随机变量.

独立增量过程的一维分布以及增量的分布决定它的边沿分布. 设

$$\mu_t(A)=\mathbf{P}\{\xi(t)\in A\}, \Phi_{t_1,t_2}(A)=\mathbf{P}\{\xi(t_2)-\xi(t_1)\in A\}.$$

那末

$$\mathbf{P}\{\xi(t_0)\in A_0, \xi(t_1)\in A_1, \cdots, \xi(t_n)\in A_n\}$$
$$=\int\cdots\int\mu_{t_0}(dx_0)\Phi_{t_0,t_1}(dx_1)\cdots\Phi_{t_{n-1},t_n}(dx_n), \tag{1}$$

其中积分对集合$\{(x_0, \cdots, x_n): x_0\in A_0, \cdots, x_0+\cdots+x_n\in A_n\}$进行. 为了证明 (1) 式，只需验证集合 $\{(x_0, \cdots, x_n): x_0\in A_0, \cdots, x_0+\cdots+x_n\in A_n\}$ 为 $\mathfrak{B}^{n+1}$ 可测. 这可以利用对于 n 的数学归纳法和下面的等式来证明:

$$\{(x_0, \cdots, x_n): x_0\in A_0, \cdots, x_0+\cdots+x_n\in A_n\}$$
$$=\{(x_0, \cdots, x_{n-1}): x_0\in A_0, \cdots, x_0+\cdots+x_{n-1}\in A_{n-1}\}$$
$$\cap\{(x_0, \cdots, x_n): x_0+\cdots+x_n\in A_n\}.$$

根据条件 b) 该集为 $\mathfrak{B}^{n+1}$ 可测。

假设 $l(x)$ 是定义在 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函，$\mathfrak{L}$ 是一线性泛函的线性集合：对任意 $x \neq 0$，$x \in \mathscr{X}$，存在泛函 $l \in \mathfrak{L}$，使 $l(x) \neq 0$。设 σ 代数 $\mathfrak{B}$ 是使 $\mathfrak{L}$ 中的所有线性泛函可测的最小 σ 代数。容易验证，$\mathfrak{B}$ 满足条件 a) 和 b)。

测度 μ_t 和 Φ_{t_1,t_2} 决定于它们的**特征泛函**：

$$\varphi_t(l) = \int e^{il(x)}\mu_t(dx) \text{ 和 } \Phi_{t_1,t_2}(l) = \int e^{il(x)}\Phi_{t_1,t_2}(dx).$$

变量 $\xi(t_1),\cdots,\xi(t_n)$ 的联合特征泛函为

$$\mathbf{E}\exp\left\{\sum_{k=1}^{n} il_k[\xi(t_k)]\right\} = \varphi_{t_1}\left(\sum_{j=1}^{n} l_j\right)\prod_{k=1}^{n-1}\varphi_{t_k,t_{k+1}}\left(\sum_{j=k+2}^{n} l_j\right) \quad (2)$$

（该式是 $\xi(t)$ 之增量的独立性的明显推论）。函数 $\varphi_t(l)$ 和 $\varphi_{t_1,t_2}(l)$ 并不是完全任意的：对 $t < s$ 它满足关系式

$$\varphi_t(l)\varphi_{t,s}(l) = \varphi_s(l). \quad (3)$$

注意，可以把独立增量过程和相空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 中的某一马尔科夫过程相联系。函数 $\{\xi(t) + x\}$ 是它的样本函数，其中 $\xi(t)$ 是独立增量过程，对任意 $\mathfrak{U} \in \mathscr{N}^t$（$\mathscr{N}^t$ 是 $x(s)$，$s \geqslant t$，$s \in T$，产生的 σ 代数），测度 $\mathbf{P}_{t,x}$，$t \in T$，决定于

$$\mathbf{P}_{t,x}(\mathfrak{U}) = \mathbf{P}\{\xi(s) - \xi(t) + x \in \mathfrak{U}\}.$$

这个马尔科夫过程的转移概率由下式给出：

$$P(t, x, s, A) = \mathbf{P}\{\xi(s) - \xi(t) + x \in A\}. \quad (4)$$

一维独立增量过程　注意，对任意 $\mathfrak{B}$ 可测线性泛函 $l(x)$，过程 $\eta(t) = l(\xi(t))$ 是一维独立增量过程。所以，研究一维独立增量过程，对于更复杂空间的过程可以提供不平凡的信息（以后我们会看到，它确实提供这样的信息）。另一方面，$\mathscr{R}^1$是最简单的线性空间，因此在一定意义上该空间中的过程也是最简单的。

这样，我们考虑取实值的过程 $\xi(t)$；空间$\mathscr{R}^1$中的 σ 代数 $\mathfrak{B}$ 选作所有 Borel 集的 σ 代数。假设过程是定义在集 T 上的。

设 $\varphi_t(\lambda)$ 和 $\varphi_{t_1,t_2}(\lambda)$ 是 $\xi(t)$ 和 $\xi(t_2)-\xi(t_1)$ 的特征函数。函数 $h_t(\lambda) = |\varphi_t(\lambda)|^2$ 及 $h_{t_1,t_2}(\lambda) = |\varphi_{t_1,t_2}(\lambda)|^2$ 非负，并且 $h_{t_1,t_2}(\lambda) \leqslant 1$。由

$$h_s(\lambda) = h_t(\lambda)h_{t,s}(\lambda), t < s,$$

可见，$h_s(\lambda)$ 是 s 的有界单调非增函数．从而，对属于 T 的闭包的所有 t 存在 $h_{t-0}(\lambda)$和 $h_{t+0}(\lambda)$(若 t 为单侧极限点，则为一个极限；而在孤立点这些极限没有意义)．

除 $\xi(t)$ 之外，我们再考虑过程 $\tilde{\xi}(t)$． 假设 $\tilde{\xi}(t)$ 和 $\xi(t)$ 相互独立，但是它们的有限维分布相同．为构造这样的过程，我们可以取两个完全相同的概率空间，并把第一个空间上的过程 $\xi(t)$ 和第二个空间上的过程 $\tilde{\xi}(t)$，都看成是这两个概率空间的乘积空间上的过程．其次，设 $\xi^*(t) = \xi(t) - \tilde{\xi}(t)$．容易看出

$$\mathbf{E}e^{i\lambda\xi^*(t)} = h_t(\lambda), \quad \mathbf{E}e^{i\lambda[\xi^*(t_2)-\xi^*(t_1)]} = h_{t_1,t_2}(\lambda).$$

结果表明，由 $h_{t+0}(\lambda)$ 的存在性可知(在依概率收敛意义下的)，极限 $\xi^*(t+0)$ 存在，而由 $h_{t-0}(\lambda)$ 存在可知，$\xi^*(t-0)$ 存在．例如，我们证明第一个结论．注意，作为连续函数的递增数列的极限，

$$h_{t+0}(\lambda) = \lim_{s\downarrow t} h_s(\lambda)$$

在点 0 连续，因此它是特征函数．所以，存在$\Delta > 0$，当 $|\lambda| < \Delta$ 时 $h_{t+0}(\lambda) > 0$． 因此，对所有 $|\lambda| < \Delta$ 存在 $s_0 > t$，使当 $t < s < s_0$ 时 $h_s(\lambda) > 0$． 所以

$$\lim_{\substack{s_2\downarrow t \\ t<s_1<s_2}} h_{s_1,s_2}(\lambda) = \lim_{s_1\downarrow t,\ s_2\downarrow t} \frac{h_{s_2}(\lambda)}{h_{s_1}(\lambda)} = 1,$$

而且对任意 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\substack{s_1\downarrow t, s_2\downarrow t \\ t<s_1<s_2}} \mathbf{P}\{|\xi^*(s_2) - \xi^*(s_1)| > \varepsilon\} = 0.$$

这样，当 $s \downarrow t$ 时 $\xi^*(t)$ 是依概率收敛意义下的基本序列，因而存在

$$\lim_{s\downarrow t}\xi^*(s) = \xi^*(t+0).$$

因为对于对称过程(见第一卷第六章 § 3，引理 3)有

$$\mathbf{P}\{\sup_{t \leqslant s < t+\delta} |\xi^*(s) - \xi^*(t+0)| > \varepsilon\}$$

$$\leqslant 2\mathbf{P}\{|\xi^*(t+\delta)-\xi^*(t+0)|>\varepsilon\},$$

所以 $\xi^*(s)$ 没有第二类间断点．于是，$\xi(t)-\bar{\xi}(t)$ 以概率 1 没有第二类间断点．所以，对几乎所有固定的 ω_0，$\xi(t,\omega)-\bar{\xi}(t,\omega_0)$ 没有第二类间断点．从而，存在一非随机函数 $a(t)$，使 $\xi(t)-a(t)$ 没有第二类间断点．称每个这样的函数为**中心化的**．

假设 $\xi'(t)=\xi(t)-a(t)$ 没有第二类间断点．该过程可以开拓到 T 的闭包，而且仍然是独立增量过程．如果 (α,β) 是 T 的闭包的某一补区间，令 $\xi'(s)=\xi'(\alpha)$，$s\in(\alpha,\beta)$，则可以把 $\xi'(s)$ 开拓到包含 T 的最小左闭区间(如果 $b=\sup T$，则对 $b\bar{\in}T$，$\xi^*(b-0)$ 有可能不存在)．所以，不失普遍性，我们可以考虑区间 $[a,b)$ 上的过程，并且在该区间之内 $\xi'(s)$ 没有第二类间断点．设 $t_1,t_2,\cdots$ 是 $\xi'(s)$ 的所有随机间断点．设

$$\xi_k=\xi'(t_k+0)-\xi'(t_k),\quad \bar{\xi}_k=\xi'(t_k)-\xi'(t_k-0).$$

如果 $\varphi_k(\lambda)=\mathbf{E}e^{i\lambda\xi_k}$，$\psi_k(\lambda)=\mathbf{E}e^{i\lambda\bar{\xi}_k}$，则

$$|\varphi_k(\lambda)|^2=h_{t+0}(\lambda)/h_t(\lambda),\quad |\psi_k(\lambda)|^2=h_t(\lambda)/h_{t-0}(\lambda).$$

所以对任意 $t<b$，当 λ 充分小时，无穷乘积

$$\prod_{t_k<t}|\varphi_k(\lambda)|^2 \text{ 和 } \prod_{t_k<t}|\psi_k(\lambda)|^2$$

收敛．

我们引进两个随机变量 ξ_k' 和 $\bar{\xi}_k'$：它们与 ξ_k 和 $\bar{\xi}_k$ 独立，并且分别与 ξ_k 和 $\bar{\xi}_k$ 同分布，此外 ξ_k' 和 $\bar{\xi}_k'$ 相互独立．那末，如果设

$$\xi_k^*=\xi_k-\xi_k',\quad \bar{\xi}_k^*=\bar{\xi}_k-\bar{\xi}_k',$$

则

$$\mathbf{E}e^{i\lambda\xi_k^*}=|\varphi_k(\lambda)|^2,\quad \mathbf{E}e^{i\lambda\bar{\xi}_k^*}=|\psi_k(\lambda)|^2.$$

与以上完全类似，由乘积 $\prod_{t_k<t}|\varphi_k(\lambda)|^2$ 的收敛性可以证明级数 $\sum_{t_k<t}\xi_k^*$ 依概率收敛，从而以概率 1 收敛(见第一卷第二章，§2 定理 7)．所以存在常数 a_k (作为 a_k 亦可取 ξ_k')，使级数 $\sum_{t_k<t}(\xi_k-a_k)$ 以概率 1 收敛．由于 $\xi(t)$ 没有第二类间断点，可知 ξ_k 依概率趋

向 0. 因此，当 $k\to 0$ 时，$a_k\to 0$. 设 $c>0$，而

$$(\xi_k-a_k)_c=\begin{cases}\xi_k-a_k, & 若\ |\xi_k-a_k|<c,\\ 0, & 若\ |\xi_k-a_k|>c.\end{cases}$$

那末，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\xi_k-a_k-\mathbf{E}(\xi_k-a_k)_c]$$

也收敛，而且其和与项的顺序无关. 这由下面引理可得.

引理 1 如果级数 $\sum\eta_k$ 以概率 1 收敛，则对任意 $c>0$ 级数 $\sum[\eta_k-\mathbf{E}(\eta_k)_c]$ 也以概率 1 收敛，而且其和与项的顺序无关.

证. 由 Колмогоров 定理（见第一卷，第二章 §3 定理 3 的系）以及三级数定理（见第一卷，第二章 §3 定理 5），可知级数 $\sum_{k=1}^{\infty}[(\eta_k)_c-\mathbf{E}(\eta_k)_c]$ 收敛. 下证该级数的和与其项的顺序无关. 设 ζ_1 为该级数在原来顺序下的和. 将它的项重新作某种排列，并设其和为 ζ. 那末 $\zeta-\sum_{k=1}^{n}[(\eta_k)_c-\mathbf{E}(\eta_k)_c]$ 与 $\sum_{k=1}^{n}[(\eta_k)_c-\mathbf{E}(\eta_k)_c]$ 独立. 当 $n\to\infty$ 时取极限，则可知 $\zeta-\zeta_1$ 不依赖于 ζ_1. 而由对称性可见，$\zeta_1-\zeta$ 也与 ζ 独立. 于是，$\zeta-\zeta_1$ 不依赖于 $\zeta-\zeta_1$. 所以 $\zeta-\zeta_1$ 是常数. 因为 $\mathbf{E}\zeta$ 和 $\mathbf{E}\zeta_1$ 存在并且等于 0，所以 $\zeta=\zeta_1$. 由三级数定理知，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}[\eta_k-\mathbf{E}(\eta_k)_c]$ 只含有限多项，所以它绝对收敛. 因而它的和与项的顺序无关. 引理得证.

由引理可见，存在常数 b_k，使级数

$$\sum_{t_k<t}(\xi_k-b_k)\qquad(t<b)$$

收敛，而且其和与项的顺序无关. 同样，存在常数 $\bar{b}_k$，使级数

$$\sum_{t_k\leqslant t}(\xi_k-\bar{b}_k)\qquad(t<b)$$

收敛，而且其和与项的顺序无关.

设

$$\eta(t)=\sum_{t_k\leqslant t}(\xi_k-\bar{b}_k)+\sum_{t_k<t}(\xi_k-b_k).$$

那末，只有在点 $t_1, t_2, \cdots$ 上过程 $\xi''(t)=\xi'(t)-\eta(t)$ 才有随机间断点，并且 $\xi'(t_k+0)-\xi''(t_k)=b_k$, $\xi''(t_k)-\xi''(t_k-0)=\bar{b}_k$.

最后，我们设函数 $b(t)$ 没有第二类间断点，只有 $\{t_k\}$ 是它的间断点，而且

$$b(t_k+0)-b(t_k)=b_k,\ b(t_k)-b(t_k-0)=\bar{b}_k.$$

那末，过程 $\xi^0(t)=\xi''(t)-b(t)$ 是随机连续的.

设 $\{\eta_k\}$ 和 $\{\bar{\eta}_k\}$ 是两个独立随机变量列，而 $\{t_k\}$ 是 $[a, b)$ 上的某一点列. 假设对于 $t\in[a, b)$ 级数 $\sum\limits_{t_k<t}\eta_k$ 和 $\sum\limits_{t_k\leqslant t}\bar{\eta}_k$ 收敛，而且其和与项的顺序无关. 那末，称过程

$$\eta(t)=\sum_{t_k<t}\eta_k+\sum_{t_k\leqslant t}\bar{\eta}_k \tag{5}$$

为**离散独立增量过程**.

综上所述得下面的定理.

定理 1 对任一独立增量过程 $\xi(t)$，存在非随机函数 $a(t)$，离散过程 $\eta(t)$ 和随机连续过程 $\xi^0(t)$，使

$$\xi(t)=a(t)+\eta(t)+\xi^0(t),$$

而且 $\eta(t)$ 和 $\xi^0(t)$ 相互独立.

离散过程完全决定于 (5) 式. 知道了 η_k 和 $\bar{\eta}_k$ 的分布，就可以写出随机变量 $\eta(t)$ 以及增量 $\eta(s)-\eta(t)$ 的特征函数.

我们现在考虑随机连续过程. 由第一卷第三章 §4 的定理 3 可知，随机连续过程没有第二类间断点. 记 $\nu_t(A)$ 为过程 $\xi(t)$ 在区间 $[a, t)$ 上落入 Borel 集 A 的跳跃的个数. 如果 Borel 集 A 与 O 之距离大于 0，则 $\nu_t(A)$ 是完全确定的. 容易验证，$\nu_t(A)$ 也是随机连续的独立增量过程. 此外，这个过程以概率 1 不减，它只有有限多个跳跃，每个跳跃的值都等于 1，而且在两个跳跃之间该过程为常数. 过程 $\nu_t(A)$ 由下面的定理描绘.

定理 2 如果 $\eta(t)$ 是 $[a, b)$ 上的随机连续独立增量过程，满

足下列条件:

1) $\eta(t)$ 以概率 1 有有限多个跳跃，而且所有跃度都等于 1，

2) 在两个跳跃之间 $\eta(t)$ 的值不变，则 $\eta(t)$ 是 Poisson 过程，即对于 $t<s$，$\eta(s)-\eta(t)$ 服从 Poisson 分布.

证. 只需证明 $\eta(t)-\eta(a)$ 服从 Poisson 分布. 设 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$，$\Delta=\max(t_{k+1}-t_k)$. 我们证明，对 $\xi_k=\eta(t_k)-\eta(t_{k-1})$ 有

$$\lim_{\Delta\downarrow 0}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}\{\xi_k>1\}=0. \tag{6}$$

因为 $\eta(t)$的所有的跃度都等于 1,所以当$\Delta\to 0$ 时 $\mathbf{P}\{\sup\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}\xi_k>1\}\to 0$. 而

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant k\leqslant n-1}\xi_k>1\}=\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{j=0}^{k-1}\mathbf{P}\{\xi_j\leqslant 1\}\mathbf{P}\{\xi_k>1\}$$

$$\geqslant\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}\{\xi_k>1\}\prod_{j=0}^{n-1}\mathbf{P}\{\xi_j\leqslant 1\}.$$

故

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}\{\xi_k>1\}\leqslant\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant k\leqslant n-1}\xi_k>1\}\left[1-\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant k\leqslant n-1}\xi_k>1\}\right]^{-1}.$$

由此即得 (6) 式. 记

$$\tilde{\xi}_k=\begin{cases}\xi_k, & 若\ \xi_k\leqslant 1,\\ 1, & 若\ \xi_k>1.\end{cases}$$

那末,因为由 (6) 式当$\Delta\to 0$ 时有

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k-\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{\xi}_k\neq 0\right\}\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}\{\xi_k>1\}\to 0,$$

可见，依概率收敛意义下有

$$\eta(t)-\eta(a)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}\tilde{\xi}_k.$$

设 $p_k=\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_k=1\}$. 那末,由过程的随机连续性可见

$$\lim_{\Delta\downarrow 0}\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}p_k=0.$$

我们证明存在极限$\lim\limits_{\Delta\to 0}\sum p_k=\lambda$. 由$\eta(t)$的随机连续性可知，存在$\delta>0$，使当$|t_1-t_2|<\delta$时

$$\mathbf{P}\{|\eta(t_2)-\eta(t_1)|=0\}$$
$$=\mathbf{P}\left\{\left|\eta(t_2)-\eta(t_1)\right|\leqslant\frac{1}{2}\right\}>0.$$

所以

$$\mathbf{P}\{\eta(t)-\eta(a)=0\}>0.$$

因此，由

$$\mathbf{P}\{\eta(t)-\eta(a)=0\}=\mathbf{P}\{\sum\xi_k=0\}=\prod_{k=1}^{n}(1-p_k)$$

得

$$-\ln\mathbf{P}\{\eta(t)-\eta(a)=0\}=\sum_{k=1}^{n}p_k[1+O(\max p_k)];$$

所以

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}p_k=-\ln\mathbf{P}\{\eta(t)-\eta(a)=0\}.$$

其次

$$\mathbf{P}\{\eta(t)-\eta(a)=k\}$$
$$=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k}\frac{p_{i_1}\cdots p_{i_k}}{(1-p_{i_1})\cdots(1-p_{i_k})}\prod_{k=1}^{n-1}(1-p_k)$$
$$=e^{-\lambda}\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i_1<\cdots<i_k}p_{i_1}\cdots p_{i_k},$$

$$\sum_{i_1<\cdots<i_k}p_{i_1}\cdots p_{i_k}$$
$$=\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=0}^{n-1}p_i\right)^k+O\left[\sum_{l=1}^{k-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1}p_i\right)^l(\max_i p_i)^{k-l}\right].$$

于是$\mathbf{P}\{\eta(t)-\eta(a)=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. 定理得证.

我们考虑过程$\xi_A(t)$，它等于过程$\xi(t)$在$[a,t)$上落入A的跃度之和(所谓过程在时刻t的跃度ξ是指$\xi(t+0)-\xi(t-0)$).

如果 A 是 Borel 集，而且到 O 的距离大于 0，则 $\xi_A(t)$ 是完全确定的。$\xi_A(t)$ 也是随机连续的独立增量过程。

设 $\Pi_t(A)=\mathbf{E}\nu_t(A)$。如果 $\mathfrak{B}_\varepsilon$ 是到 O 的距离不小于 ε 的 Borel 集构成的环，则 $\Pi_t(A)$ 是 $\mathfrak{B}_\varepsilon$ 上的测度，因为对于两两不相交的集 $A_n\in\mathfrak{B}_\varepsilon$

$$\Pi t(\cup A_n)=\mathbf{E}\nu_t(\cup A_n)=\mathbf{E}\sum\nu_t(A_n)$$
$$=\sum\mathbf{E}\nu_t(A_n)=\sum\Pi_t(A_n).$$

记 $\mathfrak{B}_0=\cup\mathfrak{B}_\varepsilon$。

定理 3 对 $A\in\mathfrak{B}_0$，过程 $\xi_A(t)$ 和 $\xi(t)-\xi_A(t)$ 相互独立。

证。不失普遍性，可以假设 $\xi(a)=0$。首先假设集 A 的边界 A' 满足 $\Pi_t(A')=0$，并证明随机变量 $\xi_A(t)$ 和 $\xi(t)-\xi_A(t)$ 相互独立。设 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$，$\Delta=\max\limits_k(t_{k+1}-t_k)$，$\eta_k=\xi(t_{k+1})-\xi(t_k)-\xi_k, \xi_k=\chi_A([\xi(t_{k+1})-\xi(t_k)]\cdot[\xi(t_{k+1})-\xi(t_k)])$。因为 $\Pi_t(A')=0$，故在 $[0,t]$ 上 $\xi(s)$ 没有落入 A' 的跳跃。所以在依概率收敛意义下

$$\xi_A(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k,\qquad \xi(t)-\xi_A(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k.$$

由诸对偶 (ξ_k,η_k) 的独立性可见，

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\exp\{i\lambda\xi_A(t)+i\mu[\xi(t)-\xi_A(t)]\}\\&=\lim_{\Delta\to 0}\mathbf{E}\exp\left\{i\lambda\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k+i\mu\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k\right\}\\&=\lim_{\Delta\to 0}\prod_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}e^{i\lambda\xi_k+i\mu\eta_k}\\&=\lim_{\Delta\to 0}\prod_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}e^{i\lambda\xi_k}\mathbf{E}e^{i\mu\eta_k}+\rho_\Delta,\end{aligned}\tag{7}$$

其中

$$\rho_\Delta=\prod_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}e^{i\lambda\xi_k+i\mu\eta_k}-\prod_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}e^{i\lambda\xi_k}\mathbf{E}e^{i\mu\eta_k}.$$

其次

$$|\rho_\Delta| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\mathbf{E}e^{i\lambda\xi_k + i\mu\eta_k} - \mathbf{E}e^{i\lambda\xi_k}\mathbf{E}e^{i\mu\eta_k}|.$$

由于 $\xi_k\eta_k = 0$，故 $e^{i\lambda\xi_k+i\mu\eta_k} = e^{i\lambda\xi_k} + e^{i\mu\eta_k} - 1$. 因而

$$|\rho_\Delta| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\mathbf{E}e^{i\lambda\xi_k} + \mathbf{E}e^{i\mu\eta_k} - 1 - \mathbf{E}e^{i\lambda\xi_k}\mathbf{E}e^{i\mu\eta_k}|$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} |\mathbf{E}e^{i\lambda\xi_k} - 1||\mathbf{E}e^{i\mu\eta_k} - 1|$$

$$\leqslant \sup_k |\mathbf{E}e^{i\lambda\eta_k} - 1| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 2\mathbf{P}\{\xi_k > 0\}.$$

由 $\xi(t)$ 的随机连续性可得 $\lim\limits_{\Delta\to 0}|\mathbf{E}e^{i\lambda\eta_k} - 1| = 0$. 此外，因为依概率

$$\sum \chi_A[\xi(t_{k+1}) - \xi(t_k)] \to \nu_t(A),$$

故仿照定理 2 可以证明

$$\lim_{\Delta\to 0}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}\{\xi_k > 0\} e^{-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}\{\xi_k>0\}}\right)$$
$$= \mathbf{P}\{\nu_t(A) = 1\} = \Pi_t(A)e^{-\Pi_t(A)},$$

从而

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}\{\xi_k > 0\} \to \Pi_t(A).$$

故 $\lim\limits_{\Delta\to 0}\rho_\Delta = 0$，而由 (7) 得

$$\mathbf{E}\exp\{i\lambda\xi_A(t) + i\mu[\xi(t) - \xi_A(t)]\}$$
$$= \mathbf{E}\exp\{i\lambda\xi_A(t)\}\mathbf{E}\exp\{i\mu[\xi(t) - \xi_A(t)]\}. \tag{8}$$

通过对 A 的极限过渡(使 (8) 成立的集组成单调类)可以断定，(8) 式对一切 $A \in \mathfrak{B}_0$ 成立. 最后，由于对偶 $\xi_A(t)$，$\xi(t) - \xi_A(t)$ 也是独立增量过程，可知对 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < b$

$$\mathbf{E}\exp\left\{i\sum_{r=1}^{k}\lambda_r[\xi_A(t_r) - \xi_A(t_{r-1})]\right.$$
$$\left. + i\sum_{r=1}^{k}\mu_r[\xi(t_r) - \xi(t_{r-1}) - \xi_A(t_r) + \xi_A(t_{r-1})]\right\}$$

$$= \prod_{r=1}^{k} (\mathbf{E}\exp\{i\lambda_r[\xi_A(t_r) - \xi_A(t_{r-1})]\}$$

$$\times \mathbf{E}\exp\{i\mu_r[\xi(t_r) - \xi(t_{r-1}) - \xi_A(t_r) + \xi_A(t_{r-1})]\}).$$

从而，过程 $\xi_A(t)$ 和 $\xi(t) - \xi_A(t)$ 的联合边沿分布的特征函数，等于 $\xi_A(t)$ 边沿分布的特征函数和 $\xi(t) - \xi_A(t)$ 边沿分布特征函数的积. 于是，$\xi_A(t)$ 和 $\xi(t) - \xi_A(t)$ 相互独立. 定理得证.

系 1 如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathfrak{B}_0$，两两不交，$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$，则过程 $\xi_{A_1}(t), \cdots, \xi_{A_n}(t)$ 和 $\xi(t) - \xi_A(t)$ 相互独立.

$\xi(t) - \xi_A(t)$ 与 $\xi_{A_k}(t)(k = 1, \cdots, n)$ 独立，是因为 $\xi_{A_k}(t)$ 完全决定于过程 $\xi_A(t)$，而 $\xi_A(t)$ 和 $\xi(t) - \xi_A(t)$ 相互独立. 由于 $\xi_{A_j}(t)(j \neq k)$ 完全决定于 $\xi_{\bigcup_{j\neq k} A_j}(t)$，而 $\xi_{A_k}(t)$ 和 $\xi_{\bigcup_{j\neq k} A_j}(t)$ 相互独立，可见 $\xi_{A_k}(t)$ 和 $\xi_{A_j}(t)(j \neq k)$ 相互独立.

系 2 设 $A_1, \cdots, A_n$ 是 $\mathfrak{B}_0$ 中的不相交集，$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. 那末过程 $\nu_t(A_1), \nu_t(A_2), \cdots, \nu_t(A_n)$ 和 $\xi(t) - \xi_A(t)$ 相互独立. 特别，对任意 $\varepsilon > 0$，$\nu_t(A)$ 是 $\mathfrak{B}_\varepsilon$ 上具有独立值的 Poisson 测度.

系 3 对任意 $A \in \mathfrak{B}_0$

$$\mathbf{E}e^{i\lambda\xi_A(t)} = \exp\left\{\int_A (e^{i\lambda x} - 1)\Pi_t(dx)\right\}. \tag{9}$$

如果 A 有界，则

$$\mathbf{E}\xi_A(t) = \int_A x\Pi_t(dx), \tag{10}$$

$$\mathbf{D}\xi_A(t) = \int_A x^2\Pi_t(dx). \tag{11}$$

这些关系式由不等式

$$|\xi_A(t) - \sum x_k \nu_{A_k}(t)| \leqslant \rho\nu_A(t) \tag{12}$$

即可得到，其中 A_k 两两不相交，ρ 是 A_k 的直径中之最大者，$A = \bigcup A_k$，$x_k \in A_k$. 由 (12) 式和 $\nu_t(A_k)$ 的独立性

$$\mathbf{E}e^{i\lambda\xi_A(t)} = \lim_{\rho\to 0}\mathbf{E}\exp\{i\lambda\sum x_k\nu_{A_k}(t)\}$$
$$= \lim_{\rho\to 0}\exp\left\{\int(e^{i\lambda x_k}-1)\Pi_t(A_k)\right\}$$
$$= \exp\left\{\int(e^{i\lambda x}-1)\Pi_t(dx)\right\}.$$

同理可证 (10) 和 (11) 两式。

假设 $\xi(t)$ 右连续(若把 $\xi(t)$ 换成它的随机等价过程，即可做到这一点)。对任意有界连续函数 $f(x)$

$$\mathbf{E}f(\xi(t)-\xi(s)+x)$$

对 x 连续。这说明，对应于独立增量过程的马尔科夫过程是 Feller 的(其转移概率决定于方程 (4))。所以由第一章 §4 定理 7 可知，该过程是强马尔科夫过程。这一事实应用如下。

引理 2 如果 $\xi(t)$ 是随机连续的独立增量过程，以概率 1 没有大于某一常数 C 的跳跃，那末 $\xi(t)-\xi(a)$ 具有一切矩。

证。设 τ 是过程 $\xi(t)-\xi(a)$ 首次流出区间 $(-N, N)$ 的时刻。那末 $|\xi(\tau)|\leqslant N+C$ (因为 $|\xi(\tau-0)-\xi(a)|\leqslant N$)。从而

$$\mathbf{P}\{\sup_{s\leqslant t}|\xi(s)-\xi(a)|>N+x+C\}$$
$$=\mathbf{P}\{\tau<t,\ \sup_{\tau<s\leqslant t}|\xi(s)-\xi(\tau)|>x\}$$
$$=\int_0^t\mathbf{P}\{\tau\in du\}\mathbf{P}\{\sup_{u<s\leqslant t}|\xi(s)-\xi(u)|>x\}$$
$$\leqslant\int_0^t\mathbf{P}\{\tau\in du\}\mathbf{P}\left\{\sup_{a\leqslant s\leqslant t}|\xi(s)-\xi(a)|>\frac{x}{2}\right\}$$
$$=\mathbf{P}\{\sup_{a\leqslant s\leqslant t}|\xi(s)-\xi(a)|>N\}$$
$$\times\mathbf{P}\left\{\sup_{a\leqslant s\leqslant t}|\xi(s)-\xi(a)|>\frac{x}{2}\right\}.$$

由于 $\xi(s)$ 以概率 1 有界，可知，对充分大的 x 有

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{a\leqslant s\leqslant t}|\xi(\ )-\xi(a)|>\frac{x}{2}\right\}<q<1,$$

所以

$$\mathbf{P}\{\sup_{a\leqslant s\leqslant t}|\ \xi(s)-\xi(a)|>n(x+C)\}\leqslant q^n,$$

从而

$$\mathbf{E}\sup_{a\leqslant s\leqslant t}|\xi(s)-\xi(a)|^k\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n^k(x+C)^kq^{n-1}. \qquad (13)$$

因为

$$|\xi(t)-\xi(a)|\leqslant\sup_{a\leqslant s\leqslant t}|\xi(s)-\xi(a)|,$$

于是引理得证.

注. 由 (13) 可见，对 $a\leqslant t\leqslant C<b$，$|\xi(t)-\xi(a)|$ 一致有界. 由随机连续性和在积分号下取极限的定理可得各阶矩的连续性.

设 $\xi(a)=0$，$\xi_\varepsilon(t)=\xi(t)-\xi_{\Delta_\varepsilon}(t)$，其中 $\Delta_\varepsilon=(-\infty,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,\infty)$. 过程 $\xi_\varepsilon(t)$ 没有大于 ε 的跳跃. 因而 $\xi_\varepsilon(t)$ 有一切矩. 对 $\varepsilon<1$ 设

$$\eta_\varepsilon(t)=\xi_1(t)-\xi_\varepsilon(t)-\mathbf{E}[\xi_1(t)-\xi_\varepsilon(t)].$$

由系 1，该过程与 $\xi_\varepsilon(t)$ 独立. 同理，对于 $\varepsilon>\varepsilon_1$，$\eta_\varepsilon(t)-\eta_{\varepsilon_1}(t)$ 与 $\eta_\varepsilon(t)$ 独立. 其次，$\mathbf{E}\eta_\varepsilon(t)=0$，$\mathbf{D}\eta_\varepsilon(t)\leqslant\mathbf{D}\xi_1(t)$. 因此，对于固定的 t，$\eta_{1-s}(t)$ 关于 s 为鞅，从而存在极限

$$\lim_{s\uparrow 1}\eta_{1-s}(t)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\eta_\varepsilon(t)=\eta_0(t).$$

由于 $\eta_\varepsilon(t)$ 的四阶矩对 ε 有界，

$$\mathbf{E}\eta_\varepsilon^4(t)\leqslant\mathbf{E}[\xi_1(t)-\mathbf{E}\xi_1(t)]^4,$$

可见

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbf{E}\eta_\varepsilon^2(t)=\mathbf{E}\eta_0^2(t),\qquad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbf{E}[\eta_\varepsilon(t)-\eta_0(t)]^2=0.$$

由 Колмогоров 不等式

$$\mathbf{P}\{\sup_{a\leqslant s\leqslant t}|\eta_\varepsilon(s)-\eta_0(s)|>a\}\leqslant\frac{\mathbf{E}[\eta_\varepsilon(t)-\eta_0(t)]^2}{a^2}.$$

因而可以选择一序列 $\varepsilon_k\downarrow 0$，使 $\eta_{\varepsilon_k}(s)$ 在 $[a,t]$ 上一致收敛于 $\eta_0(s)$. 设

$$\xi_0(t)=\xi_1(t)-\mathbf{E}\xi_1(t)-\eta_0(t).$$

$\xi_0(t)$ 以概率 1 是过程序列 $\xi_{\varepsilon_k}(t)-\mathbf{E}\xi_{\varepsilon_k}(t)$ 的一致极限. 因为 $\xi_{\varepsilon_k}(t)$ 没有绝对值大于 ε_k 的跳跃,而 $\mathbf{E}\xi_{\varepsilon_k}(t)$ 连续, 故 $\xi_0(t)$ 也连续, $\mathbf{E}\xi_0(t)=0$, $\xi_0(t)$ 和 $\xi_{\Delta_1}(t)+\eta_1(t)$ 独立. $\xi_{\Delta_1}(t)$ 的特征函数决定于 (9) 式.

由于

$$\mathbf{E}[\xi_1(t)-\xi_\varepsilon(t)]=\int_{\varepsilon<|x|<1}x\Pi_t(dx),$$

$$\mathbf{E}\eta_\varepsilon^2(t)=\int_{\varepsilon<|x|\leq 1}x^2\Pi_t(dx),$$

故容易验证

$$\mathbf{E}\exp\{i\lambda\eta_\varepsilon(t)\}=\exp\left\{\int_{\varepsilon<|x|\leq 1}(e^{i\lambda x}-1-i\lambda x)\Pi_t(dx)\right\}. \quad (14)$$

由于 $\mathbf{E}\eta_\varepsilon^2(t)$ 对 ε 有界,可见

$$\int_{0<|x|<1}x^2\Pi_t(dx)<\infty.$$

在 (14) 中取极限,得

$$\mathbf{E}\exp\{i\lambda\eta_1(t)\}=\exp\left\{\int_{0<|x|<1}(e^{i\lambda x}-1-i\lambda x)\Pi_t(dx)\right\}. \quad (15)$$

为求出 $\xi(t)$ 的特征函数,只需找出 $\xi_0(t)$ 的特征函数. 现证

$$\mathbf{E}e^{i\lambda\xi_0(t)}=e^{-\frac{\lambda^2}{2}b(t)},$$

其中 $b(t)=\mathbf{E}\xi_0^2(t)$. 显然, 函数 $b(t)$ 连续并且不减. 我们计算随机变量 $\xi_0(t)$ 的矩. 设 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$, $\Delta=\max\limits_k(t_{k+1}-t_k)$, $\xi_k=\xi_0(t_{k+1})-\xi_0(t_k)$, $b_k=\mathbf{D}\xi_k=b(t_{k+1})-b(t_k)$. 有

$$\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k^4\leqslant\sup_k\xi_k^2\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k^2.$$

由过程的连续性知,当 $\Delta\to 0$ 时, $\sup\limits_k\xi_k^2\to 0$; 而由 $\mathbf{E}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\xi_k^2=b(t)$ 知, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\xi_k^2$ 依概率有界. 由此可见,依概率收敛有

$$[\xi_0(t)]^4=\lim_{\Delta\to 0}\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\right)^4-\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k^4\right].$$

所以

$$\mathbf{E}\xi_0^4(t) \leqslant \lim_{\Delta\to 0}\mathbf{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\right)^4 - \sum_{k=0}^{n-1}\xi_k^4\right]$$

$$= 6\lim_{\Delta\to 0}\mathbf{E}\sum_{k<j}\xi_k^2\xi_j^2 \leqslant 3b^2(t).$$

同理

$$\mathbf{E}[\xi_0(t)-\xi_0(s)]^4 \leqslant 3\{\mathbf{E}[\xi_0(t)-\xi_0(s)]^2\}^2.$$

于是,

$$\mathbf{E}\xi_k^4 \leqslant 3b_k^2.$$

所以

$$\mathbf{E}\xi_0^4(t) = \mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\right)^4 = 6\mathbf{E}\sum_{k<j}\xi_k^2\xi_j^2 + \sum_k \mathbf{E}\xi_k^4$$

$$= 3\left(\sum_{k=0}^{n-1}b_k\right)^2 + \sum_{k=0}^{n-1}(\mathbf{E}\xi_k^4 - 3b_k^2).$$

当 $\Delta\to 0$ 时取极限,得

$$\mathbf{E}\xi_0^4(t) = 3b^2(t).$$

其次

$$\mathbf{E}e^{i\lambda\xi_0(t)} = \prod_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}e^{i\lambda\xi_k}$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\left(1+i\lambda\xi_k-\frac{\lambda^2}{2}\xi_k^2\right)$$

$$+\left[\prod_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}e^{i\lambda\xi_k} - \prod_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{\lambda^2}{2}b_k\right)\right].$$

因为对任何 λ 和充分小的 Δ

$$\left|\prod_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}e^{i\lambda\xi_k} - \prod_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\left(1+i\lambda\xi_k-\frac{\lambda^2}{2}\xi_k^2\right)\right|$$

$$\leqslant \frac{|\lambda^3|}{6}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}|\xi_k|^3 \leqslant \frac{|\lambda|^3}{6}\sum_{k=0}^{n-1}[\mathbf{E}|\xi_k|^4]^{3/4}$$

$$\leqslant \frac{|\lambda|^3}{6}\sum_{k=0}^{n-1}(3b_k^2)^{3/4} \leqslant \frac{|\lambda|^3}{2\cdot 3^{1/4}}\sup_k\sqrt{b_k}\,b(t) \to 0$$

(由 $b(t)$ 的连续性知，当 $\Delta\to 0$ 时最后的式子趋向 0)，所以

$$\mathbf{E}e^{i\lambda\xi_0(t)}=\lim_{\Delta\to 0}\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{\lambda^2}{2}b_k\right)=e^{-\frac{\lambda^2}{2}b(t)}.$$

于是我们证明了下面的定理.

定理 4 对 $[a, b)$ 上的任一随机连续过程 $\xi(t)$，存在 $[a, b)$ 上的连续函数 $a(t)$，$[a, b)$ 上的连续不减函数 $b(t)$，其中 $b(0)=0$，以及函数 $\Pi_t(A)$：对每个 t 它是 $\mathfrak{B}_\varepsilon(\varepsilon>0)$ 上的测度，而对每个 $A\in\mathfrak{B}_\varepsilon$ 它是 t 的连续增函数，并且

$$\int_{0<|x|\leq 1}x^2\Pi_t(dx)<\infty,$$

使随机变量 $\xi(t)$ 的特征函数 $\varphi_t(\lambda)$ 为

$$\begin{aligned}\varphi_t(\lambda)=\varphi_a(\lambda)\exp\Big\{&i\lambda a(t)-\frac{b(t)}{2}\lambda^2\\&+\int_{0<|x|\leq 1}(e^{i\lambda x}-1-i\lambda x)\Pi_t(dx)\\&+\int_{|x|>1}(e^{i\lambda x}-1)\Pi_t(dx)\Big\}\end{aligned}\tag{16}$$

(其中 $a(t)=\mathbf{E}[\xi_1(t)]$). 此外函数 $a(t)$, $b(t)$ 和 $\Pi_t(A)$ 由过程唯一确定.

注意，由无穷可分分布特征函数的表现的唯一性(见第一卷第六章 §3 的定理 3 的注)可知表现 (16) 唯一.

仿照(16)的推导，可以得到过程增量 $\xi(s)-\xi(t)$, $s>t$, 的特征函数 $\varphi_{t,s}(\lambda)$:

$$\begin{aligned}\varphi_{t,s}(\lambda)=\exp\Big\{&i[a(s)-a(t)]\lambda-\frac{b(s)-b(t)}{2}\lambda^2\\&+\int_{0<|x|\leq 1}(e^{i\lambda x}-1-i\lambda x)[\Pi_s(dx)-\Pi_t(dx)]\\&+\int_{|x|>1}(e^{i\lambda x}-1)[\Pi_s(dx)-\Pi_t(dx)]\Big\}.\end{aligned}\tag{17}$$

可分 Banach 空间的独立增量过程 设 $\mathscr{X}$ 是可分 Banach 空间，而 $\mathfrak{B}$ 是它的 Borel 子集的 σ 代数. 那末 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 满足本节一开始所提出的条件 a) 和 b). 因而可以考虑取值于 $\mathscr{X}$ 的独立增

量过程.

设 $\xi(t)$ 是定义在 $[a,b)$ 上的过程; 而过程 $\bar{\xi}(t)$ 和 $\xi(t)$ 独立同有限维分布. 那末 $\xi(t)-\bar{\xi}(t)=\xi^*(t)$ 是对称独立增量过程. 我们假设 $\xi^*(t)$ 是可分的, 并且证明 $\xi^*(t)$ 没有第二类间断点.

我们首先指出,对任意凸闭集 S

$$\mathbf{P}\{\xi^*(s)\in S,\ a\leqslant s\leqslant t\}\geqslant 1-2\mathbf{P}\{\xi^*(t)\bar{\in}S\}. \qquad (18)$$

事实上,对任何有穷数组 $a=s_0<s_1<\cdots<s_n=t$, 不等式

$$\mathbf{P}\{\xi^*(s_k)\in S,k=0,\cdots,n\}\geqslant 1-2\mathbf{P}\{\xi^*(t)\bar{\in}S\} \qquad (19)$$

成立, 因为: 如果 ν 是 $\xi^*(s_\nu)$ 首次流出集合 S 的序号, 而 $l(x)$ 是使集 $\{x:l(x)>l(s_\nu)\}\cap S=\phi$ 的线性泛函(由于存在分离凸集的外点和凸集的支撑超平面,可知这样的线性泛函存在),则

$$\mathbf{P}\{\nu\leqslant n\}=1-\mathbf{P}\{\xi^*(s_k)\in S,k=0,\cdots,n\}$$
$$\leqslant\mathbf{P}\{\nu\leqslant n\}2\mathbf{P}\{\xi^*(t)-\xi^*(s_\nu)\in V|\nu\leqslant n\}\leqslant 2\mathbf{P}\{\xi^*(t)\bar{\in}S\},$$

其中 $V=\{x:l(x)<0\}$. 根据过程 $\xi^*(t)$ 的可分性,由 (18) 即得 (19).

我们构造一凸的闭紧集 $K_{m,n}$, 使

$$\mathbf{P}\left\{\xi^*\left(b-\frac{1}{n}\right)\bar{\in}K_{m,n}\right\}\leqslant\frac{1}{m}.$$

那末

$$\mathbf{P}\left\{\xi^*(s)\in K_{m,n},\ a\leqslant s\leqslant b-\frac{1}{n}\right\}\geqslant 1-\frac{2}{m}. \qquad (20)$$

因此

$$\mathbf{EP}\Big\{\xi(s)-\bar{\xi}(s)\in K_{m,n},$$
$$a\leqslant s\leqslant b-\frac{1}{n}\Big|\bar{\xi}(s),a\leqslant s\leqslant b-\frac{1}{n}\Big\}\geqslant 1-\frac{2}{m}.$$

由此可见,对一切 m 和 n 存在一函数 $a_{m,n}(t)$, 使

$$\mathbf{P}\left\{\xi(s)-a_{m,n}(s)\in K_{m,n},\ a\leqslant s\leqslant b-\frac{1}{n}\right\}\geqslant 1-\frac{2}{m}. \qquad (21)$$

为证明 $\xi^*(t)$ 没有第二类间断点, 我们注意到, $l[\xi^*(t)]$ 是

对称的一维过程，有独立增量，因而它没有第二类间断点．因此 $\xi^*(t)$ 有弱极限 $\xi^*(s+0)$ 和 $\xi^*(s-0)$．因为由 (20) 知，$\xi^*(t)$ 的几乎所有轨道在每一线段 $\left[a,\ b-\frac{1}{n}\right]$ 上是紧的，所以 $\xi^*(s+0)$ 和 $\xi^*(s-0)$ 也是 $\xi^*(t)$ 的强极限．

显然，在 (21) 中可以选择函数 $a_{m,n}(t)$，使当 $s<b$ 时 $\xi(s)-a_{m,n}(s)$ 没有第二类间断点．所以当 $s<b$ 时函数 $a_{m',n'}(s)-a_{m,n}(s)$ 也没有第二类间断点，因而函数 $a_{m',n'}(s)-a_{m,n}(s), s\in\left[a, b-\frac{1}{n}\right]$，的值集也是紧的．令 $a(s)=a_{m',n'}(s)$；那末可以断定，$\xi(s)-a(s)$ 无第二类间断点，并且存在一紧集系 $\{K_{m,n}\}$，使得对一切 $m>0$ 和 $n>0$

$$\mathbf{P}\left\{\xi(s)-a(s)\in K^*_{m,n},\ a\leqslant s\leqslant b-\frac{1}{n}\right\}\geqslant 1-\frac{2}{m} \tag{22}$$

(作为 $K^*_{m,n}$ 可以取包含点 $x+a(s)-a_{m,n}(s)$，其中 $x\in K_{m,n}$，$a\leqslant s\leqslant b-\frac{1}{n}$，的最小凸闭集)．函数 $\xi_1(s)=\xi(s)-a(s)$ 最多有可数多个间断点，记作 $\{t_k, k=1, 2, \cdots\}$．设 $\xi_k=\xi_1(t_k+0)-\xi_1(t_k)$，$\bar{\xi}_k=\xi_1(t_k)-\xi_1(t_1-0)$．我们现在证明，存在向量 b_k 和 $\bar{b}_k\in\mathscr{X}$，使级数

$$\sum_{t_k<t}(\xi_k-b_k)\ \text{和}\ \sum_{t_k\leqslant t}(\bar{\xi}_k-\bar{b}_k)$$

收敛，而且其和与项的顺序无关．

设 ξ_k 是相互独立的随机变量，而且 $\tilde{\xi}_k$ 与 ξ_k 独立且同分布．记 $\xi^*_k=\xi_k-\tilde{\xi}_k$．可以设 $\xi^*_k=\xi^*(t_k+0)-\xi^*(t_k)$．由 (19) 对任意有限数组 $t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_l}<b-\frac{1}{n}$ 有

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{j=1}^{r}\xi^*_{i_j}\in K_{m,n}, r=1,\cdots,l\right\}$$

$$\geqslant\mathbf{P}\left\{\sum_{j=1}^{r}\xi^*_{i_j}\in K_{m,n}, r=1,\cdots,l;\ \xi^*\left(b-\frac{1}{n}\right)\in K_{m,n}\right\}$$

$$\geqslant 1 - 2\mathbf{P}\left\{\xi^*\left(b-\frac{1}{n}\right)\bar{\in} K_{m,n}\right\} \geqslant 1 - \frac{2}{m}.$$

所以，不论点 t_k 的序号是如何编排的，都有

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{k<l,\, t_k<b-\frac{1}{n}} \xi_k^* \in K_{m,n},\ l = 1, 2, \cdots\right\} \geqslant 1 - \frac{2}{m}. \qquad (22')$$

因为对任意线性泛函 $l(x)$，级数 $\sum_{t_k<t} l(\xi_k^*)$ 收敛，所以由(22′)级数 $\sum_{t_k<t} \xi_k^*$ 收敛，且其和与项的顺序无关，而过程

$$\eta^*(t) = \sum_{t_k<t} \xi_k^*$$

仅在点 t_k 上间断，$\eta^*(t_k+0) - \eta^*(t_k) = \xi_k^*$. 此外，由 (22′) 可见

$$\mathbf{P}\left\{\eta^*(t) \in K_{m,n},\ t \leqslant b - \frac{1}{n}\right\} \geqslant 1 - \frac{2}{m}. \qquad (23)$$

所以可以选择一 b_k 的序列（如 $a(t)$ 的构造）和一紧集系 $\{K_{m,n}^*\}$，使对每个 t 级数

$$\sum_{t_k<t} (\xi_k - b_k) = \eta(t) \qquad (24)$$

收敛，过程 $\eta(t)$ 没有第二类间断点，且对所有 m 和 n

$$\mathbf{P}\left\{\eta(t) \in K_{m,n}^*,\ t \leqslant b - \frac{1}{n}\right\} \geqslant 1 - \frac{2}{m}. \qquad (25)$$

类似地可以构造序列 $\bar{b}_k$ 和

$$\bar{\eta}(t) = \sum_{t_k<t} (\bar{\xi}_k - \bar{b}_k). \qquad (26)$$

最后，设 $b(t)$ 是非随机函数，在除 t_k 之外的所有点上连续，其中 $b(t_k+0) - b(t_k) = b_k$, $b(t_k) - b(t_k-0) = \bar{b}_k$. 函数 $b(t)$ 的值集是紧集. 过程 $\xi_1(t) - \eta(t) - \bar{\eta}(t) + b(t) = \xi^0(t)$ 是随机连续过程. 这样，任何独立增量过程 $\xi(t)$ 都能表为

$$\xi(t) = a^1(t) + \eta^1(t) + \xi^0(t),$$

其中 $a^1(t)$ 是非随机函数，$\eta^1(t) = \eta(t) + \bar{\eta}(t)$，而 $\eta(t)$ 和 $\bar{\eta}(t)$ 决定于 (24) 和 (26) 式（仿照一维情形，我们称这样的过程为离散

的)，$\xi^0(t)$ 是随机连续的独立增量过程．因为对于 $\eta(t)$ 有类似于 (25) 的不等式成立，而且当 $t \leqslant b - \frac{1}{n}$ 时 $b(t)$ 的值集是紧集，故存在一紧集系 $\{K^0_{m,n}\}$，使

$$\mathbf{P}\left\{\xi^0(t) \in K^0_{m,n},\ t \in \left[a,\ b - \frac{1}{n}\right]\right\} \geqslant 1 - \frac{1}{m}.$$

现在我们来研究取值于 $\mathscr{X}$ 的随机连续过程．设 $\mathfrak{B}_\varepsilon$ 为到 0 点的距离不小于 ε 的 Borel 集的环．对任一 $A \in \mathfrak{B}_\varepsilon$ 可以定义一过程 $\nu_t(A)$，它的值等于过程 $\xi(s)$ 在时刻 t 之前落入 Borel 集 A 的跳跃的个数，即满足 $\xi(s+0) - \xi(s-0) \in A$ 的点 $s(s < t)$ 的个数．我们再定义过程

$$\xi_A(t) = \sum_{s<t} [\xi(s+0) - \xi(s-0)]\chi_A(\xi(s+0) - \xi(s-0))$$

($\xi_A(t)$ 等于过程 $\xi(t)$ 在时刻 t 之前落入 A 的跳跃的值之和)．过程 $\nu_t(A)$ 和 $\xi_A(t)$ 也都是独立增量过程．仿照一维情形可以证明下面的结果．为方便计，我们将其归纳为一个定理．

定理 5

1) $\nu_t(A)$ 是 Poisson 过程；

2) 如果 $\xi_\varepsilon(t) = \xi(t) - \xi_{\Delta_\varepsilon}(t)$，其中 $\Delta_\varepsilon = \{|x|, |x| > \varepsilon\}$，则对任意一组两两不相交的集 $A_1, \cdots, A_n \in \mathfrak{B}_\varepsilon$，过程

$$\nu_t(A_1), \cdots, \nu_t(A_n) \text{ 和 } \xi_\varepsilon(t)$$

相互独立；

3) 过程 $\xi_\varepsilon(t)$ 有任意阶矩（即对所有 k, $\mathbf{E}[\xi_\varepsilon(t)]^k < \infty$)，而且当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\xi_\varepsilon(t) - \mathbf{E}\xi_\varepsilon(t)$ 收敛于连续的独立增量过程 $\xi_0(t)$；

4) $\xi_0(t)$ 是高斯过程，即对于任何连续有界泛函 $l(x)$，$l[\xi_0(t)]$ 是高斯过程．

5) 过程 $\xi(t)$ 的特征泛函有如下形式

$$\varphi_t(l) = \mathbf{E}e^{il(\xi(t))}$$
$$= \varphi_a(l)\exp\left\{il(a(t)) - \frac{1}{2}B_t(l)\right.$$

$$+\int_{|x|\leq 1}[e^{il(x)}-1-l(x)]\Pi_t(dx)$$

$$+\int_{|x|>1}(e^{il(x)}-1)\Pi_t(dx)\Big\}, \tag{27}$$

其中 $a(t)$ 是取值于$\mathscr{X}$的连续函数，$B_t(l)$ 关于 l 是非负二次泛函，对 t 不减，$\Pi_t(A)=\mathbf{E}\nu(t,A)$：对所有 $\varepsilon>0$，$\Pi_t(A)$ 是$\mathfrak{B}_\varepsilon$上A的有限测度，对固定的 $A\in\mathfrak{B}_\varepsilon$，$\Pi_t(A)$ 对 t 连续不减，而且对任意线性泛函 l

$$\int_{|x|\leq 1} l^2(x)\Pi_t(dx)<\infty.$$

如果$\mathscr{X}$是 Hilbert 空间，则

$$\int_{|x|\leq 1}|x|^2\Pi_t(dx)<\infty$$

（最后一点由第一卷第六章 §3 的定理 3 可得）.

样本函数的某些性质　过程 $\xi(t)$ 称为阶梯的，如果它在每个有限区间 $[a,b-\varepsilon]$ 上只有有限多个跳跃，而且在相邻的两个跳跃之间 $\xi(t)$ 的值为常数.

定理 6　定义在 $[a,b)$ 上、取值于可分 Banach 空间$\mathscr{X}$的随机连续过程 $\xi(t)$ 是阶梯过程的必要和充分条件是，它的特征泛函 $\varphi_t(l)$ 具有下面的形状：

$$\varphi_t(l)=\varphi_a(l)\exp\left\{\int(e^{il(x)}-1)\Pi_t(dx)\right), \tag{28}$$

其中对所有 $t\in[a,b)$，$\Pi_t(A)$ 是有限测度，而对于 $A\in\mathfrak{B}$，它是 t 的单调连续函数.

证. 设 $\xi(t)$ 是阶梯过程. 记 $\Delta_\varepsilon=\{x:|x|>\varepsilon\}$. 那末 $\xi(t)-\xi(a)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\xi_{\Delta_\varepsilon}(t)$；此外，对 $t<b$，存在 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\nu_t(\Delta_\varepsilon)=\nu_t$，其中 ν_t 是过程 $\xi(s)$ 在时刻 t 之前的跳跃的总次数. 作为 Poisson 随机变量的极限，ν_t 也服从 Poisson 分布. 这时

$$\mathbf{E}\nu_t=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}\nu_t(\Delta_\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\Pi_t(\Delta_\varepsilon).$$

因此，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Pi_t(\Delta_\varepsilon)<\infty$. 设$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Pi_t(\Delta_\varepsilon)=\Pi_t(\mathscr{X})$. 那末对所有 $A\in\mathfrak{B}$，$\Pi_t(A)$ 有定义并且有限. 其次

$$\mathbf{E}e^{il(\xi_{\Delta_\varepsilon}(t))} = \exp\left\{\int_{\Delta_\varepsilon}(e^{il(x)}-1)\Pi_t(dx)\right\}.$$

令 $\varepsilon\to 0$ 取极限，即可得 (28)。由 $\xi(t)$ 的随机连续性得 $\Pi_t(\mathscr{X})$ 的连续性，因为

$$\lim_{t_1-t_2\to 0}|\Pi_{t_1}(\mathscr{X})-\Pi_{t_2}(\mathscr{X})|$$

$$=\overline{\lim_{t_1-t_2\to 0}}\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}d\alpha\int(e^{i\alpha l(x)}-1)[\Pi_{t_2}(dx)-\Pi_{t_1}(dx)]\right.$$

$$\left.+\int\frac{\sin Tl(x)}{T}[\Pi_{t_2}(dx)-\Pi_{t_1}(dx)]\right|,$$

在该式右侧的绝对值符号中，通过选择 T 可以使第二项任意地小。而由过程的随机连续性知，对任意 T 第一项趋向 0。

现在我们来证明定理条件的充分性。由 (28) 可见，增量 $\xi(t_2)-\xi(t_1)$ 的特征泛函等于

$$\varphi_{t_1,t_2}(l)=\mathbf{E}e^{il(\xi(t_2)-\xi(t_1))}$$

$$=\exp\left\{\int(e^{il(x)}-1)[\Pi_{t_2}(dx)-\Pi_{t_1}(dx)]\right.$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int e^{il(x)}\Phi_{t_1,t_2}(dx)\right]^k\frac{e^{-c(t_1,t_2)}}{k!}, \tag{29}$$

其中

$$c(t_1,t_2)=c(t_2)-c(t_1),\quad c(t)=\Pi_t(\mathscr{X}),$$
$$\Phi_{t_1,t_2}(A)c(t_1,t_2)=\Pi_{t_2}(A)-\Pi_{t_1}(A).$$

所以 $\xi(t_2)-\xi(t_1)$ 的分布为

$$\mathbf{P}\{\xi(t_2)-\xi(t_1)\in A\}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-c(t_1,t_2)}\frac{1}{k!}\Phi_{t_1,t_2}^{*k}(A), \tag{30}$$

其中

$$\Phi_{t_1,t_2}^{*0}(A)=\delta_0(A)=\begin{cases}1, & 0\in A,\\ 0, & 0\bar{\in} A,\end{cases}$$
$$\Phi_{t_1,t_2}^{*1}(A)=\Phi_{t_1,t_2}(A),$$

而对 $k>1$

$$\Phi_{t_1,t_2}^{*k}(A)=\int_{y_1+y_2\in A}\Phi_{t_1,t_2}^{*k-1}(dy_1)\Phi_{t_1,t_2}(dy_2),$$

即 $\Phi^{*k}_{t_1,t_2}(A)$ 是测度 $\Phi_{t_1,t_2}(A)$ 的 k 重卷积(关于卷积的特征泛函等于被卷测度的特征泛函的乘积这一事实的证明，见第一卷第六章§3；那里考虑的是 Hilbert 空间的测度,不过把相应的证明移到可分 Banach 空间测度的情形是很容易的)．由 (30) 可得

$$\mathbf{P}\{\xi(t_2)-\xi(t_1)=0\}\geqslant e^{-c(t_1,t_2)}. \tag{31}$$

所以,若令

$$s_k^{(n)}=t_1+\frac{k}{n}t_2,$$

则有

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\xi(s)-\xi(t_1)=0,\ s\in[t_1\ t_2]\}\\
&=\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\xi(s_{k+1}^{(n)})-\xi(s_k^{(n)})=0,\ k=0,\ \cdots,\ n-1\}\\
&=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}\{\xi(s_{k+1}^{(n)})-\xi(s_k^{(n)})=0\}\\
&\geqslant\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n-1}e^{-c\left(s_k^{(n)},\ s_{k+1}^{(n)}\right)}=e^{-c(t_1,t_2)}.
\end{aligned}$$

因而，对于每一个点 $t\in[a,b)$ 存在一 $h>0$，使 $\xi(s)$ 的值在 $[t,t+h)$ 上为常数．所以过程的跳跃点组成一个全序集．把这些点按递增顺序编号：$\tau_1<\tau_2<\cdots$(一般，该序列可以是超限的,不过我们只考虑它可以用自然数编号的那些元素)．由过程的强马尔科夫性可以断定

$$\mathbf{P}\{\tau_k>t\,|\,\tau_1,\cdots,\tau_{k-1}\}\geqslant e^{-[c(t)-c(\tau_{k-1})]}\geqslant e^{-c(t)}.$$

所以

$$\mathbf{P}\{\tau_k>t;\ \tau_{k-1}\leqslant t\}\geqslant e^{-c(t)}\mathbf{P}\{\tau_{k-1}\leqslant t\}.$$

由

$$\begin{aligned}
&1\geqslant\mathbf{P}\{\sup\tau_k>t\}\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\tau_k>t,\ \tau_{k-1}\leqslant t\}\geqslant e^{-c(t)}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\tau_{k-1}\leqslant t\}
\end{aligned}$$

可见，$\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{P}\{\tau_{k-1}\leqslant t\}=0$．因此，当 $k\to\infty$ 时，$\mathbf{P}\{\tau_k>t\}\to 1$．如果 ν_t 是 $\xi(t)$ 在 $[a,t]$ 上的跳跃的次数，则 $\mathbf{P}\{\tau_k>t\}=$

$\mathbf{P}\{\nu_k < k\}$. 因为$\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{P}\{\nu_t > k\} = 1$，所以在每个区间 $[a, t]$ 上跳跃的次数有限. 定理得证.

我们来讨论对所有 t，$\xi(t)$ 以概率 1 属于 Banach 空间中某一凸锥K的条件，先看一维情形. 这时半直线是仅有的非平凡凸锥.

定理 7 $[a, b)$ 上的随机连续数值过程 $\xi(t)$ 以概率 1 非负的必要和充分条件，是它的特征函数 $\varphi_t(\lambda)$ 具有如下形状:

$$\varphi_t(\lambda) = \varphi_a(\lambda)\exp\left\{i\lambda\gamma(t) + \int_0^\infty (e^{i\lambda x} - 1)\Pi_t(dx)\right\}, \tag{32}$$

其中 $\varphi_a(\lambda)$ 是非负随机变量的特征函数，$\gamma(t)$ 是非负连续函数，而测度 $\Pi_t(dx)$ 满足下列条件: 对一切 $A\subset(\varepsilon, \infty)$，$\Pi_t(A)$ 对 t 单调并且连续，积分 $\int_0^1 x\Pi_t(dx)$ 有定义并且对 t 连续.

证. 如果我们证明了特征函数为

$$\exp\left\{\int_\varepsilon^\infty (e^{i\lambda x} - 1)\Pi_t(dx)\right\}$$

的随机变量 ξ_ε 是非负的，也就证明了定理条件的充分性. 而这是下面等式的推论:

$$\mathbf{P}\{\xi_\varepsilon \in A\} = \sum_{k=0}^\infty e^{-c_\varepsilon(t)}\frac{1}{k!}\Phi_t^{*k}(\varepsilon, A), \tag{33}$$

其中

$$c_\varepsilon(t) = \Pi_t((\varepsilon, \infty)), \quad \Phi_t^{*0}(\varepsilon, A) = \delta_0(A),$$
$$\Phi_t^{*1}(\varepsilon, A) = \Pi_t((\varepsilon, \infty)\cap A)(c_\varepsilon(t))^{-1},$$
$$\Phi_t^{*k}(\varepsilon, A) = \int_{x+y\in A}\Phi_t^{*k-1}(\varepsilon, dx)\Phi_t^{*1}(\varepsilon, dy).$$

(33) 式的证明与 (30) 式类似.

由于 $\varphi_t(\lambda)$ 可以表为

$$\varphi_t(\lambda) = \varphi_a(\lambda)\exp\left\{i\lambda\gamma(t) + i\lambda\int_0^1 x\Pi_t(dx)\right.$$
$$+ \int_0^1 (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x)\Pi_t(dx)$$
$$\left. + \int_1^\infty (e^{i\lambda x} - 1)\Pi_t(dx)\right\},$$

可见 $\xi(t)$ 随机连续.

现在证明定理条件的必要性. 记 $\xi_\varepsilon(t)=\xi_{\Delta_\varepsilon}(t)$, 其中 $\Delta_\varepsilon=\{x:x>\varepsilon\}$. 那末过程 $\xi(t)-\xi_\varepsilon(t)$ 也是非负的,因为它与 $\xi_\varepsilon(t)$ 独立,而 $\xi_\varepsilon(t)$ 以正概率为 0. 所以 $\xi_\varepsilon(t)\leqslant\xi(t)$, 而由于 $\xi_\varepsilon(t)$ 对 ε 单调,故存在 $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\xi_\varepsilon(t)=\xi^0(t)$. 这时 $\xi(t)-\xi^0(t)$ 是连续的非负过程. 当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时,在等式

$$\mathbf{E}e^{i\lambda\xi_\varepsilon(t)}=\exp\left\{\int_\varepsilon^\infty(e^{i\lambda x}-1)\Pi_t(dx)\right\} \tag{34}$$

中取极限,得

$$\mathbf{E}e^{i\lambda\xi^0(t)}=\exp\left\{\int_0^\infty(e^{i\lambda x}-1)\Pi_t(dx)\right\}. \tag{35}$$

最后的积分收敛,是因为当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时 (34) 式中特征函数有极限,以及

$$\int_0^1[\sin\lambda x-\lambda x]\Pi_t(dx)$$

存在(被积函数与 x^2 是同阶的). 所以存在

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 x\Pi_t(dx)=\int_0^1 x\Pi_t(dx).$$

过程 $\xi(t)-\xi^0(t)$ 以概率 1 连续,从而它是高斯过程. 由 $\mathbf{P}\{\xi(t)-\xi^0(t)\geqslant 0\}=1$ 可知 $\mathbf{D}[\xi(t)-\xi^0(t)]=0$. 因此, $\xi(t)-\xi^0(t)=\gamma(t)$, 其中 $\gamma(t)$ 是连续的非负函数. (32) 式得证.

由等式

$$\int_0^1 x\Pi_t(dx)=a(t)-\gamma(t)$$

(其中 $a(t)$ 是 (16) 式中的连续函数)可见, $\int_0^1 x\Pi_t(dx)$ 连续. 定理得证.

系 设 K 是可分 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 中的一封闭凸锥. 使存在一线性泛函 $l_0(x)$, 满足

$$\inf_{x\in K,\ \|x\|=1} l_0(x)>0.$$

随机连续的独立增量过程 $\xi(t)$ 以概率 1 属于 K 的必要和充分条件

是，它的特征泛函具有下面的形状：

$$\varphi_t(l)=\varphi_a(l)\exp\left\{il\,(a(t))+\int(e^{il(x)}-1)\Pi_t(\,dx\,)\right\},\quad(36)$$

其中 $\varphi_a(l)$ 是K上概率测度的特征泛函，$a(t)\in K$，测度 Π_t 也集中在K上。

选取一可数泛函序列 $\{l_k\}$，使

$$K=\bigcap_{k=1}^{\infty}\{x:l_k(x)\geqslant 0\}.$$

那末，任一过程 $l_k(\xi(t))$ 以概率 1 非负．所以 $l_k(\xi(t))$ 以概率 1 只有非负跳跃．因此，如果 $A\subset\bigcup_k\{x:l_k(x)<0\}$，则 $\Pi_t(A)=0$．设

$$\Delta_\varepsilon=K\cap\{x:l(x)>\varepsilon\}.$$

那末 Δ_ε 到 0 点的距离为正．令 $\xi_\varepsilon(t)=\xi_{\Delta_\varepsilon}(t)$．那末，$\xi_\varepsilon(t)$ 以概率 1 属于K，而且 $\xi(t)-\xi_\varepsilon(t)\in K$（因为对一切$k$有 $l_k(\xi(t)-\xi_\varepsilon(t))\geqslant 0$）．

现在证明极限 $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}[\xi(t)-\xi_\varepsilon(t)]=\xi_0(t)$ 存在．设 $\mathfrak{L}^+$ 是K上具有非负值的线性泛函的集合．那末对所有 $l\in\mathfrak{L}^+$ 存在极限

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}l(\xi(t)-\xi_\varepsilon(t)),$$

因为 $l(\xi_\varepsilon(t))$ 对 ε 单调，并且以 $l(\xi(t))$ 为界．另一方面，对任意 l，如果 $\alpha\geqslant\|l\|\inf\limits_{x\in K,\ \|x\|=1}l_0(x)$，则

$$l+\alpha l_0\in\mathfrak{L}^+.$$

所以任意泛函 $l(x)=l'(x)-l''(x)$，其中 l' 和 l'' 属于 $\mathfrak{L}^+$．因此对所有 l 存在

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}l(\xi_\varepsilon(t)).$$

设 $\xi^0(t)$ 是 $\xi_\varepsilon(t)$ 的弱极限．那末，对一切k有 $l_k(\xi^0(t)-\xi_\varepsilon(t))\geqslant 0$，故对一切 $\varepsilon>0$ 有 $\xi^0(t)-\xi_\varepsilon(t)\in K$．因为

$$\|\xi^0(t)-\xi_\varepsilon(t)\|\leqslant l_0(\xi^0(t)-\xi_\varepsilon(t))[\inf_{x\in K,\ \|x\|=1}l_0(x)]^{-1},$$

故 $\|\xi^0(t)-\xi_\varepsilon(t)\|\to 0$．因而 $\xi^0(t)$ 也是 $\xi_\varepsilon(t)$ 的强极限．

因过程 $\xi(t)-\xi^0(t)$ 以概率 1 连续，所以

$$\mathbf{E}\exp\{il(\xi(t)-\xi^0(t))\}=\exp\left\{il(a(t))-\frac{1}{2}b(l)\right\},\quad(37)$$

其中 $b(l)$ 是二次泛函。现证 $b(l)=0$。对于 $l\in\mathfrak{L}^+$ 这是对的，因为 $l(\xi(t)-\xi^0(t))$ 是连续非负过程，而

$$b(l)=\mathbf{D}l(\xi(t)-\xi^0(t)).$$

因此，如果 $l=l'-l''$，其中 $l',l''\in\mathfrak{L}^+$，则

$$\begin{aligned}b(l)&=\mathbf{D}[l'(\xi(t)-\xi^0(t))+l''(\xi(t)-\xi^0(t))]\\&=\mathbf{D}l''(\xi(t)-\xi^0(t))=0\end{aligned}$$

(因为 $l'(\xi(t)-\xi^0(t))$ 和 $l''(\xi(t)-\xi^0(t))$ 以概率 1 为常数)。

最后，我们注意到

$$\begin{aligned}\mathbf{E}e^{il(\xi^0(t))}&=\lim_{\varepsilon\to0}\mathbf{E}e^{il(\xi_\varepsilon(t))}\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Delta_\varepsilon}(e^{il(x)}-1)\Pi_t(dx).\end{aligned}\quad(38)$$

由 (37)，(38) 以及等式 $b(l)=0$ 得 (36)。由 $\mathbf{P}\{l_k(\xi(t))\geqslant0\}=1$，$k=1,\cdots$，可见 (36) 式给出了在 K 中取值的随机变量的特征泛函。

注. 由过程 $\xi(t)$ 的可分性容易证明，在系的条件下

$$\mathbf{P}\{\xi(t)\in K,\ t\in[a,b)\}=1.$$

我们研究过程以概率 1 有有界变差的条件。

定理 8 定义在 $[a,b)$ 上、取值于 $\mathscr{X}$ 的随机连续独立增量过程 $\xi(t)$，在每个线段 $[a,t]$，$t<b$，上以概率 1 有有界变差的必要和充分条件是，它的特征泛函 $\varphi_t(l)$ 具有如下形状:

$$\varphi_t(l)=\varphi_a(l)\exp\left\{il(a(t))+\int(e^{il(x)}-1)\Pi_t(dx)\right\},\quad(39)$$

其中 $a(s)$ 在任一线段 $[a,t]$，$t<b$，上为连续的有界变差函数，而测度 Π_t 满足

$$\int_{0<\|x\|\leqslant1}\|x\|\Pi_t(dx)<\infty,\quad(t<b).$$

这时 $\zeta(t)=\operatorname*{var}_{a\leqslant s\leqslant t}\xi(s)$ 也是随机连续的独立增量过程，并且

$$\mathbf{E}e^{i\lambda\zeta(t)} = \exp\left\{i\lambda \operatorname*{var}_{a\leqslant s\leqslant t} a(s) + \int (e^{i\lambda\|x\|} - 1)\Pi_t(dx)\right\}. \quad (40)$$

证。先假设 $\xi(t)$ 以概率 1 有有界变差。由于 $\zeta(t)$ 和 $\xi(t)$ 的间断点重合，可见过程 $\zeta(t)$ 随机连续。此外，$\zeta(t_2) - \zeta(t_1)$ 可以通过 $\xi(s) - \xi(t_1)$，$t_1 \leqslant s \leqslant t_2$ 来表示，因而与 $\xi(t)$，$t \leqslant t_1$，独立，从而也与 $\zeta(t)$，$t \leqslant t_1$，独立。

设 $\xi_\varepsilon(t) = \xi_{\Delta_\varepsilon}(t)$，其中 $\Delta_\varepsilon = \{x: |x| > \varepsilon\}$。显然，

$$\operatorname*{var}_{a\leqslant s\leqslant t} \xi_\varepsilon(s) + \operatorname*{var}_{a\leqslant s\leqslant t}[\xi(s) - \xi_\varepsilon(s)] = \zeta(t),$$

且对 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$

$$\operatorname*{var}_{a\leqslant s\leqslant t} \xi_{\varepsilon_1}(s) = \operatorname*{var}_{a\leqslant s\leqslant t} \xi_{\varepsilon_2}(s) + \operatorname*{var}_{a\leqslant s\leqslant t} [\xi_{\varepsilon_1}(s) - \xi_{\varepsilon_2}(s)].$$

因此，存在 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \operatorname*{var}\limits_{a\leqslant s\leqslant t} \xi_\varepsilon(s)$，而

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \operatorname*{var}_{a\leqslant s\leqslant t} [\xi_{\varepsilon_1}(s) - \xi_{\varepsilon_2}(s)] = 0.$$

所以，在 $[a, t]$ 上一致地有

$$|\xi_{\varepsilon_1}(s) - \xi_{\varepsilon_2}(s)| \leqslant \operatorname*{var}_{a\leqslant s\leqslant t} [\xi_{\varepsilon_1}(s) - \xi_{\varepsilon_2}(s)] \to 0,$$

而 $\xi_\varepsilon(s)$ 在每个区间上一致收敛于某过程 $\xi^0(t)$。过程 $\xi(t) - \xi^0(t)$ 以概率 1 连续，并且有有界变差。

由于 $\xi_\varepsilon(t)$ 是阶梯过程，故

$$\operatorname*{var}_{a\leqslant s\leqslant t} \xi_\varepsilon(t) = \int_{\Delta_\varepsilon} \|x\| \nu_t(dx)$$

（右侧实际上是过程 $\xi_\varepsilon(s)$ 在线段 $[a, t]$ 上跳跃的范数之和）。所以

$$\mathbf{E}\exp\{i\lambda \operatorname*{var}_{a\leqslant s\leqslant t} \xi_\varepsilon(t)\} = \exp\left\{\int_{\Delta_\varepsilon} (e^{i\lambda\|x\|} - 1)\Pi_t(dx)\right\},$$

而

$$\mathbf{E}\exp\{i\lambda \operatorname*{var}_{a\leqslant s\leqslant t} \xi^0(t)\} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{\int_{\Delta_\varepsilon} (e^{i\lambda\|x\|} - 1)\Pi_t(dx)\right\}.$$

由于最后的极限存在，可见

$$\int_{0<\|x\|\leqslant 1} \|x\| \Pi_t(dx)$$

有限.

现在考虑过程 $\xi(t)-\xi^0(t)=\xi_0(t)$，它是高斯过程. 现证，对一切 l 有 $b_t(l)=\mathbf{D}[l(\xi_0(t))-l(\xi_0(0))]=0$. 任取一分割 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n$. 如果 $\zeta_0(t)$ 是 $\xi_0(t)$ 的变差，则 $\zeta_0(t)$ 也是非负高斯过程，从而 $\mathbf{E}|\zeta_0(t)|<\infty$. 故

$$\mathbf{E}\sum_{k=0}^{n-1}\|\xi_0(t_{k+1})-\xi_0(t_k)\|\leqslant \mathbf{E}|\zeta_0(t)|$$

一致有界. 所以对任意 l

$$\mathbf{E}\sum_{k=0}^{n-1}|l(\xi_0(t_{k+1}))-l(\xi_0(t_k))|\leqslant \|l\|\mathbf{E}|\zeta_0(t)|$$

一致地成立. 容易验证，对于一维高斯随机变量 η

$$\mathbf{E}|\eta|\geqslant \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\mathbf{D}\eta}.$$

所以

$$\mathbf{E}\sum_{k=0}^{n-1}|l(\xi_0(t_{k+1}))-l(\xi_0(t_k))|$$

$$\geqslant \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{[b_{t_{k+1}}(l)-b_{t_k}(l)]}.$$

从而

$$b_t(l)=\sum_{k=0}^{n-1}[b_{t_{k+1}}(l)-b_{t_k}(l)]$$

$$\leqslant \sqrt{\pi/2}\|l\|\mathbf{E}|\zeta_0(t)|\sup\sqrt{b_{t_{k+1}}(l)-b_{t_k}(l)}.$$

由 $b_t(l)$ 的连续性可见，该不等式右侧可以任意地小，于是 $b_t(l)=0$. 因此 $\xi_0(t)=a(t)$，其中 $a(t)$ 有有界变差; $\xi(t)=a(t)+\xi^0(t)$, $\zeta(t)=\operatorname*{var}_{a\leqslant s\leqslant t}a(s)+\zeta^0(t)$，其中 $\zeta^0(t)=\operatorname*{var}_{a\leqslant s\leqslant t}\xi^0(t)$. 由此得 (39) 和 (40).

为证明定理条件的充分性，我们验证

$$\operatorname*{var}_{a\leqslant s\leqslant t}\xi^0(s)<\infty,$$

其中过程 $\xi^0(t)$ 的特征泛函为

$$\mathbf{E}e^{il(\xi^0(t))} = \exp\left\{\int(e^{il(x)} - 1)\Pi_t(dx)\right\},$$

而 $\Pi_t(dx)$ 满足定理的条件. 如果 $\nu_t(dx)$ 是由 $\xi^0(t)$ 的跳跃构造的测度,则

$$\operatorname*{var}_{a\leqslant s\leqslant t} \xi^0(t) = \int_{\|x\|>0} \|x\|\nu_t(dx).$$

该式右侧的积分有限,是因为存在积分

$$\int_{\|x\|>\varepsilon} \|x\|\Pi_t(dx),$$

以及当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时

$$\mathbf{E}\int_{\varepsilon<\|x\|\leqslant 1} \|x\|\nu_t(dx) = \int_{\varepsilon<\|x\|\leqslant 1} \|x\|\Pi_t(dx)$$

一致有界. 定理得证.

§2. 齐次独立增量过程.一维情形

独立增量过程 $\xi(t)$ 称为**齐次的**,如果它定义在 $[0,\infty)$ 上, $\xi(0)=0$, 而且 $\xi(t+h)-\xi(t)$ 的分布不依赖于 t. 在这一节我们要研究取值于 $\mathscr{R}^1$ 的随机连续齐次独立增量过程.

设

$$K_t(z) = \ln \mathbf{E}e^{iz\xi(t)}. \tag{1}$$

由等式

$$\begin{aligned}\mathbf{E}e^{iz\xi(t+h)} &= \mathbf{E}e^{iz\xi(t)}\mathbf{E}e^{iz[\xi(t+h)-\xi(t)]}\\ &= \mathbf{E}e^{iz\xi(t)}\mathbf{E}e^{iz\xi(h)}\end{aligned}$$

得

$$K_{t+h}(z) = K_t(z) + K_h(z), \quad t\geqslant 0,\ h\geqslant 0. \tag{2}$$

因为由 §1 定理 4

$$\begin{aligned}K_t(z) = ia(t)z - \frac{b(t)}{2}z^2 &+ \int_{|x|\leqslant 1}(e^{izx} - 1 - izx)\Pi_t(dx)\\ &+ \int_{|x|>1}(e^{izx} - 1)\Pi_t(dx),\end{aligned} \tag{3}$$

故对于齐次过程

$$a(t+h)=a(t)+a(h), \qquad a(t)=ta,$$
$$b(t+h)=b(t)+b(h), \qquad b(t)=tb,$$
$$\Pi_{t+h}(A)=\Pi_t(A)+\Pi_h(A), \qquad \Pi_t(A)=t\Pi(A),$$
其中 $a=a(1)$, $b=b(1)$, $\Pi(A)=\Pi_1(A)$. 因而，随机连续的齐次独立增量过程 $\xi(t)$ 的特征函数 $\varphi_t(z)$ 具有如下形状：

$$\varphi_t(z)=\exp\{tK(z)\}, \tag{4}$$

其中

$$K(z)=iaz-\frac{bz^2}{2}+\int_{0<|x|\leqslant 1}(e^{izx}-1-izx)\Pi(dx)$$
$$+\int_{|x|>1}(e^{izx}-1)\Pi(dx). \tag{5}$$

系数 a 和 b 分别叫做**移动系数**和**扩散系数**，而测度 Π 称做过程的**谱测度**. 设 $\mathscr{X}$ 为任一线性空间, $\mathfrak{L}=(l(x))$ 是 $\mathscr{X}$ 上线性泛函的线性集合; $\xi(t)$ 是取值于 $\mathscr{X}$ 的齐次过程, $\varphi_t(l)$ 是它的特征泛函. 那末容易证明，如果对所有 $l\in\mathfrak{L}$, 过程 $l(\xi(t))$ 随机连续，则 $\xi(t)$ 的特征泛函有如下形状：

$$\varphi_t(l)=\exp\{tK(l)\}. \tag{6}$$

(4) 和 (6) 中的函数 $K(z)$ 或 $K(l)$ 叫做过程的**累积量**. 如果 $\mathscr{X}$ 是可分 Banach 空间，而 $\xi(t)$ 是 $\mathscr{X}$ 中的随机连续齐次独立增量过程，则

$$K(l)=l(a)-\frac{b(l)}{2}+\int_{0<\|x\|\leqslant 1}(e^{il(x)}-1-il(x))$$
$$\times\Pi(dx)+\int_{\|x\|>1}(e^{il(x)}-1)\Pi(dx), \tag{7}$$

其中 $a\in\mathscr{X}$, $b(l)$ 是 $\mathscr{X}^*$ 上的二次泛函 ($\mathscr{X}^*$ 是 $\mathscr{X}$ 的共轭空间), Π 是 $\mathscr{X}\backslash\{0\}$ 的 Borel 子集上的测度，满足

$$\int_{\|x\|\leqslant 1}l^2(x)\Pi(dx)<\infty, \qquad \int_{\|x\|>\varepsilon}\Pi(dx)<\infty.$$

在这一节我们只考虑一维过程. 如上一节所指出的那样，每个一维过程 $\xi(t)$ 联系着一个齐次马尔科夫过程 $\{\mathscr{F},\mathscr{N},\mathbf{P}\}$. 该过程的转移概率决定于

$$P(t, x, A) = \mathbf{P}\{x + \xi(t) \in A\}, \tag{8}$$

与它相伴随的半群 $\mathbf{T}_t$ 决定于

$$\mathbf{T}_t f(x) = \mathbf{E} f(x + \xi(t)). \tag{9}$$

记

$$F_t(x) = \mathbf{P}\{\xi(t) < x\}. \tag{10}$$

那末，过程的转移概率完全决定于

$$P(t, x, (-\infty, y)) = F_t(y - x). \tag{11}$$

以后我们往往把原独立增量过程和由它构造的马尔科夫过程等同.

过程的预解式 考虑齐次过程的预解式. 为此引进函数

$$r(\lambda, x) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} F_t(x) dt. \tag{12}$$

如果 $\mathbf{R}_\lambda$ 是过程的预解式，则

$$\mathbf{R}_\lambda f(x) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^\infty f(x + y) d_y r(\lambda, y). \tag{13}$$

定理 1 分布函数 $r(\lambda, x)$（对 x）是无穷可分的，而它的特征函数可表为

$$\int_{-\infty}^\infty e^{izx} d_x r(\lambda, x) = \exp\{K_1(z, \lambda)\} = \frac{\lambda}{\lambda - K(z)},$$

其中

$$K_1(z, \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{t} (e^{tK(z)} - 1) dt. \tag{14}$$

证. 显然在积分

$$\int e^{izx} d_x r(\lambda, x) = \lambda \int e^{izx} d_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} F_t(x) dt$$

中可以变更积分的顺序（测度 $e^{-\lambda t} dF_t(x) dt$ 有限，而函数 e^{izx} 连续并且有界）. 所以

$$\int e^{izx} d_x r(\lambda, x) = \lambda \int e^{-\lambda t} e^{tK(z)} dt = \frac{\lambda}{\lambda - K(z)}.$$

为确信 $\frac{\lambda}{\lambda - K(z)}$ $(\lambda > 0)$ 是无穷可分特征函数，我们注意到，对

所有 $\alpha > 0$

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda - K(z)}\right)^{\alpha} = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^{\alpha-1} e^{tK(z)} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} d_x \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^{\alpha-1} F_t(x) dt, \quad (15)$$

(其中 $\Gamma(\alpha)$ 是 Euler Γ 函数). 显然最后的积分中微分号 d_x 之后为分布函数，故 (15) 式左侧为特征函数(我们取函数 z^{α} 的主分支；因为 $\operatorname{Re}K(z) \leqslant 0$，故 $\operatorname{Re}\dfrac{\lambda}{\lambda - K(z)} > 0$，所以这样做是可能的). 由于 $\dfrac{\lambda}{\lambda - K(z)}$ 是无穷可分特征函数，可见存在累积量 $K_1(z, \lambda)$，使

$$\frac{\lambda}{\lambda - K(z)} = \exp\{K_1(z, \lambda)\}.$$

由此

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda - K(z)}\right)^{\alpha} = \exp\{\alpha K_1(z, \lambda)\}.$$

所以由 (15) 得

$$K_1(z, \lambda) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\lambda^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^{\alpha-1} [e^{tK(z)} - 1] dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{1}{t} [e^{tK(z)} - 1] dt,$$

因为 $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha + 1) \to \Gamma(1) = 1$，而积分

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{e^{tK(z)} - 1}{t} t^{\alpha} dt$$

对 $\alpha \in [0, 1]$ 一致收敛. 定理得证.

因为 $K_1(z, \lambda)$ 是累积量，故存在 a_λ, b_λ 和 Π_λ，使

$$K_1(z, \lambda) = iza_\lambda - \frac{1}{2} b_\lambda z^2 + \int\left(e^{izx} - 1 - \frac{izx}{1 + x^2}\right)\Pi_\lambda(dx). \quad (16)$$

现在证明，对于到 0 点距离为正的所有区间 $[\alpha, \beta)$，有

$$\Pi_\lambda([\alpha,\beta))=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{1}{t}[F_t(\beta)-F_t(\alpha)]dt.$$

为此我们考虑函数

$$K_1^{(\varepsilon)}(z,\lambda)=\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t}\frac{1}{t}[e^{tK(z)}-1]dt$$

$$=\int_{-\infty}^\infty (e^{izx}-1)d_x\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t}\frac{1}{t}F_t(x)dt.$$

（根据 Fubini 定理，在最后的积分中可以变更积分顺序.）我们把 $K_1^{(\varepsilon)}(z,\lambda)$ 写成

$$K_1^{(\varepsilon)}(z,\lambda)=iza_\lambda^{(\varepsilon)}+\int\left(e^{izx}-1-\frac{izx}{1+x^2}\right)\Pi_\lambda^{(\varepsilon)}(dx),$$

其中

$$a_\lambda^{(\varepsilon)}=\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t}\frac{1}{t}\int\frac{x}{1+x^2}d_xF_t(x)dt,$$

$$\Pi_\lambda^{(\varepsilon)}([\alpha,\beta))=\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t}\frac{1}{t}[F_t(\beta)-F_t(\alpha)]dt,$$

这里 $[\alpha,\beta)$ 是到 0 的距离为正的任意区间. 注意到

$$K_1(z,\lambda)-K_1^{(\varepsilon)}(z,\lambda)=\int_0^\varepsilon e^{-\lambda t}\frac{e^{K(z)}-1}{t}dt\to 0.$$

所以测度 $\Pi_\lambda^{(\varepsilon)}(dx)$ 弱收敛于 $\Pi_\lambda(dx)$.因此对于任意 $[\alpha,\beta)$，如果 $\Pi_\lambda(\{\alpha\})=0$，$\Pi_\lambda(\{\beta\})=0$，而 $[\alpha,\beta)$ 到 0 的距离为正，则

$$\Pi_\lambda([\alpha,\beta))=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t}\frac{1}{t}[F_t(\beta)-F_t(\alpha)]dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{1}{t}[F_t(\beta)-F_t(\alpha)]dt.$$

同理可证

$$a_\lambda=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t}\frac{1}{t}\int\frac{x}{1+x^2}d_xF_t(x)dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{1}{t}\frac{x}{1+x^2}d_xF_t(x)dt.$$

最后，由 (16) 得

$$-\frac{1}{2}b_\lambda = \lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^2}K_1(z, \lambda)$$

或由 (14) 得

$$-\frac{1}{2}b_\lambda = \lim_{z\to\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{1}{t}\frac{(e^{tK(z)}-1)}{z^2}dt.$$

因为对任意 $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{z^2}\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t}\frac{1}{t}(e^{tK(z)}-1)\to 0,$$

而且(因为 $\mathrm{Re}K(z)\leqslant 0$)

$$\left|\int_0^\varepsilon e^{-\lambda t}\frac{e^{tK(z)}-1}{t}dt\right| \leqslant \int_0^\varepsilon e^{-\lambda t}|K(z)|dt \leqslant \varepsilon|K(z)|,$$

所以

$$\overline{\lim_{z\to\infty}}\left|\frac{1}{z^2}\int_0^\varepsilon e^{-\lambda t}\frac{1}{t}(e^{tK(z)}-1)dt\right| \leqslant \varepsilon\,\overline{\lim_{z\to\infty}}\frac{|K(z)|}{z^2}\leqslant\frac{b\varepsilon}{2}.$$

从而 $b_\lambda = 0$ (b 是 $K(z)$ 的表示 (5) 式中的量)。于是，我们证明了下面的定理。

定理 2 预解式的累积量 $K_1(z, \lambda)$ 可表为

$$K_1(z, \lambda) = iz\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{1}{t}\int\frac{x}{1+x^2}d_xF_t(x)dt$$

$$+\int_{-\infty}^\infty\left(e^{izx}-1-\frac{izx}{1+x^2}\right)d_x$$

$$\times\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda t}}{t}[F_t(x)-\varepsilon(x)]d_x, \tag{17}$$

其中 $\int$ 表示 $\int_{-\infty}^{-0}$ 和 $\int_0^\infty$ 两个积分之和，而

$$\varepsilon(x) = \begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

设 $\xi(t)$ 是阶梯过程。那末它的累积量为

$$K(z) = c\int_{-\infty}^\infty(e^{izx}-1)d\Phi(x),\quad c = \Pi(\mathscr{R}), \tag{18}$$

其中 $\Phi(z)$是某一分布函数(我们用到了§1 的定理 6)。我们证明，累积量可以表为类似的形式；

$$K_1(z, \lambda) = c_1(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} (e^{izx} - 1) d\Phi_1(x, \lambda), \tag{19}$$

并且计算 $c_1(\lambda)$ 和 $\Phi_1(x, \lambda)$. 为此我们先对以 (18) 中 $K(z)$ 为累积量的过程求出函数 $F_t(x)$. 由

$$e^{tK(z)} = e^{-ct} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int e^{izx} d\Phi(x)\right]^k \frac{(ct)^k}{k!}$$

得

$$F_t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ct)^k}{k!} e^{-ct} \Phi_k(x), \tag{20}$$

其中 $\Phi_0(x) = \varepsilon(x)$, $\Phi_1(x) = \Phi(x)$, $\Phi_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{k-1}(x-y) \times d\Phi(y)$, $k > 1$. 所以由 (17)

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{1}{t} \int \frac{x}{1+x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ct)^k}{k!} e^{-ct} d\Phi_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{x}{1+x^2} d\Phi_k(x) \int_0^{\infty} \frac{c^k}{k!} e^{-(c+\lambda)t} t^{k-1} dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{x}{1+x^2} d\Phi_k(x) \frac{c^k}{k(c+\lambda)^k}. \end{aligned}$$

其次

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{1}{t} [F_t(x) - \varepsilon(x)] dt \\ &= \varepsilon(x) \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{1}{t} [e^{-ct} - 1] dt + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{c^k}{k!} t^{k-1} \Phi_k(x) dt \\ &= \varepsilon(x) \ln \frac{\lambda}{\lambda + c} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c}{c+\lambda}\right)^k \frac{\Phi_k(x)}{k}. \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{izx} - 1 - \frac{izx}{1+x^2}\right) d_x \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{1}{t} [F_t(x) - \varepsilon(x)] dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{izx} - 1) \left(\frac{c}{c+\lambda}\right)^k \frac{d\Phi_k(x)}{k} \end{aligned}$$

$$-iz\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{c+\lambda}\right)^k\int\frac{x}{1+x^2}\frac{d\Phi_k(x)}{k}.$$

考虑到 $a(\lambda)$ 的表达式，最后得

$$K_1(z,\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{c+\lambda}\right)^k\int(e^{izx}-1)\frac{d\Phi_k}{k}. \tag{21}$$

由此可见 (19) 式成立，其中

$$c_1(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{c+\lambda}\right)^k\frac{1}{k}=\ln\frac{c+\lambda}{\lambda},$$

$$\Phi_1(x,\lambda)=\left[\ln\frac{c+\lambda}{\lambda}\right]^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Phi_k(x)}{k}\left(\frac{c}{c+\lambda}\right)^k.$$

函数 $\Phi_1(x,\lambda)$ 可以通过它的特征函数给出：

$$\int e^{izx}d\Phi_1(x,\lambda)$$
$$=-\left[\ln\frac{c+\lambda}{\lambda}\right]^{-1}\ln\left[1-\frac{c}{c+\lambda}\int e^{izx}d\Phi(x)\right]. \tag{22}$$

如果 $K_1(z,\lambda)$ 由 (19) 式给出，则 $K(z)$ 形如

$$K(z)=\lambda-\lambda e^{-K_1(z,\lambda)},$$

而因为形如 (19) 的函数 $K_1(z,\lambda)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 有界，所以 $K(z)$ 也有界。因此，如果假设 $K(z)$ 形如 (5)，则有

$$b=-2\lim_{z\to\infty}\frac{K(z)}{z^2}=0.$$

从而

$$\operatorname{Re}K(z)=\int(\cos zx-1)\Pi(dx)$$

有界．所以

$$-\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\operatorname{Re}K(z)\,dz=\int\left(1-\frac{\sin Tx}{Tx}\right)\Pi(dx)$$

也有界．如果

$$\sup_T\int\left(1-\frac{\sin Tx}{Tx}\right)\Pi(dx)\leqslant C,$$

则

$$\int_{|x|>\frac{1}{\sqrt{T}}} \Pi(dx) \leqslant \left(1-\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^{-1} C.$$

因此测度Π有限，而 $K(z)$ 可以表为

$$K(z) = ia_1 z + \int (e^{izx}-1)\Pi(dx).$$

由 $K(z)$ 的有界性知，$a_1 = 0$.

这样，对 $K_1(z, \lambda)$ 形如 (19) 的情形，我们证明了 $K(z)$ 具有 (18) 的形状. 特别，由此可见，如果对跳跃过程 $\xi(t)$ 添加线性函数 at，使新过程的累积量变为

$$K(z) = iaz + c\int (e^{izx}-1)d\Phi(x), \tag{23}$$

则 $K_1(z, \lambda)$ 就不再是跳跃过程的累积量了.

我们对形如 (23) 的 $K(z)$ 来计算 $K_1(z, \lambda)$. 容易看出，这时

$$F_t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ct)^k}{k!} e^{-ct}\Phi_k(x-at) \tag{24}$$

(该式是等式

$$\mathbf{P}\{\xi(t)+at<x\} = \mathbf{P}\{\xi(t)<x-at\}$$

以及 (20) 式的推论). 所以

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{1}{t}[F_t(x)-\varepsilon(x)]dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{1}{t}[\varepsilon(x-at)-\varepsilon(x)]dt$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{(ct)^k}{k!}e^{-ct}\Phi_k(x-at)\frac{1}{t}dt.$$

其次

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{\varepsilon(x-at)-\varepsilon(x)}{t}dt$$

$$= \begin{cases} -\int_{x/a}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{dt}{t}, & x>0,\ a>0; \\ \int_{x/a}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{dt}{t}, & x<0,\ a<0; \\ 0, & a\cdot x<0; \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{(ct)^k}{k!} e^{-ct-\lambda t}\Phi_k(x-at)\frac{dt}{t}$$
$$=\frac{1}{k}\left(\frac{c}{c+\lambda}\right)^k \tilde{\Phi}_k\left(x,\ \frac{a}{\lambda+c}\right),$$

其中

$$\tilde{\Phi}_1(x,\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\Phi(x-\nu t)dt,$$
$$\tilde{\Phi}_k(x,\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Phi}_{k-1}(x,\nu)d\tilde{\Phi}_1(x,\nu).$$

所以

$$\int\frac{x}{1+x^2}d_x\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{1}{t}[F_t(x)-\varepsilon(x)]dt$$

收敛，因而

$$K_1(z,\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{izx}-1)dM(x),$$

其中

$$M(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{c}{c+\lambda}\right)^k\tilde{\Phi}_k\left(x,\ \frac{a}{\lambda+c}\right)\\ \displaystyle\quad+\frac{1-\operatorname{sign}a}{2}\int_{|x|}^{\infty}e^{-\frac{(\lambda+c)t}{|a|}}\frac{dt}{t}, & x<0,\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{c}{c+\lambda}\right)^k\tilde{\Phi}_k\left(x,\ \frac{a}{\lambda+c}\right)\\ \displaystyle\quad+\frac{1+\operatorname{sign}a}{2}\int_{x}^{\infty}e^{-\frac{(\lambda+c)t}{|a|}}\frac{dt}{t}, & x>0.\end{cases}$$

在这以前，我们是把 $r_\lambda(x)$ 作为产生过程预解式的无穷可分分布函数来研究它的性质的。 如何来直接确定由 (13) 式给出的算子 $\mathbf{R}_\lambda$ 呢？ 结果表明，对某一函数 $f(x)$ 的集合可以明显地给出 $\mathbf{R}_\lambda f$，这个函数的集合关于有界局部一致收敛在 $\mathscr{C}_\mathfrak{R}$ 中处处稠密.

引理 1 假设存在绝对可积函数 $\tilde{f}(z)$，使

$$f(x)=\int e^{izx}\tilde{f}(z)\,dz \tag{25}$$

(即 $\tilde{f}$ 是绝对可积的傅里叶变换). 那末

$$\mathbf{R}_\lambda f(x) = \int \tilde{f}(z) e^{izx} \frac{1}{\lambda - K(z)} dz. \tag{26}$$

证. 由(13)式

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_\lambda f(x) &= \iint e^{iz(x+y)} \tilde{f}(z) dz d_y r_\lambda(y) \\ &= \int \tilde{f}(z) e^{izx} \left[\int e^{izy} d_y r_\lambda(y)\right] dz \\ &= \int \tilde{f}(z) e^{izx} \frac{\lambda}{\lambda - K(z)} dz.\end{aligned}$$

引理得证.

设 $\xi(t)$ 的累积量形如(5). 我们要确定过程 $\xi(t)$ 的无穷小算子 $\mathbf{A}$ 的形式.

设 $f(x)$ 可表为

$$f(x) = \int e^{izx} \tilde{f}(z)\, dz,$$

其中 $|\tilde{f}(z)|$ 和 $z^2|\tilde{f}(z)|$ 在$(-\infty, \infty)$上可积. 那末

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_t f(x) &= \mathbf{E} f(x + \xi(t)) \\ &= \mathbf{E} \int e^{iz(x+\xi(t))} \tilde{f}(z)\, dz \\ &= \int e^{tK(z)} e^{izx} \tilde{f}(z)\, dz\end{aligned}$$

(由于 $|\tilde{f}(z)|$ 可积, 故可以变更积分顺序). 因为 $K(z)$ 连续, 而且

$$\begin{aligned}|K(z)| \leqslant\ & |a||z| + \frac{b}{2}|z|^2 \\ &+ \int_{|x|\leqslant 1} |z|^2|x|^2 \Pi(dx) + 2\int_{|x|>1} \Pi(dx),\end{aligned}$$

即 $K(z) = O(z^2)$, 故积分

$$\int e^{tK(z)} K(z) e^{izx} \tilde{f}(z)\, dz$$

对 t 一致收敛,所以

$$\frac{d}{dt}\mathbf{T}_t f(x) = \int e^{tK(z)} K(z) e^{izx} \tilde{f}(z)\, dz .$$

因此

$$\mathbf{A} f(x) = \int K(z) e^{izx} \tilde{f}(z)\, dz .$$

我们现在注意到，

$$ia \int z e^{izx} \tilde{f}(z)\, dz = a \frac{d}{dx} f(x),$$

$$-\frac{b}{2}\int z^2 e^{izx} \tilde{f}(z)\, dz = \frac{b}{2}\frac{d^2}{dx^2} f(x),$$

$$\int e^{izx}\tilde{f}(z) \int_{|y|>1} (e^{izy} - 1)\Pi(dy)\, dz$$

$$= \int_{|y|>1} \int (e^{iz(x+y)} - e^{izx})\tilde{f}(z) dz\, \Pi(dy)$$

$$= \int_{|y|>1} [f(x+y) - f(x)]\, \Pi(dy),$$

$$\int e^{izx}\tilde{f}(z) \int_{|y|>1} (e^{izy} - 1 - izy)\Pi(dy)$$

$$= \int_{|y|>1} \Big[\int e^{iz(x+y)}\tilde{f}(z)\, dz - \int e^{izx}\tilde{f}(z)\, dz$$

$$- iy \int z e^{izx}\tilde{f}(z)\, dz\Big]\Pi(dy)$$

$$= \int_{|y|\leq 1} [f(x+y) - f(x) - yf'(x)]\, \Pi(dy).$$

($|\tilde{f}(z)|$ 和 $|y|^2|z|^2|\tilde{f}(z)|$ 分别为控制函数；因为它们对测度 $\Pi(dy)\,dz$ 都绝对可积，故可以变更积分顺序.)这样

$$\mathbf{A} f(x) = af'(x) + \frac{b}{2} f''(x)$$

$$+ \int_{|y|\leq 1} [f(x+y) - f(x) - yf'(x)]\, \Pi(dx)$$

$$+ \int_{|y|>1} [f(x+y) - f(x)]\, \Pi(dy). \tag{27}$$

由算子 $\mathbf{A}$ 的封闭性可知，对一切二次可微函数 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{R}}$，若 f'，$f'' \in \mathscr{C}_{\mathscr{R}}$，则 (27) 式成立。

阶梯过程 假设过程 $\xi(t)$ 在每一有穷区间上只有有限次跳跃.如果 $\nu(t)$ 是过程 $\xi(t)$ 在长为 t 的时间段内出现的跳跃的次数，则由 §1 定理 2, $\nu(t)$ 是增量独立的 Poisson 过程. 由过程 $\xi(t)$ 的齐性可推出过程 $\nu(t)$ 的齐性. 所以 $\mathbf{E}\nu(t)=ct$，其中 c 为常数，而且

$$\mathbf{P}\{\nu(t)=k\}=\frac{(ct)^k}{k!}e^{-ct}. \tag{28}$$

设 ξ_1 和 τ_1 分别为过程 $\xi(t)$ 第一个跳跃的值和出现的时刻. 那末 τ_1 是马尔科夫时间. 由 (28) 有

$$\mathbf{P}\{\tau_1>t\}=\mathbf{P}\{\nu(t)=0\}=e^{-ct},$$

也就是说 τ_1 服从指数分布. 考虑事件

$$\mathfrak{A}^s=\{\xi_1\in(\alpha,\beta),\ \tau_1>s\},$$

其中 (α,β) 为任意区间, $s\geqslant t$. 那末对齐次马尔科夫过程,若记该过程的推移算子为 θ_t, 则

$$\mathfrak{A}^s=\{\tau_1>t\}\cap\theta_t\mathfrak{A}^{s-t}.$$

因此由过程的马尔科夫性,有

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{\xi_1\in(\alpha,\beta),\tau_1>s\}\\&=\mathbf{P}\{\tau_1>t\}\mathbf{P}\{\xi_1\in(\alpha,\beta),\tau_1>s-t\}.\end{aligned}$$

由此可见 ξ_1 和 τ_1 独立.

由递推公式定义

$$\xi_n=\theta_{\tau_1}[\xi_{n-1}],\qquad \tau_n=\theta_{\tau_1}[\tau_{n-1}],$$

即 ξ_n 是过程第 n 次跳跃的值，而 τ_n 是过程从第 $n-1$ 次跳跃到第 n 次跳跃渡过的时间. 由强马尔科夫性知，对偶 (τ_1,ξ_1), (τ_2,ξ_2), $\cdots$ 独立同分布,而且每一对中的两个变量也相互独立.

设 $\Phi(x)$ 是过程跳跃度的分布. 那末,由

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{\nu(t)}\xi_k\left(\sum_{k=1}^{0}=0\right).$$

得

$$\mathbf{P}\{\xi(t)<x\}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}\{\nu(t)=n\}\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{n}\xi_k<x\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ct)^n}{n!} e^{-ct}\Phi_n(x), \tag{29}$$

其中

$$\Phi_0(x) = \varepsilon(x), \qquad \Phi_1(x) = \Phi(x),$$

$$\Phi_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{n-1}(x-y)d\Phi(y).$$

由(29)式容易看出，过程 $\xi(t)$ 的累积量由(18)式给出. 这样我们说明了量 c 的含意以及在给出阶梯过程累积量的(18)式中函数 Φ 的含意.

下面我们来计算过程 $\xi(t)$ 的一些重要泛函的分布.

求随机变量

$$\eta_t = \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \xi(s)$$

的分布. 设

$$Q(t, x) = \mathbf{P}\{\eta_t \leqslant x\}.$$

显然，对 $x<0$，$Q(t,x)=0$，因为 $\xi(0)=0$，$\eta_t \geqslant 0$. 我们来推导 $Q(t,x)$ 的积分方程.

以后在研究独立增量过程时，我们将方便地使用推移算子:

$$\hat{\theta}_t\xi(s) = \xi(s+t) - \xi(t).$$

过程 $\hat{\theta}_t\xi(s)$ 和过程 $\xi(s)$ 的边沿分布相同. 设 $\mathscr{N}$ 是由过程的值 $\xi(s)$，$0\leqslant s<\infty$，产生的 σ 代数；那末对任意 $\mathscr{N}$ 可测随机变量 φ，$\hat{\theta}_t\varphi$ 和 φ 同分布；若 $\mathscr{N}_t$ 是变量 $\xi(u)$，$u\leqslant t$，产生的 σ 代数，则 $\hat{\theta}_t\varphi$ 与 σ 代数 $\mathscr{N}_t$ 独立(因为过程 $\hat{\theta}_t\xi(s)$ 与 σ 代数 $\mathscr{N}_t$ 独立). 最后，由过程的强马尔科夫性容易证明，对任意马尔科夫时间 τ，过程 $\hat{\theta}_\tau\xi(s) = \xi(s+\tau) - \xi(\tau)$ 的边沿分布也和 $\xi(s)$ 相同，并且与 σ 代数 $\mathscr{N}_\tau$ 独立，其中 $\mathscr{N}_\tau$ 是由形如 $\{\xi(s)<x\}\cap\{\tau>s\}$ 的事件(对一切 x 和 s) 所产生的 σ 代数.

设 $x>0$，那末

$$\{\eta_t \leqslant x\}$$
$$= \{\tau_1 > t\} \cup [\{\tau_1 < t\} \cap \{\xi_1 < x\} \cap \{\hat{\theta}_{\tau_1}\eta(t-\tau_1)$$
$$< x - \xi_1\}].$$

从而,

$$Q(t,x)=e^{-ct}+\mathbf{E}\chi_{\{\tau_1<t\}}\chi_{\{\xi_1<x\}}\mathbf{E}[\hat{\theta}_{\tau_1}\eta(t-\tau_1)<x-\xi_1|\mathscr{N}_\tau]$$

$$=e^{-ct}+\int_0^t ce^{-cs}ds\int_{-\infty}^x \Phi(y)Q(t-s,x-y).$$

考虑 Laplace 变换

$$q(\lambda,x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}Q(t,x)dt \qquad (\lambda>0).$$

那末由上一个等式得 $q(\lambda,x)$ 的下列积分方程:

$$q(\lambda,x)=\frac{1}{c+\lambda}+\frac{c}{c+\lambda}\int_{-\infty}^\infty q(\lambda,x-y)d\Phi(y). \quad (30)$$

这个积分方程称做半轴上的**卷积型方程**.

我们首先指出,方程(30)的解存在,并且在对 x 有界的函数类中唯一. 这由下面的事实可以看出:

$$\sup_x\left|\frac{c}{c+\lambda}\int_{-\infty}^\infty q(\lambda,x-y)d\Phi(y)\right|$$

$$\leqslant\frac{c}{c+\lambda}\sup_x|q(\lambda,x)|,$$

即(30)式右侧是压缩积分算子.

将方程改写为

$$\varepsilon(x)\frac{1}{c+\lambda}$$

$$=\varepsilon(x)\int_{-\infty}^\infty q(\lambda,x-y)d\left[\varepsilon(y)-\frac{c}{c+\lambda}\Phi(y)\right]. \quad (31)$$

设 $v_1(u)$ 是一有界变差函数, $v_1(u)=0$, $u>0$. 那末

$$\frac{1}{c+\lambda}\int_{-\infty}^\infty \varepsilon(x-u)dv_1(u)$$

$$=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \varepsilon(x-u)q(\lambda,x-u-y)$$

$$\times d\left[\varepsilon(y)-\frac{c}{c+\lambda}\Phi(y)\right]dv_1(u),$$

从而对 $x\geqslant 0$

$$\frac{1}{c+\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} dv_1(u)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q(\lambda, x-u-y)d\left[\varepsilon(y)-\frac{c}{c+\lambda}\Phi(y)\right] dv_1(u).$$

记

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varepsilon(y-u)-\frac{c}{c+\lambda}\Phi(y-u)\right] dv_1(u)=v_2(y). \quad (32)$$

那末对 $x\geqslant 0$

$$\frac{1}{c+\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} dv_1(u)-\int_{-\infty}^{\infty} q(\lambda, x-y)dv_2(y)=0.$$

假设 $v_2(y)=0$，$y<0$. 那末对 $x<0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(\lambda, x-y)dv_2(y)=0.$$

因此，方程 (31) 可化为

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(\lambda, x-y)dv_2(y)=\frac{\varepsilon(x)}{c+\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} dv_1(u). \quad (33)$$

为解该方程，我们引进 Fourier 变换:

$$\tilde{q}(\lambda, z)=\int e^{izx}d_x q(\lambda, x),$$

$$\tilde{v}_2(z)=\int e^{izx}dv_2(x).$$

Fourier 变换的方程形为

$$\tilde{q}(\lambda, z)\tilde{v}_2(z)=\frac{1}{c+\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} dv_1(u),$$

由此得

$$\tilde{q}(\lambda, z)=\frac{1}{c+\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} dv_1(u)/\tilde{v}_2(z).$$

我们现在证明，具有所要求的性质的函数 $v_1(x)$ 和 $v_2(x)$ 存在，并且求出它们的 Fourier-Stieltjes 变换. 如果

$$\tilde{v}_1(z)=\int e^{izx}dv_1(x),$$

则由 (32) 知，关系式

$$\tilde{v}_1(z)\left[1-\frac{c}{c+\lambda}\int e^{izx}d\Phi(x)\right]=\tilde{v}_2(z)$$

成立。因此

$$\frac{\tilde{v}_1(z)}{\tilde{v}_2(z)}=\frac{1}{1-\dfrac{c}{c+\lambda}\displaystyle\int e^{izx}d\Phi(x)}$$

$$=\frac{c+\lambda}{\lambda-K(z)}=\frac{c+\lambda}{\lambda}e^{K_1(z,\lambda)},$$

其中

$$K_1(z,\lambda)=c_1(\lambda)\int_{-\infty}^{0}(e^{izx}-1)d\Phi_1(x,\lambda)$$
$$+c_1(\lambda)\int_{0}^{\infty}(e^{izx}-1)d\Phi_1(x,\lambda)$$

(见(19)式)。令

$$\tilde{v}_1(z)=\frac{c+\lambda}{\lambda}\exp\left\{c_1(\lambda)\int_{-\infty}^{0}(e^{izx}-1)d\Phi_1(x,\lambda)\right\},$$

$$\tilde{v}_2(z)=\exp\left\{-c_1(\lambda)\int_{0}^{\infty}(e^{izx}-1)d\Phi_1(x,\lambda)\right\}.$$

显然，$\tilde{v}_1(z)$ 是非减函数 $v_1(x)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换，这里 $v_1(x)$ 在$[0,\infty)$上等于 0。其次

$$v_1(x)=G_1(x)-G_1(+0),$$

其中

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{izx}dG_1(x)=\frac{c+\lambda}{\lambda}\exp\left\{c_1(\lambda)\int_{-\infty}^{0}(e^{izx}-1)d\Phi_1(x,\lambda)\right\};$$

而

$$\tilde{v}_2(z)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{izx}dG_2(x),$$

其中 $G_2(x)$ 是有界变差函数，决定于下面的等式：

$$G_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{c_1(\lambda)}\frac{(-c_1(\lambda))^k}{k!}H_k(x),$$

这里

$$H_0(x)=\varepsilon(x),$$

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \Phi_1(x, \lambda) - \Phi_1(0, \lambda), & x \geqslant 0; \end{cases}$$

$$H_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{k-1}(x - y) dH(y).$$

因而

$$\tilde{q}(\lambda, z) = \frac{1}{\lambda} \exp\left\{c_1(\lambda) \int_0^{\infty} (e^{izx} - 1) d\Phi_1(x, \lambda)\right\}. \quad (34)$$

如果利用 (17) 式，并注意到在所考察的情形下积分

$$\int_0^{\infty} \int e^{-\lambda t} \frac{x}{t(1 + x^2)} d_x F_t(x)$$

收敛，就可以得到下面的等式

$$\tilde{q}(\lambda, z) = \frac{1}{\lambda} \exp\left\{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} (e^{izx} - 1) d_x F_t(x) dt\right\}. \quad (35)$$

该式之所以方便，是因为它的右侧在关于 $\xi(t)$ 的更加一般的条件下有意义. 这一点我们以后要用到.

概率

$$Q(t) = \mathbf{P}\{\sup_{s \leqslant t} \xi(s) \leqslant 0\}$$

是过程的很有用的一个特征. 显然

$$Q(t) = Q(t, 0),$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} Q(t) dt = q(\lambda, 0).$$

由于 $q(\lambda, x) - q(\lambda, 0)$ 在点 0 连续，可见

$$\lim_{z \to 0} \int_0^{\infty} e^{izx} d_x [q(\lambda, x) - q(\lambda, 0)] = 0.$$

故

$$q(\lambda, 0) = \lim_{z \to 0} \tilde{q}(\lambda, z).$$

因为函数

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{1}{t} [F_t(x) - F_t(+0)] dt$$

在点 $x = 0$ 连续，故

$$\lim_{z\to 0}\int_{+0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{1}{t}\int_{+0}^{\infty} e^{izx}d_xF_t(x) = 0.$$

所以

$$q(\lambda, 0) = \exp\left\{-\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{1}{t}\mathbf{P}\{\xi(t) > 0\}dt\right\}. \tag{36}$$

记 τ_x 为首次落入 (x, ∞) 的时刻，而 $\gamma_x = \xi(\tau_x) - x$. 我们来求随机变量 τ_x 和 γ_x 的联合分布. 因为 $\tau_x = \tau_1$, $\gamma_x = \xi_1 - x$, 所以，如果 $\xi_1 > x$, 则

$$\tau_x = \tau_1 + \hat{\theta}_{\tau_1}\tau_{x-\xi_1}, \qquad \gamma_x = \hat{\theta}_{\tau_1}\gamma_{x-\xi_1},$$

如果 $\xi_1 \leqslant x$, 则

$$\tau_x = \tau_1 + \chi_{\{\xi_1<x\}}\hat{\theta}_{\tau_1}\tau_{x-\xi_1},$$
$$\gamma_x = \chi_{\{\xi_1>x\}}(\xi_1 - x) + \chi_{\{\xi_1\leqslant x\}}\gamma_{x-\xi_1}.$$

记

$$N(t, y, x) = \mathbf{P}\{\tau_1 < t, \gamma_x > y\}.$$

那末

$$N(t, y, x) = \mathbf{P}\{\tau_1 < t\}\mathbf{P}\{\xi_1 > x + y\}$$
$$+ \int_0^t\int_{-\infty}^x ce^{-cs}ds\Phi(du)N(t - s, y, x - u).$$

如果利用 Laplace 变换（对 t）并且设

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}d_tN(t, y, x) = n(\lambda, y, x),$$

则当 $x \geqslant 0$ 时得

$$n(\lambda, y, x) = \frac{c}{c+\lambda}[1 - \Phi(x + y)]$$
$$+ \frac{c}{c+\lambda}\int_{-\infty}^x n(\lambda, y, x - u)d\Phi(u). \tag{37}$$

可以对每个固定的 y 来考察方程 (37). 如果将该方程化为

$$\frac{c}{c+\lambda}[1 - \Phi(x + y)]$$
$$= \int_{-\infty}^x n(\lambda, y, x - u)d\left[\varepsilon(u) - \frac{c}{c+\lambda}\Phi(u)\right], \quad x \geqslant 0, \tag{38}$$

并且当 $x<0$ 时令 $n(\lambda, y, x)=0$，则所得到的方程和方程(31)的区别仅在常数项． 所以可以用与解方程 (31) 完全相同的方法来解方程 (38)． 通过同样一些变换我们得

$$\varepsilon(x)\frac{c}{c+\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}[1-\Phi(x-s+y)]v_1(ds)$$

$$=\int n(\lambda, y, x-u)dv_2(u). \tag{39}$$

设

$$\tilde{n}(\lambda, y, \mu)=\int_0^{\infty}n(\lambda, y, x)e^{-\mu x}dx,$$

$$\vartheta_2(\mu)=\int_0^{\infty}e^{-\mu x}dv_2(x).$$

由 (39) 可得

$$\frac{c}{c+\lambda}\int_0^{\infty}e^{-\mu x}\int_{-\infty}^{\infty}[1-\Phi(x-s+y)]dv_1(s)dx$$

$$=\tilde{n}(\lambda, y, \mu)\vartheta_2(\mu).$$

我们指出，对 $\operatorname{Re}\mu\geqslant 0$，函数 $\vartheta_2(\mu)$ 有定义、连续并且有界，而对 $\operatorname{Re}\mu>0$，它是解析函数．函数

$$\exp\left\{-c_1(\lambda)\int_0^{\infty}(e^{-\mu x}-1)d\Phi_1(x, \lambda)\right\}$$

有完全相同的性质．当 $\operatorname{Re}\mu=0$ 时，对于实数值 z 这些函数重合：$\vartheta_2(iz)=\tilde{v}_2(z)$． 因此

$$\tilde{n}(\lambda, y, \mu)=\exp\left\{-c_1(\lambda)\int_0^{\infty}(e^{-\mu x}-1)d\Phi_1(x, \lambda)\right\}\tilde{h}(\lambda, y, \mu), \tag{40}$$

其中

$$\tilde{h}(\lambda, y, \mu)=\int_0^{\infty}e^{-\mu x}h(\lambda, y, x)dx,$$

而

$$h(\lambda, y, x)=\frac{c}{c+\lambda}\int_{-\infty}^{0}[1-\Phi(x+y-s)]dv_1(s).$$

函数 $\frac{1}{c+\lambda}v_1(x)=q_-(\lambda, x)$ 是分布函数，其特征函数为

$$
\begin{aligned}
\hat{q}_-(\lambda, z) &= \int e^{izx} dq_-(\lambda, x) \\
&= \frac{1}{\lambda} \exp\left\{ c_1(\lambda) \int_{-\infty}^{0} (e^{izx} - 1) d\Phi_1(x, \lambda) \right\} \\
&= \frac{1}{\lambda} \exp\left\{ \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{0} (e^{izx} - 1) d_x F_t(x) dt \right\}. \qquad (41)
\end{aligned}
$$

最末一个等式的证明与 (35) 完全相同.

我们考虑过程$-\xi(t)$，并且证明

$$
1 - q_-(\lambda, x) = \lambda \int_0^\infty \mathbf{P}\{ \inf_{0<s<t} \xi(s) \geqslant x \} e^{-\lambda t} dt.
$$

如果设 $c d\Phi(x) = \Pi(dx)$（Π 是过程的谱测度），则得

$$
h(x, y, \lambda) = \int_{-\infty}^{0} M(x - s + y) d_s q_-(\lambda, s),
$$

其中 $M(x) = \int_x^\infty \Pi(dy)$. 因为 Laplace 变换的积是卷积的 Laplace 变换，故由等式

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda} \exp\left\{ c_1(\lambda) \int_0^\infty \int_0^\infty (e^{-\mu x} - 1) dF_t(x) \frac{e^{-\lambda t}}{t} dt \right\} \\
&\quad = \int_0^\infty e^{-\mu x} d_x q(\lambda, x)
\end{aligned}
$$

得

$$
\begin{aligned}
n(\lambda, y, x) = \int_{-0}^{x} \int_{-\infty}^{+0} M(x - s + y \\
- u) d_s q_-(\lambda, x) d_u q(\lambda, u). \qquad (42)
\end{aligned}
$$

最后，我们求变量 τ_x 和 γ_x 的联合 Laplace 变换：

$$
l(x, \lambda, \mu) = \mathbf{E} e^{-\lambda \tau_x - \mu \gamma_x}
$$

（如果 τ_x 没定义，就设数学期望号 $\mathbf{E}$ 下的量为 0）. 因为

$$
n(\lambda, y, x) = \mathbf{E} e^{-\lambda \tau_x} \chi_{\{\gamma_x > y\}},
$$

而且对 $\mu > 0$

$$
\int_0^\infty \chi_{\{\gamma_x > y\}} e^{-\mu y} dy = \int_0^{\gamma_x} e^{-\mu y} dy = \frac{1 - e^{-\mu \gamma_x}}{\mu},
$$

所以

$$l(x, \lambda, \mu) = \mathbf{E}e^{-\lambda \hat{\xi}_x}$$
$$- \mu \int_{-0}^{x} \int_{-\infty}^{+0} \int_{0}^{\infty} e^{-\mu y} M(x - s + y$$
$$- u) dy d_s q_-(\lambda, s) d_u q(\lambda, u). \tag{43}$$

一般过程的到达时间和跳跃度的分布 设$\xi(t)$是齐次独立增量过程，它的累积量$K(z)$决定于(5)式. 我们引进一个阶梯过程$\xi_n(t)$的序列，它们的累积量$K_n(z)$的序列收敛于$K(z)$. 那末，对所有$t_0 < t_1 < \cdots < t_m, t_0 = 0$和$z_1, \cdots, z_m$

$$\mathbf{E}\exp\left\{i \sum_{k=1}^{m} z_k \xi_n(t_k)\right\}$$
$$= \mathbf{E}\exp\left\{i \sum_{k=1}^{m} (z_k + \cdots + z_m)[\xi_n(t_{k+1}) - \xi_n(t_k)]\right\}$$
$$= \exp\left\{\sum_{k=1}^{m} (t_{k+1} - t_k) K_n(z_k + \cdots + z_m)\right\}$$
$$\to \exp\left\{\sum_{k=1}^{m} (t_{k+1} - t_k) K(z_k + \cdots + z_m)\right\}$$
$$= \mathbf{E}\exp\left\{i \sum_{k=1}^{m} z_k \xi(t_k)\right\}. \tag{44}$$

因而，过程$\xi_n(t)$的边沿分布收敛于过程$\xi(t)$的边沿分布.

现在设

$$I(T) = \inf_{|x|>T} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) > 0.$$

那末

$$\mathbf{P}\{|\xi_n(t)| > \varepsilon\} \leqslant [I(T)]^{-1} \mathbf{E}\left(1 - \frac{\sin \xi_n(t) \frac{T}{\varepsilon}}{\xi_n(t) \frac{T}{\varepsilon}}\right)$$
$$= [I(T)]^{-1} \frac{\varepsilon}{2T} \int_{|z| < \frac{T}{\varepsilon}} (1 - e^{tK_n(z)}) dz.$$

由于对一切z, $K_n(z) \to K(z)$, 可见在每一有限区间上$K_n(z)$一

致收敛于 $K(z)$. 所以

$$\sup_{|t_1-t_2|\leqslant h}\mathbf{P}\{|\xi_n(t_1)-\xi_n(t_2)|>\varepsilon\}$$

$$\leqslant h[I(T)]^{-1}\frac{\varepsilon}{2T}\int_{|z|<\frac{T}{\varepsilon}}|K_n(z)|dz,$$

因而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{|t_1-t_2|\leqslant h}\mathbf{P}\{|\xi_n(t_1)-\xi_n(t_2)|>\varepsilon\}\leqslant Ch, \tag{45}$$

其中 C 仅依赖于 ε. 于是,过程 $\xi_n(t)$ 关于 n 一致随机连续.

我们现在利用第一卷第六章 §5 定理 5 及其注: 如果 $f_T(x(\cdot))$ 是 $\mathscr{D}_{[0,T]}(\mathscr{R})$ 上的任一泛函,在该空间的拓扑中,它关于对应于 $[0, T]$ 上过程 $\xi(t)$的测度 $\mu_{[0,T]}$ 几乎处处连续,则 $f_T(\xi_n(\cdot))$的分布收敛于 $f_T(\xi(\cdot))$ 的分布. 设 $\eta_n(t)=\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}\xi_n(s)$, τ_x^n 是过程 $\xi_n(t)$ 首达区间 (x,∞) $(x>0)$ 的时刻,而 $\gamma_x^{(n)}=\xi(\tau_x^n)-x$. 那末由上面所表述的命题,对所有 t, $\eta_n(t)$ 的分布收敛于$\eta(t)=\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}\xi_n(s)$ 的分布. 设

$$\phi_T(s)=\begin{cases}s, & s\leqslant T,\\ T, & s>T.\end{cases}$$

考虑泛函 $\phi_T(\tau_x^n)$. 对于所有 x 和 $x(\cdot)$, 若存在 s 和 $\varepsilon>0$, 使 $x(s)=x$, $\sup\limits_{s\leqslant u\leqslant s+\varepsilon}x(u)=x$, 则泛函 $\phi_T(\tau_x(x(\cdot)))$ 在点 $x(\cdot)$ 连续,其中 $\tau_x=\inf[s:x(s)=x]$. 特别, 如果 x 是这样的,即对所有 t 和 $\varepsilon>0$ 有 $\mathbf{P}\{\eta(t)=x,\ \eta(t+\varepsilon)=x\}=0$, 则 $\phi_T(\tau_x^n)$ 的分布收敛于 $\phi_T(\tau_x)$ 的分布. 同样,如果设

$$\gamma_x^n(T)=\begin{cases}\gamma_x^n, & 若\ \tau_x^n<T,\\ -1 & 若\ \tau_x^n\geqslant T,\end{cases}\qquad \gamma_x(T)=\begin{cases}\gamma_x, & 若\ \tau_x<T,\\ -1, & 若\ \tau_x\geqslant T,\end{cases}$$

则可以证明: 只要对所有 $t>0$, $\varepsilon>0$

$$\mathbf{P}\{\xi(T)=x\}=0,\quad \mathbf{P}\{\eta(t)=\eta(t+\varepsilon)=x\}=0, \tag{46}$$

则随机变量 $\gamma_x^n(T)$ 和 $\phi_T(\tau_x^n)$ 的联合分布收敛于 $\gamma_x(T)$ 和$\phi_T(\tau_x)$ 的联合分布. 所以对所有满足条件 (46) 的 $x>0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}e^{-\lambda\phi_T(\tau_x^n)-\mu\gamma_x^n(T)}=\mathbf{E}e^{-\lambda\phi_T(\tau_x)-\mu\gamma_x(T)}. \tag{47}$$

由不等式

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbf{E}e^{-\lambda\psi_T(\tau_x^n)-\mu\gamma_x^n(T)}-\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_x^n-\mu\gamma_x^n}\right| \\
&\leqslant \mathbf{E}\left|e^{-\lambda\psi_T(\tau_x^n)-\mu\gamma_x^n(T)}-e^{-\lambda\tau_x^n-\mu\gamma_x^n}\right| \\
&\leqslant 2e^{-\lambda_T}\mathbf{P}\{\tau_x^n>T\}\leqslant 2e^{-\lambda_T}
\end{aligned}
$$

以及关于 (47) 式右侧式子的类似不等式可见，对于满足 (46) 和 (47) 的 x 有

$$
\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_x^n-\mu\gamma_x^n}=\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_x-\mu\gamma_x}\quad(\lambda>0,\ \mu>0). \tag{48}
$$

我们现在证明，对于一切非阶梯过程，条件(46)对所有 x 和几乎所有 $T>0$ 成立。我们首先指出，仅当 $b=0$，$\int\Pi(dx)<\infty$ 时，$\mathbf{P}\{\xi(T)=x\}>0$ 才有可能（如果 $b>0$，则 $\xi(T)$ 的分布有正态分量，从而连续；如果 $\int\Pi(dx)=+\infty$，则当 $z\to\infty$ 时 $\int(e^{izx}-1)\Pi(dx)\to-\infty$，从而 $\lim\limits_{z\to\infty}\mathbf{E}e^{iz\xi(T)}=0$，于是分布也连续）。下证，如果 $\xi(t)$ 的分布连续，则 $\eta(t)$ 的分布也连续。对任意 $x>0$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\{\eta(t)=x\}&=\mathbf{P}\{\eta(h)=x\} \\
&\quad+\int_{-\infty}^{x}\mathbf{P}\{\xi(h)\in dy,\eta(h)<x\}\mathbf{P}\{\eta(t)=x-y\} \\
&\leqslant \mathbf{P}\{\eta(h)=x\}+\int_{-\infty}^{x}\mathbf{P}\{\xi(h)\in dy\}\mathbf{P}\{\eta(t)=x-y\}.
\end{aligned}
$$

由于使 $\mathbf{P}\{\eta(t-h)=x-y\}>0$ 的 y 的集最多是可数的，而 $\xi(h)$ 的分布连续，所以上式最后的积分等于 0，故对所有 $h<t$

$$
\mathbf{P}\{\eta(t)=x\}\leqslant\mathbf{P}\{\eta(h)=x\}.
$$

令 $h\downarrow 0$ 取极限，对所有 $t>0$ 和所有 $x>0$ 得

$$
\mathbf{P}\{\eta(t)=x\}=0.
$$

现在设 $b=0$，$\int\Pi(dx)<\infty$。那末，如果过程是非阶梯的，则 $K(z)$ 可表为

$$
K(z)=iaz+\int(e^{izx}-1)\Pi(dx),
$$

其中 $a \neq 0$. 如果 $a > 0$, 则对 $t \neq \tau_1, \tau_1 + \tau_2, \cdots$(即 t 不是过程的跳跃时刻)和充分小的 $\varepsilon > 0$, $\xi(t+\varepsilon) = \xi(t) + a\varepsilon > \xi(t)$. 所以, 如果区间 $[0, t]$ 上的极大值不是在形如 $\tau_1, \tau_1 + \tau_2, \cdots$ 的点上达到, 则

$$\mathbf{P}\{\eta(t) = \eta(t+\varepsilon) = x\} = 0.$$

同样显然,

$$\xi\left(\sum_1^k \tau_i\right) = \sum_1^k \xi_i + a\sum_1^k \tau_i$$

有连续分布, 因而

$$\mathbf{P}\left\{\xi\left(\sum_1^k \tau_i\right) = x\right\} = 0.$$

所以

$$\mathbf{P}\left\{\sup_k \xi\left(\sum_1^k \tau_i\right) = x\right\} = 0.$$

设 N 是一可列集, 测度 Π 的离散分量集中在 N 上; N^+ 是包含 N 的最小加法群 (它也是可列集). 那末, 如果 $x - aT \bar{\in} N^+$, 则 $\mathbf{P}\{\xi(T) = x\} = 0$. 现设 $a < 0$. 那末

$$\eta(t) = \sup_{0 \leqslant k < \nu(t)} \sum_{i=1}^k (\xi_k - a\tau_k) \qquad \left(\sum_1^0 = 0\right),$$

因而 $\mathbf{P}\{\eta(t) = x\} = 0$, $x > 0$ (因为 $\xi_k + a\tau_k$ 有分布密度). 于是, 我们证明了下面的定理.

定理 3 如果 $\xi(t)$ 是非阶梯的齐次独立增量过程, 而 $\xi_n(t)$ 是阶梯的齐次独立增量过程序列, 满足

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}e^{iz\xi_n(t)} = \mathbf{E}e^{iz\xi(t)},$$

则对一切 $x > 0$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}e^{-\lambda\tau_x^n - \mu\gamma_x^n} = \mathbf{E}e^{-\lambda\tau_x - \mu\gamma_x},$$

其中 τ_x^n 是过程 $\xi_n(t)$ 首达区间 (x, ∞) 的时刻, τ_x 是过程 $\xi(t)$ 首达区间 (x, ∞) 的时刻, $\gamma_x^n = \xi(\tau_x^n) - x$, $\gamma_x = \xi(\tau_x) - x$.

由这个定理和上一小节的结果可得

$$\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_x-\mu\gamma_x}=l(x,\lambda,\mu).$$

为此首先注意到，$\eta_n(t)$ 的分布收敛于 $\eta(t)$ 的分布(对所有 $t>0$)。其次，我们看到，如果 $\eta(t)$ 是非阶梯过程，则对所有 t

$$\mathbf{P}\{\eta(t)=x\}=0.$$

所以，对所有 $t>0$，$\lambda>0$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}q_+^{(n)}(\lambda,x)&=\lim_{n\to\infty}\lambda\int_0^\infty\mathbf{P}\{\eta_n(t)<x\}e^{-\lambda t}dt\\&=\lambda\int_0^\infty\mathbf{P}\{\eta(t)<x\}e^{-\lambda t}dt=q_+(\lambda,x).\end{aligned}\tag{49}$$

同理可证

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}q_-^{(n)}(\lambda,x)&=\lim_{n\to\infty}\lambda\int_0^\infty[1-\mathbf{P}\{\inf_{0\leqslant s\leqslant t}\xi_n(s)\geqslant x\}]e^{-\lambda t}dt\\&=q_-(\lambda,x).\end{aligned}\tag{50}$$

注意，如果 $K_n(z)\to K(z)$，而

$$M_n(x)=\int_x^\infty\Pi_n(dy),\qquad M(x)=\int_x^\infty\Pi(dy),\ x>0,$$

则在函数 $M(x)$ 的所有连续点上 $M_n(x)\to M(x)$。由(42)式

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_x^n}\chi_{\{\gamma_x^n>y\}}\\&=\frac{1}{\lambda^2}\int_{-0}^x\int_{-\infty}^{+0}M_n(x-s+y-u)d_sq_-^{(n)}(\lambda,s)d_uq_+^{(n)}(\lambda,u).\end{aligned}$$

如果在该式中取极限，则得(对几乎所有 $y>0$)

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_x}\chi_{\{\gamma_x>y\}}\\&=\frac{1}{\lambda^2}\int_{-0}^x\int_{-\infty}^{+0}M(x-s+y-u)d_sq_-(\lambda,s)d_uq_+(\lambda,u).\end{aligned}\tag{51}$$

用与由(42)得到(43)完全相同的方法，可以得到随机变量 τ_x 和 γ_x 的 Laplace 变换的表达式:

$$\begin{aligned}l(x,\lambda,\mu)=\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_x}&\\-\frac{\mu}{\lambda^2}\int_{-0}^x\int_{-\infty}^{+0}\int_0^\infty e^{-\mu y}M(x-s+y&\\-u)\,dy\,d_sq_-(\lambda,s)d_uq_+(\lambda,u).&\end{aligned}\tag{52}$$

现在我们看到，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_x} &= \mathbf{E}\left(1-\lambda\int_0^{\tau_x} e^{-\lambda t}dt\right)\\ &= 1-\lambda\mathbf{E}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\chi_{\{\tau_x>t\}}dt\\ &= 1-\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{P}\{\sup_{s<t}\xi(s)\leqslant x\}dt\\ &= 1-q_+(\lambda, x).\end{aligned}$$

从而最后得

$$\begin{aligned}l(x, \lambda, \mu) &= 1-q_+(\lambda, x)\\ &-\frac{\mu}{\lambda^2}\int_{-0}^{x}\int_{-\infty}^{+0}\int_0^\infty e^{-\mu y}M(x-s+y\\ &-u)dyd_sq_-(\lambda, s)d_uq_+(\lambda, u).\end{aligned} \tag{53}$$

这样,我们证明了下面的定理.

定理 4 随机变量 τ_x 和 γ_x 的联合 Laplace 变换由 (53) 式给出,而它们的联合分布为

$$\mathbf{P}\{\tau_x<t, \gamma_x>y\} = \int_{-0}^{x}\int_{-\infty}^{+0}M(x-s+y-u)R_t(ds, du),$$

其中

$$R_t(A, B) = \int_0^t Q_+(B, t-s)d_sQ_-(A, s),$$

而

$$Q_+(B, t)=\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\xi(s)\in B\},$$

$$Q_-(A, t)=\mathbf{P}\{\inf_{0\leqslant s\leqslant t}\xi(s)\in A\}.$$

我们来研究分布 $q_+(\lambda, x)$ 和 $q_-(\lambda, x)$. 由以上所述可知,在函数 $q_+(\lambda, x)$ 和 $q_-(\lambda, x)$ 的所有连续点上,分别有

$$q_+(\lambda, x) = \lim_{n\to\infty}q_+^{(n)}(\lambda, x),$$

$$q_-(\lambda, x) = \lim_{n\to\infty}q_-^{(n)}(\lambda, x).$$

因此

$$\int e^{izx}d_xq_+(\lambda, x) = \lim_{n\to\infty}\int e^{izx}d_xq_+^{(n)}(\lambda, x)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\lambda t}\int_0^\infty (e^{izx}-1)dF_t^{(n)}(x)dt\right\},$$

其中 $F_t^{(n)}(x) = \mathbf{P}\{\xi_n(t) < x\}$. 对每个 t

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty (e^{-izx}-1)dF_t^{(n)}(x) = \int_0^\infty (e^{izx}-1)dF_t(x).$$

所以对任意 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{t} e^{-\lambda t}\int_0^\infty (e^{izx}-1)dF_t^{(n)}(x)$$

$$= \int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{t} e^{-\lambda t}\int_0^\infty (e^{izx}-1)dF_t(x).$$

现在估计

$$\left|\int_0^\infty (e^{izx}-1)dF_t^{(n)}(x)\right| = |\mathbf{E}(e^{iz\xi_n(t)}-1)\chi_{\{\xi_n(t)>0\}}|.$$

设 $\xi_n(t) = \xi_n^1(t) + \xi_n^2(t)$, 其中 $\xi_n^1(t)$ 只有绝对值不大于1 的跳跃,而 $\xi_n^2(t)$ 只有绝对值大于1 的跳跃. 那末

$$\begin{aligned}\mathbf{E}|e^{iz\xi_n(t)}-1| &\leqslant \mathbf{E}|e^{iz\xi_n^1(t)}-1| + \mathbf{E}|e^{iz\xi_n^2(t)}-1|\\ &\leqslant |z|\mathbf{E}|\xi_n^1(t)| + 2\mathbf{P}\{\xi_n^2(t) > 0\}\\ &\leqslant |z|\sqrt{\mathbf{E}|\xi_n^1(t)|^2} + O(t) = O(\sqrt{t}).\end{aligned}$$

而且这个估计对 n 一致. 故

$$\lim_{\varepsilon\to0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^\varepsilon \frac{dt}{t} e^{-\lambda t}\int_0^\infty (e^{izx}-1)dF_t^{(n)}(x) = 0.$$

于是,证明了下面的定理.

定理 5 分布 $q_+(\lambda, x)$ 和 $q_-(\lambda, x)$ 的特征函数为

$$\int e^{izx}d_xq_+(\lambda, x) = \exp\left\{\int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\lambda t}\int_0^\infty (e^{izx}-1)dF_t(x)dt\right\},$$

$$\int e^{izx}d_xq_-(\lambda, x) = \exp\left\{\int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\lambda t}\int_{-\infty}^0 (e^{izx}-1)dF_t(x)dt\right\}.$$

系 1 分布 $q_+(\lambda,x)$ 和 $q_-(\lambda, x)$ 连续的必要和充分条件分别是

$$\int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\lambda t}\mathbf{P}\{\xi(t) > 0\}dt = +\infty,$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\lambda t}\mathbf{P}\{\xi(t)<0\}dt=+\infty.$$

系 2

$$\begin{aligned}&q_+(\lambda,+0)-q_+(\lambda,-0)\\&=\exp\left\{-\int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\lambda t}\mathbf{P}\{\xi(t)>0\}dt\right\},\\&q_-(\lambda,+0)-q_-(\lambda,-0)\\&=\exp\left\{-\int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\lambda t}\mathbf{P}\{\xi(t)<0\}dt\right\}.\end{aligned}$$

系 3 如果 $\xi(t)$ 是阶梯过程，则 $q_+(\lambda,x)$ 和 $q_-(\lambda,x)$ 对所有 x 连续，仅 $x=0$ 可能例外。

只需对非阶梯过程证明系 1，因为对于阶梯过程，系 1 的结论包含在系 2 和系 3 中。对于非阶梯过程，对所有 $\varepsilon>0$，当 $x\geqslant\varepsilon$ 时，函数

$$\int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\lambda t}[1-F_t(t)]dt$$

关于 x 连续．所以

$$\lim_{z\to\infty}\int_\varepsilon^\infty \cos zx d_x\int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\lambda t}[1-F_t(x)]dt=0.$$

因而

$$\begin{aligned}&\varlimsup_{z\to\infty}\left|\int e^{izx}dq_+(\lambda,x)\right|\\&\leqslant\exp\left\{-\varliminf_{z\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\lambda t}\int_\varepsilon^\infty (1-\cos zx)dF_t(x)\right\}\\&=\exp\left\{\varlimsup_{z\to\infty}\left[\int_\varepsilon^\infty (1-\cos zx)d_x\int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\lambda t}[1-F_t(x)]dt\right]\right\}\\&=\exp\left\{-\int_0^\infty \frac{1}{t}e^{-\lambda t}\mathbf{P}\{\xi(t)>\varepsilon\}dt\right\}.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\downarrow 0$ 并取极限，得

$$\varlimsup_{z\to\infty}\int e^{izx}d_xq_+(\lambda,x)\leqslant\exp\left\{-\int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\lambda t}\mathbf{P}\{\xi(t)>0\}dt\right\}.$$

系 1 的充分性得证，由系 2 可见系1的必要性．

如果

$$\int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\lambda t}\mathbf{P}\{\xi(t) > 0\}dt < \infty,$$

则 $q_+(\lambda, x)$ 是广义 Poisson 分布，并且

$$q_+(\lambda, x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{[c_1(\lambda)]^k e^{-c_1(\lambda)}}{k!} \Phi_k(\lambda, x), \qquad (54)$$

其中

$$c_1(\lambda) = \int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\lambda t}\mathbf{P}\{\xi(t) > 0\}dt; \quad \Phi_0(\lambda, x) = \varepsilon(x);$$

$$\Phi_1(\lambda, x) = \frac{1}{c_1(\lambda)} \int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\lambda t}\mathbf{P}\{0 < \xi(t) < x\}dt,$$

$$\Phi_k(\lambda, x) = \int \Phi_{k-1}(\lambda, x-y)d\Phi_1(\lambda, y), \qquad k > 1.$$

由 (54) 式即可得系 2 和系 3 的结论。

过程的上确界，下确界和过程值的联合分布 记

$$\xi_+(t) = \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \xi(s), \qquad \xi_-(t) = \inf_{0\leqslant s\leqslant t} \xi(s).$$

这一小节的目的是计算概率

$$Q(t; a, b; \alpha, \beta) = \mathbf{P}\{\xi_-(t) \geqslant a, \xi_+(t) \leqslant b, \alpha < \xi(t) < \beta\},$$

其中 $a < 0 < b$, $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$.

记

$$\Gamma_+(x, dt, dy) = \mathbf{P}\{\tau_x \in dt, \gamma_x \in dy\}, \quad x > 0,$$
$$\Gamma_-(x, dt, dy) = \mathbf{P}\{\tau'_x \in dt, \gamma'_x \in dy\}, \quad x < 0,$$

其中 τ'_x 是过程首达 $(-\infty, x)$ 的时间，$\gamma'_x = \xi(\tau'_x + 0) - x$. 所求的概率可以通过函数 Γ_+ 和 Γ_- 来表示，而过程的分布为 $F_t(dx) = \mathbf{P}\{\xi(t) \in dx\}$. 我们引进两个事件 $\mathfrak{A}_k^+$ 和 $\mathfrak{A}_k^-$，其中 $\mathfrak{A}_k^+$: $\xi(s)$ 落入区间 (b, ∞) 先于它落入区间 $(-\infty, a)$，在这之后直到时刻 t $\xi(s)$ 穿过 $[a, b]$ 的次数不小于 k（即存在 $t_1 < t_2 < \cdots < t_{k+1} \leqslant t$，使 $\xi(t_1) > b$, $\xi(t_2) < a$, $\xi(t_3) > b$, $\xi(t_4) < a$, $\cdots$)，而且 $\xi(t) \in (\alpha, \beta)$; $\mathfrak{A}_k^-$: $\xi(s)$ 落入区间 $(-\infty, a)$ 先于它落入区间 (b, ∞)，在这之后直到时刻 t 它穿过 $[a, b]$ 的次数不小于 k，而且 $\xi(t)$

$\in (\alpha, \beta)$. 那末

$$Q(t; a, b; \alpha, \beta) = F_t((\alpha, \beta)) - \mathbf{P}\{\mathfrak{A}_0^+\} - \mathbf{P}\{\mathfrak{A}_0^-\}.$$

而事件

$$\mathfrak{A}_k^+ \cup \mathfrak{A}_{k+1}^- = \mathfrak{B}_k^+, \quad k = 0, 1, \cdots,$$

表示在时刻 t 之前过程落入 $[b, \infty)$，至少 k 次穿过 $[a, b]$，而且 $\xi(t) \in (\alpha, \beta)$. 显然

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k^+\} = \int_{0<t_1<\cdots<t_k<t} \cdots \int \int \cdots \int \Gamma_+(b, dt_1, dy_1)$$
$$\times \Gamma_-(a - b - y_1, dt_2, dy_2) \Gamma_+(b - a - y_2, dt_3, dy_3)$$
$$\times \cdots \times F_{t-t_k}((\alpha - c_k - y_k, \beta - c_k - y_k)), \qquad (55)$$

其中

$$c_k = \begin{cases} a, & \text{若 } k \text{ 为奇数}, \\ b, & \text{若 } k \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

同样，对于事件 $\mathfrak{B}_k^- = \mathfrak{A}_k^- \cup \mathfrak{A}_{k+1}^+$ 有

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k^-\} = \int_{0<t_1<\cdots\cdots<t_k<t} \cdots \int \int \cdots \int \Gamma_-(a, dt_1, dy_1)$$
$$\times \Gamma_+(b - a - y_1, dt_2, dy_2) \Gamma_-(a - b - y_2, dt_3, dy_3)$$
$$\times \cdots \times F_{t-t_k}((\alpha - c_{k-1} - y_k, \beta - c_{k-1} - y_k)). \qquad (56)$$

因为

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k^+\} = \mathbf{P}\{\mathfrak{A}_k^+\} + \mathbf{P}\{\mathfrak{A}_{k+1}^-\},$$
$$\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k^-\} = \mathbf{P}\{\mathfrak{A}_k^-\} + \mathbf{P}\{\mathfrak{A}_{k+1}^+\},$$

而且当 $k \to \infty$ 时

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{A}_k^+\} + \mathbf{P}\{\mathfrak{A}_k^-\} \to 0$$

(由于 $\xi(t)$ 没有第二类间断点，从而 $\bigcap_{k=1}^{\infty} [\mathfrak{A}_k^+ \cup \mathfrak{A}_k^-]$ 的概率为 0)，所以

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{A}_0^+\} + \mathbf{P}\{\mathfrak{A}_0^-\} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k^+\} + \mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k^-\}],$$

于是

$$Q(t; a, b; \alpha, \beta)$$

$$= F_t((\alpha, \beta)) - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k^+\} + \mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k^-\}], \qquad (57)$$

其中 $\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k^+\}$ 和 $\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k^-\}$ 分别由 (55) 和 (56) 式给出

如果把 $\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k^+\}$ 和 $\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k^-\}$ 的表达式分别代入 (57) 式，则所得到的关系式将是十分繁的。如果考虑 $Q(t; a, b; \alpha, \beta)$ 对 t 的 Laplace 变换，则可以得到一些化简。设 $g_k^+(\lambda; a, b; \alpha, \beta)$ 是概率 $\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k^+\}$ (它依赖于 t) 对 t 的 Laplace 变换。那末由 (55) 式得

$$g_k^+(\lambda; a, b; \alpha, \beta)$$
$$= \int \cdots \int \Gamma_+^{(\lambda)}(b, dy_1) \Gamma_-^{(\lambda)}(a - b - y_1, dy_2)$$
$$\times \cdots R_\lambda((\alpha - c_k - y_k, \beta - c_k - y_k)), \qquad (58)$$

其中

$$\Gamma_+^{(\lambda)}(b, A_1) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_+(b, dt, A_1),$$

$$\Gamma_-^{(\lambda)}(a, A_1) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_-(a, dt, A_1),$$

$$R_\lambda(A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} F_t(A) dt.$$

同理可得概率 $\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k^-\}$ 的 Laplace 变换 $g_k^-(\lambda; a, b; \alpha, \beta)$.

我们引进核 $G_+^{(\lambda)}(x, A)$ 和 $G_-^{(\lambda)}(x, A)$：对于 $x \in [b, \infty)$, $A \subset [b, \infty)$,

$$G_+^{(\lambda)}(x, A) = \int \Gamma_-^{(\lambda)}(a - b - x, dy) \Gamma_+^{(\lambda)}(b - a - y, A_{-b}),$$

其中 $A_{-b} = \{x: x + b \in A\}$；而对于 $x \in [-\infty, a]$, $A \subset [-\infty, a]$,

$$G_-^{(\lambda)}(x, A) = \int \Gamma_+^{(\lambda)}(b - a - x, dy) \Gamma_-^{(\lambda)}(a - b - y, A_{+a}),$$

其中 $A_{+a} = \{x: x - a \in A\}$. 对所有 $x \in (-\infty, \infty)$，我们补定义 $G_+^{(\lambda)}(x, A)$：对 $x < b$ 设 $G_+^{(\lambda)}(x, A) = 0$，而一般设 $G_+^{(\lambda)}(x, A) = G_+^{(\lambda)}(x, A \cap [b, \infty))$；类似地，补定义 $G_-^{(\lambda)}(x, A)$. 其次，我们由方程

$$H_\pm^{(\lambda)}(\mu, x, A) = \chi_A(x) + \mu \int G_\pm^{(\lambda)}(x, dy) H_\pm^{(\lambda)}(\mu, y, A)$$

确定 $G_+^{(\lambda)}(x, A)$ 和 $G_-^{(\lambda)}(x, A)$ 的预解核. 对于 $|\mu|<1$, $H_\pm^{(\lambda)}(\mu, x, A)$ 可表示为级数

$$
\begin{aligned}
&H_\pm^{(\lambda)}(\mu, x, A) \\
&= \chi_A(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \int\cdots\int G_\pm^{(\lambda)}(x, dx_1)\cdots G_\pm^{(\lambda)}(x_{k-1}, A). \qquad (59)
\end{aligned}
$$

现在证明,对 $|\mu|=1$ 这个级数也收敛. 为此只需注意到

$$
\begin{aligned}
G_+^{(\lambda)}(x, \mathscr{R}) &= \int_0^\infty \Gamma_-^{(\lambda)}(a-b-x, dy)\Gamma_+^{(\lambda)}(b-a-y, [b, \infty)) \\
&\leqslant \mathbf{E}e^{-\lambda\tau_{b-a}}\Gamma_-^{(\lambda)}(a-b-x, (-\infty, a]) \\
&\leqslant \mathbf{E}e^{-\lambda\tau_{b-a}}\mathbf{E}e^{-\lambda\tau'_{a-b}}
\end{aligned}
$$

(其中 τ_{b-a} 是首次落入 $(b-a, \infty)$ 的时刻, 而 τ'_{a-b} 是首次落入 $(-\infty, a-b)$ 的时刻). 因为 $\mathbf{P}\{\tau_{b-a}=0\}=0$, 所以 $\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_{b-a}}<1$. 因此 $\sup\limits_x G_+^{(\lambda)}(x, \mathscr{R})<1$; 同理 $\sup\limits_x G_-^{(\lambda)}(x, \mathscr{R})<1$. 如果 $\sup\limits_x G_\pm^{(\lambda)}(x, \mathscr{R})\leqslant\rho<1$, 则

$$
\int\cdots\int G_\pm^{(\lambda)}(x, dx_1)\cdots G_\pm^{(\lambda)}(x_{k-1}, A)\leqslant\rho^k.
$$

我们现在看 $Q(t; a, b; \alpha, \beta)$ 的 Laplace 变换

$$
\widetilde{Q}(\lambda; a, b; \alpha, \beta) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}Q(t; a, b; \alpha, \beta)dt.
$$

由 (58) 和 (59) 两式可见

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{Q}(\lambda; a, b; \alpha, \beta) \\
&= R_\lambda((\alpha, \beta)) - \iint \Gamma_+^{(\lambda)}(b, dy)H_t^{(\lambda)}(1, y, dx)R_\lambda((\alpha-x, \beta \\
&\quad -x)) + \iiint \Gamma_+^{(\lambda)}(b, dy)H_+^{(\lambda)}(1, y, dz) \\
&\quad \times \Gamma_-^{(\lambda)}(a-b-z, dx)R_\lambda((\alpha-x, \beta-x)) \\
&\quad - \iint \Gamma_-^{(\lambda)}(a, dy)H_-^{(\lambda)}(1, y, dx)R_\lambda((\alpha-x, \beta-x)) \\
&\quad + \iiint \Gamma_-^{(\lambda)}(a, dy)H_-^{(\lambda)}(1, y, dz) \\
&\quad \times \Gamma_+^{(\lambda)}(b-a-z, dx)R((\alpha-x, \beta-x)). \qquad (60)
\end{aligned}
$$

通过 $F_t((a, b))$ 和 $\Gamma_+(x, dt_1, dy_1)$ 来表示 $\xi_+(t)$ 和 $\xi(t)$ 的

联合分布要简单得多. 因为对 $0 < x \leqslant a$

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{\xi_+(t) \leqslant a, \xi(t) < x\}\\&= \mathbf{P}\{\xi(t) < x\} - \mathbf{P}\{\xi_+(t) > a, \xi(t) < x\}\\&= F_t(x) - \mathbf{P}\{\tau_a < t, \xi(t) < x\}.\end{aligned}$$

(其中 $F_t(x) = F_t((-\infty, x))$), 所以

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{\xi_+(t) \leqslant a, \xi(t) < x\}\\&= F_t(x) - \int_0^t \int_0^\infty \Gamma_+(a, ds, dy) F_{t-s}(x - a - y). \qquad (61)\end{aligned}$$

如果原过程连续, 则 $\tilde{Q}(\lambda; a, b; \alpha, \beta)$ 的式子将大大简化. 这时分别有

$$\Gamma_+(b, dt, A) = \Gamma_+(b, dt, [b, \infty))\chi_A(b),$$
$$\Gamma_-(a, dt, A) = \Gamma_-(a, dt, (-\infty, a])\chi_A(a).$$

记

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\Gamma_+(x, dt, [x, \infty)) = \hat{\Gamma}_+^{(\lambda)}(x),$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\Gamma_-(x, dt, (-\infty, x]) = \hat{\Gamma}_-^{(\lambda)}(x).$$

那末

$$\begin{aligned}&g_k^+(\lambda; a, b; \alpha, \beta)\\&= \hat{\Gamma}_+^{(\lambda)}(b)\hat{\Gamma}_-^{(\lambda)}(a - b)\hat{\Gamma}_+^{(\lambda)}(b - a)\cdots R_\lambda((\alpha - c_k, \beta - c_k)),\end{aligned}$$

$$G_+^{(\lambda)}(x, A) = \hat{\Gamma}_-^{(\lambda)}(a - b - x)\hat{\Gamma}_+^{(\lambda)}(b - a)\chi_A(b),$$

$$G_-^{(\lambda)}(x, A) = \hat{\Gamma}_+^{(\lambda)}(b - a - x)\hat{\Gamma}_-^{(\lambda)}(a - b)\chi_A(a).$$

从而

$$H_+^{(\lambda)}(\mu, b, A) = \chi_A(b) + \mu G_+^{(\lambda)}(b, \{b\})H_+^{(\lambda)}(\mu, b, A),$$

即

$$H_+^{(\lambda)}(\mu, b, A) = \frac{\chi_A(b)}{1 - \mu G_+^{(\lambda)}(b, \{b\})}.$$

同理

$$H_-^{(\lambda)}(\mu, a, A) = \frac{\chi_A(a)}{1 - \mu G_-^{(\lambda)}(a, \{a\})}.$$

由 (60) 可见

$$\tilde{Q}(\lambda; a, b; \alpha, \beta) = R_\lambda((\alpha, \beta))$$
$$-\frac{\Gamma_+^{(\lambda)}(b)[R_\lambda((\alpha-b, \beta-b))-\Gamma_-^{(\lambda)}(a-b)R_\lambda((\alpha-a, \beta-a))]}{1-G_+^{(\lambda)}(b, \{b\})}$$
$$-\frac{\Gamma_-^{(\lambda)}(a)[R_\lambda((\alpha-a, \beta-a))-\Gamma_+^{(\lambda)}(b-a)R_\lambda((\alpha-b, \beta-b))]}{1-G_-^{(\lambda)}(a, \{a\})}. \quad (62)$$

具有同号跳跃的过程 先看只有负跳跃过程. 这种过程的累积量为

$$K(z) = iaz - \frac{b}{2}z^2 + \int_{-\infty}^{0}\left(e^{izx} - 1 - \frac{izx}{1+x^2}\right)\Pi(dx). \quad (63)$$

容易看出，$K(z)$ 在半平面 $\operatorname{Im} z < 0$ 上是解析函数，而对 $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ 它是连续函数.

我们证明 $\mathbf{E}e^{iz\xi(t)}$ 也具有上述性质. 把 $\xi(t)$ 表为

$$\xi(t) = a_1 t + \xi_1(t) + \xi^1(t),$$

其中 $\xi_1(t)$ 是 $\xi(t)$ 的小于-1的跳跃之和，

$$a_1 = a - \int_{-\infty}^{-1}\frac{x}{1+x^2}\Pi(dx) + \int_{-1}^{0}\left[x - \frac{x}{1+x^2}\right]\Pi(dx),$$

而 $\xi^1(t) = \xi(t) - a_1 t - \xi_1(t)$. 过程 $\xi_1(t)$ 和 $\xi^1(t)$ 独立，

$$\mathbf{E}e^{iz\xi(t)} = e^{ia_1 z}\mathbf{E}e^{iz\xi_1(t)}\mathbf{E}e^{iz\xi^1(t)},$$

而

$$\mathbf{E}e^{iz\xi^1(t)} = \exp\left\{-t\frac{bz^2}{2} + t\int_{-1}^{0}(e^{izx} - 1 - izx)\Pi(dz)\right\}. \quad (64)$$

因为以概率 1 有 $\xi_1(t) \leqslant 0$，所以对 $\operatorname{Im} z < 0$，$\mathbf{E}e^{iz\xi_1(t)}$ 是 z 的解析函数，而对 $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ 它是连续函数. 在以点 0 为圆心的某个圆中

$$\mathbf{E}e^{iz\xi^1(t)} = \mathbf{E}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}[\xi^1(t)]^n$$

是解析函数，因为由 §1 的 (13) 式对于某个 $c > 0$ 和 $0 < q < 1$

$$\mathbf{E}|\xi^1(t)|^n \leqslant c^n\sum_{k=1}^{\infty}k^n q^{k-1} \leqslant \frac{c^n(n-1)!}{(1-q)^n}.$$

在该圆内它与由 (64) 式给出的解析整函数重合. 从而，它自己也是解析整函数. 因而，对 $\operatorname{Im} z \leqslant 0$

$$\mathbf{E}e^{iz\xi(t)} = \exp\{tK(z)\}.$$

特别,如果取 $z = -iu$, $u > 0$, 则得

$$\mathbf{E}e^{u\xi(t)} = \exp\left\{t\left[au + \frac{b}{2}u^2 + \int_{-\infty}^{0}\left(e^{ux} - 1 - \frac{ux}{1+x^2}\right)\Pi(dx)\right]\right\}. \tag{65}$$

同理可证,如果过程的累积量为

$$K(z) = iaz - \frac{b}{2}z^2 + \int_0^{\infty}\left(e^{izx} - 1 - \frac{izx}{1+x^2}\right)\Pi(dx), \tag{66}$$

(即过程没有负跳跃),则对 $u > 0$

$$\mathbf{E}e^{-u\xi(t)} = \exp\left\{t\left[-au + \frac{b}{2}u^2 + \int_0^{\infty}\left(e^{-ux} - 1 + \frac{ux}{1+x^2}\right)\Pi(dx)\right]\right\}. \tag{67}$$

仍然假设过程的累积量形如(63). 记 τ_a 为首达水平 a 的时刻,其中 $a > 0$; 如果 $\sup\xi(t) < a$, 则令 $\tau_a = +\infty$. 如果 $\tau_a < +\infty$,则 $\xi(\tau_a) = a$. 变量 τ_a 对 a 单调.我们注意到,对 $0 < a < b$ 在集 $\{\tau_a < +\infty\}$ 上以概率 1 有

$$\mathbf{P}\{\tau_b - \tau_a < x \mid \mathscr{N}_{\tau_a}\} = \mathbf{P}\{\tau_{b-a} < x\}.$$

所以

$$\begin{aligned}\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_{a+b}} &= \mathbf{E}e^{-\lambda\tau_a - \lambda(\tau_{a+b} - \tau_a)} \\ &= \mathbf{E}e^{-\lambda\tau_a}\mathbf{E}[e^{-\lambda(\tau_{a+b}-\tau_a)} \mid \mathscr{N}_{\tau_a}] \\ &= \mathbf{E}e^{-\lambda\tau_a}\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_b}\chi_{\{\tau_a<\infty\}} \\ &= \mathbf{E}e^{-\lambda\tau_a}\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_b}\end{aligned}$$

(其中设 $\lambda > 0$, $e^{-\lambda(+\infty)} = 0$). 因而

$$\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_a} = \exp\{aB(\lambda)\}, \tag{68}$$

其中 $B(\lambda)$ 是 λ 的函数,对 $\mathrm{Re}\lambda > 0$ 它是解析的,而对 $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$ 它是连续的.

我们现在看到,

$$\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_x} = 1 - q_+(\lambda, x) = \exp\{xB(\lambda)\}.$$

所以由定理 4

$$\int_0^\infty e^{izx} d_x q_+(\lambda, x)$$
$$= -B(\lambda)\int_0^\infty e^{izx+xB(\lambda)} dx = \frac{B(\lambda)}{B(\lambda)+iz}.$$

最后的式子对 $\mathrm{Im}z \geqslant 0$ 成立. 回忆

$$\int_0^\infty e^{izx} d_x q_+(\lambda, x) \cdot \int_{-\infty}^0 e^{izx} d_x q_-(\lambda, x) = \frac{\lambda}{\lambda - K(z)}.$$

从而，当 $\mathrm{Im}z = 0$ 时

$$\int_{-\infty}^0 e^{izx} d_x q_-(\lambda, x) = \frac{\lambda}{\lambda - K(z)} \cdot \frac{B(\lambda)+iz}{B(\lambda)}. \quad (69)$$

该函数容许解析开拓到半平面 $\mathrm{Im}z < 0$，而且开拓后处处不为 0 (由定理 4 的公式知，此式左侧具备上述性质). 我们已看到，$K(z)$ 有在半平面 $\mathrm{Im}z < 0$ 的解析开拓. 因为当 $\lambda > 0$ 时 $B(\lambda) < 0$，故 $K(iB(\lambda)) = 0$，即在点 $iB(\lambda)$ 右侧为 0. 记 $K_-(u) = K(-iu)$，

$$K_-(u) = au + \frac{b}{2}u^2 + \int_{-\infty}^0 \left(e^{ux} - 1 - \frac{ux}{1+x^2}\right)\Pi(dx). \quad (70)$$

那末 $B(\lambda)$ 满足

$$K_-(-B(\lambda)) = \lambda. \quad (71)$$

显然，对于所有 $\lambda > 0$，$K_-(u) = \lambda$ 在区域 $\mathrm{Re}u > 0$ 内只有一个解，因为若不然，则 (69) 式右侧在该区域内就有极点.

由 $K_-(u)$ 的形状可以确定 $\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_a} = 1$，即 $\mathbf{P}\{\tau_a < \infty\} = 1$ 的条件. 为此必须使 $B(\lambda) \to 0 (\lambda \to 0)$. 因为

$$\frac{d^2}{du^2}K_-(u) = b + \int_{-\infty}^0 x^2 e^{ux}\Pi(dx) \geqslant 0 \qquad (u > 0),$$

故 $K_-(u)$ 是下凸函数，而若当 $\lambda \to 0$ 时 $B(\lambda) \to 0$，则对于 $u > 0$ 有 $K_-(u) > 0$. 因此

$$\lim_{u\downarrow 0}\frac{1}{u}K_-(u) \geqslant 0.$$

容易验证

$$\lim_{u\downarrow 0}\frac{1}{u}K_-(u)=a+\int_{-\infty}^{0}\frac{x^2}{1+x^2}\Pi(dx)$$

(该极限亦可等于$-\infty$). 因而,如果

$$a+\int_{-\infty}^{0}\frac{x^3}{1+x^2}\Pi(dx)\geqslant 0,$$

则对所有$x>0$, τ_x以概率1为有限变量. 这时τ_x作为x函数是单调的独立增量(对x)过程.

设

$$v_\lambda(\alpha,\beta)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}}{t}\left(\int_\alpha^\beta x d_xF_t(x)\right)dt.$$

对所有$\beta>\alpha>0$函数$v_\lambda(\alpha,\beta)$有定义. 我们证明对$\lambda>0$, 存在$\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}v_\lambda(\alpha,\beta)$.

为此先对小的t估计

$$\int_0^1 x d_xF_t(x).$$

设$\xi_1(t)$是过程$\xi(t)$的绝对值大于1的跳跃之和, $\xi^1(t)=\xi(t)-\xi_1(t)$. 那末$\xi^1(t)$有一切阶矩,所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 x d_xF_t(x)&=\mathbf{E}\chi_{[0,1]}[\xi_1(t)+\xi^1(t)][\xi_1(t)+\xi^1(t)]\\&\leqslant 1-\mathbf{P}\{\xi_1(t)>0\}+\mathbf{E}|\xi^1(t)|\\&\leqslant 1-e^{-Ct}+\sqrt{\mathbf{E}|\xi^1(t)|^2}=O(\sqrt{t}).\end{aligned}$$

记

$$v_\lambda(x)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}}{t}\int_0^x y d_yF_t(y)dt.$$

函数$v_\lambda(x)$满足下式

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-\mu x}-1}{x}dv_\lambda(x)=\ln\frac{-B(\lambda)}{-B(\lambda)+\mu}.$$

若两侧同时对μ求微商,则得

$$\int_0^{\infty}e^{-\mu x}dv_\lambda(x)=\frac{1}{-B(\lambda)+\mu}.$$

从而，由 $v_\lambda(0)=0$ 得

$$v_\lambda(x)=\frac{1}{B(\lambda)}(e^{B(\lambda)x}-1)=\int_0^x e^{B(\lambda)y}dy.$$

设 $\Phi_x(t)=\mathbf{P}\{\tau_x<t\}$. 那末根据 (68) 式

$$\int_0^x dy\int_0^\infty e^{-\lambda s}d_s\Phi_y(s)=\int_0^\infty e^{-\lambda s}d_s\int_0^x\Phi_y(s)dy$$
$$=\int_0^\infty e^{-\lambda s}\frac{1}{s}\int_0^x yd_yF_s(y)ds.$$

因此，对于函数 $\int_0^x yd_yF_s(y)$ 关于 s 的连续点成立等式

$$\frac{d}{ds}\int_0^x\Phi_y(s)dy=\frac{1}{s}\int_0^x yd_yF_s(y). \tag{72}$$

该式容许由过程值的分布来求首达水平 x 的时间的分布.

利用 (69) 式求 $q_-(\lambda,x)$:

$$\int_{-\infty}^0 e^{izx}d_xq_-(\lambda,x)=\frac{\lambda}{\lambda-K(z)}+\frac{1}{B(\lambda)}\cdot\frac{iz\lambda}{\lambda-K(z)}$$
$$=\frac{\lambda}{\lambda-K(z)}-\int_0^\infty e^{yB(\lambda)}\frac{iz\lambda}{\lambda-K(z)}dy.$$

由此得

$$\int_{-\infty}^0 e^{izx}d_x\mathbf{P}\{\inf_{s\leqslant t}\xi(s)<x\}$$
$$=e^{tK(z)}-iz\int_0^\infty\int_0^t e^{(t-s)K(z)}d_s\Phi_y(s)dy.$$

由对 z 的逆 Fourier 变换得

$$\mathbf{P}\{\inf_{s\leqslant t}\xi(s)<x\}$$
$$=F_t(x)+\frac{d}{dx}\int_0^\infty\int_0^t F_{t-s}(x)d_s\Phi_y(s)dy. \tag{73}$$

作为 (72) 式的应用，试看连续齐次过程 $\xi(t)$ 到达水平 x 的时间的分布. 设

$$K(z)=iaz-\frac{b}{2}z^2.$$

那末

$$\int_0^x y d_y F_s(y) = \int_0^x y \frac{1}{\sqrt{2\pi t b}} e^{-\frac{(y-at)^2}{2tb}} dy.$$

所以

$$\Phi_y(t) = \int_0^t \frac{1}{s} \frac{y}{\sqrt{2\pi s b}} e^{-\frac{(y-as)^2}{2bs}} ds,$$

于是 $\Phi_y(t)$ 有分布密度

$$\frac{d}{dt}\Phi_y(t) = \frac{y}{\sqrt{2\pi b}} t^{-3/2} e^{-\frac{(y-at)^2}{2bt}}. \tag{74}$$

对 $a=0$ 的情形，我们由上一小节的结果也能算出 $\xi_+(t)$，$\xi_-(t)$ 和 $\xi(t)$ 的联合分布．为避免符号混淆，我们假设过程 $\xi(t)$ 的累积量 $K(z) = -\frac{1}{2}z^2$．注意，这时 $\hat{\Gamma}_+^{(\lambda)}(x) = e^{xB(\lambda)}$，而 $B(\lambda)$ 决定于下面的等式：

$$\frac{1}{2}[-B(\lambda)]^2 = \lambda, \qquad B(\lambda) = -\sqrt{2\lambda}.$$

因此

$$\hat{\Gamma}_+^{(\lambda)}(x) = e^{-x\sqrt{2\lambda}} \qquad (x>0).$$

同理

$$\hat{\Gamma}_-^{(\lambda)}(x) = e^{x\sqrt{2\lambda}} \qquad (x<0).$$

其次

$$R_\lambda((\alpha,\beta)) = \int_\alpha^\beta e^{-|x|\sqrt{2\lambda}}\,dx,$$

$$G_+^{(\lambda)}(b,\{b\}) = G_-^{(\lambda)}(a,\{a\}) = e^{-2(b-a)\sqrt{2\lambda}}.$$

从而

$$\begin{aligned}
&\widetilde{Q}(\lambda;a,b;\alpha,\beta)\\
&= \int_\alpha^\beta \Bigg\{ e^{-|x|\sqrt{2\lambda}} - \frac{e^{-b\sqrt{2\lambda}}\left(e^{-|x-b|\sqrt{2\lambda}} - e^{-(b-a)\sqrt{2\lambda}-|x-a|\sqrt{2\lambda}}\right)}{1-e^{-2(b-a)\sqrt{2\lambda}}}\\
&\quad - \frac{e^{a\sqrt{2\lambda}}\left(e^{-|x-a|\sqrt{2\lambda}} - e^{-(b-a)\sqrt{2\lambda}-|x-b|\sqrt{2\lambda}}\right)}{1-e^{-2(b-a)\sqrt{2\lambda}}}\Bigg\} dx.
\end{aligned}$$

因为对 $x\in(\alpha,\beta)$ 有 $b-x>0,\ x-a>0$,

$$(1-e^{-2(b-a)\sqrt{2\lambda}})^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2k(b-a)\sqrt{2\lambda}},$$

所以

$$\begin{aligned}&\tilde{Q}(\lambda;\ a,\ b;\ \alpha,\ \beta)\\&=\int_{\alpha}^{\beta}\Big\{e^{-|x|\sqrt{2\lambda}}-\sum_{k=0}^{\infty}e^{[x-2b-2k(b-a)]\sqrt{2\lambda}}\\&\quad+\sum_{k=0}^{\infty}e^{[-x-2(b-a)-2k(b-a)]\sqrt{2\lambda}}-\sum_{k=0}^{\infty}e^{[2a-x-2k(b-a)]\sqrt{2\lambda}}\\&\quad+\sum_{k=0}^{\infty}e^{[x-2(b-a)-2k(b-a)]\sqrt{2\lambda}}\Big\}dx\\&=\int_{\alpha}^{\beta}\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-|x-2k(b-a)|\sqrt{2\lambda}}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-|x-2b-2k(b-a)|\sqrt{2\lambda}}\Big\}dx.\end{aligned}$$

所以,利用等式

$$e^{-|x|\sqrt{2\lambda}}=\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}-\lambda t}\,dt$$

可得

$$\begin{aligned}&Q(t;\ a,\ b;\ \alpha,\ \beta)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\alpha}^{\beta}\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-[x-2k(b-a)]^2/2t}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-[x-2b-2k(b-a)]^2/2t}\Big\}dx.\end{aligned}\tag{75}$$

§3. $\mathscr{R}^1$ 中齐次独立增量过程的样本函数的性质

在 §1 中,我们研究了任意随机连续独立增量过程的样本函数的一些性质. 譬如, 在 §1 中, 找到了过程样本函数连续、单调、变差有界的条件以及它们为阶梯函数的条件. 对于齐次情形, 这些条件得不到任何简化. 本节的主要注意力在于轨道的局部性质, 当 $t\to\infty$ 时过程的增长,以及过程的值集的性质.

样本函数的局部性质 因为对一切 $t\geqslant 0$，$\xi(t+s)-\xi(t)$ 与 $\xi(s)$ 同分布，所以只需研究齐次过程在点 0 的行为。我们首先研究当 $t\downarrow 0$ 时比值 $\xi(t)/t$ 的分布。

定理 1 I. 如果过程 $\xi(t)$ 的变差有界，而过程的累积量 $K(z)$ 形如

$$K(z)=iaz+\int_{-\infty}^{\infty}(e^{izx}-1)\Pi(dx), \tag{1}$$

则

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{t\downarrow 0}\frac{\xi(t)}{t}=a\right\}=1.$$

II. 如果过程 $\xi(t)$ 的变差有界，则以概率 1 有

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{\xi(t)}{t}=+\infty,\qquad \underline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{\xi(t)}{t}=-\infty.$$

证. I. 对每个 $\delta>0$，以 (1) 中 $K(z)$ 为累积量的过程 $\xi(t)$ 可表为

$$\xi(t)=at+\xi_\delta^+(t)+\xi_\delta^-(t)+\eta_\delta(t),$$

其中 $\xi_\delta^+(t)$ 和 $\xi_\delta^-(t)$ 是独立增量过程，它们的累积量分别为

$$\int_{-0}^{\delta}(e^{izx}-1)\Pi(dx)\ \text{和}\ \int_{-\delta}^{0}(e^{izx}-1)\Pi(dx),$$

而 $\eta_\delta(t)$ 是跃度的绝对值大于 δ 的阶梯过程。所以对于所有 $\delta>0$ 和充分小的 t，$\eta_\delta(t)=0$，而为证命题 I 只需证明，通过选择 $\delta>0$ 可以使

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{\xi_\delta(t)}{t},\quad \text{其中}\ \xi_\delta(t)=\xi_\delta^+(t)-\xi_\delta^-(t),$$

任意地小。

显然

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{\xi_\delta(t)}{t}\leqslant 2\overline{\lim_{n\to\infty}}\zeta_n,\quad \text{其中}\ \zeta_n=2^n\xi_\delta(2^{-n}).$$

因为

$$\mathbf{E}(\zeta_{n+1}|\zeta_n)=\mathbf{E}(2^{n+1}[\xi_\delta(2^{-n})-\xi_\delta(2^{-n-1})]|\zeta_n),$$

故

$$\mathbf{E}(\zeta_{n+1}|\zeta_n)$$
$$=\frac{1}{2}\mathbf{E}(\zeta_{n+1}+2^{(n+1)}[\xi_\delta(2^{-n})-\xi_\delta(2^{-n-1})]|\zeta_n)=\zeta_n.$$

因此，ζ_n 是鞅，并且存在

$$\zeta_\infty=\lim_{n\to\infty}\zeta_n,\quad \mathbf{E}\zeta_\infty\leqslant\mathbf{E}\zeta_1=\int_{-\delta}^{\delta}|x|\Pi(dx).$$

于是

$$\mathbf{E}\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{\xi_\delta(t)}{t}\leqslant 2\int_{-\delta}^{\delta}|x|\Pi(dx).$$

由于 $\delta>0$ 的任意性，由该不等式即可得命题 I.

II. 先看只有负跳跃的过程. 不失普遍性，可以假设过程的累积量形如

$$K(z)=iaz-\frac{bz^2}{2}+\int_{-1}^{0}(e^{izx}-1-izx)\Pi(dx),\tag{2}$$

其中 $a>0$. 那末对一切 $y>0$ 首达水平 y 的时刻 τ_y 有穷，而 τ_y 对 y 是单调的齐次独立增量过程. 设 $K_-(\lambda)=K(-i\lambda)$. 如 §2 中所证

$$\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_y}=e^{yB(\lambda)},$$

其中 $B(\lambda)$ 决定于 $\lambda=K_-(-B(\lambda))$. 函数 $B(\lambda)$ 形为

$$B(\lambda)=a_1\lambda+\int_0^\infty(e^{-\lambda x}-1)\Pi_1(dx)\ (a_1>0).\tag{3}$$

显然，如果当 $\lambda\to+\infty$ 时 $B(\lambda)$ 有界，则 $a_1=0$. 设当 $\lambda\to+\infty$ 时 $B(\lambda)\to-\infty$. 那末由 (3) 式得

$$a_1=-\lim_{\lambda\to\infty}B'(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{K'_-(-B(\lambda))}=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{K'_-(\lambda)}$$
$$=\lim_{\lambda\to\infty}\left[a+b\lambda+\int_{-1}^{0}(e^{\lambda x}-1)x\Pi(dx)\right]^{-1}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

因此 $a_1=0$，而

$$\mathbf{E}e^{iz\tau_y}=\exp\left\{y\int_0^\infty(e^{izx}-1)\Pi_1(dx)\right\}.$$

所以根据命题 I 有

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{y\downarrow 0}\frac{\tau_y}{y}=0\right\}=1.$$

从而

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{y\downarrow 0}\frac{\xi(\tau_y)}{\tau_y}=+\infty\right\}=1,$$

即

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{\xi(t)}{t}=+\infty\right\}=1.$$

为证明对所考察的过程

$$\mathbf{P}\left\{\underline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{\xi(t)}{t}=-\infty\right\}=1, \tag{4}$$

只需验证，对所有 $v>0$

$$\mathbf{P}\left\{\underline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{\xi(t)}{t}\leqslant -v\right\}=\mathbf{P}\left\{\underline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{\xi(t)+vt}{t}\leqslant 0\right\}=1.$$

该式成立，如果对任意 $\delta>0$

$$\mathbf{P}\{\inf_{t\leqslant\delta}[\xi(t)+vt]\leqslant 0\}=1.$$

这样，如果过程的累积量为 (2)，其中 $a>0$ 是任意的，而且

$$\mathbf{P}\{\inf_{0<s<t}\xi(s)\leqslant 0\}=1,$$

则 (4) 式成立.

由 §2 式 (69) 有

$$\int_{-\infty}^{0}e^{zx}d_xq_-(\lambda,x)$$
$$=\frac{\lambda}{\lambda-\left[az+\frac{bz^2}{2}+\int_{-1}^{0}(e^{zx}-1-zx)\Pi(dx)\right]}\cdot\frac{B(\lambda)+z}{B(\lambda)},$$

其中

$$q_-(\lambda,x)=\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{P}\{\inf_{s\leqslant t}\xi(s)<x\}dt,$$

而 $B(\lambda)$ 决定于 (3) 式. 我们来求 $1-q_-(\lambda,-0)$:

$$1-q_-(\lambda,-0)=\lim_{z\to\infty}\int_{-\infty}^{0}e^{zx}d_xq_-(\lambda,x)$$

$$= \lim_{z\to\infty} \frac{\lambda z[B(\lambda)]^{-1}}{\lambda - \left[az + \frac{bz^2}{2} + \int_{-1}^{0} (e^{zx} - 1 - zx)\Pi(dx)\right]}.$$

因为

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z}\int_{-1}^{0} (e^{zx} - 1 - zx)\Pi(dx)$$

$$= \lim_{z\to\infty} \int_{-1}^{0} \left(\frac{e^{zx} - 1}{z} - x\right)\Pi(dx)$$

$$\geqslant \lim_{z\to+\infty} \int_{-1}^{-\varepsilon} \left(\frac{e^{zx} - 1}{z} - x\right)\Pi(dx) = -\int_{-1}^{-\varepsilon} x\Pi(dx),$$

而且当 $\varepsilon \to 0$ 时，最后的式子趋向$+\infty$，所以

$$1 - q_-(\lambda, -0) = 0.$$

因而

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{P}\{\inf_{0\leqslant s\leqslant t} \xi(s) > 0\}dt = 0.$$

命题得证.

我们现在假设

$$\int_{-1}^{1} |x|\Pi(dx) = +\infty, \qquad \int_0^1 x\Pi(dx) < \infty.$$

那末过程 $\xi(t)$ 可表为

$$\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t),$$

其中 $\xi_1(t)$ 是有界变差过程，而 $\xi_2(t)$ 无正跳跃，并且有无界变差. 根据证得的结果

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}(\xi(t)/t) = \lim_{t\downarrow 0}(\xi_1(t)/t) + \overline{\lim_{t\downarrow 0}}(\xi_2(t)/t) = +\infty,$$

$$\underline{\lim_{t\downarrow 0}}(\xi(t)/t) = \underline{\lim_{t\downarrow 0}}(\xi_2(t)/t) = -\infty.$$

通过变更 $\xi(t)$ 的符号可见，当

$$\int_{-1}^{1} |x|\Pi(dx) = +\infty, \qquad \int_{-1}^{0} |x|\Pi(dx) < \infty$$

时，定理仍然成立.

最后，我们看

$$\int_{-1}^{0}|x|\Pi(dx)=+\infty,\quad \int_{0}^{1}|x|\Pi(dx)=+\infty$$

的情形．这时过程 $\xi(t)$ 可表为

$$\xi(t)=\xi_1(t)+\xi_2(t),$$

其中 $\xi_1(t)$无正跳跃，而 $\xi_2(t)$ 无负跳跃，$\xi_1(t)$和 $\xi_2(t)$ 相互独立，而且它们的变差都无界．总可以假设 $M\xi_1(t)\geqslant 0$，否则可以分别以 $\xi_1(t)+at$ 和 $\xi_2(t)-at$ 来代替 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$，$(a>0)$．可以设 $\mathbf{E}\xi_1(t)=0$，而不失普遍性．由于以概率 1 有

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{\xi_2(t)}{t}=+\infty,$$

故为证明

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{\xi_1(t)+\xi_2(t)}{t}=+\infty\right\}=1$$

只需证明，对任意序列 $t_k\downarrow 0$

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\xi_1(t_k)}{t_k}\geqslant 0\right\}=1. \tag{5}$$

选择一子列 t_{n_k}，使

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{k\to\infty}\frac{1}{t_{n_k}}\xi_1(t_{n_{k+1}})=0\right\}=1.$$

那末，如果

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{t_{n_k}}[\xi_1(t_{n_k})-\xi_1(t_{n_{k+1}})]\geqslant 0\right\}=1, \tag{6}$$

则 (5) 式成立．随机变量 $\xi_1(t_{n_k})-\xi_1(t_{n_{k+1}})$ 相互独立，所以根据 Borel-Cantelli 引理，如果

$$\sum\mathbf{P}\{\xi_1(t_{n_k})-\xi_1(t_{n_{k+1}})\geqslant 0\}=+\infty,$$

则 (5) 式成立．而最后一式成立可以由下面的引理得出，而且该引理又有其独立的意义．

引理 1 如果 $\xi_1(t)$ 是没有正跳跃的齐次独立增量过程，$\mathbf{E}\xi_1(t)=0$，则

$$\mathbf{P}\{\xi_1(t)>0\}\geqslant\frac{1}{16}. \tag{7}$$

证. 设

$$\mathbf{E}e^{z\xi_1(t)} = e^{tv(z)},$$

其中

$$v(z) = \left[\frac{bz^2}{2} + \int_{-\infty}^{0}(e^{zx} - 1 - zx)\Pi(dx)\right].$$

那末

$$\begin{aligned}
v(2z) &= 2bz^2 + \int_{-\infty}^{0}(e^{2zx} - 1 - 2zx)\Pi(dx) \\
&= 2bz^2 + 2\int_{-\infty}^{0}(e^{zx} - 1 - zx)\Pi(dx) \\
&\quad + \int_{-\infty}^{0}(e^{zx} - 1)^2\Pi(dx) \\
&\leqslant 2bz^2 + 4\int_{-\infty}^{0}(e^{zx} - 1 - zx)\Pi(dx) = 4v(z),
\end{aligned}$$

因为对 $u \leqslant 0$ 有

$$(e^u - 1)^2 \leqslant 2(e^u - 1 - u).$$

根据 Cauchy 不等式

$$[\mathbf{E}e^{z\xi_1(t)}\chi_{(0,\infty)}(\xi_1(t))]^2 \leqslant \mathbf{E}e^{2z\xi_1(t)}\mathbf{P}\{\xi_1(t) > 0\}.$$

所以

$$\mathbf{P}\{\xi_1(t) > 0\} \geqslant \frac{[\mathbf{E}e^{z\xi_1(t)}\chi_{(0,\infty)}(\xi_1(t))]^2}{\mathbf{E}e^{2z\xi_1(t)}} \geqslant \frac{[e^{tv(z)} - 1]^2}{e^{4tv(z)}}.$$

因为 $v(0) = 0$, $v(+\infty) = +\infty$, 故存在一 z 值,使 $e^{tv(z)} = 2$. 将 z 的该值代入最后的不等式即可得 (7) 式. 引理得证.

我们现在研究单调过程的局部性质.

定理 2 设 $\xi(t)$ 为齐次独立增量过程,其累积量为

$$K(z) = \int_{0}^{\infty}(e^{izx} - 1)\Pi(dx).$$

其次, 假设函数 $g(x)$ 对 $x \geqslant 0$ 定义, $g(0) = 0$, 当 $x > 0$ 时 $g(x) > 0$, 而且 $g(x)$ 连续,单增,并满足

$$g(x + y) \leqslant g(x) + g(y).$$

那末:

1）如果

$$\int_0^\infty g(x)\Pi(dx) < \infty,$$

则

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{t\downarrow 0}\frac{g(\xi(t))}{t}=0\right\}=1,$$

2）而如果

$$\int_0^\infty g(x)\Pi(dx) = +\infty,$$

则

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{g(\xi(t))}{t}=+\infty\right\}=1.$$

证．我们考虑随机变量序列

$$\eta_n = 2^n g(\xi(2^{-n})),$$

并证明 η_n 构成鞅．事实上，对 $m<n$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}(\eta_n|\eta_m,\eta_{m-1},\cdots)=\mathbf{E}(\eta_n|\xi(2^{-m}))\\
&=2^n\mathbf{E}[g(\xi(2^{-n}))|\xi(2^{-m})]\\
&=2^m\sum_{k=0}^{2^{n-m}-1}\mathbf{E}\left[g\left(\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right)-\xi\left(\frac{k}{2^n}\right)\middle|\xi(2^{-m})\right]\\
&\geqslant 2^m g(\xi(2^{-m}))=\eta_m.
\end{aligned}$$

对情形 1）

$$\mathbf{E}\eta_n = 2^n\mathbf{E}g[\xi(2^{-n})] = 2^n\mathbf{E}g\left(\int_0^\infty x\nu_{2^{-n}}(dx)\right),$$

其中 $\nu_t(A)$ 在长为 t 的时间内落入 A 的跳跃的次数．所以

$$\mathbf{E}\eta_n \leqslant 2^n\mathbf{E}\int_0^\infty g(x)\nu_{2^{-n}}(dx) = \int_0^\infty g(x)\Pi(dx)$$

$$(\mathbf{E}\nu_t(dx) = t\Pi(dx)),$$

而由第一卷第二章 §2 定理 1 可知，以概率 1 存在 $\lim_{n\to\infty}\eta_n$．由于当 $1/2^n < t < 1/2^{n-1}$ 时

$$2^{n-1}g(\xi(2^{-n})) \leqslant \frac{g(\xi(t))}{t} \leqslant 2^n g(\xi(2^{-n+1})),$$

即

$$\frac{1}{2}\eta_n \leqslant \frac{g(\xi(t))}{t} \leqslant 2\eta_{n-1},$$

则以概率 1 有

$$\varlimsup_{t\downarrow 0} \frac{g(\xi(t))}{t} \leqslant 2\lim_{n\to\infty}\eta_n,$$

$$\varlimsup_{t\downarrow 0} \frac{g(\xi(t))}{t} < +\infty.$$

现在我们选择函数 $g_1(x)$，使之满足定理的条件：

$$\int_0^1 g_1(x)\Pi(dx) < \infty,$$

且

$$\frac{g_1(x)}{g(x)} \to +\infty \quad (x\downarrow 0).$$

那末

$$\varlimsup_{t\downarrow 0} \frac{g_1(\xi(t))}{t} < +\infty.$$

从而

$$\varlimsup_{t\downarrow 0} \frac{g(\xi(t))}{t} = \varlimsup_{t\downarrow 0} \frac{g(\xi(t))}{g_1(\xi(t))}\cdot\frac{g_1(\xi(t))}{t} = 0.$$

命题 1) 得证.

现在我们来证明命题 2)。记

$$\int_x^\infty \Pi(dy) = M(x).$$

设 x_n 满足 $g(x_n) = 2^{-n}g(1)$. 那末

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x)dM(x) &= \sum_{n=0}^\infty \int_{x_n}^{x_{n+1}} g(x)dM(x)\\ &\leqslant \sum_{n=0}^\infty \frac{g(1)}{2^n}[M(x_{n+1}) - M(x_n)]\\ &= g(1)\left[M(1) + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^{n+1}}M(x_n)\right].\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}M(x_n)=+\infty. \tag{8}$$

以 $\mathfrak{A}_n$ 表示事件：过程 $\xi(t)$ 在线段 $\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$ 上的跃度大于 x_n. 那末

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{A}_n\}=1-\exp\left\{-\frac{1}{2^{n+1}}M(x_n)\right\}.$$

事件 $\mathfrak{A}_n$ 独立，而且由 (8)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\mathfrak{A}_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\exp\left\{-\frac{1}{2^{n+1}}M(x_n)\right\}\right]=+\infty.$$

因此，在事件 $\mathfrak{A}_n$ 中有无穷多个事件出现. 如果 $\mathfrak{A}_n$ 出现，则

$$\xi\left(\frac{1}{2^n}\right)>x_n,\quad g\left(\xi\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)>2^{-n}g(1).$$

因此

$$\varlimsup_{n\to\infty}2^n g(\xi(2^{-n}))\geqslant g(1)>0.$$

取 g_1 使定理的条件成立：

$$\int_0^1 g_1(x)\Pi(dx)=+\infty,\qquad \frac{g(x)}{g_1(x)}\to+\infty\ (x\downarrow 0);$$

可见

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{g(\xi(2^{-n}))}{2^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{g(\xi(2^{-n}))}{g_1(\xi(2^{-n}))}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{g_1(\xi(2^{-n}))}{2^{-n}}$$

$$\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{g(\xi(2^{-n}))}{g_1(\xi(2^{-n}))}\cdot g_1(1)=+\infty.$$

最后注意到

$$\varlimsup_{t\downarrow 0}\frac{g(\xi(t))}{t}\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{g(\xi(2^{-n}))}{2^{-n}}.$$

定理得证.

我们给出一个定理，可以利用它来估计任意过程的局部增长.

定理 3 设 $\xi(t)$ 是齐次独立增量过程，$\varphi(t)$ 是一连续的非负递增函数，$t\in[0,1]$，满足下列条件：

a) $\lim\limits_{u\downarrow 1}\sup\limits_{t}\left|\dfrac{\varphi(ut)}{\varphi(t)}-1\right|=0$，

b) 对任意 $\varepsilon>0$ 存在 $\alpha_\varepsilon>0$，使

$$\mathbf{P}\{\xi(t)<-\varepsilon\varphi(t)\}\leqslant 1-\alpha_\varepsilon.$$

那末

1) 如果 $\int_0^1\frac{1}{t}\mathbf{P}\{\xi(t)>\varphi(t)\}dt<\infty$，则

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{t\downarrow 0}\frac{\xi(t)}{\varphi(t)}\leqslant 1\right\}=1;$$

2) 如果 $\int_0^1\frac{1}{t}\mathbf{P}\{\xi(t)>\varphi(t)\}dt=\infty$，则

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{t\downarrow 0}\frac{\xi(t)}{\varphi(t)}\geqslant 1\right\}=1.$$

我们先证明一个简单的引理.

引理 2 设 $S_1, S_n, \cdots, S_n$ 为独立随机变量和，对所有 k，$\mathbf{P}\{S_n-S_k<-c\}<1-\alpha$. 那末对 $x>0$

$$\mathbf{P}\{\sup_k S_k>x+c\}\leqslant\frac{1}{\alpha}\mathbf{P}\{S_n>x\}.$$

引理的证明是简单的：

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{\sup_k S_k>x+c\}\\&=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}\{S_1\leqslant x+c,\cdots,S_{i-1}\leqslant x+c,S_i>x+c\}\\&\leqslant\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}\{S_1\leqslant x+c,\cdots,S_{i-1}\leqslant x+c,\\&\qquad S_i>x+c,\ S_n-S_i>-c\}\leqslant\frac{1}{\alpha}\mathbf{P}\{S_n>x\}.\end{aligned}$$

证明定理 3. 利用引理 2 和过程 $\xi(t)$ 的可分性，由条件 b) 可见，对 $a<1$

则

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant s\leqslant a^k}\xi(s)>(1+2\varepsilon)\varphi(a^k)\}$$
$$\leqslant\frac{1}{\alpha_\varepsilon}\mathbf{P}\{\xi(t)>(1+\varepsilon)\varphi(a^k)\},$$

其中 $a^{k+1}<t<a^k$. 选择 a 离 1 充分近，使

$$(1+\varepsilon)\varphi(a^k)>\varphi(a^{k-1}).$$

那末

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant s\leqslant a^k}\xi(s)>(1+2\varepsilon)\varphi(a^k)\}$$
$$\leqslant\frac{1}{\alpha_\varepsilon(1-a)}\int_{a^k}^{a^{k-1}}\frac{1}{t}\mathbf{P}\{\xi(t)>\varphi(t)\}dt.$$

从而

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant s<a^k}\xi(s)>(1+2\varepsilon)\varphi(a^k)\}<\infty.$$

因此，以概率 1 从某个 k 起，对 $a^{k+1}\leqslant t\leqslant a^k$ 有

$$\xi(t)\leqslant(1+2\varepsilon)\varphi(a^k)\leqslant(1+2\varepsilon)(1+\varepsilon)\varphi(t).$$

所以以概率 1

$$\varlimsup_{t\downarrow 0}\frac{\xi(t)}{\varphi(t)}\leqslant(1+2\varepsilon)(1+\varepsilon).$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，命题 1) 得证.

现在证明命题 2). 首先证明，对任意 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$，使 $0<1-a<\delta$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\xi(a^k)>(1-\varepsilon)\varphi(a^k)\}=+\infty. \tag{9}$$

设 $a^{k+1}<t<a^k$. 那末，如果 a 满足

$$\varphi(a^k)-\varphi(a^{k+1})\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\varphi(a^k),$$

则

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\xi(a^k)>(1-\varepsilon)\varphi(a^k)\}\\
&\geqslant\mathbf{P}\{\xi(t)>\varphi(t)\}\mathbf{P}\{\xi(a^k)-\xi(t)>(1-\varepsilon)\varphi(a^k)-\varphi(t)\}\\
&\geqslant\mathbf{P}\{\xi(t)>\varphi(t)\}\mathbf{P}\{\xi(a^k)-\xi(t)>(1-\varepsilon)\varphi(a^k)-\varphi(a^{k+1})\}\\
&\geqslant\mathbf{P}\{\xi(t)>\varphi(t)\}
\end{aligned}$$

$$\times \mathbf{P}\left\{\xi(a^k)-\xi(t)>-\frac{[\varepsilon\varphi(a^k)-(\varphi(a^k)-\varphi(a^{k+1}))]}{\varphi(a^k-a^{k+1})}\right.$$

$$\left.\times\ \varphi(a^k-t)\right\}\geqslant \alpha_{\varepsilon/2}\mathbf{P}\{\xi(t)>\varphi(t)\};$$

$$\alpha_{\varepsilon/2}\frac{1}{a^k-a^{k+1}}\int_{a^{k+1}}^{a^k}\mathbf{P}\{\xi(t)>\varphi(t)\}dt$$

$$\geqslant \alpha_{\varepsilon/2}\frac{a}{1-a}\int_{a^k}^{a^{k+1}}\frac{1}{t}\mathbf{P}\{\xi(t)>\varphi(t)\}dt.$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\xi(a^k)>(1-\varepsilon)\varphi(a^k)\}$$

$$\geqslant \frac{\alpha_{\varepsilon/2}a}{1-a}\int_0^1\frac{1}{t}\mathbf{P}\{\xi(t)>\varphi(t)\}dt=\infty.$$

因而，(9) 式成立.

由 (9) 可见，对任意 N 存在 l，使

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\xi(a^{l+Nk})>(1-\varepsilon)\varphi(a^{l+Nk})\}=\infty.$$

由于

$$\mathbf{P}\left\{\xi\left(\frac{a^{l+Nk}}{1-a^N}\right)-\xi\left(\frac{a^{l+Nk+N}}{1-a^N}\right)>(1-\varepsilon)\varphi(a^{l+Nk})\right\}$$

$$=\mathbf{P}\{\xi(a^{l+Nk})>(1-\varepsilon)\varphi(a^{l+Nk})\},$$

而且对于不同的 k，事件

$$\left\{\xi\left(\frac{a^{l+Nk}}{1-a^N}\right)-\xi\left(\frac{a^{l+Nk+N}}{1-a^N}\right)>(1-\varepsilon)\varphi(a^{l+Nk})\right\}$$

相互独立，所以在它们之中以概率 1 出现无穷多个事件，于是以概率 1 存在序列 k_n，使

$$\xi\left(\frac{a^{l+Nk_n}}{1-a^N}\right)-\xi\left(\frac{a^{l+Nk_n+N}}{1-a^N}\right)>(1-\varepsilon)\varphi(a^{l+Nk_n}). \qquad (10)$$

不等式 (10) 导出下面的两个不等式之一：

$$\xi\left(\frac{a^{l+Nk_n}}{1-a^N}\right)>(1-2\varepsilon)\varphi(a^{l+Nk_n}), \qquad (11)$$

$$\xi\left(\frac{a^{l+Nk_n+N}}{1-a^N}\right)<-\varepsilon\varphi(a^{l+Nk_n}). \tag{12}$$

我们证明,可以选择 k_n 趋向无穷充分地快,使与 (12) 相反的不等式对无穷多个 k_n 成立. 那末对这些 k_n(11)式成立. 我们选择 k_n,使

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\varphi(a^{l+Nk_n})}\xi\left(\frac{a^{l+Nk_{n+1}+N}}{1-a^N}\right)=0$$

(因为 $\lim\limits_{t\downarrow 0}\xi(t)=0$, 故这是可能的). 那末,自某个 n 起

$$\left|\xi\left(\frac{a^{l+Nk_{n+1}+N}}{1-a^N}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\varphi(a^{l+Nk_n}). \tag{13}$$

我们考虑事件

$$\left\{\xi\left(\frac{a^{l+Nk_n+N}}{1-a^N}\right)-\xi\left(\frac{a^{l+Nk_{n+1}+N}}{1-a^N}\right)\geqslant-\frac{\varepsilon}{2}\varphi(a^{l+Nk_n})\right\}. \tag{14}$$

这些事件相互独立. 而由条件 b), 如果 N 满足 $\frac{a^N}{1-a^N}\leqslant 1$, 则

$$\mathbf{P}\left\{\xi\left(\frac{a^{l+Nk_n+N}}{1-a^N}\right)-\xi\left(\frac{a^{l+Nk_{n+1}+N}}{1-a^N}\right)\geqslant-\frac{\varepsilon}{2}\varphi(a^{l+Nk_n})\right\}$$

$$=\mathbf{P}\left\{\xi\left(a^{l+Nk_n}\frac{a^N}{1-a^N}[1-a^{N(k_n-k_{n+1})}]\right)\right.$$

$$\left.\geqslant-\frac{\varepsilon}{2}\varphi(a^{l+Nk_n})\right\}\geqslant\alpha_{\varepsilon/2}>0.$$

所以在 (14) 的事件中出现无穷多个. 但是对于使 (13) 和 (14) 的事件出现的 k_n 有

$$\xi\left(\frac{a^{l+Nk_n}}{1-a^N}\right)>-\varepsilon\varphi(a^{l+Nk_n}),$$

即出现 (12) 的对立事件. 因此就证明了, 存在使 (11) 成立的无穷序列 $\{k_n\}$. 由定理的条件 a) 知,存在 N, 使

$$(1-2\varepsilon)\varphi(a^{l+Nk_n})\geqslant(1-3\varepsilon)\varphi\left(\frac{a^{l+Nk_n}}{1-a^N}\right).$$

如果 N 已如上选定,则由 (11) 式得

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left[\varphi\left(\frac{a^{l+Nk_n}}{1-a^N}\right)\right]^{-1}\xi\left(\frac{a^{l+Nk_n}}{1-a^N}\right)\geqslant 1-3\varepsilon.$$

因为 $\varepsilon>0$ 是任意的，故由此得命题 2)。定理得证。

注 1. 对于对称过程，由于

$$\mathbf{P}\{\xi(t)<0\}\leqslant\frac{1}{2},$$

条件 b) 自然成立。

注 2. 显然，如果把命题 1) 和 2) 中的积分换成从 0 到 δ 的积分，则可以设 $\varphi(t)$ 为任意区间 $[0,\delta]$ 上的函数，并且在该区间上满足定理的条件。

定理 4 (局部重对数定律) 如果 $\xi(t)$ 是 Wiener 过程，$\mathbf{D}\xi(t)=bt$，则

$$\mathbf{P}\left\{\varlimsup_{t\downarrow 0}\frac{\xi(t)}{\sqrt{2bt\ln\ln\frac{1}{t}}}=1\right\}=1.$$

证. 只需考虑 $b=1$，$a=\mathbf{E}\xi(1)=0$ 的情形。那末，取

$$\varphi(t)=(1+\varepsilon)\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}},$$

有

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\xi(t)>\varphi(t)\}&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-x^2/2}dx\\&\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{t}}{\varphi(t)}e^{-\varphi^2(t)/2t}\\&=\frac{1}{\sqrt{4\pi(1+\varepsilon)\ln\ln\frac{1}{t}}}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-(1+\varepsilon)^2}.\end{aligned}$$

所以对充分小的 $\delta>0$

$$\int_0^\delta\frac{1}{t}\mathbf{P}\{\xi(t)>\varphi(t)\}dt<\infty.$$

其次，当 $t\to 0$ 时

$$\mathbf{P}\{\xi(t) < -\varepsilon\varphi(t)\} \leqslant \frac{t}{\varepsilon^2\varphi(t)} \to 0.$$

因此

$$\mathbf{P}\left\{\varlimsup_{t\downarrow 0} \frac{\xi(t)}{\sqrt{2(1+\varepsilon)^2 t\ln\ln\frac{1}{t}}} \leqslant 1\right\} = 1.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性得

$$\mathbf{P}\left\{\varlimsup_{t\downarrow 0} \frac{\xi(t)}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}} \leqslant 1\right\} = 1.$$

对 $\lambda < 1$，我们从下侧估计概率

$$\mathbf{P}\left\{\xi(t) > \lambda\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}\right\}.$$

有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\lambda\sqrt{2\ln\ln\frac{1}{t}}}^{\infty} e^{-x^2/2}dx \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\lambda\sqrt{2\ln\ln\frac{1}{t}}}^{\Delta+\lambda\sqrt{2\ln\ln\frac{1}{t}}} e^{-x^2/2}dx$$

$$\geqslant \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\Delta+\lambda\sqrt{2\ln\ln\frac{1}{t}}\right)^2\right\}$$

$$\geqslant \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\lambda^2(1+\Delta)^2\ln\ln\frac{1}{t}\right\},$$

这里只要求 $\lambda\sqrt{2\ln\ln\frac{1}{t}} \geqslant 1$．选择$\Delta$满足 $\lambda^2(1+\Delta)^2 = \gamma < 1$．那末

$$\mathbf{P}\left\{\xi(t) > \lambda\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}\right\} \geqslant \frac{C}{\left(\ln\frac{1}{t}\right)^\gamma},$$

从而

$$\int_0^\delta \frac{1}{t}\mathbf{P}\left\{\xi(t) > \lambda\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}\right\}dt = +\infty.$$

所以对一切 $\lambda < 1$

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{\xi(t)}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}}\geqslant\lambda\right\}=1.$$

由此得所要求证的．定理证完．

对于 $\alpha\in[1,2)$，我们研究只有负跳跃的稳定过程增长的特点．这类过程的累积量形为

$$K(z)=-c|z|^{\alpha}\left(1-i\frac{z}{|z|}\omega(z,\alpha)\right),\tag{15}$$

其中

$$\omega(z,\alpha)=\begin{cases}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}\alpha, & \text{若 } \alpha\neq 1,\\ \dfrac{2}{\pi}\ln|z|, & \text{若 } \alpha=1.\end{cases}$$

对 $1<\alpha<2$

$$K(z)=-\frac{c}{\cos\frac{\pi}{2}\alpha}|z|^{\alpha}\left(\cos\frac{\pi}{2}\alpha+i\frac{z}{|z|}\sin\frac{\pi}{2}\alpha\right)$$

$$=-\frac{c}{\cos\frac{\pi}{2}\alpha}(iz)^{\alpha}.$$

所以对于所考察的过程，若设 $c_1=\dfrac{c}{\left|\cos\frac{\pi}{2}\alpha\right|}$，则对 $\operatorname{Re}z\geqslant 0$ 有

$$\mathbf{E}e^{z\xi(t)}=\exp\{c_1z^{\alpha}\},$$

因为对 $\operatorname{Re}z\geqslant 0$ 右侧为解析函数(关于这一点见 §2(65) 式)．我们有

$$\mathbf{P}\{\xi(t)>\varphi\}\leqslant\frac{\mathbf{E}e^{z\xi(t)}}{e^{z\varphi}}=\exp\{-z\varphi+c_1tz^{\alpha}\}.$$

设 z_0 是 $-z\varphi+c_1tz^{\alpha}$ 的极大点．那末

$$z_0=\left(\frac{\varphi}{\alpha c_1t}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

$$-z_0\varphi + c_1 t z_0^\alpha = -\frac{\alpha-1}{\alpha} c_1 t\varphi \left(\frac{\varphi}{\alpha c_1 t}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = -w(t,\varphi).$$

所以

$$\mathbf{P}\{\xi(t) > \varphi\} \leqslant e^{-w(t,\varphi)}.$$

我们现在从下侧估计这个概率.

$$\mathbf{P}\{\xi(t) > \varphi\} = \int_\varphi^\infty \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-izx - iK(z)} dz dx. \tag{16}$$

由于对 $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ 函数 $K(z)$ 的解析性，在最后的积分中可以换元 $z = -iu_0 + z'$，其中 $u_0 > 0$，$\operatorname{Im} z' = 0$. 因为当 $|z'| \to \infty$ 时

$$\exp\{-u_0 x + iz'x + tK(-iu_0 + z')\} \to 0,$$

而在任意有穷区间关于 u_0 收敛是一致的，故 (16) 可化为

$$\mathbf{P}\{\xi(t) > \varphi\} = \frac{1}{2\pi} \int_\varphi^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-u_0 x + izx + tK(-iu_0 + z)} dx dz$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-(u_0 - iz)\varphi}}{u_0 - iz} e^{tK(-iu_0 + z)} dz.$$

若把 $u_0 = \left(\frac{\varphi}{\alpha c_1 t}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ 代入该式，并注意到 $K(-iu_0) = c_1 u_0^\alpha$，则得

$$\mathbf{P}\{\xi(t) > \varphi\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-w(t,\varphi)} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{u_0 - iz} \exp\{iz\varphi + t[K(-iu_0 + z) - K(-iu_0)]\} dz.$$

令 $z = u_0 v$. 因为 $u_0\varphi = \alpha c_1 t u_0^\alpha$，则

$$iz\varphi + t[K(-iu_0 + z) - K(-iu_0)]$$

$$= c_1 t u_0^\alpha [(1 - iv)^\alpha - 1 + \alpha iv].$$

若对较小的 v 利用关系

$$(1 - iv)^\alpha - 1 + \alpha iv = -\frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} v^2 (1 + o(v)),$$

并对某个 c_2 利用

$$\operatorname{Re}[(1 - iv)^\alpha - 1] < -L|v|^\alpha,$$

则可以得到：对 $u_0 \to \infty$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1-iv}\exp\{c_1tu_0^{\alpha}[(1-iv)^{\alpha}-1+iv]\}dv$$
$$\sim\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}c_1tu_0^{\alpha}v^2\right\}dv$$
$$=\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}w(t,\varphi)\right)^{-1/2}.$$

因此，存在 c_2，使当 $w(t,\varphi)$ 充分大时成立不等式

$$c_2[w(t,\varphi)]^{-\frac{1}{2}}e^{-w(t,\varphi)}\leqslant \mathbf{P}\{\xi(t)>\varphi\}.$$

现在设 $\alpha=1$. 那末

$$\mathbf{E}e^{z\xi(t)}=\exp\left\{\frac{2c}{\pi}z\ln z\right\}.$$

如果取使 $-z\varphi+\frac{2ct}{\pi}z\ln z$ 取极大值的 z，即

$$z_0=e^{\frac{\pi\varphi}{2ct}-1},$$

并且设

$$-z_0\varphi+\frac{2ct}{\pi}z_0\ln z_0=\frac{-2ct}{\pi}e^{\frac{\pi\varphi}{2ct}-1}=-w(t,\varphi),$$

则仿照 $1<\alpha<2$ 的情形可以证明，对充分大的 $w(t,\varphi)$ 不等式

$$c_2[\omega(t,\varphi)]^{-1/2}e^{-w(t,\varphi)}\leqslant \mathbf{P}\{\xi(t)>\varphi\}\leqslant e^{-w(t,\varphi)} \tag{17}$$

成立. 对任意 $\varepsilon>0$，由估计 (17) 容易得到

$$\int_0^{\delta}\frac{1}{t}\mathbf{P}\{\xi(t)>(1+\varepsilon)\varphi(t)\}dt<\infty,$$
$$\int_0^{\delta}\frac{1}{t}\mathbf{P}\{\xi(t)>(1-\varepsilon)\varphi(t)\}dt=\infty,$$

这里只假设 $\varphi(t)$ 满足方程

$$w(t,\varphi)=\ln\ln\frac{1}{t}. \tag{18}$$

注意，由引理 1

$$\mathbf{P}\{\xi(t)>0\}\geqslant\frac{1}{16}.$$

所以可以利用定理 3. 由 (18) 求出 $\varphi(t)$ 的值. 最终得下面的定

理.

定理 5 如果 $\xi(t)$是只有负跳跃的稳定过程,指数$\alpha\in[1,2)$,则

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{t\downarrow 0}\frac{\xi(t)}{\varphi(t)}=1\right\}=1,$$

其中

$$\varphi(t)=\begin{cases}\alpha(\alpha-1)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(c_1t)^{\frac{1}{\alpha}}\left[\ln\ln\frac{1}{t}\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}, & 若\ 1<\alpha<2,\\ \frac{2ct}{\pi}\ln\frac{1}{t}, & 若\ \alpha=1.\end{cases}$$

注意,对 $\alpha=1$ 函数

$$\varphi_1(t)=\frac{2c}{\pi}t\ln\frac{1}{t}+\frac{2c}{\pi}t\ln\ln\ln\frac{1}{t}+\left(\frac{2c}{\pi}\ln\frac{\pi}{2c}\right)t;$$

当 $t\downarrow 0$时,定理中所指出的函数等价于 $\varphi_1(t)$.

最后我们再证明一个定理,它属于 A. Я. Хинчин.

定理 6 如果 $\xi(t)$ 是不包含高斯分量的齐次独立增量过程,则

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{t\downarrow 0}\frac{|\xi(t)|}{\sqrt{t\ln\ln\frac{1}{t}}}=0\right\}=1.$$

证. 不失普遍性,可以假设 $\xi(t)$ 的方差有穷. 记

$$\varphi(t)=\sqrt{t\ln|\ln t|}.$$

因为

$$\mathbf{P}\{|\xi(t)|>\varepsilon\varphi(t)\}\leqslant\frac{\mathbf{D}\xi(t)}{\varepsilon^2\varphi^2(t)}\to 0,$$

故根据定理 3 只需证明,对 $c<1$ 和一切 $\varepsilon>0$

$$\int_0^c\frac{1}{t}\mathbf{P}\{|\xi(t)|>\varepsilon\varphi(t)\}dt<\infty$$

设 $\xi'(t)$ 是与 $\xi(t)$ 独立同分布的过程. 那末

$$\mathbf{P}\{|\xi(t)-\xi'(t)|>\varepsilon\varphi(t)\}$$

$$\geqslant \mathbf{P}\{|\xi(t)| > 2\varepsilon\varphi(t)\}\mathbf{P}\{|\xi'(t)| \leqslant \varepsilon\varphi(t)\}$$

$$\geqslant \mathbf{P}\{|\xi(t)|>2\varepsilon\varphi(t)\}\left(1-\frac{\mathbf{D}\xi(t)}{\varepsilon^2\varphi^2(t)}\right).$$

所以,可以假设 $\xi(t)$ 有对称分布. 设

$$\mathbf{E}e^{iz\xi(t)} = \exp\{tK(z)\},$$

其中

$$K(z) = \int_0^\infty (\cos zx - 1)\Pi(dx).$$

把$\xi(t)$表为独立随机变量的和: $\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t)$, 它们的特征函数为

$$\mathbf{E}e^{iz\xi_1(t)} = \exp\left\{t\int_0^\delta (\cos zx - 1)\Pi(dx)\right\},$$

$$\mathbf{E}e^{iz\xi_2(t)} = \exp\left\{t\int_\delta^\infty (\cos zx - 1)\Pi(dx)\right\},$$

其中 $\delta = \delta(t) = \dfrac{t}{\varphi(t)}$. 那末

$$\mathbf{P}\{|\xi(t)| > \varepsilon\varphi(t)\} \leqslant \mathbf{P}\left\{|\xi_1(t)| > \frac{\varepsilon}{2}\varphi(t)\right\}$$

$$+ \mathbf{P}\left\{|\xi_2(t)| > \frac{\varepsilon}{2}\varphi(t)\right\}.$$

以下证

$$\int_0^c \frac{1}{t}\mathbf{P}\left\{|\xi_k(t)| > \frac{\varepsilon}{2}\varphi(t)\right\}dt < \infty, \quad k = 1, 2.$$

若设 $z = \Gamma\dfrac{\varphi(t)}{t}$, 则对 $k = 1$ 有

$$\mathbf{P}\left\{|\xi_1(t)| > \frac{\varepsilon}{2}\varphi(t)\right\}$$

$$= 2\mathbf{P}\left\{\xi_1(t) > \frac{\varepsilon}{2}\varphi(t)\right\} \leqslant e^{-\frac{\varepsilon}{2}z\varphi(t)}\mathbf{E}e^{z\xi_1(t)}$$

$$= \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{2}z\varphi(t) + t\int_0^\delta (\operatorname{ch} zx - 1)\Pi(dx)\right\}$$

$$\leqslant \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{2}\Gamma\frac{\varphi^2(t)}{t}+t\int_0^\delta\left(\operatorname{ch}\Gamma\ \frac{\varphi(t)}{t}x-1\right)\Pi(dx)\right\}$$

$$\leqslant \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{2}\Gamma\frac{\varphi^2(t)}{t}+\Gamma^2\frac{\varphi^2(t)}{t}\int_0^\delta x^2\Pi(dx)\right\}.$$

若取 Γ 满足 $\frac{\varepsilon\Gamma}{2}=\alpha>1$，则得

$$\mathbf{P}\left\{|\xi_1(t)|>\frac{\varepsilon}{2}\varphi(t)\right\}=O\left(\left[\ln\frac{1}{t}\right]^{-\alpha}\right).$$

所以

$$\int_0^c\frac{1}{t}\mathbf{P}\left\{|\xi_1(t)|>\frac{\varepsilon}{2}\varphi(t)\right\}dt<\infty.$$

其次

$$\mathbf{P}\left\{|\xi_2(t)|>\frac{\varepsilon}{2}\varphi(t)\right\}$$

$$=2\mathbf{P}\left\{\xi_2(t)>\frac{\varepsilon}{2}\varphi(t)\right\}$$

$$\leqslant\frac{4}{\varepsilon\varphi(t)}\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}\varphi(t)}\mathbf{P}\{\xi_2(t)>x\}dx$$

$$=\frac{4}{\varepsilon\varphi(t)}\int\frac{1-\cos z\frac{\varepsilon}{2}\varphi(t)}{z^2}(1-\mathbf{E}e^{iz\xi_2(t)})dz$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon\varphi(t)}{4t}\int\frac{1-\cos z\frac{\varepsilon}{2}\varphi(t)}{z^2}\int_{x>\delta}(1-\cos zx)\Pi(dx)$$

$$=\frac{4t}{\varepsilon\varphi(t)}\int_0^\infty\Pi(dx)\int\frac{(1-\cos zx)\left(1-\cos z\frac{\varepsilon}{2}\varphi(t)\right)}{z^2}dz.$$

利用等式

$$\int\frac{(1-\cos az)(1-\cos bz)}{z^2}dz=\pi\min\{|a|,|b|\},$$

得

$$\mathbf{P}\left\{|\xi_2(t)| > \frac{\varepsilon}{2}\varphi(t)\right\}$$

$$\leqslant \frac{4t}{\varepsilon\varphi(t)}\int_\delta^\infty \Pi(dx)\min\left\{|x|,\ \frac{\varepsilon}{2}\varphi(t)\right\}$$

$$= \frac{4t}{\varepsilon\varphi(t)}\int_\delta^{\frac{\varepsilon}{2}\varphi(t)} x\Pi(dx) + 2t\int_{\frac{\varepsilon}{2}\varphi(t)}^\infty \Pi(dx).$$

最后我们看到

$$\int_0^c \frac{1}{\varphi(t)}\int_{\delta(t)}^1 x\Pi(dx)dt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^c\int_{\delta(t)}^1 x\Pi(dx)d\delta(t)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 du\int_u^1 x\Pi(dx) = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\Pi(dx),$$

$$\int_0^c\int_{\frac{\varepsilon}{2}\varphi(t)}^1 \Pi(dx)dt \leqslant \int_0^1\int_{\sqrt{t}}^1 \Pi(dx)dt$$

$$= \iint\limits_{0<t<x^2<1} dt\,\Pi(dx) = \int_0^1 x^2\Pi(dx).$$

定理得证.

过程在无穷的增长 局部增长定理和在无穷增长定理十分相近. 然而在这一小节我们把主要注意力放在局部增长所不具备的性质上.

我们先看单侧有界的条件.

定理 7 过程 $\xi(t)$ 以概率 1 有上界的必要和充分条件是，对某个 $c > 0$ 和一切 $x > 0$ 成立不等式

$$\int_c^\infty \frac{1}{t}\mathbf{P}\{\xi(t) > x\}dt < \infty. \tag{19}$$

证. 如果 $\xi^+(t) = \sup\limits_{s\leqslant t}\xi(s)$，则由 §2 定理 5

$$\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}e^{-z\xi^+(t)}dt$$

$$= \exp\left\{\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{t}\int_0^\infty (e^{-zx}-1)\mathbf{P}\{\xi(t)\in dx\}dt\right\}.$$

我们假设存在 $\sup\limits_t\xi(t) = \xi^+$. 那末

$$\xi^+ = \lim_{t\to\infty}\xi^+(t), \qquad \mathbf{E}e^{-z\xi^+} = \lim_{t\to\infty}\mathbf{E}e^{-z\xi^+(t)},$$

$$\mathbf{E}e^{-z\xi^+} = \lim_{\lambda\to 0}\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}e^{-z\xi^+(t)}dt$$
$$= \exp\left\{\int_0^\infty \frac{1}{t}\int_0^\infty (e^{-zx}-1)\mathbf{P}\{\xi(t)\in dx\}dt\right\}.$$

由对 $z>0$ 该式右侧不恒为 0，故 (19) 式成立。

现在假设(19)式成立．我们证明

$$\int_0^\infty \frac{1}{t}\int_0^\infty (e^{-zx}-1)\mathbf{P}\{\xi(t)\in dx\}dt$$

有穷．为此只需证明

$$\int_0^\infty \frac{1}{t}\int_0^1 x\mathbf{P}\{\xi(t)\in dx\}dt<\infty.$$

在 §2 中推导等式 (72) 时曾经证明

$$\int_0^1 x\mathbf{P}\{\xi(t)\in dx\}=O(\sqrt{t}).$$

所以

$$\int_0^\infty \frac{1}{t}\int_0^1 x\mathbf{P}\{\xi(t)\in dx\}dt<\infty.$$

下证，对有界集 E

$$\int_0^\infty \frac{1}{t}\mathbf{P}\{\xi(t)\in E\}dt<\infty.$$

为此只需验证，对所有 $b>0$

$$\int_1^\infty \frac{1}{t}\int_{-\infty}^\infty e^{-bx^2}\mathbf{P}\{\xi(t)\in dx\}dt=\int_1^\infty \frac{1}{t}\mathbf{E}e^{-\frac{b}{2}\xi^2(t)}dt<\infty.$$

而

$$\mathbf{E}e^{-\frac{b}{2}\xi^2(t)}=\mathbf{E}\int_{-\infty}^\infty e^{iz\xi(t)-\frac{z^2}{2b}}\frac{dz}{\sqrt{2\pi b}}=\int_{-\infty}^\infty e^{tK(z)-\frac{z^2}{2b}}\frac{dz}{\sqrt{2\pi b}}.$$

于是只需证明

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t}\int_{-\infty}^\infty e^{t\operatorname{Re}K(z)-\frac{z^2}{2b}}\frac{dz}{\sqrt{2\pi b}}<\infty.$$

由于对几乎所有 z $\operatorname{Re}K(z)<0$，经变更积分顺序得

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2b}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi b}} \int_1^{\infty} e^{t\mathrm{Re}K(z)} \frac{dt}{t}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2b}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\mathrm{Re}K(z)}^{\infty} e^{-u} \frac{du}{u}$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2b}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi b}} \int_{\varepsilon z^2}^{\infty} e^{-u} \frac{du}{u} < \infty,$$

因为对某个 $\varepsilon > 0$

$$-\mathrm{Re}K(z) = 2\int \sin^2 \frac{yz}{2} \Pi(dy) \geqslant \varepsilon z^2,$$

并且当 $z \to 0$ 时有

$$\int_{\varepsilon z^2}^{\infty} e^{-u} \frac{du}{u} \sim 2\ln \frac{1}{z}.$$

定理得证。

对于只有同号跳跃的过程，我们来研究随机变量 ξ^+ 有界的条件及其分布。设过程 $\xi(t)$ 的累积量为

$$K(z) = iaz - \frac{bz^2}{2} + \int_{-\infty}^{0} \left(e^{izx} - 1 - \frac{izx}{1+x^2} \right) \Pi(dx). \quad (20)$$

在 §2（见 (71) 及以后各式）曾证明，量 τ_y（过程首达水平 y 的时刻）以概率 1 有限的必要和充分条件是

$$a + \int_{-\infty}^{0} \frac{x^3}{1+x^2} \Pi(dx) \geqslant 0.$$

从而，在

$$a + \int_{-\infty}^{0} \frac{x^3}{1+x^2} \Pi(dx) < 0$$

的条件下，随机变量 ξ^+ 以大于 0 的概率有限。因为

$$\mathbf{P}\{\xi^+ = +\infty\} = \mathbf{P}\{\tau_y < \infty\}\mathbf{P}\{\xi^+ = +\infty\},$$

故由此得 $\mathbf{P}\{\xi^+ = +\infty\} = 0$.

由等式

$$\mathbf{P}\{\tau_{x+y} < \infty\} = \mathbf{P}\{\xi^+ \geqslant x + y\} = \mathbf{P}\{\tau_x < \infty\}\mathbf{P}\{\tau_y < \infty\}$$

得

$$\mathbf{P}\{\xi^+ \geqslant x\} = e^{-kx}.$$

为求 k 的值，我们利用 §2 的等式 (70) 和 (71). 显然

$$\mathbf{P}\{\xi^+ \geqslant x\} = \mathbf{P}\{\tau_x < +\infty\} = \lim_{\lambda \downarrow 0} \mathbf{E} e^{-\lambda \tau_x} = \lim_{\lambda \downarrow 0} e^{xB(\lambda)}.$$

设 B_0 是方程

$$K_-(B_0) = 0$$

的正根. 由 $K_-'(0) < 0, K_-(0) = 0$ 以及当 $u \to +\infty$ 时 $K_-(u) \to +\infty$ 可知，该正根存在. 因为 $K_-''(u) \geqslant 0$ $(u > 0)$, 所以这个根唯一，而且

$$K_-(u) \begin{cases} < 0, & 若\ u \in (0, B_0), \\ > 0, & 若\ u > B_0. \end{cases}$$

因为对 $\lambda > 0$, $-B(\lambda) > 0$, 所以当 $\lambda \downarrow 0$ 时 $-B(\lambda) \to B_0$. 因此 $k = B_0$, 即 k 是方程 $K_-(k) = 0$ 的正根.

我们现在来求随机变量 $\xi^- = \inf_{t > 0} \xi(t)$ 的分布(容许 ξ^- 取 $-\infty$ 为值). 因为

$$\mathbf{E} e^{iz\xi^-} = \lim_{t \to \infty} \mathbf{E} e^{iz\xi_t^-},$$

其中

$$\xi_t^- = \inf_{s \in [0, t]} \xi(t),$$

故由 §2 (69) 式可知

$$\mathbf{E} e^{iz\xi^-} = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\lambda}{\lambda - K(z)} \cdot \frac{B(\lambda) + iz}{B(\lambda)}.$$

如果当 $\lambda \downarrow 0$ 时 $B(\lambda) \to -k$, 则对所有 $z \neq 0$, $\mathbf{E} e^{iz\xi^-} = 0$, 但当以正概率 $\xi^- \neq -\infty$ 时这是不可能的. 我们假设对 $\lambda \downarrow 0, B(\lambda) \to 0$. 那末，考虑到

$$\lambda = K_-(-B(\lambda)), \qquad K(z) = K_-(iz),$$

并且把 iz 换成 $z (z > 0)$, 则得

$$\mathbf{E} e^{z\xi^-} = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{K_-(-B(\lambda))}{K_-(-B(\lambda)) - K_-(z)} \cdot \frac{B(\lambda) + iz}{B(\lambda)}.$$

由下面的定理 9 可知，当

$$a + \int_{-\infty}^{0} \frac{x^3}{1 + x^2} \Pi(dx) < 0$$

时，以概率 1 有 $\xi^- = -\infty$. 而若

$$K'(0) = a + \int_{-\infty}^{0} \frac{x^3}{1+x^2} \Pi(dx) \geqslant 0,$$

则

$$\mathbf{E} e^{z\xi^-} = \frac{zK'_-(0)}{K_-(z)}. \tag{21}$$

这样，我们证明了下面的定理.

定理 8 如果过程的累积量形如 (20)，而且

$$\gamma = a + \int_{-\infty}^{0} \frac{x^3}{1+x^2} \Pi(dx),$$

则对 $\gamma < 0$

$$\mathbf{P}\{\xi^+ = +\infty\} = 0, \qquad \mathbf{P}\{\xi^- = -\infty\} = 1,$$
$$\mathbf{P}\{\xi^+ < x\} = 1 - e^{-kx},$$

其中 k 是方程 $K_-(k) = 0$ 的正根；对 $\gamma > 0$

$$\mathbf{P}\{\xi^- = -\infty\} = 0, \qquad \mathbf{P}\{\xi^+ = +\infty\} = 1,$$

随机变量 ξ^- 的 Laplace 变换决定于 (21) 式；对 $\gamma = 0$

$$\mathbf{P}\{\xi^- = -\infty\} = \mathbf{P}\{\xi^+ = +\infty\} = 1.$$

现在证明齐次独立增量过程的强大数定律.

定理 9 如果对齐次独立增量过程 $\xi(t)$ 存在 $\mathbf{E}\xi(1)$ ($\mathbf{E}\xi(1)$ 亦可取 $+\infty$ 或 $-\infty$ 为值)，则

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\xi(t) = \mathbf{E}\xi(1)\right\} = 1.$$

证. 由随机变量的强大数定律(见第一卷第二章 §3 的命题 D) 可知，

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\xi(n) = \mathbf{E}\xi(1)\right\}$$

$$= \mathbf{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}[\xi(k+1) - \xi(k)] = \mathbf{E}\xi(1)\right\} = 1.$$

所以为证明定理只需证明

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \sup_{n\leqslant t\leqslant n+1} \frac{|\xi(t) - \xi(n)|}{n} = 0\right\} = 1.$$

该式成立，如果对任意 $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\sup_{n \leqslant t \leqslant n+1} |\xi(t) - \xi(n)| > \varepsilon n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\sup_{t \leqslant 1} |\xi(t)| > \varepsilon n\} < \infty.$$

如果 $c > 0$ 满足条件：对 $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\mathbf{P}\{|\xi(t)| > c\} \leqslant \frac{1}{2},$$

则由引理 2

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\xi(t)| > \varepsilon n\} \leqslant 2\mathbf{P}\{|\xi(1)| > \varepsilon n - c\}$$

(实际上我们用的是引理 2 的连续型，由 $\xi(t)$的可分性知这样做是可以的)．最后只需注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|\xi(1)| > \varepsilon n - c\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{|\xi(1)| + c}{\varepsilon} > n\right\} \leqslant \mathbf{E}\frac{|\xi(1)| + c}{\varepsilon}.$$

定理得证．

系 如果 $\mathbf{E}\xi(1)$ 存在，则当 $\mathbf{E}\xi(1) > 0$ 时

$$\mathbf{P}\{\sup_t \xi(t) = +\infty\} = 1,$$

而当 $\mathbf{E}\xi(1) < 0$ 时

$$\mathbf{P}\{\sup_t \xi(t) < +\infty\} = 1.$$

下面的定理表明，当 $\mathbf{E}\xi(t) = 0$ 时，过程是振动的，它可以取任意大的正值和负值．

定理 10 如果 $\xi(t)$ 是齐次独立增量过程，而且 $\mathbf{E}\xi(1) = 0$，则

$$\mathbf{P}\{\sup_t \xi(t) = +\infty\} = \mathbf{P}\{\inf_t \xi(t) = -\infty\} = 1.$$

证． 只需证明

$$\mathbf{P}\{\sup_t \xi(t) = +\infty\} = 1.$$

对于过程设有正(或负)跳跃时，这在定理 8 中已有证明. 对于一般情形，我们把过程表为两个独立随机过程之和

$$\xi(t)=\xi_1(t)+\xi_2(t),$$

其中 $\xi_1(t)$ 没有正跳跃，$\xi_2(t)$ 没有负跳跃，而 $\mathbf{E}\xi_1(t)=\mathbf{E}\xi_2(t)=0$. 如果以概率 1 有 $\xi_2(t)=0$，则由定理 8 可得该定理的结论. 而若 $\xi_2(t)$ 以概率 1 不等于 0，则

$$\mathbf{P}\{\sup_t \xi_2(t)=+\infty\}=1,$$

从而由定理 6

$$\int_1^\infty \frac{1}{t}\mathbf{P}\{\xi_2(t)>x\}dt=+\infty \qquad (x>0).$$

由引理 1

$$\mathbf{P}\{\xi(t)>x\}\geqslant \mathbf{P}\{\xi_1(t)\geqslant 0\}\mathbf{P}\{\xi_2(t)>x\}$$
$$\geqslant \frac{1}{16}\mathbf{P}\{\xi_2(t)>x\}.$$

因而

$$\int_1^\infty \frac{1}{t}\mathbf{P}\{\xi(t)>x\}dt=+\infty \qquad (x>0).$$

这样，由定理 7 即得该定理的结论.

§4. 有穷维齐次独立增量过程

在这一节我们研究取值于 $\mathscr{R}^m$ 的齐次独立增量过程. 这类过程 $\xi(t)$ 的特征函数形为

$$\mathbf{E}e^{i(z,\xi(t))}=\exp\{tK(z)\}$$
$$=\exp\left\{t\left[i(a,z)-\frac{1}{2}(Bz,z)+\int\left(e^{i(z,x)}-1-\frac{i(z,x)}{1+|x|^2}\right)\Pi(dx)\right]\right\}, \qquad (1)$$

其中 $z\in\mathscr{R}^m$，而 (z,y)表$\mathscr{R}^m$ 中的数积. 在(1)式中，$a\in\mathscr{R}^m$，B 是 $\mathscr{R}^m$ 中的非负对称线性算子，测度 Π 定义在 Borel 集上，而且

$$\int \frac{|x|^2}{1+|x|^2}\Pi(dx) < \infty.$$

象一维情形一样，我们称式 (1) 中的函数 $K(z)$ 为过程的**累积量**；它完全决定过程的边沿分布. 我们假设所考察的过程是可分的，因而无第二类间断点. 假设过程的样本函数是右连续的.

与齐次独立增量过程 $\xi(t)$ 可以唯一地相联系一个如下形状的齐次马尔科夫过程 $\{\mathscr{F},\mathscr{N},\mathbf{P}_x\}$: $\mathscr{F}$ 为形如 $x_t=\xi(s+t)-\xi(s)+x$ 的函数的集合，其中 $s\geqslant 0$, $x\in\mathscr{R}^m$, $\xi(\cdot)$ 是过程 $\xi(t)$ 所有可能的样本函数; $\mathscr{N}$ 是用通常方法定义的含有 $\mathscr{F}$ 中所有柱集的最小 σ 代数. 对任意柱集 $A\in\mathscr{N}$

$$\mathbf{P}_x(A)=\mathbf{P}\{x+\xi(\cdot)\in A\} \tag{2}$$

(右侧的概率与过程 $\xi(t)$ 定义在同一概率空间上). 至于说该过程是齐次马尔科夫的，由下式可见:

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{x+\xi(t+s)\in A\,|\,\xi(u),\ u\leqslant s\}\\ &=\mathbf{P}\{x+\xi(s)+\xi(t+s)-\xi(s)\in A\,|\,\xi(u),\ u\leqslant s\}\\ &=\mathbf{P}\{y+\xi(t+s)-\xi(s)\in A\}_{y=x+\xi(s)}\\ &=\mathbf{P}\{y+\xi(t)\in A\}_{y=x+\xi(s)}=\mathbf{P}_{x(s)}\{x(t)\in A\}\end{aligned}$$

(我们用到如下事实: 对 $u\leqslant s$, $\xi(t+s)-\xi(s)$ 与 $\xi(u)$ 独立，而 $\xi(t+s)-\xi(s)$ 和 $\xi(t)$ 同分布). 与该过程相伴随的半群 $\mathbf{T}_t$ 在有界 Borel 函数上定义如下

$$\mathbf{T}_t f(x)=\mathbf{E}_x f(x(t))=\mathbf{E}f(x+\xi(t)). \tag{3}$$

它有如下优点: 设 $\mathbf{S}_a$ 是 $\mathscr{B}$ 上的推移算子

$$\mathbf{S}_a f(x)=f(x+a),$$

其中 $\mathscr{B}$ 是定义在 $\mathscr{R}^m$ 上的有界 Borel 函数的集合，则

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_t\mathbf{S}_a f(x)&=\mathbf{E}f(x+a+\xi(t))\\ &=\mathbf{S}_a\mathbf{E}f(x+\xi(t))=\mathbf{S}_a\mathbf{T}_t f(x),\end{aligned}$$

也就是说 $\mathbf{T}_t$ 和任意推移算子 $\mathbf{S}_a$ 是可交换的. 结果表明，对每一具有该性质的马尔科夫过程，都有一齐次独立增量过程与之相对应，而且它们的分布以 (2) 式相联系. 如果在概率空间 $\{\mathscr{F},\mathscr{N},\mathbf{P}_0\}$ 上取一过程 $x(t)$，即可得上述过程. 至于它具有独立增量并

且是齐次的，由下列等式可见：

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}_0[f(x(t+s)-x(s))|\mathcal{N}_s]\\
&=\mathbf{E}_0[f(x(t+s)-a)|\mathcal{N}_s]_{a=x(s)}=\mathbf{E}_{x(s)}[f(x(t)-a)]_{a=x(s)}\\
&=\mathbf{E}_{x(s)}\mathbf{S}_{-a}f(x_t)|_{a=x(s)}=\mathbf{T}_t\mathbf{S}_{-a}f(x_s)|_{a=x(s)}\\
&=\mathbf{S}_{-a}\mathbf{T}_tf(x_s)|_{a=x(s)}.
\end{aligned}
$$

对一切 $a\in\mathscr{R}^m$，如果马尔科夫过程的伴随半群与算子 $\mathbf{S}_a$ 可交换，则称该马尔科夫过程为**空间齐次的**．这样，齐次独立增量过程在一定意义上等同于时间和空间齐次马尔科夫过程（它们的区别在于，前者为一个随机过程，而后者为过程族；不过这个过程族可以用上述方法由前一个过程构造出来）．

预解式，特征算子和生成算子　我们看与独立增量过程相联系的马尔科夫过程的预解式（以后我们就称它为原过程 $\xi(t)$ 的预解式）．由 (3) 式有

$$\mathbf{R}_\lambda f(x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}f(x+\xi(t))dt.$$

设 $F(t,A)=\mathbf{P}\{\xi(t)\in A\}$．那末

$$\mathbf{R}_\lambda f(x)=\int f(x+y)F_\lambda(dy),\tag{4}$$

其中

$$F_\lambda(A)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}F(t,A)dt.\tag{5}$$

最好是由变换函数 $F_\lambda(A)$ Fourier

$$\Phi_\lambda(z)=\int e^{i(z,y)}F_\lambda(dy).$$

给出$F_\lambda(A)$．由 (5) 式得

$$\Phi_\lambda(z)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{tK(z)}dt=\frac{\lambda}{\lambda-K(z)}.\tag{6}$$

象一维情形一样，对于 $\lambda>0$，$\Phi_\lambda(z)$ 是无穷可分分布的特征函数，因为

$$\Phi_\lambda(z)=\exp\left\{\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{e^{tK(z)}-1}{t}dt\right\},$$

$$\Phi_\lambda(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \exp\left\{\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t} \frac{e^{tK(z)}-1}{t} dt\right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \exp\left\{\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-\lambda t}e^{tK(z)}}{t} dt - \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{t} dt\right\}, \qquad (7)$$

由函数 $e^{tK(z)}$ 的正定性知函数 $\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{t} e^{-\lambda t}e^{tK(z)}dt$ 正定. 复合函数 $\exp\{\Phi(z)-\Phi(a)\}$，其中 $\Phi(z)$ 正定，是无穷可分的，而且无穷可分的函数的极限也是无穷可分的. 由 $\Phi_\lambda(z)$ 的无穷可分性知，存在 a_λ, B_λ 和 Π_λ，使

$$\Phi_\lambda(z) = \exp\{K_\lambda(z)\},$$

其中

$$K(z) = i(a_\lambda, z) - \frac{1}{2}(B_\lambda z, z)$$

$$+ \int\left(e^{i(z,x)} - 1 - \frac{i(z,x)}{1+|x|^2}\right)\Pi_\lambda(dx).$$

我们找出这些量. 我们有

$$\tilde{\Pi}_\lambda(A) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Pi_{\lambda,\varepsilon}(A) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{t} F_t(A)dt, \qquad (8)$$

因为

$$\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t} \frac{e^{tK(z)}-1}{t} dt = \int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{t} \int(e^{i(z,x)}-1)F_t(dx)dt$$

$$= \int(e^{i(z,x)}-1)\Pi_{\lambda,\varepsilon}(dx),$$

其中

$$\Pi_{\lambda,\varepsilon}(A) = \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{t} F_t(A)dt.$$

(这个积分关于到点 0 距离为正的一切 A 收敛，这由下面的不等式可见

$$\infty > \int_{S_\delta(0)} dz \int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t}\mathrm{Re}\frac{1-e^{tK(z)}}{t} dt$$

$$= \int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{t} \left\{\int_{S_\delta(0)} [1-\cos(z,x)]dz\right\} F_t(dx)$$

$$\geqslant \inf_{x \in A} \int_{S_\delta(0)} [1 - \cos(z, x)] dz \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{t} F_t(A) dt;$$

这里 $S_\delta(x)$ 是球心在点 x 半径为 δ 的球；这时

$$\varphi(x) = \int_{S_\delta(0)} [1 - \cos(z, x)] dz$$

是连续函数，除在 $x = 0$ 之外它处处为正的，而且 $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = 1$.）

对 $\tilde{\Pi}_\lambda(A)$ 也满足不等式

$$\tilde{\Pi}_\lambda(A) \leqslant \left[\inf_{x \in A} \int_{S_\delta(0)} (1 - \cos(z, x)) dz\right]^{-1} \int_{S_\delta(0)} - \mathrm{Re} K(z) dz.$$

现在注意到

$$\int_{|x|<1} |x| \tilde{\Pi}_\lambda(dx) < \infty. \tag{9}$$

事实上

$$\int_{|x|<1} |x| F_t(dx) = \mathbf{E} |\xi(t)| \chi_{\{|\xi(t)|<1\}}$$
$$= \mathbf{E} |\xi_1(t) + \xi_2(t)| \chi_{\{|\xi_1(t)+\xi_2(t)|<1\}},$$

其中 $\xi_2(t)$ 是过程的范数大于 2 的跃度之和，而 $\xi_1(t) = \xi(t) - \xi_2(t)$. 以 A_t 表事件“$\xi_2(t)$ 在 $[0, t]$ 上至少有一个跳跃”. 那末

$$\mathbf{E} |\xi_1(t) + \xi_2(t)| \chi_{\{|\xi_1(t)+\xi_2(t)|<1\}}$$
$$\leqslant \mathbf{E} |\xi_1(t)| + \mathbf{E} \chi_{A_t} \leqslant \sqrt{\mathbf{E} |\xi_1(t)|^2} + \mathbf{P}(A_t)$$
$$= \sqrt{t \mathbf{E} |\xi_1(t)|^2} + (1 - \exp\{-t\Pi[x: |x| \geqslant 2]\})$$

（具有有界跃度的过程 $\xi_1(t)$ 的各阶矩均存在）. 这样，对某个 $C > 0$

$$\int_{|x|<1} |x| F_t(dx) \leqslant C \sqrt{t},$$

$$\int_{|x|<1} |x| \tilde{\Pi}_\lambda(dx) \leqslant C \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\lambda t} dt < \infty.$$

利用当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时 $\Pi_{\lambda,\varepsilon}(A) \uparrow \tilde{\Pi}_\lambda(A)$ 以及 (9) 式，可见

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int (e^{i(z,x)} - 1) \Pi_{\lambda,\varepsilon}(dx) = \int (e^{i(z,x)} - 1) \tilde{\Pi}_\lambda(dx).$$

因此，$\Pi_\lambda = \tilde{\Pi}_\lambda$ 决定于 (8) 式，$B_\lambda = 0$，a_λ 决定于等式

$$(z, a_\lambda) = \int \frac{(z, x)}{1 + |x|^2} \Pi_\lambda(dx),$$

而预解式的累积量 $K_\lambda(z)$ 决定于

$$K_\lambda(z) = \int (e^{i(z,x)} - 1)\Pi_\lambda(dx).$$

如果 $\xi(t)$ 是阶梯过程,即 $a = 0$, $B = 0$, $\Pi(\mathscr{R}^m) < \infty$, 则

$$F_t(A) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t\Pi(\mathscr{R}^m)} \frac{[t\Pi(\mathscr{R}^m)]^k}{k!} \pi_k(A), \qquad (10)$$

其中

$$\pi_0(A) = \chi_A(0), \qquad \pi_1(A) = \frac{\Pi(A)}{\Pi(\mathscr{R}^m)};$$

$$\int \pi_k(dx) e^{i(z,x)} = \left[\int \pi_1(dx) e^{i(z,x)}\right]^k.$$

式 (10) 由特征函数的分解而来:

$$\mathbf{E} e^{itK(z)} = \exp\{t(e^{izx} - 1)\Pi(dx)\}$$

$$= \exp\{-t\Pi(\mathscr{R}^m) + t\Pi(\mathscr{R}^m)\int e^{i(z,x)}\pi_1(dx)\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t\Pi(\mathscr{R}^m)} \frac{[t\Pi(\mathscr{R}^m)]^k}{k!} \left[\int e^{i(z,x)}\pi_1(dx)\right]^k.$$

对 $0 \bar{\in} A$

$$F_t(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-t\Pi(\mathscr{R}^m)\} \frac{[t\Pi(\mathscr{R}^m)]^k}{k!} \pi_k(A).$$

因此

$$\Pi_\lambda(A) = \int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-t\Pi(\mathscr{R}^m)\} \frac{t^{k-1}[\Pi(\mathscr{R}^m)]^k}{k!} \pi_k(A) e^{-\lambda t} dt$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\Pi(\mathscr{R}^m)}{\lambda + \Pi(\mathscr{R}^m)}\right)^k \pi_k(A).$$

从而

$$\Pi_\lambda(A) = \int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-t\Pi(\mathscr{R}^m)\} \frac{t^{k-1}[\Pi(\mathscr{R}^m)]^k}{k!} \pi_k(A) e^{-\lambda t} dt$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\Pi(\mathscr{R}^m)}{\lambda + \Pi(\mathscr{R}^m)}\right)^k \pi_k(A).$$

最后的式子表明，这时预解式的累积量也是阶梯过程的累积量．和一维情形一样可以证明，对于非阶梯过程 $\Pi_1(A)$ 无界．

现在我们来求某一函数类上的半群 $\mathbf{T}_t$ 的生成算子，而且它有由这些函数的唯一开拓．

定理 1 设 $\mathscr{C}^2$ 是有界二次连续可微且一阶和二阶导数有界的函数的集合．那末所有 $f \in \mathscr{C}^2$ 都属于半群 $\mathbf{T}_t$ 的弱生成算子的定义域 $\mathscr{D}_\mathbf{A}$，而且

$$\mathbf{A}f(x) = (a, \nabla)f(x) + \frac{1}{2}(B\nabla, \nabla)f(x)$$

$$+ \int\left[f(x+y) - f(x) - \left(\frac{y}{1+|y|^2}, \nabla\right)f(x)\right]\Pi(dy), \quad (11)$$

其中 $\nabla = (\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n)$，而 $x_1, \cdots, x_n$ 是向量 x 的分量．

证．因为

$$\frac{\mathbf{T}_t\mathbf{S}_a f(x) - \mathbf{S}_a f(x)}{t} = \mathbf{S}_a\frac{\mathbf{T}_t f(x) - f(x)}{t},$$

故 $\mathbf{A}\mathbf{S}_a f(x) = \mathbf{S}_a\mathbf{A}f(x)$，从而 $\mathbf{A}f(x) = \mathbf{S}_x f(0)$．所以只需证明，对任意 $f \in \mathscr{C}^2$ 极限

$$\lim_{t \downarrow 0}\frac{1}{t}[\mathbf{E}f(\xi(t)) - f(0)]$$

等于 (11) 式右侧 $x = 0$ 时的式子．

设 f 是一连续有界函数，而且对 $|x| < r$ 有 $f(x) > 0$．那末

$$\frac{1}{t}\mathbf{E}f(\xi(t)) = \frac{1}{t}\mathbf{E}f(\xi_1(t) + \xi_2(t))$$

$$= \frac{1}{t}\mathbf{E}f(\xi_1(t))\chi_{A_t} + \frac{1}{t}\mathbf{E}f(\xi_1(t) + \xi_2(t))(1 - \chi_{A_t}),$$

其中过程 $\xi_2(t)$ 是过程 $\xi(t)$ 的范数大于 ρ 的跃度之和，而 $\rho < r$；$\xi_1(t) = \xi(t) - \xi_2(t)$，$A_t = \{\xi_2(s) = 0, s \leqslant t\}$．

对 $t \leqslant 1$ 和某个 $C > 0$，成立不等式

$$\frac{1}{t}\mathbf{E}f(\xi_1(t)) \leqslant \|f\|\frac{1}{t}\mathbf{P}\{|\xi_1(t)| > r\}$$

$$\leqslant \|f\| \frac{\mathbf{E}|\xi_1(t)|^4}{tr^2} \leqslant C\|f\| r^{-2}\left(\rho^2 + t + \frac{t^2}{\rho^2} + \frac{t^3}{\rho^4}\right),$$

因为可以选取一基底 $e_1, e_2, \cdots, e_m \in \mathscr{R}^m$，使

$$\mathbf{E}|\xi_1(t)|^4 = \mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^{m} (e_k, \xi_1(t))^2\right]^2$$

$$\leqslant m\mathbf{E} \sum_{k=1}^{m} (e_k, \xi_1(t))^4 = m \sum_{k=1}^{m} \frac{d^4}{d\lambda^4} \mathbf{E} e^{i\lambda(e_k, \xi_1(t))}\Big|_{\lambda=0}$$

$$= m \sum_{k=1}^{m} \frac{d^4}{d\lambda^4} \exp\Big\{t\Big[i\lambda(a, e_k) - \frac{\lambda^2}{2}(Be_k, e_k)$$

$$+ \int_{|x|\leqslant\rho} (e^{i(x,\lambda e_k)} - 1 - i(x, \lambda e_k))\Pi(dx)$$

$$+ i\int_{|x|<\rho} \frac{|x|^2}{1+|x|^2} (x, \lambda e_k)\Pi(dx)$$

$$- \int_{|x|<\rho} \frac{i(x, \lambda e_k)}{1+|x|^2} \Pi(dx)\Big]\Big\}\Big|_{\lambda=0}$$

$$\leqslant 8m \sum_{k=1}^{m} \Big[\frac{d^4}{d\lambda^4} \exp\Big\{i\lambda\gamma_\rho^k t - \frac{\lambda^2}{2} t(Be_k, e_k)\Big\}$$

$$+ \frac{d^4}{d\lambda^4} \exp\Big\{\int_{|x|\leqslant\rho} t(e^{i(x,\lambda e_k)} - 1$$

$$- i(x, \lambda e_k))\, \Pi(dx)\Big\}\Big]\Big|_{\lambda=0}$$

$$= 8m \sum_{k=1}^{m} [(\gamma_\rho^k t)^4 + 6(Be_k, e_k)(\gamma_\rho^k)^2 t^3 + 3t^2(Be_k, e_k)^2$$

$$+ t\int_{|x|\leqslant\rho} x^4 \Pi(dx) + 3t^2\left(\int_{|x|\leqslant\rho} x^2\Pi(dx)\right)^2\Big],$$

其中

$$\gamma_\rho^k = (a, e_k) + \int_{|x|<\rho} \frac{|x|^2}{1+|x|^2}(x, e_k)\Pi(dx)$$

$$- \int_{|x|>\rho} \frac{(x, e_k)}{1+|x|^2} \Pi(dx), \quad |\gamma_\rho^k| \leqslant C_1 + C_2/\rho,$$

而

$$\int_{|x|<\rho} x^4 \Pi(dx) \leqslant \rho^2 \int x^2 \Pi(dx).$$

所以

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{1}{t} |\mathbf{E}f(\xi_1(t))| \leqslant C\|f\| \frac{\rho^2}{r^4}.$$

最后,因为 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 相互独立,所以有

$$\frac{1}{t}\mathbf{E}f(\xi_1(t)+\xi_2(t))(1-\chi_{A_t})$$

$$=\frac{1}{t}\mathbf{E}[\mathbf{E}f(\xi_2(t)+z)(1-\chi_{A_t})|_{z=\xi_1(t)}].$$

因为

$$\mathbf{P}\{\xi_2(t)\in B\}=\sum_{k=0}^{\infty} e^{-t\Pi_\rho}\frac{(t\Pi_\rho)^k}{k!}\pi_\rho^k(B),$$

其中

$$\Pi_\rho=\int_{|x|>\rho}\Pi(dx), \qquad \pi_\rho^0(B)=\chi_B(0),$$

$$\pi_\rho^1(B)=\frac{1}{\Pi_\rho}\int_{|x|>\rho}\chi_B(x)\Pi(dx),$$

$$\int e^{i(z,x)}\pi_\rho^k(dx)=\left[\int e^{i(z,x)}\pi_\rho^1(dx)\right]^k,$$

$$\mathbf{P}\{\xi_2(t)\in B,\ A_t\}=e^{-\Pi_\rho}\chi_B(0),$$

所以

$$\frac{1}{t}\mathbf{E}f(\xi_2(t)+z)(1-\chi_{A_t})$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\Pi_\rho}\frac{t^{k-1}\Pi_\rho^k}{k!}\int f(x+z)\pi_\rho^k(dx).$$

令 $t\downarrow 0$ 取极限,得

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\mathbf{E}f(\xi_2(t)+z)(1-\chi_{A_t})$$

$$=\Pi_\rho\int f(x+z)\pi_\rho^1(dx)=\int_{|x|>\rho} f(x+z)\Pi(dx),$$

其中收敛对 z 一致. 所以

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\mathbf{E}f(\xi_2(t)+\xi_1(t))(1-\chi_{A_t})$$

$$=\int_{|x|>\rho} f(x+\xi_1(0))\Pi(dx)=\int f(x)\Pi(dx).$$

因而

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\left|\frac{1}{t}\mathbf{E}f(\xi(t))-\int f(x)\Pi(dx)\right|\leqslant C\|f\|\ \frac{\rho^2}{r^4}.$$

该式的左侧与 ρ 无关;因而若令 $\rho\downarrow 0$, 则得

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\mathbf{E}f(\xi(t))=\int f(x)\Pi(dx). \tag{12}$$

现在设 $f(x)\in\mathscr{C}^2$, 而且对 $|x|<r$ 不等于 0,同时满足条件: $f(0)=0$, $\nabla f(0)=0$, $(\nabla\times\nabla)f(0)=0$, 其中 $\nabla\times\nabla$ 是元素为 $\partial^2/\partial x^i\partial x^k$ 的矩阵. 那末对某个 K 有

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}|\mathbf{E}f(\xi(t))|\leqslant K\|f\|_2 r^2,$$

其中

$$\|f\|_2=\max_{k,i}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^k\partial x^i}\right\|.$$

事实上,由以上可见

$$\begin{aligned}|\mathbf{E}f(\xi(t))|&\leqslant\mathbf{E}|f(\xi_1(t)+\xi_2(t))|\\&\leqslant\mathbf{E}|f(\xi_1(t))|\chi_{A_t}+\|f\|\mathbf{P}\{\chi_{A_t}=0\}\\&\leqslant\|f\|_2[\mathbf{E}|\xi_1(t)|^2+r^2(1-e^{-t\Pi_\rho})],\end{aligned}$$

因为 $\|f\|\leqslant r^2\|f\|_2$, $|f(x)|\leqslant\|f\|_2|x|^2$. 但是

$$\mathbf{E}|\xi_1(t)|^2=t\sum_{k=1}^m\left[(Be_k,e_k)+\int_{|x|\leqslant\rho}(x,e_k)^2\Pi(dx)\right].$$

因而,对任意 ρ

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{1}{t}|\mathbf{E}f(\xi(t))|$$

$$\leqslant\|f\|_2\left(\operatorname{tr}B+\int_{|x|\leqslant\rho}|x|^2\Pi(dx)+r^2\int_{|x|>\rho}\Pi(dx)\right).$$

设 $f(x)=b_1\cos(z_1,x)+b_2\sin(z_1,x)$. 那末 $f(0)=0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{T}_t f(x) = \mathbf{E} f(\xi(t)) \\
&= \mathbf{E} b_1 \frac{e^{i(z_1, \xi(t))} + e^{-i(z_1, \xi(t))}}{2} + \mathbf{E} b_2 \frac{e^{i(z_1, \xi(t))} - e^{-i(z_1, \xi(t))}}{2i} \\
&= \frac{b_1}{2} [e^{tK(z_1)} + e^{tK(-z_1)}] + \frac{b_2}{2i} [e^{tK(z_1)} - e^{tK(-z_1)}],
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbf{E} f(\xi(t)) - f(0)}{t} \\
&= \frac{b_1}{2} [K(z_1) + K(-z_1)] + \frac{b_2}{2i} [K(z_1) - K(-z_1)] \\
&= b_1 \left\{ \frac{1}{2} (B\nabla, \nabla) \cos(z_1, x) \right. \\
&\quad \left. + \int [\cos(z_1, (x+y)) - \cos(z_1, x)] \Pi(dy) \right\}_{x=0} \\
&\quad + b_2 \left\{ (a, \nabla) \sin(z_1, x) + \int \left[\sin(z_1, (x+y)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin(z_1, x) - \left(\frac{y}{1+y^2}, z_1 \right) \right] \Pi(dy) \right\}_{x=0}.
\end{aligned}$$

对于这个函数 (11) 式成立。

取任一函数 $f \in \mathscr{C}^2$，并把它表为三个函数的和：

$$f = f_1 + f_2 + f_3,$$

其中 $f_i \in \mathscr{C}^2$，$i = 1, 2, 3$；当 $|x| < r_1$ 时 $f_1 = 0$，而当 $|x| > r_2$ $(r_2 > r_1)$ 时 $f_1 = f - f_2$，而 f_2 是如下形的三角多项式

$$f_2(x) = \sum_{k=1}^{m} \{b_k[\cos(z_k, x) - 1] + c_k \sin(z_k, x)\} + f(0),$$

且当 $x = 0$ 时，$\nabla f = \nabla f_2$，$(\nabla \times \nabla) f = (\nabla \times \nabla) f_2$。 那末 f_3 满足条件：当 $|x| > r_2$ 时 $f_3(x) = 0$，而且

$$\nabla f_3(0) = 0, \qquad (\nabla \times \nabla) f_3(0) = 0.$$

所以

$$\lim_{t \downarrow 0} \left| \frac{\mathbf{T}_t f(0) - f(0)}{t} - \int f_1(x) \Pi(dx) - (a, \Pi) f_2(0) \right.$$

$$- \frac{1}{2}(B\nabla, \nabla)f_2(0)$$

$$+ \int\left[f_2(y) - f_2(0) - \left(\frac{y}{1+y^2}, \nabla\right) f_2(0)\right] \Pi(dy)\Big|$$

$$\leqslant \|f_3\|_2\left(\operatorname{tr} B + \int_{|x|\leqslant\rho} |x|^2\Pi(dx) + r_2^2\int_{|x|>\rho} \Pi(dx)\right).$$

因为

$$\int f_1(x)\Pi(dx) + (a, \nabla)f_2(0) - \frac{1}{2}(B\nabla, \nabla)f_2(0)$$

$$+ \int\left[f_2(y) - f(0) - \left(\frac{y}{1+y^2}, \nabla\right)f(0)\right] \Pi(dy)$$

$$= (a, \nabla)f(0) - \frac{1}{2}(B\nabla, \nabla)f(0)$$

$$+ \int\left[f(y) - f(0) - \left(\frac{y}{1+y^2}, \nabla f(0)\right)\right] \Pi(dy)$$

$$- \int f_3(y)\Pi(dy),$$

故(注意到$|f_3(x)| \leqslant \|f_3\|_2 \cdot |x|^2$)

$$\lim_{t\downarrow 0}\left|\frac{\mathbf{T}_t f(0) - f(0)}{t} - \mathbf{A}f(0)\right|$$

$$\leqslant \|f_3\|_2\left(\operatorname{tr} B + \int_{|x|\leqslant\rho} x^2\Pi(dx) + r_2^2\int_{|x|>\rho} \Pi(dx)\right)$$

$$+ \int|f_3(y)|\Pi(dy)$$

$$\leqslant \|f_3\|_2\left(\operatorname{tr} B + \int_{|x|\leqslant\rho} x^2\Pi(dx) + r_2^2\int_{|x|>\rho} \Pi(dx)\right.$$

$$\left. + \int_{|x|\leqslant r_2}|x|^2\Pi(dx)\right).$$

因为若r_2有界，则对固定的ρ上式括号中的式子有界，所以只剩下证明通过选择r_1和r_2可以使$\|f_3\|_2$任意地小。 设$g(\lambda)$是二次连续可微函数，且

$$g(\lambda) = \begin{cases}0, & \text{若 } \lambda < r_1, \\ 1, & \text{若 } \lambda > r_2.\end{cases}$$

那末，可以这样选择 g，使

$$g''(\lambda) \leqslant \frac{3}{(r_2 - r_1)^2}, \qquad g'(\lambda) \leqslant \frac{2}{r_2 - r_1}.$$

设 $f_3 = g(|x|)(f - f_2)$，则

$$\begin{aligned}\|f_3\|_2 \leqslant & \frac{3}{(r_2 - r_1)^2} \sup_{|x| \leqslant r_2} |f(x) - f_2(x)| \\ & + \frac{2}{r_2 - r_1} \sup_{|x| < r_2} |\nabla(f(x) - f_2(x))| \\ & + \sup_{|x| \leqslant r} \sup_{i,k} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^i \partial x^k} \right|.\end{aligned}$$

由此可见，如果 $r_1 = r_2/2$，并利用不等式

$$|f(x) - f_2(x)| \leqslant \sup_{|x| < r_2} |\nabla(f(x) - f_2(x))| r_2,$$

$$|\nabla(f(x) - f_2(x))| \leqslant \sup_{|x| \leqslant r_2} \sum_{i,k} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^i \partial x^k} \right|,$$

则对某个 C 有

$$\|f_3\|_2 \leqslant C \sup_{|x| \leqslant r} \sup_{i,k} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^i \partial x^k} \right|.$$

因为 f 和 f_2 的导数连续而且在 $x = 0$ 二者相等，故当 $r_2 \downarrow 0$ 时上式右侧趋向 0，定理得证.

过程在一区域内的逗留时间，以及流出时的值 设 G 是 $\mathscr{R}^m$ 中的一区域，$\tau(x)$ 是过程 $\xi(t) + x (x \in G)$ 首次流出 G 的时间，$\xi(\tau(x)) + x$ 是过程在流出时的位置. 在这一小节中我们研究量 $\tau(x)$ 和 $\xi(\tau(x)) + x$ 的联合分布.

首先考虑过程 $\xi(t)$，其累积量为

$$K(z) = \int (e^{i(z,y)} - 1) \Pi(dy),$$

其中测度 Π 有限. 那末 $\xi(t)$ 是阶梯过程. 如果 ζ 是过程第一次跳跃的时刻，则 ζ 服从指数分布，参数为 $\Pi(\mathscr{R}^m)$，而 $\xi(\zeta)$ 和 ζ 独立，且

$$\mathbf{P}\{\xi(\zeta) \in B\} = \frac{1}{\Pi(\mathscr{R}^m)} \Pi(B).$$

所以对 $\varepsilon > 0$ 和集 $C \subset \mathscr{R}^m \backslash G$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\tau(x) < t, \xi(\tau(x)) + x \in C\} \\
&= \mathbf{P}\{\zeta < t, \xi(\zeta) + x \in C\} + \int_0^t \int_G \mathbf{P}\{\zeta \in ds, \xi(\zeta) \\
&\quad + x \in dy\} \times \mathbf{P}\{\tau(y) < t - s, y + \xi(\tau(y)) \in C\}. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

设 f 在 G 上等于 0，$\lambda > 0$. 令

$$
v_\lambda(G)f(x) = \mathbf{E}e^{-\lambda\tau(x)}f(x + \xi(\tau(x))).
$$

那末由 (13) 得

$$
\begin{aligned}
v_\lambda(G)\chi_C(x) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} d_t \mathbf{P}\{\tau(x) < t, \xi(\tau(x)) + x \in C\} \\
&= \int \chi_C(x + y) \frac{\Pi(dy)}{\Pi(\mathscr{R}^m)} \int_0^\infty e^{-\lambda t} d_t (1 - e^{-t\Pi(\mathscr{R}^m)}) \\
&\quad + \int_0^\infty e^{-\lambda s} \mathbf{P}\{\zeta \in ds\} \int_G \mathbf{P}\{\xi(\zeta) + x \in dy\} \\
&\quad \times \int_0^\infty e^{-\lambda t} d_t \mathbf{P}\{\tau_y < t, \xi(\tau(y)) + y \in C\} \\
&= \frac{1}{\lambda + \Pi(\mathscr{R}^m)} \int \chi_C(x + y)\Pi(dy) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda + \Pi(\mathscr{R}^m)} \int \chi_G(x + z) v_\lambda(G) \chi_C(x \\
&\quad + z)\Pi(dz).
\end{aligned}
$$

由此可见，对任意在 G 上等于 0 的有界 Borel 函数 f

$$
\begin{aligned}
[\lambda + \Pi(\mathscr{R}^m)] v_\lambda(G) f(x) &= \int f(x + y)\Pi(dy) \\
&\quad + \int \chi_G(x + z) v_\lambda(G) f(x + z) \Pi(dz). \qquad (14)
\end{aligned}
$$

因为对 $x \in G$ 有 $\chi_G(x) = 1$，故 (14) 式可化为

$$
\begin{aligned}
\lambda v_\lambda(G) f(x) &= \int f(x + y)\Pi(dy) \\
&\quad + \int [\chi_G(x + z) v_\lambda(G) f(x + z) \\
&\quad - \chi_G(x) v_\lambda(G) f(x)] \Pi(dz). \qquad (15)
\end{aligned}
$$

设

$$\chi_G(x)v_\lambda(G)f(x) = \int e^{i(z,x)}\rho_\lambda(G,z)dz \tag{16}$$

(若G是有界集，则该等式是可能的：因为该式的左侧是平方可积函数，它是平方可积函数的 Fourier 变换，而且对于有界的 G，$\rho_\lambda(G,z)$ 是 z 的解析整函数)．如把该表示代入 (15) 式并且变更积分顺序，则得

$$\int f(x+y)\Pi(dy) = \int e^{i(z,x)}\rho_\lambda(G,z)[\lambda - K(z)]dz \quad (x \in G),$$

其中 $K(z)$ 是过程的累积量． 记 $\mathbf{A}$ 为过程的生成算子． 由于对 $x \in G$ 有 $f(x) = 0$，以及

$$\mathbf{A}f(x) = \int [f(x+y) - f(x)]\Pi(dy)$$

(因为所考察的过程是阶梯的，所以一切有界 Borel 函数属于 $\mathbf{A}$ 的定义域 $\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$；由定理 1 容易看出$\mathbf{A}$的形式)，我们得方程

$$\chi_G(x)\mathbf{A}f(x) = \chi_G(x)\int e^{i(z,x)}\rho_\lambda(G,z)[\lambda - K(z)]dz. \tag{17}$$

(14) 式是普通的第二类 Fredholm 方程，它是用逐次逼近法来求解的． 尽管方程 (17) 不同于 (14)，它已是第一类 Fredholm 方程，而且解此方程更加困难，但是它不仅对阶梯过程有意义，而且对一般过程也有意义．

我们指出一类区域和过程，对于它们可以求出方程 (17) 的解．设G具有下列性质：如果 $x \in G$，则对一切 $y \in K$ 有 $x + y \in G$，其中K是一个以 0 为顶点的锥体．设 $m(dy)$ 是一集中在锥体K上的测度．那末对 $x \in G$

$$\int \chi_G(x+y)e^{i(z,x+y)}m(dy)$$
$$= \int e^{i(z,x+y)}m(dy) = e^{i(z,x)}\int e^{i(z,y)}m(dy).$$

在 (17) 中用 $x+y$ 替换 x，$x \in G$，并且对测度m求积分．得

$$\int \chi_G(x+y)\mathbf{A}f(x+y)m(dy)$$

$$= \int e^{i(z,x)} \rho_\lambda(G, z)[\lambda - K(z)] \left[\int e^{i(z,y)} m(dy)\right] dz. \qquad (18)$$

这样，通过上述运算，方程 (17) 代为同样形式，但是核改变了．为了说明这种类型的核容许求出解，我们回到方程 (14)．假设测度 Π 集中在这样的锥体 K_1 上，使对 $x \bar{\in} G$ 有 $\chi_G(x+y) = 0 (\bmod \Pi)$．那末，由 (14) 得方程

$$\begin{aligned} &\chi_G(x)[\lambda + \Pi(\mathscr{R}^m)] v_\lambda(G) f(x) \\ &= \chi_G(x) \int f(x+y) \Pi(dy) \\ &\quad + \int \chi_G(x+y) v_\lambda(G) f(x+y) \Pi(dy), \end{aligned}$$

设方程已经是对一切 x 成立．两侧同乘以 $e^{-i(z,x)}$ 并对 x 积分，得

$$\begin{aligned} &[\lambda + \Pi(\mathscr{R}^m)] \int \chi_G(x) v_\lambda(G) f(x) e^{-i(z,x)} dx \\ &= \int e^{-i(z,x)} \chi_G(x) \int f(x+y) \Pi(dy) dx \\ &\quad + \int \chi_G(x) v_\lambda(G) f(x) e^{-i(z,x)} \int e^{i(z,y)} \Pi(dy) dx. \qquad (19) \end{aligned}$$

因为由 (16) 有

$$\int \chi_G(x) v_\lambda(G) f(x) e^{-i(z,x)} dx = (2\pi)^m \rho_\lambda(G, z),$$

故由 (19) 式得 $\rho_\lambda(G, z)$ 的表达式：

$$\rho_\lambda(G, z) = \frac{\int e^{-i(z,x)} \chi_G(x) \int f(x+y) \Pi(dy) dx}{(2\pi)^m [\lambda - K(z)]}. \qquad (20)$$

这样，如果对域 G 和测度 Π 有：当 $x \bar{\in} G$ 时 $\chi_G(x+y) = 0$ $(\bmod \Pi(dy))$，则方程 (17) 有解，并且表为

$$\rho_\lambda(G, z) = \frac{\int e^{-i(z,x)} \chi_G(x) \mathbf{A} f(x) dx}{(2\pi)^m [\lambda - K(z)]}. \qquad (21)$$

式 (21) 容许极限过渡到测度无界的情形．

我们现在假设，在 (18) 式中可以这样选择测度 $m(dy)$，使

$$[\lambda - K(z)] \int e^{i(z,y)} m(dy) = \lambda - K_1(z),$$

其中 $K_1(z)$ 形为

$$K_1(z)=\int[e^{i(z,y)}-1]\Pi_1(dy),$$

而测度 Π 集中在锥体 K_1 上．那末

$$\rho_\lambda(G,z)=\frac{\int e^{-i(z,x)}\chi_G(x)\int\chi_G(x+y)\mathbf{A}f(x+y)m(dy)}{(2\pi)^m[\lambda-K_1(z)]}. \quad (22)$$

为说明何时存在锥体 K 和 K_1，测度 $m(dy)$ 和累积量 $K_1(z)$，我们指出，永远成立等式

$$\int e^{i(z,y)}m(dy)\cdot\frac{\lambda}{\lambda-K_1(z)}=\frac{\lambda}{\lambda-K(z)}.$$

因为

$$\frac{\lambda}{\lambda-K(z)}=\exp\left\{\int(e^{i(z,y)}-1)\Pi_\lambda(dy)\right\},$$

$$\frac{\lambda}{\lambda-K(z)}=\exp\left\{\int(e^{i(z,y)}-1)\Pi_\lambda^{(1)}(dy)\right\},$$

故

$$\int e^{i(z,y)}m(dy)$$

$$=\exp\left\{\int(e^{i(z,y)}-1)[\Pi_\lambda(dy)-\Pi_\lambda^{(1)}(dy)]\right\}.$$

这样，需要使 $\Pi_\lambda=\Pi_\lambda^{(1)}+\Pi_\lambda^{(2)}$，其中 $\Pi_\lambda^{(1)}$ 集中在锥体 K_1 上，而 $\Pi_\lambda^{(2)}$ 集中在锥体 K_2 上．特别，如果 K_1 和 K_2 是互不相交的两个半空间，则这样的分解总是可能的．这时 G 也应为半空间．

当 $t\to\infty$ 时过程的行为 在研究多维齐次独立增量过程轨道的行为时，本质上用到下面的事实：对一切 $z\in\mathscr{R}^m$，过程 $(z,\xi(t))$ 是一维齐次独立增量过程．记 $\xi_z(t)=(z,\xi(t))$．过程 $\xi_z(t)$ 的累积量 $K^{(z)}(s)$ 和过程 $\xi(t)$ 的累积量以下式相联系：

$$K^{(z)}(s)=K(sz),\quad s\in\mathscr{R}^1.$$

过程 $\xi_z(t)$ 在它的累积量

$$K^{(z)}(s)=i\gamma_z s-b_z\frac{s^2}{2}+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{isu}-1-\frac{isu}{1+u^2}\right)\Pi_z(du)\quad (23)$$

中的基本特征和过程 $\xi(t)$ 的基本特征 a, B 和 Π（见 (1) 式）以下面的等式相联系：

$$\gamma_z = (a, z), \quad b_z = (Bz, z),$$
$$\Pi_z((\alpha, \beta)) = \Pi(\{x: \alpha < (x, z) < \beta\}). \tag{24}$$

有趣的是，过程 $\xi_z(t)$ 的移动系数、扩散系数和谱函数可以分别通过过程 $\xi(t)$ 的移动系数、扩散系数和谱函数来表示。

利用一维过程的已有结果和关系式

$$|\xi(t)| = \sqrt{\sum_1^m |\xi_{e_k}(t)|^2}$$

（其中 $e_1, \cdots, e_m$ 是 $\mathscr{R}^m$ 中的基底），可以得到关于当 $t \to \infty$ 时过程行为的各种定理.

定理 2 过程 $\xi(t)$ 以概率 1 位于某半空间，其中该半空间边界的外法线与 z 共线，当且仅当对一切 $\alpha > 0$

$$\int_1^\infty \frac{1}{t} \mathbf{P}\{(\xi(t), z) > \alpha\} dt < \infty. \tag{25}$$

这一结果由§3定理可得，因为(25)式与关于 $\xi_z(t)$ 的下述条件等价：

$$\int_1^\infty \frac{1}{t} \mathbf{P}\{\xi_z(t) > \alpha\} dt < \infty \qquad (\alpha > 0),$$

而后者又是 $\xi_z(t)$ 有上界的必要和充分条件. 如果 $\xi_z(t) \leqslant \eta$，则对一切 t 有 $(\xi(t), z) \leqslant \eta$，而 $\xi(t)$ 以概率 1 位于半空间 $(x, z) \leqslant \eta$.

系 设 K 是一顶点在原点的锥体，K_x 是经把原点变为点 x 的平移由 K 所得到的锥体. 存在一 $\zeta \in \mathscr{R}^m$（ζ 一般是随机的），使对所有 t，$\xi(t) \in K_\zeta$ 的必要和充分条件是：对于使 K_x 内含原点的一切 x 有

$$\int_1^\infty \frac{1}{t} \mathbf{P}\{\xi(t) \bar{\in} K_x\} dt < \infty. \tag{26}$$

如果条件 (26) 成立，则对所有与锥面相切的超平面垂直的 z 和一切 $\alpha > 0$，式 (25) 成立；（满足上述条件且 $|z| = 1$ 的向量 z 的集记作 N_k）. 所以对每个 $z \in N_k$，存在 η_z 使

$$\mathbf{P}\{(\xi(t), z) \leqslant \eta_z\} = 1.$$

设 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 是 N_k 中的一组向量：对任意 $z \in N_k$ 存在一组数 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$，使

$$z = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k z_k.$$

因为

$$\mathbf{P}\{(\xi(t), z_k) \leqslant \eta_k, k = 1, \cdots, m, t > 0\} = 1,$$

所以

$$\mathbf{P}\{(\xi(t), z) \leqslant \eta, z \in N_k, t \geqslant 0\} = 1,$$

其中

$$\eta = \sup_{z \in N_k} \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \eta_{z_k}.$$

只需注意到，如果 K_x 内含 0 点，则对一切 $z \in N_k$ 有 $(z, x) > 0$，因而 $\inf\{(z,x) | z \in N_k\} = \beta(x) > 0$. 所以对一切 $z \in N_k$，锥体 K_ζ 包含满足 $(y, z) \leqslant \eta$ 的 y 的集合，其中 $\zeta = \eta_x/\beta(x)$. 于是锥体 K_ζ 的存在性得证.

现在假设 K_ζ 存在. 那末由定理 2 知，对一切 $z \in N_k$ 和 $\alpha > 0$，(25) 式成立. 如果对于 x 有 $0 \in K_x$，则也有 $0 \in K_{\frac{x}{2}}$. 显然存在有穷个向量 $z_1, \cdots, z_l \in N_k$，使

$$\bigcap_{k=1}^{l} \left\{ y : (z_k, y) \leqslant \frac{1}{2}(z_k, x) \right\} \subset K_x.$$

因此

$$\mathbf{P}\{\xi(t) \bar{\in} K_x\} \leqslant \sum_{k=1}^{l} \mathbf{P}\left\{ (\xi(t), z_k) > \frac{1}{2}(z_k, x) \right\};$$

因为 $(z_k, x) > 0$，故由条件 (25) 得 (26)，其中 (25) 对 $z = z_k$ 和 $\alpha = \frac{1}{2}(z_k, x) > 0$ 成立.

现在我们看 $\mathscr{R}^m$ 中的非退化过程，即不能局限于较低维子空间的过程. 容易看出，如果存在点 0 的一邻域，使得累积量 $K(z)$ 在该邻域中仅当 $z = 0$ 时才为 0，则过程就是非退化的.

在 $t\to\infty$ 的情形下研究过程的行为时，半群的预解式，从而过程的累积量起重要作用.

我们假设函数 $f(x)$ 可表为

$$f(x)=\int e^{i(z,x)}m(dz), \tag{27}$$

其中 m 是 $\mathscr{R}^m$ 上的某一有限测度. 那末

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_\lambda f(0)&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}f(\xi(t))dt\\&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}\int e^{i(z,\xi(t))}m(dz)dt\\&=\int\frac{1}{\lambda-K(z)}m(dz).\end{aligned}$$

如果 f 是实函数，则

$$\mathbf{R}_\lambda f(0)=\int\operatorname{Re}\frac{1}{\lambda-K(z)}m(dz).$$

由不等式 $\operatorname{Re}K(z)\leqslant 0$，有

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\mathbf{R}_\lambda f(0)=-\int\operatorname{Re}\frac{1}{K(z)}m(dz).$$

注意，如果 f 是非负的，则

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\mathbf{R}_\lambda f(0)=\int_0^\infty\mathbf{T}_t f(0)dt=\int_0^\infty\mathbf{E}f(\xi(t))dt.$$

于是，我们证明了一个命题，由它可得出关于过程回返的结论.

引理 1 如果过程 $\xi(t)$ 是非退化的，而非负函数 $f(x)$ 可表为(27)式，其中 $m(dz)$ 是有限测度，使过程累积量 $K(z)=0$ 的点 z 的集关于 $m(\cdot)$ 的测度为 0，则

$$\int_0^\infty\mathbf{E}f(\xi(t))dt=-\int\operatorname{Re}\frac{1}{K(z)}m(dz). \tag{28}$$

系 1 如果 $\operatorname{Re}\dfrac{1}{K(z)}$ 在点 0 的某邻域内对 Lebesgue 测度可积，则存在不到处为 0 的非负函数 $f(x)$，满足

$$\int_0^\infty\mathbf{E}f(\xi(t))dt<\infty. \tag{29}$$

事实上，作为函数 f 可取

$$f(x)=\int e^{i(z,x)}\rho(z-y)\rho(y)dzdy=\int e^{i(z,x)}\rho_2(z)dz,$$

其中 $\rho(x)$ 是非负有界函数，仅在点 $x=0$ 某一邻域内不为 0；函数

$$\rho_2(z)=\int\rho(z-y)\rho(y)dy$$

有界，并且仅在点 $z=0$ 的二倍邻域内不为 0；应该这样选择初始的邻域，以便积分

$$\int \mathrm{Re}\frac{1}{K(z)}\rho_2(z)dz.$$

存在．因为函数 f 可以表为

$$f(x)=\left|\int e^{i(z,x)}\rho(z)dz\right|^2,$$

故它是非负的；$f[0]=[\int\rho(z)dz]^2>0$，且 $f(x)$ 连续．

系 2 如果空间的维数 $m\geqslant 3$，则对非退化过程存在非负连续函数 $f(x)$ 满足（29）式，而且 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内不为 0．

因为当 $m\geqslant 3$ 时函数 $(z,z)^{-1}$ 在 0 的邻域内可积，故为证明该命题只需对充分小的 z 验证

$$-\mathrm{Re}\frac{1}{K(z)}\leqslant\frac{c}{(z,z)}.$$

设 $K(z)$ 决定于等式 (1)．对一切充分小的 z

$$\begin{aligned}-\mathrm{Re}K(z)&\geqslant\frac{1}{2}(Bz,z)+\int(1-\cos(z,x))\Pi(dx)\\&\geqslant\frac{1}{2}(Bz,z)+2\int_{|x|\leqslant R}\sin^2\frac{(z,x)}{2}\Pi(dx)\\&\geqslant\frac{1}{2}(Bz,z)+\frac{2}{\pi^2}\int_{|x|\leqslant R}(z,x)^2\Pi(dx).\end{aligned}$$

如果对某个 R 右侧的二次型不退化，则存在 $\varepsilon>0$，使

$$\frac{1}{2}(Bz,z)+\frac{2}{\pi^2}\int_{|x|\leqslant R}(z,x)^2\Pi(dx)\geqslant\varepsilon(z,z).$$

那末

$$-\mathrm{Re}K(z)\geqslant\varepsilon(z,z),$$

$$-\operatorname{Re}\frac{1}{K(z)} \leqslant -\frac{1}{\operatorname{Re}K(z)} \leqslant \frac{1}{\varepsilon(z,z)}.$$

假设对一切 R，二次型

$$\frac{1}{2}(Bz, z) + \frac{2}{\pi^2}\int_{|x|<R}(z, x)^2\Pi(dx)$$

非退化． 如果在 $\mathscr{R}^m$ 的子空间 $\mathfrak{L}_R$ 上该二次型不为 0，则由于对 $R_1 > R$ 有 $\mathfrak{L}_{R_1} \subset \mathfrak{L}_R$，故自某个 R 起所有 $\mathfrak{L}$ 重合． 设 R 是使 $\mathfrak{L}_R$ 的维数最小者．对一切 R_1，当 $z \in \mathfrak{L}_R$ 时，$(Bz, z) = 0$，而且

$$\int_{|x|<R_1}(z, x)^2\Pi(dx) = 0.$$

因此，对 $z \in \mathfrak{L}_R$

$$K(z) = i(a, z).$$

所以，如果 $\mathfrak{L}_R$ 不是一维空间，则存在 $z \in \mathfrak{L}_R$，使 $(a, z) = 0$． 那末，当 z 属于某一维子空间时，$K(z) = 0$，而这是不可能的．因此 $\mathfrak{L}_R$ 是和 a 不正交的一维子空间． 设 $z_0 \in \mathfrak{L}_R$，$z_1 \in \mathfrak{L}'$，其中 $\mathfrak{L}'$ 是 $\mathfrak{L}_R$ 的正交补．那末

$$K(z_0 + z_1) = i(a, z_0 + z_1) - \frac{1}{2}(Bz_1, z_1)$$

$$+ \int\left(e^{i(z_1,x)} - 1 - \frac{i(z_1, x)}{1 + |x|}\right)\Pi(dx) = i(a, z_0) + K(z_1).$$

所以，如果 $|\operatorname{Re}K(z_1)| < 1$，则

$$-\operatorname{Re}\frac{1}{i(a, z_0) + K(z_1)} = \frac{-\operatorname{Re}K(z_1)}{(a, z_0)^2 + |K(z_1)|^2}$$

$$\leqslant \frac{-\operatorname{Re}K(z_1)}{(a, z_0)^2 + [\operatorname{Re}K(z_1)]^2} \leqslant \frac{1}{(a, z_0)^2 - \operatorname{Re}K(z_1)}.$$

当 $z_1 \in \mathfrak{L}'$ 时存在 ε，使

$$-\operatorname{Re}K(z_1) > \varepsilon(z_1, z_1)^2.$$

记 e 为 $\mathfrak{L}_R$ 中的单位向量；那末

$$(a, z_0)^2 = (a, e)^2(z_0, z_0) = (a, e)^2(z, e)^2,$$

其中 $z = z_0 + z_1$． 但是

$$\varepsilon(z_1, z_1)^2 + (a, e)^2(z_0, z_0)$$

$$\geqslant \min[\varepsilon, (a, e)^2][(z_1, z_1) + (z_0, z_0)] = \delta(z, z).$$

于是，对于充分小的 z，不等式

$$-\operatorname{Re}\frac{1}{K(z)} \leqslant \frac{1}{\delta(z, z)}.$$

从而也就证明了系 2 的结论.

式 (28) 可用来研究过程的返回条件.

定理 3 如果对于过程 $\xi(t)$ 存在非负连续函数 $f(x)$，$f(0) \neq 0$，且

$$\int_0^\infty \mathbf{E}f(\xi(t))dt < \infty, \tag{30}$$

则

$$\mathbf{P}\{\lim_{t\to\infty}|\xi(t)| = \infty\} = 1,$$

即过程是不返回的.

证. 由 (30) 可知，以概率 1

$$\int_0^\infty f(\xi(t))dt < \infty. \tag{31}$$

所以存在点 0 的一邻域，使过程在其中渡过的总时间有限. 记 $S_\rho(x)$ 为以 x 为球心、以 ρ 为半径的球. 设 ρ 满足条件：对 $x \in S_{3\rho}(0)$，$f(x) \geqslant \delta > 0$. 我们引进随机时间：$\zeta_1$ 是过程首次流出邻域 $S_{2\rho}(0)$ 的时刻，τ_1 是在 ζ_1 之后过程首次落入邻域 $S_\rho(0)$ 的时刻；ζ_2 是在 τ_1 之后过程首次流出邻域 $S_{2\rho}(\xi(\tau_1))$ 的时刻，τ_2 是在 ζ_2 之后过程首次落入 $S_\rho(0)$ 的时刻；…，ζ_n 是在 τ_{n-1} 之后过程首次流出邻域 $S_{2\rho}(\xi(\tau_1))$ 的时刻，τ_n 是在 ζ_n 之后过程首次落入 $S_\rho(0)$ 的时刻. 所有这些量都是马尔科夫时间. 由过程的强马尔科夫性容易看出，随机变量

$$\zeta_1, \zeta_2 - \tau_1, \cdots, \zeta_n - \tau_{n-1}$$

同分布. 因为当 $\tau_{n-1} < s < \zeta_n$ 时，$\xi(s) \in S_{3\rho}(0)$，故

$$\int_0^\infty f(\xi(t))dt \geqslant \delta\sum(\zeta_n - \tau_{n-1}).$$

倘若 τ_n 对一切 n 定义，则由上述变量的同分布性知级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}(\zeta_n-\tau_{n-1})$$

必收敛．因此，对某个 n 有 $\tau_n=+\infty$．所以存在 T，使当 $t>T$ 时 $\xi(t)\bar{\in}S_\rho(0)$．

设 $G=\bigcup\limits_k S_{\rho/2}(x_k)$．记 η_k 为过程首次落入邻域 $S_{\rho/2}(x_k)$ 的时刻．由已证明的可知，存在 T_k（如果 η_k 有穷的话），使对 $s>T_k$ 有

$$\xi(s+\eta_k)-\xi(\eta_k)\bar{\in}S_\rho(0),$$

因此当 $t>T_k+\eta_k$ 时 $\xi(t)\bar{\in}S_{\rho/2}(x_k)$．所以可以断定，对于 $t>T$，其中 $T=\max\limits_k[T_k+\eta_k]$（这里对使 $\eta_k<\infty$ 的所有 k 求 max），有 $\xi(t)\bar{\in}\bigcup\limits_k S_{\rho/2}(x_k)$．

这样，对任意有界集 G 存在 T_G，使当 $t>T_G$ 时，$\xi(t)\bar{\in}G$．定理证完．

系 对 $\mathscr{R}^m(m\geqslant 3)$ 上的任意齐次非退化过程 $\xi(t)$，以概率 1

$$\lim_{t\to+\infty}|\xi(t)|=+\infty.$$

我们更仔细地考察当 $t\to\infty$ 时在 $\mathscr{R}^m(m\geqslant 3)$ 中 $\xi(t)$ 趋向 ∞ 的情形．我们假设 $\mathbf{E}|\xi(t)|<\infty$．如果 $\mathbf{E}\xi(t)=ta$，其中 $a\in\mathscr{R}^m$，$a\neq 0$，则容易看出，由齐次过程的强大数定律（见 §3 定理8）

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\xi(t)=a\right\}=1.$$

因而，对 $a\neq 0$，过程 $\xi(t)$ 在 a 的方向上趋向无穷．这对任意维数的空间都成立．当 $a=0$ 时，由定理 9 知，对一切 $z\in\mathscr{R}^m$

$$\mathbf{P}\{\overline{\lim_{t\to\infty}}(z,\xi(t))=+\infty\}=\mathbf{P}\{\underline{\lim_{t\to\infty}}(z,\xi(t))=-\infty\}=1.$$

利用过程的齐性，由此可见，集 $\left\{\dfrac{\xi(t)}{|\xi(t)|},t\geqslant 0\right\}$ 在空间 $\mathscr{R}^m$ 的单位球内处处稠密．

非负可加泛函 用本节开始所指出的方法，可以使 $\xi(t)$ 与一

齐次马尔科夫过程 $x_t=\xi(t)+x$ 相联系．我们研究该过程的可加泛函，即对 $t\geqslant 0$ 有定义并且满足下列条件的变量族 $\{\varphi_t\}$:

a）φ_t 为 $\mathscr{N}_t$ 可测，其中 $\mathscr{N}_t$ 是变量 x_s，$s\leqslant t$，产生的 σ 代数；

b）如果 θ_t 是与马尔科夫过程 x_t 相联系的推移算子，则对一切 $h>0$ 和任意 $x\in\mathscr{R}^m$ 以概率 $\mathbf{P}_x=1$ 有

$$\theta_h\varphi_t=\varphi_{t+h}-\varphi_t.$$

我们只考虑非负的连续泛函；这样的泛函具有下面的性质：φ_t 作为 t 的函数连续并且非减．在第二章 §6 中对于一般齐次马尔科夫过程，已详细研究过这类泛函．特别，在那里证明了下面的结果：

1）对任意连续非负泛函 φ_t，存一有界 Borel 函数 $f_n(x)$ 的序列，使对任意 $x\in\mathscr{R}^m$

$$\varphi_t=\mathbf{P}_x\text{-}\lim\int_0^t f_n(x_s)ds;$$

2）如果 $f(x)$ 是有界的非负 Borel 函数，而 φ_t 是连续的可加泛函，则

$$\psi_t=\int_0^t f(x_s)d\varphi_s$$

是齐次连续非负可加泛函，而且可以选择 $f(x)$，使

$$\sup_{x\in\mathscr{R}^m}\mathbf{E}_x\psi_t<\infty,$$

即使 ψ_t 为W泛函．

我们指出，1）中的函数 $f_n(x)$ 可以用过程的特征来表示．例如，对W泛函，函数 $f_n(x)$ 可以取为

$$\frac{1}{h_n}\mathbf{E}_x\psi_{h_n},$$

其中 $h_n\downarrow 0$.

我们先看由

$$\varphi_t=\int_0^t f(x_s)ds$$

(其中 f 是 $\mathscr{R}^m$ 上的连续有界函数)所定义的泛函.

我们证明一个定理，它提供求 φ_t 和 x_t 的联合分布的可能性.

设

$$v(\lambda, x, t) = \mathbf{E}_x e^{-\varphi_t}\Phi(x_t),$$

其中 $\lambda > 0$，Φ 是连续有界函数. 函数 $v(\lambda, x, t)$ 可以通过齐次过程 $\xi(t)$ 来表示:

$$v(\lambda, x, t) = \mathbf{E}\Phi(x + \xi_t)\exp\left\{-\lambda\int_0^t f(x + \xi(s))ds\right\}. \quad (32)$$

定理 4 由(32)式定义的函数 $v(\lambda, x, t)$ 满足积分方程

$$v(\lambda, x, t) = \int\Phi(y)dF_t(y - x)$$
$$- \lambda\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda, y, t - s)f(y)dF_s(y - x)ds, \quad (33)$$

其中 $F_t(x)$ 是 $\xi(t)$ 的分布函数.

证. 注意到

$$\frac{d}{du}\exp\left\{-\lambda\int_u^t f(x + \xi(s))ds\right\}$$
$$= \lambda\exp\left\{-\lambda\int_u^t f(x + \xi(s))ds\right\}f(x + \xi(u)).$$

所以

$$\exp\left\{-\lambda\int_0^t f(x + \xi(s))ds\right\}$$
$$= 1 - \lambda\int_0^t\exp\left\{-\lambda\int_u^t f(x + \xi(s))ds\right\}f(x + \xi(u))du.$$

将该式乘以 $\Phi(\xi(t) + x)$ 并取数学期望,得

$$v(\lambda, x, t) = \int\Phi(y)dF_t(y - x) - \lambda\mathbf{E}\int_0^t f(x + \xi(u))$$
$$\times\mathbf{E}\left[\Phi(x + \xi(t))\exp\left\{-\lambda\int_u^t f(x + \xi(s))ds\right\}\Big|\xi(u)\right]du.$$

注意到:

$$\mathbf{E}\Big(\Phi(x + \xi(u) + [\xi(t) - \xi(u)])$$

$$\times \exp\left\{-\lambda \int_0^{t-u} f(x + \xi(u) + [\xi(s+u) - \xi(u)])ds\right\}\Big|\xi(u)\Big)$$

$$= \left(\mathbf{E}\Phi(z + \xi(t-u))\exp\left\{-\lambda \int_0^{t-u} f(z + \xi(s))ds\right\}\right)_{z=x+\xi(u)},$$

$$= v(\lambda, x + \xi(u), t - u),$$

这是因为 $\xi(s+u) - \xi(u)$ 和 $\xi(u)$ 独立并且同分布．因此

$$v(\lambda, x, t) = \int \Phi(y)dF_t(y - x)$$

$$- \lambda\mathbf{E}\int_0^t f(x + \xi(t))v(\lambda, x + \xi(u), t - u)du,$$

由此得定理的结论．

注 1. 对于 $\mathrm{Re}\lambda > 0$，$v(\lambda, x, t)$ 是 λ 的解析函数．所以为求 $v(\lambda, x, t)$，只需对充分小的 $\lambda > 0$ 求出这个函数．对 $\lambda t\|f\| < 1$，方程 (33) 有唯一解，可以用逐步逼近法求此解．

注 2. 利用半群算子，可以把方程 (33) 化为

$$v(\lambda, x, t) = \mathbf{T}_t\Phi - \lambda\int_0^t \mathbf{T}_{t-s}[fv(\lambda, \cdot, s)]ds. \tag{34}$$

假设函数 Φ 和 $f \in \mathscr{C}^2$．由 (32) 可见 $v(\lambda, x, t)$ 也属于 $\mathscr{C}^2$．从而，$fv \in \mathscr{C}^2$．但这时 $fv \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}}$，其中 $\mathbf{A}$ 是半群的生成算子．所以存在

$$\frac{d}{dt}\mathbf{T}_{t-s}[fv(\lambda, \cdot, s)] = \mathbf{T}_{t-s}\mathbf{A}fv(\lambda, \cdot, s),$$

因而存在

$$\frac{\partial}{\partial t}v(\lambda, x, t) = \mathbf{T}_t\mathbf{A}\Phi - \lambda f(x)v(\lambda, x, t)$$

$$- \lambda\int_0^t \mathbf{T}_{t-s}\mathbf{A}[fv(\lambda, \cdot, s)]ds.$$

由 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{T}_t$ 的可交换性知

$$\mathbf{T}_t\mathbf{A}\Phi - \lambda\int_0^t \mathbf{T}_{t-s}\mathbf{A}[fv(\lambda, \cdot, s)]ds$$

$$= \mathbf{A}\left[\mathbf{T}_t\Phi - \lambda\int_0^t \mathbf{T}_{t-s}fv(\lambda, \cdot, s)ds\right] = \mathbf{A}v(\lambda, \cdot, s),$$

从而，$v(\lambda, x, t)$ 满足方程

$$\frac{\partial}{\partial t} v(\lambda, x, t) = \mathbf{A} v(\lambda, x, t) - \lambda f(x) v(\lambda, x, t) \tag{35}$$

和初始条件 $v(\lambda, x, +0) = \Phi(x)$. (回忆, $\mathbf{A}$ 是定理 1 中定义的算子.)

W 泛函 φ_t 完全决定于函数

$$G_\lambda(x) = \mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\varphi_t.$$

现在我们来说明,对某一独立增量过程类该函数具有何种形式. 我们假设过程 $\xi(t)$ 有 $\mathbf{E}|\xi(t)|^{m+1} < \infty$, 其中 m 是 $\mathscr{R}^m$ 的维数. 我们所要考虑的不是所有 W 泛函,而只是有有界承载子的泛函(后面将说明这一概念的含意). 如果 $f(x)$ 是非负有界连续函数, 则量 ϕ_t

$$\phi_t = \int_0^t f(x_s) d\varphi_s$$

是非负泛函(关于这一点已有说明). 设在某闭集 E 上 $f(x) = 1$, 那末对 $t < \tau$ 有 $\phi_t = \varphi_t$, 其中 τ 是过程 x_t 首次流出集 E 的时刻. 由此可见,如果适当地选择函数 f,则可以使泛函 ϕ_t 和 φ_t 以任意接近于 1 的概率在任意大的时间段上重合. 我们假设当 $|x| > c+1$ 时 $f = 0$, 而当 $|x| \leqslant c$ 时 $f = 1$. 这时, 在 x_t 属于集 $\{x: |x| \leqslant c+1\}$ 的情形下,泛函 ϕ_t 递增. 这个集就是该泛函在所述情形下的承载子;它是有界的.

设

$$G_\lambda(x) = \mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\phi_t.$$

我们证明 $G_\lambda(x)$ 在 $\mathscr{R}^m$ 中对 Lebesgue 测度可积(所有限制正是为此而加的).

我们有

$$G_\lambda(x) \leqslant [\mathbf{P}\{\sup_{s<t} |\xi(s)| > |x| - c\} + e^{-\lambda T}] \sup_y \mathbf{E}_y \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\phi_t.$$

注意到

$$\sup_x \mathbf{E}_x \phi_t \leqslant \sup_{|x| \leqslant c+1} \mathbf{E}_x \varphi_t \cdot \|f\|.$$

所以

$$\sup_x \mathbf{E}_x \phi_{kt} \leqslant \sup_x \mathbf{E}_x [\phi_{(k-1)t} + \theta_{(k-1)t}\phi_t] \leqslant k \sup_x \mathbf{E}_x \phi_t,$$

从而

$$\sup_x \mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\phi_t < \infty.$$

因为 $|\xi(t)|$ 是半鞅,故对一切N

$$\mathbf{P}\{\sup_{s \leqslant T} |\xi(s)| > |x|\} \leqslant \frac{\mathbf{E}|\xi(T)|^N}{|x|^N}.$$

此外,对充分大的 T, $\mathbf{E}|\xi(T)|^N = O(T^N)$. 故对大 $|x|$ 有

$$G_\lambda(x) = O\left(e^{-\lambda T} + \left(\frac{T}{|x|}\right)^{m+1}\right).$$

若取 $T = \alpha \ln |x|$, 则

$$G_\lambda(x) = O\left(\left(\frac{\ln |x|}{|x|}\right)^{m+1} + \frac{1}{|x|^{\alpha\lambda}}\right), \tag{36}$$

即 $G_\lambda(x)$ 关于 Lebesgue 测度可积。

函数

$$\widetilde{G}_\lambda(z) = \int e^{i(z,x)} G_\lambda(x) dx$$

关于 z 正定. 我们证明函数 $[\lambda - K(-z)]\widetilde{G}_\lambda(z)$ 对 z 也正定. 注意

$$\mathbf{E}_x G_\lambda(x_t) = \mathbf{E}_x \mathbf{E}_{x_t} \int_0^\infty e^{-\lambda s} d\phi_s$$

$$= e^{\lambda t} \mathbf{E}_x \mathbf{E}\left(\int_t^\infty e^{-\lambda s} d\phi_s \middle| \mathscr{N}_t\right) \leqslant e^{\lambda t} G_\lambda(x).$$

因此,函数 $e^{\lambda t} G_\lambda(x) - \mathbf{E} G_\lambda(x + \xi(t))$ 非负并为函数 $e^{\lambda t} G_\lambda(x)$ 控制. 所以函数

$$\int [e^{\lambda t} G_\lambda(x) - \mathbf{E} G_\lambda(x + \xi(t))] e^{i(z,x)} dx$$

以及(对 $\alpha > \lambda$)

$$\alpha^2 \int_0^\infty e^{-\alpha t} \int [e^{\lambda t} G_\lambda(x) - \mathbf{E} G_\lambda(x + \xi(t))] e^{i(z,x)} dx dt$$

$$= \left[\frac{\alpha^2}{\alpha - \lambda} - \frac{\alpha^2}{\alpha - K(-z)}\right] \tilde{G}_\lambda(z)$$

正定. 令 $\alpha \to \infty$ 取极限，可知函数 $[\lambda - K(-z)]\tilde{G}_\lambda(z)$ 正定.

我们证明它不依赖 λ.

为此我们证明

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{G}_\lambda(z) = -\frac{\tilde{G}_\lambda(z)}{\lambda - K(-z)}. \tag{37}$$

函数 $\dfrac{\tilde{G}_\lambda(z)}{\lambda - K(-z)}$ 是函数 $\int \tilde{G}_\lambda(x+y)F_\lambda(dy)$ 的 Fourier 变换(F_λ 决定于(5)式). 而

$$\int G_\lambda(x+y)F_\lambda(dy) = \mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} G_\lambda(x_t)\,dt$$

$$= \mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbf{E}_{x_t} \int_0^\infty e^{-\lambda s} d\phi_s\,dt$$

$$= \mathbf{E}_x \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-\lambda s} d\phi_s\,dt = \mathbf{E}_x \int_0^\infty s e^{-\lambda s} d\phi_s$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda s} d\phi_s = -\frac{\partial}{\partial \lambda} G_\lambda(x).$$

(因为 $\dfrac{\partial}{\partial \lambda} G_\lambda(x)$ 有类似(36)的估计，所以可以在积分号下求微商.)(37)式得证.

因而，存在测度 v_ϕ，使

$$[\lambda - K(-z)]\tilde{G}_\lambda(z) = \int e^{i(z,x)} v_\phi(dx).$$

这个测度满足条件：如果

$$m_\lambda(A) = \int v_\phi(A+x)F_\lambda(dx),$$

(其中 $A + x = \{y: y - x \in A\}$)，则 $m_\lambda(A)$ 关于 $\mathscr{R}^m$ 中的 Lebesgue 测度绝对连续. 事实上

$$\int e^{i(z,x)} m_\lambda(dx) = \frac{1}{\lambda - K(-z)} \int e^{i(z,x)} v_\phi(dx)$$

$$= \int e^{i(z,x)} G_\lambda(dx),$$

所以

$$m_\lambda(A)=\int_A G_\lambda(x)dx.$$

因而，函数 $G_\lambda(x)$ 决定于

$$G_\lambda(x)=\frac{d}{dx}m(\cdot)=\frac{d}{dx}\int v_\psi(\cdot+z)F_\lambda(dz), \qquad (38)$$

其中 $\frac{d}{dx}m(\cdot)$ 表示测度 m 关于 Lebesgue 测度在点 x 的密度.

为研究测度 v_ψ 与相应泛函的联系，必须同时考虑两个泛函.

设 φ_t 和 ψ_t 是具有如上所述形状的两个泛函. 那末

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi_t d\psi_t=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t d\varphi_s d\psi_t$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda s}d\varphi_s\int_s^\infty e^{-\lambda(t-s)}d\psi_t,$$

$$\mathbf{E}_x\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi_t d\psi_t=\mathbf{E}_x\int_0^\infty e^{-\lambda s}d\varphi_s\mathbf{E}_x\left(\int_s^\infty e^{-\lambda(t-s)}d\psi_t\middle|\mathcal{N}_s\right)$$

$$=\mathbf{E}_x\int_0^\infty e^{-\lambda s}d\varphi_s\mathbf{E}_{x_s}\int_0^\infty e^{-\lambda t}d\psi_t.$$

其次，我们看到，对于可测有界函数 $f(x)$ 成立等式

$$\mathbf{E}_x\int_0^\infty e^{-\lambda s}f(x_s)d\varphi_s=\frac{d}{dx}\int F_\lambda(y-\cdot)f(y)v_\varphi(dy), \qquad (39)$$

其中 $y-A=\{z:y-z\in A\}$. 由于测度 $\int F_\lambda(y-\cdot)f(y)v_\varphi(dy)$ 关于测度

$$\int F_\lambda(y-\cdot)v_\varphi(dy)=\int v_\varphi(\cdot+y)F_\lambda(dy)$$

绝对连续，可知它也关于 Lebesgue 测度绝对连续. 为证明 (39) 式，我们先考虑

$$\varphi_t=\int_0^t g(x_s)ds$$

的情形. 那末

$$\int e^{i(z,y)}v_\varphi(dy)$$

$$= [\lambda - K(-z)] \int \mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} g(x_t) dt e^{i(z,x)} dx$$

$$= \int g(x) e^{i(z,x)} dx,$$

因此，$\frac{dv_\varphi}{dx} = g(x)$，而(39)是以下各式的推论:

$$\mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda s} f(x_s) g(x_s) ds = \int F_\lambda(dy) f(y+x) g(y+x)$$

和

$$\int e^{i(z,x)} \int F_\lambda(dy) f(x+y) g(x+y) dx$$

$$= \frac{1}{\lambda - K(-z)} \int f(x) e^{i(z,x)} v_\varphi(dx),$$

$$\int e^{i(z,x)} \int F_\lambda(y - dx) f(y) v_\varphi(dy)$$

$$= \int e^{-i(z,y-x)} F_\lambda(y - dx) \int e^{i(z,y)} f(y) v_\varphi(dy)$$

$$= \frac{1}{\lambda - K(-z)} \int f(x) e^{i(z,x)} v_\varphi(dx).$$

在一般场合需要利用同类型泛函的极限过渡. 因而

$$\mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} \varphi_t d\psi_t$$

$$= \frac{d}{dx} \int R_\lambda(y - \cdot) \frac{d}{dy} [R_\lambda(z - \cdot) v_\psi(dz)] v_\varphi(dy).$$

如果 $v_\varphi = v_\psi$，则对几乎一切 x 有

$$\mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} d[\varphi_t - \psi_t]^2$$

$$= 2\mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} (\varphi_t - \psi_t)(d\varphi_t - d\psi_t) = 0,$$

因为

$$\mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} \varphi_t d\psi_t = \mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} \psi_t d\varphi_t$$

$$= \mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} \varphi_t d\varphi_t = \mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} \psi_t d\psi_t.$$

故对几乎一切 x 以概率 $\mathbf{P}_x = 1$ 对几乎所有 t 有 $\varphi_t = \psi_t$. 但由

φ_t 和 ϕ_t 的连续性，对几乎所有 x 有 $\mathbf{P}_x\{\varphi_t \equiv \phi_t\} = 1$.

在什么情形下测度 v_φ 唯一决定泛函 φ 呢？ 下面的定理回答了这个问题.

定理 5 测度 v_φ 在给定类中唯一决定泛函 φ_t 的必要和充分条件是，对任意关于 Lebesgue 测度几乎处处为 0 的有界非负 Borel 函数 $f(x)$，$x \in \mathscr{R}^m$ 和 $t > 0$，满足等式

$$\mathbf{P}_x\left\{\int_0^t f(x_s)ds = 0\right\} = 1.$$

证. 如果存在有界非负 Borel 函数，关于 Lebesgue 测度几乎处处为 0，并且对 $t > 0$ 和 $x \in \mathscr{R}^m$

$$\mathbf{P}_x\left\{\int_0^t f(x_s)ds = 0\right\} < 1,$$

则 $\varphi_t = \int_0^t f(x_s)ds$ 是非零泛函，对应于测度 $v_\varphi(A) = \int_A f(x)dx \equiv 0$. 由此证得定理条件的必要性.

如果定理的条件成立，则对 $v_\varphi = v_\phi$

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}_{x_t}\int_0^\infty e^{-\lambda s}[\varphi_s - \phi_s]^2 ds dt \\
&= \mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}_x\left(\int_0^\infty e^{-\lambda s}[\varphi(s+t) - \phi(s+t) - \varphi(t)\right. \\
&\qquad \left. + \phi(t)]^2 ds \,|\, \mathscr{N}_t\right) dt \\
&= \mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{[\varphi_t - \phi_t]^2}{\lambda} dt \\
&\qquad - 2\mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t}[\varphi_t - \phi_t]\int_0^\infty e^{-\lambda s}[\varphi_{s+t} - \phi_{s+t}]ds dt \\
&\qquad + \mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty [\varphi_{t+s} - \phi_{t+s}]^2 e^{-\lambda s} ds dt.
\end{aligned}$$

因为 $\mathbf{E}_x[\varphi(s+t) - \phi(s+t) \,|\, \mathscr{N}_t] = h(x_t)$，其中关于 Lebesgue 测度几乎处处 $h(x) = 0$，故

$$\mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t}[\varphi_t - \phi_t]\int_0^\infty e^{-\lambda s}[\varphi_{t+s} - \phi_{t+s}]ds dt = 0.$$

因此

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_x\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}[\varphi_t-\psi_t]^2dt=0,$$

因为

$$\mathbf{E}_x\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\int_0^{\infty}e^{-\lambda s}[\varphi_{t+s}-\psi_{t+s}]^2dsdt\geqslant 0.$$

定理得证.

系 测度 v_φ 唯一决定泛函 φ，当且仅当 F_λ 关于 Lebesgue 测度绝对连续.

多维 Wiener 过程 设 $\xi(t)$ 是取值于 $\mathscr{R}^m$ 的连续齐次独立增量过程. 这样过程的特征函数形为

$$\mathbf{E}e^{i(z,\xi(t))}=\exp\left\{t\left[i(a,z)-\frac{1}{2}(Bz,z)\right]\right\},\tag{40}$$

其中向量 $a\in\mathscr{R}^m$ 称做移动向量，而算子 B 称做扩散算子. 算子 B 是对称非负算子. 所以 $B=C^2$，其中 C 也是对称非负算子. 设 $w(t)$ 是 $\mathscr{R}^m$ 中的过程，其特征函数为

$$\mathbf{E}e^{i(z,\xi(t))}=\exp\left\{-\frac{1}{2}t(z,z)\right\},\tag{41}$$

即 $w(t)$ 是移动向量为 0 而扩散算子为 $\mathscr{R}^m$ 中单位算子 E 的过程. 容易看出，过程

$$\xi'(t)=ta+Cw(t)$$

的特征函数与过程 $\xi(t)$ 相同，均为 (40). 所以过程 $\xi(t)$ 和 $\xi'(t)$ 的性质相同，其相同泛函的分布相同. 由于过程 $\xi'(t)$ 通过过程 $w(t)$ 的表现十分简单，故为研究 $\xi'(t)$ 的许多性质，只需研究过程 $w(t)$ 的性质.

特征函数形如 (41)的过程称做 m 维 Wiener 过程.

如果 C 是非退化的算子，则 $w(t)$ 也可以由过程 $\xi'(t)$ 表示. 算子 C 是非退化的，当且仅当算子 B 是非退化的. 具有非退化算子 B 的过程称做非退化过程. 我们指出，只有这种情形才值得研究. 事实上，设算子 B 的值域是 $\mathscr{R}^m$ 的子空间 L，而 N 是 L 在 $\mathscr{R}^m$ 中的正交补. 我们把过程 $\xi(t)$ 表为和

$$\xi(t)=\xi_1(t)+\xi_2(t),$$

其中$\xi_1(t)\in L$，$\xi_2(t)\in N$，$a=a_1+a_2$，其中$a_1\in L$，$a_2\in N$。那末$\xi_2=ta_2$,对 $z\in L$

$$\mathbf{E}e^{i(z,\xi_1(t))}=\exp\left\{t\left[i(z,\ a_1)-\frac{1}{2}(Bz,z)\right]\right\}.$$

因为在L中算子B是非退化的，故过程$\xi_1(t)$在L中是非退化的。而过程$\xi_2(t)$是t的线性函数。所以研究$\xi(t)$归结为研究非退化过程$\xi'(t)$。

以(40)为特征函数的过程$\xi(t)$的生成算子形为

$$\mathbf{A}f=(a,\nabla)f-\frac{1}{2}(B\nabla,\nabla)f, \tag{42}$$

其中f是二次连续可微函数(见定理1)。而若$\xi(t)$是 Wiener 过程,则对二次连续可微函数f

$$\mathbf{A}f=-\frac{1}{2}\Delta f, \tag{43}$$

其中Δ是 Laplace 算子:

$$\Delta f=\sum_1^m\frac{\partial f}{\partial x^k},$$

而$x^1,\cdots,x^m$是x是某正交基中的坐标。

因为对所有$\varepsilon>0$

$$\mathbf{P}\{|\xi(t)|>\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathbf{E}|\xi(t)|^3}{\varepsilon^3}=o(t),$$

故容易看出,如果f在$\mathscr{R}^m$中有界,则在每一个这样的点x：在x的某一邻域内f是二次连续可微的,存在极限

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{\mathbf{T}_tf(x)-f(x)}{t}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{\mathbf{E}f(x+\xi(t))-f(x)}{t}$$
$$=(a,\nabla)f(x)+\frac{1}{2}(B\nabla,\nabla)f(x).$$

我们看 Wiener 过程$w(t)$的某些性质。

设S是球心在点0的球，τ是首次流出该球的时间.那末由过程的连续性知，$w(\tau)$落到球的边界上。设Γ是球的边界S'上的某一集合。如果U是空间$\mathscr{R}^m$的任一正交变换，则$Uw(t)$也是连

续的齐次独立增量过程，其特征函数为

$$\mathbf{E}e^{i(z,Uw(t))}=\mathbf{E}e^{i(U^{-1}z,w(t))}$$
$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}t(U^{-1}z,U^{-1}z)\right\}=\exp\left\{-\frac{1}{2}t(z,z)\right\}.$$

因此，$Uw(t)$ 也是 Wiener 过程，它的边沿分布和过程 $w(t)$ 的边沿分布相同。以 τ' 表过程 $Uw(t)$ 首次流出球 S 的时间。显然 $\tau'=\tau$。所以

$$\mathbf{P}\{w(\tau)\in\Gamma\}=\mathbf{P}\{Uw(\tau')\in\Gamma\}=\mathbf{P}\{Uw(\tau)\in\Gamma\}$$
$$=\mathbf{P}\{w(t)\in U^{-1}\Gamma\},$$

其中 $U^{-1}\Gamma$ 在变换 U 中是 Γ 的逆象。因而，S' 上的测度

$$m(\Gamma)=\mathbf{P}\{w(\tau)\in\Gamma\}$$

关于球的一切旋转不变，即该测度与球面上的 Lebesgue 测度成比例，比例系数由条件 $m(S')=1$ 确定。由 $\tau=\tau'$ 容易证明，$w(\tau)$ 不依赖于 τ。这一事实可用来求变量 τ 和 $w(\tau)$ 的联合分布，其中 τ 是首达具有充分光滑边界的集的时刻。

定理 6 设 V 是一闭集，其边界 V' 具有如下性质：对任一点 $x_0\in V'$ 存在开锥体 K_{x_0}（x_0 是它的顶点）和 $\varepsilon>0$，使 $S_\varepsilon(x_0)\cap K_{x_0}\subset V$；设 τ_x 是过程 $w(t)+x$ 首达集 V 的时刻。那末，对定义在 V' 上的任意连续有界函数 f 和 $\lambda>0$，当 $x\bar{\in}V$ 时函数

$$\Phi_\lambda(x)=\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_x}f(w(\tau_x)+x)$$

满足方程

$$\lambda\Phi_\lambda(x)-\frac{1}{2}\Delta\Phi_\lambda(x)=0,\tag{44}$$

其中 Δ 是 Laplace 算子，而且 $\lim\limits_{x\to x_0}\Phi_\lambda(x)=f(x_0)$，$x_0\in V'$，$x\bar{\in}V$。

证 设 $x\bar{\in}V$，$\varepsilon>0$，使 $S_\varepsilon(x)\cap V=\phi$。那末

$$\Phi_\lambda(x)=\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_\varepsilon}\Phi_\lambda(w(\tau_\varepsilon)+x),\tag{45}$$

其中 τ_ε 是首次流出球 $S_\varepsilon(x)$ 的时刻（为证明该式需利用

$$\theta_{\tau_\varepsilon}e^{-\lambda\tau}f(x(\tau))=e^{-\lambda(\tau-\tau_\varepsilon)}f(x(\tau)),$$

其中 $x(t)=w(t)+x$，θ 是马尔科夫过程 $x(t)$ 的推移算子）。

由 τ_ε 和 $w(\tau_\varepsilon)$ 的独立性知

$$\Phi_\lambda(x) = \mathbf{E}e^{-\lambda\tau_\varepsilon}\frac{1}{|S'_\varepsilon|}\int_{S'_\varepsilon(x)}\Phi_\lambda(x+y)d_y|S'|, \tag{46}$$

其中 $a_y|S'|$ 是曲面的 Lebesgue 面积元素，$|S'_\varepsilon|$ 是以 ε 为半径的球的表面积，而 $S'_\varepsilon(x)$ 是 $S_\varepsilon(x)$ 的边界.

我们求随机变量 τ_ε 的矩. 设 S 是球心在原点半径等于 r 的球，$\tau_r(x)$ 是过程 $w(t)+x$ 首次流出该球的时刻. 由于过程 $w(t)+x$ 无吸收点，故由第二章 §5 的结果（见 (4) 式及以后各式）可知，对充分小的 r，$\tau_r(x)$ 有一切阶矩. 设

$$G(x) = \mathbf{E}\tau_r(x).$$

仿照 (46) 可得

$$G(x) = \frac{1}{|S'_\varepsilon|}\int_{S'_\varepsilon(x)}G(x+y)d_y|S'| + \mathbf{E}\tau_\varepsilon. \tag{47}$$

因为过程 $\lambda w\left(\frac{t}{\lambda^2}\right)$ 的累积量和过程 $w(t)$ 的累积量相同，故过程 $\lambda w\left(\frac{t}{\lambda^2}\right)$ 首次流出球 S_ε 的时该 τ'_ε 等于 $\lambda^2\tau_\varepsilon/\lambda$，而且与 τ_ε 有相同的分布. 所以

$$\mathbf{E}\tau_\varepsilon = \lambda^2\mathbf{E}\tau_\varepsilon/\lambda,$$

从而 $\mathbf{E}\tau_\varepsilon = c\varepsilon^2$，其中 c 是某一常数. 函数 $c(x, x)$ 满足下列等式

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|S'_\varepsilon|}\int_{S'_\varepsilon(x)}c(x+y, x+y)d_y|S'| \\
&= \frac{1}{|S'_\varepsilon|}\int_{S'_\varepsilon(x)}[c(x, x)+2c(x, y)+c\varepsilon^2]d_y|S'| \\
&= c\varepsilon^2 + c(x, x),
\end{aligned}$$

因为

$$\int_{S'_\varepsilon(x)}(x, y)d_y|S'| = 0.$$

因此对满足 $S_\varepsilon(x)\subset S$ 的一切 ε 有

$$\frac{1}{|S'_\varepsilon|}\int_{S'_\varepsilon(x)}[G(x+y)+c(x+y, x+y)]d_y|S'|$$

$$= G(x) + c(x, x). \tag{48}$$

我们证明 $G(x)$ 是连续函数. 因为由过程的强马尔科夫性

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\tau_r(x_1) > \tau_r(x_2) + \delta\} \\
&\leqslant \mathbf{P}\left\{\sup_{0<t<\delta} [w(\tau_r(x_2) + t) - w(\tau_r(x_2))],\right. \\
&\qquad \left. w(\tau_r(x_2) + x_2) \leqslant \frac{|x_1 - x_2|}{r}\right\} \\
&= \mathbf{P}\left\{\sup_{0<t<\delta} (w(t), z) \leqslant \frac{|x_1 - x_2|}{r}\right\} \to 0,
\end{aligned}$$

$x_1 - x_2 \to 0$ (例如,由齐次过程的重对数定律), 故当 $x_1 - x_2 \to 0$ 时,依概率 $\tau_r(x_1) \to \tau_r(x_2)$. 由矩的一致有界性: $\tau_r(x) \leqslant \tau_{2r}(0)$, 可见 $\mathbf{E}_r(x)$ 的连续性.

于是,函数 $G(x) + c(x, x)$ 连续并满足 (48); 因而它是调和的. 但对 $x \in S'$, $G(x) + c(x, x) = cr^2$, 所以当 $x \in S$ 时它也是常数: $G(x) = c[r^2 - (x, x)]$.

为求 c 我们指出

$$\frac{\mathbf{E}_x G(x(\tau_\varepsilon) - G(x))}{\mathbf{E}_x \tau_\varepsilon} = \frac{\frac{1}{|S'_\varepsilon|}\int_{S'_\varepsilon(x)} G(x+y) d_y |S'| - G(x)}{\mathbf{E}_x \tau_\varepsilon}$$

$$= -1,$$

因而对 $x \in S$, $G(x)$ 属于特征算子的定义域,且 $\mathfrak{A}G(x) = -1$. 但是生成算子也定义在二次连续可微函数上,而且 $\mathfrak{A}G = \mathbf{A}G = \frac{1}{2} \times \Delta G$. 从而, $-\frac{1}{2} c\Delta(x, x) = -1$, 即 $c = \frac{1}{m}$.

设 $G_2(x) = \mathbf{E}[\tau_r(x)]^2$. 那末对 $S_\varepsilon(x) \subset S$

$$\begin{aligned}
G_2(x) = \mathbf{E}\tau_\varepsilon^2 + 2\mathbf{E}\tau_\varepsilon \cdot \frac{1}{|S'_\varepsilon|}\int_{S'_\varepsilon(x)} G(x+y) d_y |S'| \\
+ \frac{1}{|S'_\varepsilon|}\int_{S'_\varepsilon(x)} G_2(x+y) d_y |S'|.
\end{aligned}$$

因此

$$G_2(x) = \mathbf{E}\tau_\varepsilon'^2 - 2[\mathbf{E}\tau'_\varepsilon]^2 + 2\mathbf{E}\tau_\varepsilon G(x)$$
$$+ \frac{1}{|S'_\varepsilon|}\int_{S'_\varepsilon(x)} G_2(x+y)d_y|S'|.$$

再次利用等式 $\tau'_\varepsilon = \lambda^2\tau_{\varepsilon/\lambda}$，可得 $\mathbf{E}\tau_\varepsilon'^2 = c^2\varepsilon^4$. 所以

$$G_2(x) = \left(c_2 - \frac{2}{m^2}\right)\varepsilon^4 + 2\frac{\varepsilon^2}{m}(r^2 - (x, x))$$
$$+ \frac{1}{|S'_\varepsilon|}\int_{S'_\varepsilon(x)} G_2(x+y)d_y|S'|.$$

用求 $G(x)$ 的同样方法，由该等式容易求出 $G_2(x)$:

$$G_2(x) = \frac{m+4}{m(2m+2)}r^4 + \frac{r^2}{m}(x, x) - \frac{1}{2m+2}(x, x)^2.$$

特别

$$\mathbf{E}\tau_\varepsilon^2 = \frac{m+4}{m(2m+2)}\varepsilon^4.$$

因此

$$\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_\varepsilon} = 1 - \lambda\mathbf{E}\tau_\varepsilon + O((\mathbf{E}\tau_\varepsilon)^2).$$

如果 $\varphi(x)$ 是 S' 上的任意连续函数，则容易看出，函数

$$\mathbf{E}\varphi(w(\tau_r(x)) + x)$$

在 S 中是调和函数，而在边界 S' 上取 $\varphi(x)$ 为值. 所以

$$\mathbf{E}\varphi(w(\tau_r(x)) + x) = \int_{S'}\varphi(y)g_r(x, y)d_y|S'|, \tag{49}$$

其中

$$g_r(x, y) = c_m\frac{r^2 - |x|^2}{r|x-y|^m}.$$

由 (49) 可见，对任意 $\rho > 0$，如果 $|x| < r - \rho$，则存在 c_ρ，使

$$\mathbf{P}\{w(\tau_r(x)) + x \in \Gamma\} \leqslant c_\rho\mathbf{P}\{w(\tau_r(0)) \in \Gamma\}. \tag{50}$$

我们回到决定 $\Phi_\lambda(x)$ 的方程. 下证 $\Phi_\lambda(x)$ 连续. 为此只需验证，当 $x \to y$ 时依概率 $\tau_x \to \tau_y$. 但是

$$\mathbf{P}\{\tau_x > \tau_y + \delta\} \leqslant \mathbf{P}\{w(t + \tau_y) + x \bar{\in} \mathrm{K}_{w(\tau_y)+y}, t \leqslant \delta\},$$

其中 $\mathrm{K}_{w(\tau_y)+y}$ 是定理条件中所说的锥体. 而该式右侧的概率又等于

$$\mathbf{P}\{w(t)+x-y\bar{\in}K,\ t\leqslant\delta\},$$

其中K是以原点为顶点的一开锥体．设$z\in K$，$|z|=1$，是这样一个向量：对某个$\alpha<1$有

$$\{x:(x,z)>\alpha|x|\}\in K.$$

那末

$$\mathbf{P}\{w(t)+x-y\bar{\in}K,\ t\leqslant\delta\}$$
$$\leqslant\mathbf{P}\{(w(t),z)\leqslant\alpha|w(t)|+(z,y-x),\ t\leqslant\delta\}$$

而

$$\overline{\lim_{x\uparrow y}}\mathbf{P}\{(w(t),z)\leqslant\alpha|w(t)|+z(y-x),\ t\leqslant\delta\}$$
$$=\mathbf{P}\{(w(t),z)\leqslant\alpha|w(t)|,\ t\leqslant\delta\}.$$

记 $w_1(t)=(w(t),z)$，$w_2(t)=w(t)-zw_1(t)$． 因为当$(u,z)=0$时

$$\mathbf{E}e^{i\lambda w_1(t)+(u,w_2(t))}=\mathbf{E}e^{i(\lambda z+u,w(t))}$$
$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}t(\lambda z+u,\lambda z+u)\right\}$$
$$=\exp\left\{-\frac{\lambda^2 t}{2}-\frac{t}{2}(u,u)\right\}.$$

设η_ρ是首次出现$w_1(t)=\rho+\sqrt{\frac{1}{t}\ln\ln\frac{1}{t}}$的时刻． 由重对数定律知，当$\rho\to0$时$\eta_\rho\to0$． 变量$\eta_\rho$与$w_2(t)$独立．因为$w_2(t)/\sqrt{t}$的分布不依赖$t$，故$w_2(\eta_\rho)/\sqrt{\eta_\rho}$的分布不依赖$\eta_\rho$．所以

$$\mathbf{P}\{(w(t),z)\leqslant\alpha|w(t)|,\ t\leqslant\delta\}$$
$$\leqslant\mathbf{P}\left\{\rho+\sqrt{\eta_\rho\ln\ln\frac{1}{\eta_\rho}}\right.$$
$$\left.\leqslant\alpha\sqrt{\left(\rho+\sqrt{\eta_\rho\ln\ln\frac{1}{\eta_\rho}}\right)^2+|w_2(\eta_\rho)|^2}\right\}$$
$$=\mathbf{P}\left\{\rho+\sqrt{\eta_\rho\ln\ln\frac{1}{\eta_\rho}}\right.$$

$$\leqslant \alpha\left(\rho + \sqrt{\eta_\rho \ln\ln \frac{1}{\eta_\rho}}\right) \sqrt{1 + \left|\frac{w_2(\eta_\rho)}{\sqrt{\eta_\rho}}\right|^2 \frac{1}{\ln\ln \frac{1}{\eta_\rho}}}. \ \}$$

因为 $\alpha < 1$，而且当 $\rho \to 0$ 时 $\ln\ln \frac{1}{\eta_\rho} \to +\infty$，又 $\frac{[w_2(\eta_\rho)]^2}{\eta_\rho}$ 依概率有界，所以最后的概率趋向 0．因而，对一切 $\delta > 0$

$$\lim_{x\to y} \mathbf{P}\{\tau_x > \tau_y + \delta\} = 0.$$

设 D_ε 是这样一些点 x 的集合：$x \in V'$，存在向量 z_x，使 $\{y: (z_x, y - x) > (1-\varepsilon)|y - x|, |y - x| < \varepsilon\} \in V$. 那末，由定理的条件知 $\bigcup_{\varepsilon>0} D_\varepsilon = V'$. 集 D_ε 随 ε 递增. 我们证明，通过选择 $\varepsilon > 0$ 可以使

$$\overline{\lim_{x\to y}} \mathbf{P}\{w(\tau_x) + x \bar{\in} D_\varepsilon\} \tag{51}$$

任意地小. 设 $S_\rho(y) \cap V = \phi$，而 $\zeta(y)$ 是过程 $w(t) + x$ 首达 $S_\rho(y)$ 边界的时刻. 那末

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{w(\tau_x) + x \bar{\in} D_\varepsilon\} \\
&= \mathbf{E}[\mathbf{P}\{w(\tau_z) + z \bar{\in} D_\varepsilon\}_{z=w(\zeta(x))+x}] \\
&= \int \mathbf{P}\{w(\tau_z) + z \bar{\in} D_\varepsilon\} \mathbf{P}\{w(\zeta(x)) + x \in dz\}.
\end{aligned}$$

因为当 $|x - y|$ 充分小时由 (50) 有

$$\mathbf{P}\{w(\zeta(x)) + x \in dz\} \leqslant L_1 \mathbf{P}\{w(\zeta(y)) + y \in dz\},$$

故

$$\mathbf{P}\{w(\tau_x) + x \bar{\in} D_\varepsilon\} \leqslant L_1 \mathbf{P}\{w(\tau_y) + y \bar{\in} D_\varepsilon\};$$

而由于当 $\varepsilon \to 0$ 时右侧的概率趋向 0，从而证明了，对充分小的 $\varepsilon > 0$，(51) 式可以任意地小.

等式

$$\lim_{x\to y} \mathbf{P}\{\tau_y > \tau_x + \delta, w(\tau_x) + x \in D_\varepsilon\} = 0$$

的证明与等式

$$\lim_{x\to 0} \mathbf{P}\{\tau_x > \tau_y + \delta\} = 0$$

的证明完全相同. 由不等式

$$\mathbf{P}\{\tau_y > \tau_x + \delta\}$$
$$\leqslant \mathbf{P}\{\tau_y > \tau_x + \delta, w(\tau_x) + x \in D_\varepsilon\} + \mathbf{P}\{w(\tau_x) + x \bar{\in} D_\varepsilon\}$$

得

$$\lim_{x \to y} \mathbf{P}\{\tau_y > \tau_x + \delta\} = 0.$$

因此，当 $x \to y$ 时依概率 $\tau_x \to \tau_y$. 由此可见，$\Phi_\lambda(x)$ 连续，且当 $x \to x_0$ 时 ($x \bar{\in} V$, $x_0 \in V'$)，$\Phi_\lambda(x) \to f(x_0)$ (当 $y \in V'$ 时 $\tau_y = 0$).

利用等式

$$\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_\varepsilon} = 1 - \lambda \mathbf{E}\tau_\varepsilon + O((\mathbf{E}\tau_\varepsilon)^2),$$

由 (46) 可见，

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\frac{1}{|S'_\varepsilon|} \int_{S'_\varepsilon(x)} \Phi_\lambda(x+y) d_y |S'| - \Phi_\lambda(x)}{\mathbf{E}\tau_\varepsilon} = \lambda \Phi_\lambda(x).$$

设 $S_r(x_0) \cap V = \phi$，而函数 $U(x)$ 在 $S_r(x_0)$ 中满足方程

$$\frac{1}{2} \Delta U(x) = \lambda U(x), \tag{52}$$

其边界条件为：当 $x \to x_1$ 时，$U(x) \to \Phi_\lambda(x_1)$，$x_1 \in S'_r(x_0)$. 因为 $\Phi_\lambda(x)$ 在 $S'_r(x_0)$ 上连续，所以这样的函数存在. 设 $F(x) = \Phi_\lambda(x) - U(x)$. $F(x)$ 在 $S_r(x_0)$ 内连续，而在 $S'_r(x_0)$ 上等于 0. 设 $x_1 \in S_r(x_0)$ 是 $F(x)$ 的极大点. 那末

$$\lambda F(x_1) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\mathbf{E}\tau_\varepsilon} \left[\frac{1}{|S'_\varepsilon|} \int_{S'_\varepsilon(x_1)} F(x_1 + y) d_y |S'| - F(x_1) \right] \leqslant 0,$$

我们用到 $U(x)$ 二次连续可微性，由此

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\mathbf{E}\tau_\varepsilon} \left[\frac{1}{|S'_\varepsilon|} \int_{S'_\varepsilon(x)} U(x+y) d_y |S'| - U(x) \right]$$
$$= \mathbf{A}U(x) = \frac{1}{2} \Delta U(x).$$

同样可以证明 $F(x) \geqslant 0$. 从而在球 $S_r(x_0)$ 之内 $\Phi_\lambda(x)$ 与 $U(x)$ 重合. 所以，在球 $S_r(x_0)$ 之内函数 $\Phi_\lambda(x)$ 满足方程 (44). 定理证完.

系 如果集 V 的边界 V' 满足定理的条件，则函数

$$\Phi_r(x) = \mathbf{P}\{\tau(x) < \infty\}$$

满足方程

$$\Delta\Phi(x) = 0, \quad x\bar{\in}V,$$

和边界条件

$$\lim_{x\to x_0}\Phi(x) = 1, \quad x_0 \in V'.$$

为得到这个结果,只需在定理 6 中设 $\lambda = 0$, $f(x) = 1$.特别,如果 V 是以坐标原点为心以 r 为半径的球,则

$$\Phi(x) = \left(\frac{r}{|x|}\right)^{m-2} \qquad (m > 2)$$

$$\Phi(x) = 1 \qquad (m \leqslant 2).$$

事实上,当 $m \leqslant 2$ 时, $\Phi \equiv 1$ 是唯一一个调和函数,满足条件: 当 $|x| = r$ 时 $\Phi(x) = 1$. 设 $m \geqslant 3$. 那末,当 $t\to\infty$ 时 $w(t)\to\infty$. 所以 $\Phi(x) < 1$, 否则过程就会是回返的. 因为过程 $w(t)$ 的分布和过程 $\lambda w(\lambda^{-2}t)$ 的分布相同,故

$$\Phi_{\lambda r}(\lambda x) = \Phi_r(x).$$

由于对任何正交变换 U, 过程 $w(t)$ 和 $Uw(t)$ 的分布相同,可见 $\Phi_r(x) = \varphi_r(|x|)$. 因而

$$\Phi_r(x) = g\left(\frac{r}{|x|}\right).$$

如果 $|x| > |y| > r$, 则

$$\Phi_r(x) = \Phi_{|y|}(x) \cdot \Phi_r(y).$$

故

$$g\left(\frac{r}{|x|}\right) = g\left(\frac{r}{|y|}\right) \cdot g\left(\frac{|y|}{|x|}\right).$$

所以 $g(s) = s^\alpha$, 而 α 的值由条件

$$\Delta\left(\frac{r}{|x|}\right)^\alpha = 0$$

来求,即 $\alpha = m - 2$.

现在研究当 $t \downarrow 0$ 时过程 $w(t)$ 的行为.由 § 1 的不等式 (18) 有

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|w(s)|>c\}\geqslant 2\mathbf{P}\{|w(t)|>c\}.$$

因为

$$\mathbf{P}\{|w(t)|>c\}$$
$$=K_m\int_{c/\sqrt{t}}^{\infty}r^{m-1}e^{-r^2/2}dr,$$

其中

$$K_m^{-1}=\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)2^{\frac{m-2}{2}},$$

故对任意 $\varepsilon>0$ 和 $\delta<1$

$$\int_0^\delta \frac{1}{t}\mathbf{P}\left\{|w(t)|>(1+\varepsilon)\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}\right\}dt<\infty,$$

$$\int_0^\delta \frac{1}{t}\mathbf{P}\left\{|w(t)|>(1-\varepsilon)\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}\right\}dt=+\infty.$$

和 §3 对一维情形完全一样，由这些关系式可以得出重对数定律.

定理 7 对于 Wiener 过程 $w(t)$ 有

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{|w(t)|}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}}=1\right\}=1.$$

注. 同理可证

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{|w(t)|}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=1\right\}=1.$$

当 $m>2$ 时，这一事实可以用来估计过程 $w(t)$ 向∞的增长速度.

定理 8 如果 $w(t)$ 是 $\mathscr{R}^m$ 中的 Wiener 过程，其中 $m>2$，则对一切 $\lambda>1$

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{(\ln T)^{\frac{\lambda}{m-\frac{1}{2}}}}{\sqrt{T}}\inf_{t>T}|w(t)|\geqslant 1\right\}=1$$

证. 设 τ_n 是过程 $w(t)$ 首达集合 $\{x:|x|\geqslant a^n\}$ 的时刻，其中 $a>1$. 那末，对任意 $R<2^n$

$$\mathbf{P}\{\inf_{t>\tau_n}|w(t)|\leqslant R\}\leqslant\left(\frac{R}{a^n}\right)^m,$$

因为左侧的概率等于"过程自点 y 始($|y|=2^n$) 于某一时刻到达球 $S_R(0)$"的概率. 选取一列 R_n, 使

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R_n}{a^n}\right)^m<\infty.$$

那末,事件 $\{\inf\limits_{t>\tau_n}|w(t)|\leqslant R_n\}$ 中只出现有限多个. 从而

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{R_n}\inf_{t>\tau_n}|w(t)|\geqslant 1\right\}=1.$$

由重对数定律可知,对一切充分大的 n

$$1-\varepsilon\leqslant\frac{a^n}{\sqrt{2\tau_n\ln\ln\tau_n}}\leqslant 1+\varepsilon.$$

所以对充分大的 n

$$(1-\varepsilon_1)\frac{2a^{2n}}{\ln\ln a^{2n}}<\tau_n<(1+\varepsilon_1)\frac{2a^{2n}}{\ln\ln a^{2n}}.$$

如果 $R(t)$ 递增,而且

$$R\left((1+\varepsilon_1)\frac{2a^{2n+2}}{\ln\ln a^{2n}}\right)\leqslant R_n,$$

则对充分大的 t

$$\left\{\frac{1}{R_n}\inf_{t>\tau_n}|w(t)|\geqslant 1\right\}\subset\left\{\frac{1}{R(t)}\inf_{s\geqslant t}|w(s)|\geqslant 1\right\},$$

$n=N, N+1, \cdots$. 如果选 $R(t)=\sqrt{t}/(\ln t)^{\frac{\lambda}{m}-\frac{1}{2}}$, 其中 $\lambda>1$, 则可以断定

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{R_n}{a^n}\right)^m<\infty.$$

定理得证.

第五章 分枝过程

§1. 有限个质点的分枝过程

定义·母函数 马尔科夫分枝过程是一重要马尔科夫过程类．在最简单的场合，分枝过程用来描绘下面的情形．

假设，我们观察某一物理体系 Σ，此体系由有限个同一类型或若干不同类型的质点组成．随着时间的流逝，在不依赖于其它质点的情形下，每个质点可能消失，也可能变为其它质点群．新质点的行为和开始时一样，它或是消失或是产生其它质点，等等．以后我们有时称体系 Σ 为**群体**．它在每个时刻 t 的状态可以完全由一组整数来表征，这些数标明，在给定的时刻该体系中每种类型的质点各有多少个．

可以归结为研究这类体系的问题，在自然界以及在技术中是很常见的．例如，宇宙线雨理论，基本粒子穿过物质的理论，以及生物群体的繁殖，传染病的流行，等等都属于这类问题．

在很多场合，可以假设体系 Σ 随时间的进化是随机的，并且具有马尔科夫性．这样的过程称做**分枝过程**．

最简单的分枝过程可以概括地描绘如下．假设质点有 m 种不同的类型，而且 m 有穷．我们把体系 Σ 在时刻 t 的状态看成一个向量 $\xi(t)=(\xi^1(t),\xi^2(t),\cdots,\xi^m(t))$，其中第 k 个分量 $\xi^k(t)$ 表示在时刻 t 第 k 型质点的个数．因此，所有序列 $x=(x^1,x^2,\cdots,x^m)$，其中 $x^k(k=1,2,\cdots,m)$ 是非负整数，组成的点阵 $\mathscr{X}$ 就是体系 Σ 的相空间．在这一节，我们自始至终以 $\mathscr{X}$ 表示上述相空间．

假设在某初始时刻 t_0 有 x^k 个第 k 型质点，$k=1,2,\cdots,m$．我们称这些质点为第一代质点．第一代的每个质点"生存"一定的时间段(时间段长一般只与质点的类型有关)，然后它要么消失，要

么蜕变为 ν^1 个第 1 型质点，ν^2 个第 2 型质点，…，ν^m 个第 m 型质点．我们称这些质点为第二代质点．量 $\nu^1, \nu^2, \cdots, \nu^m$ 组成在 $\mathscr{X}$ 中取值的 m 维随机向量；根据定义，它的分布只依赖于质点蜕变的时刻和质点的类型．每个第二代质点与其它质点独立地"生存"，并且与同型原质点服从一样的概率规律；在某一时刻，它或是消失，或者蜕变为第三代质点，依此类推．

我们假设所考察体系自身封闭，也就是说，从外部流入质点（移入）或是自生质点都不可能．这样，倘若在某个时刻 t_1 有 $\xi(t_1)=0$（0 表示 $\mathscr{X}$ 中的分量全为零的向量），则对一切 $t>t_1$ 有 $\xi(t)=0$．

称自某个时刻起样本函数以概率 1 为 0 的过程 $\xi(t)$ 为退化的．一般，过程 $\xi(t)$ 迟早要变为 0 的概率叫做过程的退化概率．

群体中个体的个数（即和 $\|\xi(t)\| = \xi^1(t)+\xi^2(t)+\cdots+\xi^m(t)$）可能在有限时间区间内无限增长．这个事件可视为体系的爆发．类似的情形导致下面一些课题（这些课题在分枝过程论中有着明显的意义）：过程的退化概率如何？体系在什么情形下爆发？当 $t\to\infty$ 时群体的渐近行为如何？

现在我们来正式定义分枝过程．

下面我们要考虑两种情形：t 取 $0, 1, \cdots, n, \cdots$ 为值（离散时间）和 t 在 $[0, \infty)$ 上取值（连续时间）．在这一小节将要引进的定义适用于一般情形．

设向量 $x, y\in\mathscr{X}$．设 $p_{st}(x, y)$ 为转移概率，即在 $\xi(s)=x$ 的条件下，$\xi(t)=y$ 的条件概率，其中 $0\leqslant s<t$．记 $e_i=(\delta_i^1, \delta_i^2, \cdots, \delta_i^m)$ 是 $\mathscr{X}$ 中的向量，其中 $\delta_i^i=1$，$\delta_i^j=0$，$i\neq j$．记 $p_{st}(i, y)=p_{st}(e_i, y)$，$p_{st}(i, j)=p_{st}(e_i, e_j)$，即在转移概率中 e_i 简记为 i．以后，我们对条件数学期望也使用类似的记号．

上面提出的，关于体系 Σ 中每个质点的演化对其它质点独立的假设，可以表为

$$p_{st}(x, y) = \Sigma \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{x^i} p_{st}(i, y_{ij}), \tag{1}$$

其中右侧对一切这样的 y_{ij} 求和：$y_{ij}\in\mathscr{X}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,x^i)$ 且 $\Sigma y_{ij}=y$. 这时，如果 $x^i=0$，则令

$$\prod_{j=1}^{0} p_{st}(i,y_{ij})=\delta(y_{ij}),$$

其中若 $y=0$，则 $\delta(y)=1$，而若 $y\neq 0$，则 $\delta(y)=0$. 等式(1)表示，如果考虑向量 y 一切可能的表现 $y=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{x^i} y_{ij}$，$y_{ij}\in\mathscr{X}$，并且求一切事件"在时刻 s 存在的第 i 型第 j 个质点 $(i=1,\cdots,m,j=1,2,\cdots,x^i)$，在时刻 t 产生由向量 y_{ij} 所表征的后代"的概率之和，就可以得到事件 $\xi(t)=y$ 的概率.

定义 1 相空间中的马尔科夫过程称为具有 m 种类型质点的分枝过程，如果它的转移概率满足(1)式.

称等式(1)为过程的分枝条件.

下面只考虑时间齐次过程. 于是

$$p_{st}(x,y)=p_{t-s}(x,y);$$

(关于这一点以后不再特别声明). 这样，分枝过程是状态可列齐次马尔科夫过程，其转移概率具有(1)式所描绘的特殊构造.

可以给等式(1)以略为不同的等价形式，而由于后者的直观性这将是更方便的形式.

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathscr{X}$ 上的任一数值函数，而 $\mathbf{E}_x f(\xi(t))$ 是在 $\xi(0)=x$ 的条件下，随机变量 $f(\xi(t))$ 的条件数学期望；$\mathbf{E}_i f(\xi(t))=\mathbf{E}_{e_i} f(\xi(t))$. 由(1)式可见

$$\mathbf{E}_x f(\xi(t))=\sum_{y\in\mathscr{X}}\sum_{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{x^i} y_{ij}=y} f\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{x^i} y_{ij}\right)$$

$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{x^i} p_t(i,y_{ij})=\sum_{\substack{y_{ij}\in\mathscr{X},\ i=1,2,\cdots,m,\\ j=1,2,\cdots,x^i}} f\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{x^i} y_{ij}\right)$$

$$\times\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{x^i} p_t(i,y_{ij}).$$

该式可化为

$$\mathbf{E}_x f(\xi(t)) = \mathbf{E}_x f\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{x^i}\eta_{ij}\right), \tag{2}$$

其中 η_{ij} 是相互独立的随机向量族，每个向量取值于 $\mathscr{X}$，η_{ij} 的分布 $\{p_t(i, x),\ x\in\mathscr{X}\}$ 与 j 无关.

特别，如果设 $f(x) = x^k$，则由(2)式得等式

$$\mathbf{E}_x\xi^k(t) = \sum_{i=1}^{m} x^i \mathbf{E}_i\xi^k(x),$$

而若令 $f(x) = (x^k - \mathbf{E}_x\xi^k(t))\ (x^r - \mathbf{E}_x\xi^r(t))$，则得

$$\mathbf{E}_x[\xi^k(t) - \mathbf{E}_x\xi^k(t)][\xi^r(t) - \mathbf{E}_x\xi^r(t)]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x^i \mathbf{E}_i[\xi^k(t) - \mathbf{E}_i\xi^k(t)][\xi^r(t) - \mathbf{E}_i\xi^r(t)].$$

如果记

$$a_i^r(t) = \mathbf{E}_i\xi^r(t),$$

$$d_i^{kr}(t) = \mathbf{E}_i[\xi^k(t) - \mathbf{E}_i\xi^k(t)][\xi^r(t) - \mathbf{E}_i\xi^r(t)]$$

并引进矩阵

$$A(t) = \{a_i^r(t)\}_{r,i=1,\cdots,m},$$

$$D_i(t) = \{d_i^{kr}(t)\}_{k,r=1,\cdots,m},$$

则上面 1 阶和 2 阶矩的关系式可以化为

$$\mathbf{E}_x\xi(t) = A(t)x, \tag{3}$$

$$\mathbf{E}_x[\xi(t) - \mathbf{E}_x\xi(t)]\ [\xi(t) - \mathbf{E}_x\xi(t)]' = \sum_{i=1}^{m} x^i D_i(t). \tag{4}$$

这里，对于两个 m 维向量 u 和 v，uv' 表示矩阵 $\{u^k v^r\}_{k,r=1,\cdots,m}$. 以后，我们把向量 u 和 v 看作由一个列向量构成的矩阵，而 u' 和 v' 是由一个行向量构成的矩阵. 这样

$$v'u = (u, v) = \sum_{k=1}^{m} v^k u^k$$

是向量 u 和 v 的数积.

在解决具有有限个质点的分枝过程论的问题时，常要利用母

函数。

我们考虑序列 $w=(w_1, w_2\cdots, w_m)$ 的空间 C^m，其中 w_k $(k=1,2,\cdots,m)$ 是复数。设 $|w_k|$ 是复数 w_k 的模；记 $\|w\|$ 是向量 $w\in C^m$ 的范数，定义为

$$\|w\|=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|w_k|.$$

矩阵 $A=\{a_j^k\}$，$k, j=1,\cdots,m$，的模定义为

$$\|A\|=\max_{1\leqslant k\leqslant m}\sum_{j=1}^{m}|a_j^k|.$$

这样，

$$\|Aw\|\leqslant\|A\|\cdot\|w\|,\ \|wA\|\leqslant\|w\|\cdot\|A'\|,$$

其中矩阵 A' 是 A 的转置。

称复向量 $w=(w_1, w_2,\cdots, w_m)$ 的函数

$$g(w)=g(w_1, w_2,\cdots, w_m)=\sum_{x\in\mathscr{X}}p_x w_1^{x^1}w_2^{x^2}\cdots w_m^{x^m} \tag{5}$$

为数组 $\{p_x, x\in\mathscr{X}\}$ 的**母函数**。如果 $|p_x|\leqslant c$，$x\in\mathscr{X}$，则在域 $\{|w_k|<1, k=1,\cdots,m\}$ 内级数(5)绝对收敛；而若

$$\sum_{x\in\mathscr{X}}|p_x|<\infty,$$

则在域 $\{|w_k|\leqslant 1, k=1,\cdots,m\}$ 内级数(5)也绝对收敛。在级数(5)收敛域的内点，$g(w)$ 是解析函数。为简化书写，我们引进一些记号。记 $w'\cdot w''$ 为向量 $(w_1'w_1'', w_2'w_2'',\cdots, w_m'w_m'')$，而以 w^x，$x\in\mathscr{X}$，表示数量

$$w^x=\prod_{k=1}^{m}w_k^{x^k}.$$

显然

$$(w'\cdot w'')^x=(w')^x(w'')^x,\ w^{(x_1+x_2)}=w^{x_1}w^{x_2}.$$

设 η 是取值于 $\mathscr{X}$ 的随机向量，$\eta=(\eta^1, \eta^2,\cdots,\eta^m)$，$p(x)=\mathbf{P}\{\eta=x\}$，$x\in\mathscr{X}$，而 $g(w)$ 是分布 $\{p(x), x\in\mathscr{X}\}$ 的母函数。那末

$$g(w) = \sum_{x \in \mathscr{X}} p(x) w^x = \mathbf{E} w^\eta.$$

这时

$$g(\mathbf{0}) = \mathbf{P}\{\eta = \mathbf{0}\}, \quad g(\mathbf{1}) = 1,$$

其中 0 为零向量，1 分量全为 1 的向量. 对$\|w\| < 1$,函数 $g(w)$ 无限可微,并且

$$\frac{\partial g(w)}{\partial w_k} = \mathbf{E} \eta^k w^{\eta - e_k},$$

$$\frac{\partial^2 g(w)}{\partial w_k \partial w_r} = \mathbf{E} \eta^k (\eta^r - \delta^{kr}) w^{\eta - e_k - e_r},$$

等等. 这时,如果

$$\sum_{x \in \mathscr{X}} x^k p(x) < \infty, \quad \sum_{x \in \mathscr{X}} x^k (x^r - \delta^{kr}) p(x) < \infty,$$

则相应地有

$$\mathbf{E} \eta^k = \lim_{w \to 1} \frac{\partial g(w)}{\partial w_k},$$

$$\mathbf{E} \eta^k (\eta^r - \delta^{kr}) = \lim_{w \to 1} \frac{\partial^2 g(w)}{\partial w_k \partial w_r}.$$

不难证明：对于母函数成立连续性定理：如果(取值于 $\mathscr{X}$ 的)随机向量序列 η_n 的分布弱收敛于随机向量 η 的分布，则 $g_n(w) \to g(w)$，其中 $g_n(w)$ 和 $g(w)$ 分别是随机向量 η_n 和 η 的分布的母函数. 相反，如果 $g_n(w) \to g(w)$, $\|w\| \leqslant 1$，则向量 η_n 的分布弱收敛于向量 η 的分布.

我们定义概率族 $\{p_t(k, x), x \in \mathscr{X}\}$ 的母函数如下：

$$g_t(k, w) = \sum_{x \in \mathscr{X}} p_t(k, x) w^k = \mathbf{E}_k w^{\xi(t)}.$$

这里,当 $w = 0$ 时, w^x 决定于条件

$$w^x|_{w=0} = \delta(x).$$

我把序列 $p_t(x)$ 和 $g_t(w)$，其中

$$p_t(x) = \{p_t(1, x), p_t(2, x), \cdots, p_t(m, x)\},$$

$$g_t(w) = \{g_t(1, w), g_t(2, w), \cdots, g_t(m, w)\},$$

看作m维向量，并称函数 $g_t(w)$ 为分枝过程的**向量母函数**.

分枝过程的母函数满足简单的函数方程，在解决一系列问题时，此方程有广泛应用.为推出该方程我们注意到，由 Колмогоров-Chapman 方程和(1)式得等式

$$p_{s+t}(k, z) = \sum_{x \in \mathscr{X}} p_s(k, x) p_t(x, z)$$

$$= \sum_{x \in \mathscr{X}} p_s(k, x) \sum_{\sum_{i,j} z_{ij} = z} \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{x^i} p_t(i, z_{ij}).$$

两侧同乘以 w^z 并对 $z \in \mathscr{X}$ 求和，得

$$\sum_{z \in \mathscr{X}} \sum_{\sum_{i,j} z_{ij} = z} \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{x^i} p_t(i, z_{ij}) w^z$$

$$= \sum_{z \in \mathscr{X}} \sum_{\sum_{i,j} z_{ij} = z} \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{x^i} [p_t(i, z_{ij}) w_j^{z_{ij}}]$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{x^i} \left[\sum_{z_{ij} \in \mathscr{X}} p_t(i, z_{ij}) w_j^{z_{ij}} \right]$$

$$= \prod_{i=1}^{m} [g_t(i, w)]^{x^i} = [g_t(w)]^x.$$

由此可见，

$$g_{s+t}(k, w) = \sum_{y \in \mathscr{X}} p_s(k, y) [g_t(w)]^y,$$

或

$$g_{s+t}(k, w) = g_s(k, g_t(w)), \quad k = 1, \cdots, m, \tag{6}$$

又可写为

$$g_{s+t}(w) = g_s(g_t(w)). \tag{7}$$

在 $\xi(0) = x$ 的条件下，向量 $\xi(t)$ 的分布的母函数

$$g_t(x, w) = \mathbf{E}_x w^{\xi(t)}$$

可以通过向量函数 $g_t(w)$ 来表示. 事实上，由以上的推导有

$$\mathbf{E}_x w^{\xi(t)} = \sum_{z\in\mathscr{X}} p_t(x, z) w^z = \prod_{i=1}^{m} [g_t(i, w)]^{x^i},$$

因此

$$g_t(x, w) = [g_t(w)]^x. \tag{8}$$

该式表明，只要知道向量母函数 $g_t(w)$ 就可以求出母函数 $g_t(x, w)$. 我们称(7)式为分枝过程母函数的函数方程.

离散时间分枝过程 考虑具有 m 种类型质点的离散时间分枝过程. 现在我们用 $n, r, \cdots$ 表示时间 t, 并且设

$$p(x, y) = p_1(x, y), \quad g(w) = g_1(w),$$
$$g(x, y) = g_1(x, y), \quad g(k, w) = g_1(k, w).$$

过程向量母函数的函数方程可以写为

$$g_{n+r}(w) = g_n(g_r(w)).$$

它表明向量函数 $g_n(w)$ 可以由函数 $g(w)$ 的 n 次迭代而得到:

$$g_2(w) = g(g(w)), \cdots, \quad g_{n+1}(w) = g(g_n(w)). \tag{9}$$

考虑任意具有 m 种类型质点的离散时间分枝过程，并且研究如何给出这样过程的问题. 我们指出，知道了转移概率 $p(i, x)$, $x\in\mathscr{X}$, $i=1, 2, \cdots, m$, 就可以由 (1) 式求出 $p(y, x)$, $y\in\mathscr{X}$; 而由马尔科夫性就可以求出任意步的转移概率 $p_n(y, x)$.

同一问题可以利用母函数来求解如下: 由概率 $p(i, x)$ 构造 $g(w)$; 通过函数 $g(w)$ 的迭代求出 $g_n(w)$ 和母函数

$$g_n(x, w) = [g_n(w)]^x. \tag{10}$$

我们证明逆命题: 可以根据任意母函数 $g(k, w)$, 利用所描述的方法来构造分枝过程.

定理 1 对任意数集 $\{p(k, x), x\in\mathscr{X}\}$, $k=1, \cdots, m$, 如果满足条件

$$p(k, x) \geqslant 0, \quad \sum_{x\in\mathscr{X}} p(k, x) = 1, \ k = 1, \cdots, m,$$

则存在分枝过程，使

$$g(k, w) = \sum_{x\in\mathscr{X}} p(k, x) w^x, \ k = 1, \cdots, m,$$

是一步转移概率的母函数.

证. 我们首先指出,对$|w_j|\leqslant 1\ (j=1,\cdots,m)$有$|g(w)|\leqslant 1$;于是,对所考虑的$w$的值,可以依次决定函数$g(w)$的迭代$g_n(w)=g(g_{n-1}(w))$,而且$|g_n(w)|\leqslant 1$. 向量$g_n(w)$的分量$g_n(k,w)$在域$|w_j|<1(j=1,\cdots,m)$内是解析函数,而它分解为幂级数的系数是非负的. 如果

$$g_n(k,w)=\sum_{x\in\mathscr{X}}p_n(k,x)w^x,$$

则$g_n(k,1)=\sum_x p_n(k,x)$,而由归纳法知,此和等于1. 我们根据(10)式引进函数$g_n(x,w)$. 函数$g_n(x,w)$对$|w_j|\leqslant 1$定义,而对$|w_j|<1$解析;在函数$g_n(x,w)$的幂级数分解式中w^y项的系数$p_n(x,y)$非负,而它们的和等于1: $\sum_y p_n(x,y)=1$.

我们现在考虑随机核族$\{p_n(x,y),\ y\in\mathscr{X}\}$, $n=1,2,\cdots$, $x\in\mathscr{X}$,证明它是马尔科夫核族并且满足分枝条件(1). 由$g_n(x,w)$的定义知

$$g_n(x,w)=\prod_{k=1}^{n}[g_n(k,w)]^{x^k},$$

其中$x=\sum_k e_k x^k$. 由于母函数唯一决定自己的系数,可见分布$\{p_k(x,y),\ y\in\mathscr{X}\}$对应$\mathscr{X}$中$x^1$个同分布$\{p_n(1,y),\ y\in\mathscr{X}\}$的随机向量,$x^2$个同分布$\{p_n(2,y),\ y\in\mathscr{X}\}$的随机向量,$\cdots$,$x^m$个同分布$\{p_n(m,y),\ y\in\mathscr{X}\}$的随机向量之和,而且此和的全部$x^1+x^2+\cdots+x^m$个被加项相互独立. 这说明$p_n(x,y)$满足分枝条件. 我们现在验证概率$p_n(x,y)$满足Колмогоров-Chapman方程. 为此,我们考虑变量组

$$q(x,y)=\sum_{x\in\mathscr{X}}p_n(x,z)p_r(z,y)$$

的母函数$h(w)$. 有

$$h(w)=\sum_{y\in\mathscr{X}}q(x,y)w^y=\sum_{z\in\mathscr{X}}p_n(x,z)q_r(z,w)$$

$$= \sum_{z \in \mathscr{X}} p_n(x, z)[g_r(w)]^z = g_n(x, q_r(w)).$$

因为

$$g_{n+r}(x, w) = [g_{n+r}(w)]^x = [g_n(g_r(w))]^x = g_n(x, g_r(w)),$$

故

$$h(w) = g_{n+r}(x, w).$$

由此可见

$$p_{n+r}(x, y) = \sum_{z \in \mathscr{X}} p_n(x, y) p_r(z, y).$$

于是，$\{p_n(x, y), y \in \mathscr{X}, x \in \mathscr{X}, n = 1, 2, \cdots\}$ 是马尔科夫核族；可以根据满足定理条件的变量组的任意向量母函数 $g(w)$，利用上述方法构造一分枝过程。定理得证。

矩(离散时间) 设 $\xi(n), n = 0, 1, 2, \cdots$ 是具有 m 种类型质点的分枝过程。过程 $\xi(w)$ 的渐近行为的研究，基于向量 $\xi(n)$ 的矩的性质。先看一阶矩。引进一矩阵 $A(n) = \{a_j^k(n)\}$，$k, j = 1, 2, \cdots, m$，其中 $a_j^k(n) = \mathbf{E}_j \xi^k(n)$；令 $A(1) = A$，$a_j^k(1) = a_j^k$。假设 $a_j^k < \infty$，$k, j = 1, \cdots, m$。由以上可知(见(3)式)

$$\mathbf{E}_x \xi(n) = A(n) x.$$

因为 $\xi(n)$ 是马尔科夫过程，故

$$\mathbf{E}_x \xi(2) = \mathbf{E}_x \mathbf{E}_{\xi(1)} \xi(2) = \mathbf{E}_x A \xi(1) = A^2 x,$$

而由归纳法有

$$\mathbf{E}_x \xi(n) = A^n x \quad 或 \quad A(n) = A^n.$$

从具有非负元矩阵的一般定理可以推出矩阵 A^n 的渐近性质。

称矩阵 B 为**非负的**(记作 $B \geqslant 0$)，如果它的所有元 $b_{kj} \geqslant 0$；矩阵 B 称为**正的**（记作 $B > 0$)，如果它的所有元 $b_{kj} > 0$。如果非负矩阵 B 的某次幂是正矩阵，则称 B 为**素阵**。

根据 Perron 定理*)，非负矩阵 B 是素阵，当且仅当它有唯一

---

*) Гантмахер Ф. Р. «矩阵论»第十三章 §2（有中译本）。——译者注

绝对值最大的特征值 λ_1，即当且仅当，若 λ_r，$r=2,\cdots$，是矩阵 B 的特征值（$\lambda_r \neq \lambda_1$），则 $|\lambda_r| < |\lambda_1|$. 这时 λ_1 是正数，并且是特征方程的简单根，并且可以假设与它相对应的特征向量是正的。

以后我们有时假设分枝过程的矩阵 $A=A(1)$ 是素阵. 这时，矩阵 A 的渐近性质可以表征如下. 设 $u=(u^1,u^2,\cdots,u^m)$ 是矩阵 A 的特征向量，对应于特征值 $\lambda_1, u^k>0$，而 $v=(v^1,v^2,\cdots,v^m)$ 是矩阵 A' 的特征向量，也对应于特征值 λ_1，(其中 A' 是矩阵 A 的转置). 根据 Perron 定理，也可以假设向量 v 是正的，即 $v^k>0$. 假设向量 u 和 v 是规范的，即满足条件

$$(u,v)=\sum_{k=1}^{m} u^k v^k = 1.$$

令

$$A_1 = uv',\quad A_2 = A-\lambda_1 A_1.$$

因为

$$A_1A = uv'A = u(A'v)' = u\lambda_1 v' = \lambda_1 A_1,$$
$$AA_1 = Auv' = \lambda uv' = \lambda_1 A_1,$$
$$A_1^2 = uv'uv' = u(v'u)v' = uv' = A_1,$$

故

$$A_2A_1 = (A-\lambda_1A_1)A_1 = 0 = A_1A_2,$$
$$A^2 = (\lambda_1A_1+A_2)(\lambda_1A_1+A_2) = \lambda_1^2A_1+A_2.$$

利用归纳法得

$$A^n = \lambda_1^n A_1 + A_2^n, \tag{11}$$

且

$$A_1^2 = A_1,\quad A_1A_2 = A_2A_1 = 0. \tag{12}$$

设 λ 是矩阵 A_2 的特征值，$A_2u_1=\lambda u_1$. 因为 $A_1A_2=0$，故 $A_1u_1=0$. 所以 $Au_1=A_2u_1=\lambda u_1$，即 λ 是矩阵 A 的特征值. 由等式 $A_1u=uv'u=u$ 可见 $u_1\neq u$，从而 $|\lambda|<\lambda_1$. 由矩阵 B^n 的表现的一般公式(见 Гантмахер《矩阵论》(有中译本))，可见：如果 μ_1 是矩阵 B 的绝对值最大的特征值，则存在常数 C 和 K，使

矩阵 B^n 的任意元 $b_{kj}^{(n)}$ 满足 $|b_{kj}^{(n)}| \leqslant C|\mu_1|^n n^k$. 从而，存在 r，$0 < r < 1$，使

$$\frac{1}{\lambda_1^n} A_2^n = O(r^n). \tag{13}$$

这样，矩阵 A^n 的渐近行为首先是由矩阵 $\lambda_1^n A_1$ 来表征的. 特别，对任意向量 q 有

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_x \left(\frac{\xi(n)}{\lambda_1^n}, q \right) = (v, x)(u, q). \tag{14}$$

该式说明，当 $n \to \infty$ 时，$\lambda_1^{-n}\xi(n)$ 以概率 1 收敛于某一具有固定方向的随机向量，而且此方向即向量 u 的方向. 在一阶矩存在的条件下，我们对 $\lambda_1 > 1$ 的情形证明这一点，而 $\lambda_1 \leqslant 1$ 的情形放到以后讨论.

我们考虑向量 $\xi(n)$ 的一阶矩. 令

$$B(n) = B(n, x) = \mathbf{E}_x \xi(n) \xi'(n),$$

$$D_i = \mathbf{E}_i [\xi(1) - \mathbf{E}_i \xi(1)] [\xi(1) - \mathbf{E}_i \xi(1)]'.$$

由(4)式

$$\mathbf{E}_x [\xi(1) - \mathbf{E}_x \xi(1)] [\xi(1) - \mathbf{E}_x \xi(1)]' = \sum_{i=1}^{n} x^i D_i,$$

因而

$$\mathbf{E}_x \xi(1) \xi'(1) = \sum_{i=1}^{m} x^i D_i + A x x' A'.$$

由过程 $\xi(n)$ 的马尔科夫性得

$$\begin{aligned} B(n+1) &= \mathbf{E}_x \mathbf{E}_{\xi(n)} \xi(n+1) \xi'(n+1) \\ &= \mathbf{E}_x \left[A \xi(n) \xi'(n) A' + \sum_{i=1}^{n} \xi^i(n) D_i \right] \\ &= A B(n) A' + \sum_{i=1}^{m} (e_i' A^n x) D_i. \end{aligned}$$

由此，在矩阵 D_i，$i = 1, \cdots, m$，有限的条件下，用归纳法可以推出矩阵 $B(n)$ 有限，以及

$$B(n+r) = A^r B(n) A'^r + \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{i=1}^{m} (e_i' A^{n+j} x) A^{r-j} D_i A'^{r-j}. \tag{15}$$

定理 2 如果 $\xi(t)$ 的二阶矩有穷，A 是素阵，$\lambda_1>1$，则向量 $\xi(n)/\lambda_1^n$ 均方收敛于在空间有固定方向的随机向量，而且此方向与向量 u 的方向一致。

证. 令 $\zeta_n=\lambda_1^{-n}\xi(n)$。由(15)式可见，$\mathbf{E}_x\zeta_n\zeta_n'=(\lambda_1^{-1}A)^n xx'$

$$(\lambda_1^{-1}A')^n+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}\lambda_1^{-j}(e_i'\lambda_1^{-j}A^jx)(\lambda_1^{-1}A)^{n-j}D_i(\lambda_1^{-1}A')^{n-j}. \quad (16)$$

由矩阵 $\lambda_1^{-j}A^j$, $j=1,2,\cdots,n,\cdots$, 的元的一致有界性知，在上式中可以令 $n\to\infty$ 并取极限. 有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_x\zeta_n\zeta_n'=(v,\ x)^2uu'+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{m}\lambda_i^{-2j}(e_i'A^jx)(uv'D_ivu'),$$

因而，可知矩阵 $\mathbf{E}_x\zeta_n\zeta_n'$ 一致有界. 因为

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_{\xi(n)}(\zeta_{n+r}-\zeta_n)(\zeta_{n+r}-\zeta_n)'\\&=\frac{B(r,\zeta_n)}{\lambda_1^{2r}}-(\lambda_1^{-1}A)^r\zeta_n\zeta_n'-\zeta_n\zeta_n'(\lambda_1^{-1}A')^r+\zeta_n\zeta_n',\end{aligned}$$

故利用(15)式得等式

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_{\xi(n)}(\zeta_{n+r}-\zeta_n)(\zeta_{n+r}-\zeta_n)'\\&=[(\lambda_1^{-1}A)^r-I]\mathbf{E}_x\zeta_n\zeta_n'[(\lambda_1^{-1}A')^r-I]\\&\quad+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}\lambda_1^{-(n+j)}[e_i'(\lambda_i^{-1}A)^{n+j}x]\\&\quad\times(\lambda_1^{-1}A)^{r-j}D_i(\lambda_1^{-1}A')^{r-j}.\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，此式最后的双和号项关于 r 一致收敛于 0. 至于该式右侧的第一项，则利用(16)式可以将其化为如下形式

$$\begin{aligned}&(\overline{A}^{n+r}-\overline{A}^n)xx'(\overline{A}^{n+r}-\overline{A}^n)'\\&+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m}\lambda_1^{-j}(e_j'\overline{A}^jx)(\overline{A}^{n+r-j}-\overline{A}^{n-j})D_i\\&\times(\overline{A}^{n+r-j}-\overline{A}^{n-j})',\end{aligned}$$

其中简记 $\overline{A}=\lambda_1^{-1}A$. 因为当 $n\to\infty$ 时，$\overline{A}^n\to A_1$，而级数关于 r 一致收敛，故此和收敛于 0. 因而，随机向量序列 $\zeta(n)$ 均方收敛于极限 ζ，而且

$$\mathbf{E}_x\zeta\zeta' = kuu',$$

其中

$$k = (v, x)^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e_i'A^jxv'D_iv}{\lambda_1^{2j}},$$

又可写成

$$k = (v, x)^2 + \sum_{i=1}^{m} v'D_ive_i'(I - \lambda_1^{-2}A)^{-1}x.$$

如果 s 是 R^m 中的任一向量，则

$$\mathbf{E}_x(s, \zeta)^2 = s'(\mathbf{E}_x\zeta\zeta')s = k(s, u)^2.$$

由此可见，对任意 x，向量 ζ 的与 u 正交的分量几乎处处等于 0。因而，向量 ζ 的方向与向量 u 一致. 定理得证.

作为对该定理的补充，我们找出极限向量 ζ 的 Laplace 变换的函数方程. 令

$$J(k, p) = \mathbf{E}_k e^{-(p,\zeta)}, \quad J_n(k, p) = \mathbf{E}_k e^{-(p,\zeta_n)}, \tag{17}$$

$$k = 1, 2, \cdots, m,$$

其中 p 是 m 维复向量，$p = (p_1, p_2, \cdots, p_m)$，而且 $\operatorname{Re} p_k \geqslant 0$. 函数 $J_n(k,p)$ 与向量 $\xi(n)$ 的母函数之间有密切联系:

$$J_n(k, p) = g_n(k, e^{-p/\lambda_1^m}), \quad e^{-p} = (e^{-p_1}, e^{-p_2}, \cdots, e^{-p_m}).$$

由(9)式有

$$J_{n+1}(\lambda_1 p) = g(J_n(p)),$$

其中 $J_n(p) = (J_n(1, p), \cdots, J_n(m, p))$. 因为 $\text{l.i.m.}\ \zeta_n = \zeta$，故 $J_n(p) \to J(p)$，其中 $J(p)$ 是以 $J(k,p)$ 为分量的向量. 由于函数 $g(\omega)$ 在区域 $\{|w^k| \leqslant 1, k = 1, \cdots, m\}$ 内连续，故当 $n \to \infty$ 时在(10)式中取极限可得如下函数方程:

$$J(\lambda_1 p) = g(J(p)). \tag{18}$$

此外，函数 $J(p)$ 满足下列关系式:

$$J(k, 0) = 1, \left.\frac{\partial J(k, p)}{\partial p_r}\right|_{p=0} = -u^r v^k, \quad k, r = 1, \cdots, m. \tag{19}$$

方程(18)可以用来求过程的退化概率. 设 q^k 是在 $\xi(0)=$

e_k 的条件下，过程 $\xi(n)$ 的退化概率，即

$$q^k = \mathbf{P}\{\text{对某个 } n,\ \xi(n) = 0\} = \mathbf{P}_k\{\zeta = 0\},$$

而 $q = (q^1, q^2, \cdots, q^m)$. 显然

$$q^k = \lim_{\mathrm{Re}\, p \to \infty} J(k, p).$$

如果在(18)式中当 $\mathrm{Re}\, p \to \infty$ 时取极限，则得向量 q 所满足的方程：

$$q = g(q). \tag{20}$$

定理 3 如果分枝过程 $\xi(n)$ 的二阶矩有限，矩阵 A 是素阵，$\lambda_1 > 1$，则极限向量 $\zeta = \mathrm{l.\,i.\,m.}\ \xi(n)/\lambda_1^n$ 的条件分布的 Laplace 变换 $J(p)$ 满足函数方程(18)，而过程的退化概率向量 q 满足方程(20).

我们证明方程(18)—(19)的解在满足条件 $|J(p)| \leqslant 1$ 的函数类中唯一.

记 $|x|$ $(x \in \mathscr{R}^m)$ 或 $|w|$ $(w \in \mathscr{C}^m)$ 为分别以 $|x^k|$ 或 $|w_k|$ 为分量的向量，$k = 1, 2, \cdots, m$. 如果 $x_1^k \geqslant x_2^k$, $k = 1, \cdots, m$, 就记 $x_1 \geqslant x_2 (x_1, x_2 \in \mathscr{R}^m)$；如果 $x_1^k > x_2^k$, $k = 1, \cdots, m$, 就记 $x_1 > x_2$. 用 $\mathbf{1}$ 表 $\mathscr{C}^m$ (或 $\mathscr{R}^m$) 中所有分量都等于 1 的向量. 向量 $w \in \mathscr{C}^m$ 又看成是由一行构成的矩阵.

下面的不等式显然：

$$|g(w)| \leqslant g(|w|). \tag{21}$$

这里应注意到，如果 $w \geqslant 0$，则 $g(w) \geqslant 0$.

引理 1 如果向量 $\xi(1)$ 的一阶矩有限，而且 $\|w'\| \leqslant 1$, $\|w''\| \leqslant 1$，则

$$|g(w') - g(w'')| \leqslant |w' - w''| A.$$

事实上，对 $|w_k'| \leqslant 1$, $|w_k''| \leqslant 1$, $k = 1, 2, \cdots, m$，有

$$\left|\prod_{k=1}^m w_k' - \prod_{k=1}^m w_k''\right| \leqslant \sum_{k=1}^m |w_k' - w_k''|,$$

由此得

$$|(w')^x - (w'')^x| \leqslant \sum_{k=1}^m x^k |w_k' - w_k''|.$$

因而

$$|g(j, w') - g(j, w'')| \leqslant \sum_{x \in \mathscr{X}} p(j, x) |(w')^x - (w'')^x|$$

$$\leqslant \sum_{x \in \mathscr{X}} \sum_{k=1}^{m} p(j, x) x^k |w'_k - w''_k| = \sum a_j^k |w'_k - w''_k|,$$

于是引理得证.

现在证明函数方程 (18) 的解的唯一性. 譬如,我们对非负实数 p_k 考虑方程(18)的解,对 $p = 0$ 这些解有满足条件(19)的一阶偏导数. 假设存在两个这样的解 $J'(p)$ 和 $J''(p)$. 令 $J'(p) - J''(p) = \|p\| \phi(p)$. 函数 $\phi(p)$ 对 $p \neq 0$ 连续,而且由于条件(19)当 $p \downarrow 0$ 时 $\phi(p) \to 0$. 由方程(18)有

$$\begin{aligned}\lambda_1 \|p\| |\phi(\lambda_1 p)| &= |J'(\lambda_1 p) - J''(\lambda_1 p)| \\ &= |g(J'(p)) - g(J''(p))| \\ &\leqslant A |J'(p) - J''(p)| \leqslant \|p\| A |\phi(p)|.\end{aligned}$$

由此对任意 n 得不等式:

$$|\phi(p)| \leqslant \left(\frac{A}{\lambda_1}\right)^n \phi\left(\frac{p}{\lambda_1^n}\right).$$

令 $n \to \infty$, 得 $\phi(p) \equiv 0$, 由此得 $J'(p) = J''(p)$. 方程(18)—(19)的解的唯一性得证.

次临界情形 我们现在研究 $\lambda_1 \leqslant 1$ 的情形($\lambda_1 < 1$ 的情形称为次临界情形). 我们证明, 在这种情形下分枝过程以概率 1 退化. 在进行证明时要用到分枝过程的非自返性.

称分枝过程为非自返的, 如果除 0 之外它的所有状态都是非自返的,即如果对 $x \neq 0$

$$\mathbf{P}_x\{\text{对 } n \text{ 的无穷多个值有 } \xi(n) = \xi(0)\} = 0.$$

我们首先要证明, 除了很明显的情形之外, 具有素阵 A 的分枝过程是非自返的.

称过程为奇异的, 如果任何型的质点经单位时间变为一个且只能变为一个质点. 换句话说, 如果随时间的变化质点的总数不变,则过程是奇异的.

定理 4 具有素阵 A 的非奇异分枝过程是非自返的.

证. 对于任何型的质点，它的后代在长为 n 的时间段内的退化概率是 n 的单调不减函数. 所以，如果对某个 n 有 $\mathbf{P}_i\{\xi(n)=\mathbf{0}\}>0$，则体系无穷多次返回状态 ae_i (其中 a 是任意正数)的概率等于 0 (Borel-Cantelli 定理). 从而，如果对每个 i 存在 n_i，使 $\mathbf{P}_i\{\xi(n_i)=\mathbf{0}\}>0$，则对任意 x 体系返回状态 x 的概率小于 1，因而无穷多次返回的概率等于 0. 于是，在这种情形下定理得证.

现在假设，对某些类型的质点(设这类型的编号为 $1,2,\cdots,r$)和任意 n 有 $\mathbf{P}_i\{\xi(n)=\mathbf{0}\}=0, i=1,2,\cdots,r$. 我们指出 $\overline{1,\cdots,r}$ 型质点的总数不减. 为证明这一事实，只需考虑一个质点经单位时间的演化. 倘若对于 i 型质点 $(i\leqslant r)$，它在单位时间内不产生 1 型，$\cdots,r$ 型后代的概率小于 1，则它的所有后代都是 $r+1$ 型，$\cdots$，m 型质点的概率也大于 0，从而该后代退化的概率也应大于 0，但是这与 $1,\cdots,r$ 型质点的定义矛盾.

记 $\nu(t)$ 为向量 x 的前 r 个分量的和. 由变量 $\nu(\xi(n))$ 的已有性质可知，为证明定理只需证明存在 n_1，使 $\mathbf{P}_x\{\nu(\xi(n_1))>\nu(\xi(0))\}>0$. 设 $A^{n_0}>0$. 考虑序列 $\xi(0),\xi(n_0),\xi(2n_0),\cdots$; 显然，它是非奇异分枝过程. 如果 $r=m$，则存在 i，使 $\mathbf{P}_i\{\nu(\xi(n_0))>1\}>0$，否则过程是奇异的. 从而

$$\mathbf{P}_x\{\nu(\xi(2n_0))>\nu(x)\}$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}_x\{\xi^i(n_0)=k\}\mathbf{P}_{ke_i}\{\nu(\xi(n_0))>k\}.$$

由 $A^{n_0}>0$ 可见，对任意 $x\,(x\neq 0)$ 存在 k，使 $\mathbf{P}_x\{\xi^i(n_1)=k\}>0$; 而由 i 的选择知，对一切 k 有 $\mathbf{P}_{ke_i}\{\nu(\xi(n_0))>k\}>0$. 这样对 $r=m$ 的情形有 $\mathbf{P}_x\{\nu(\xi(n_0))>\nu(\xi(0))\}>0$，$n_1=2n_0$.

现在设 $1<r<m$. 向量 $\xi(2n_0)$ 可表为 $\xi(2n_0)=\xi'+\xi''$，其中向量 ξ' 表示对应 $\xi(n_0)$ 的前 r 个分量的质点的后代，而 ξ'' 表示对应 $\xi(n_0)$ 的其它 $m-r$ 个分量的质点的后代. 显然有

$$\nu(\xi(2n_0)) = \nu(\xi') + \nu(\xi'') \geq \nu(x) + \nu(\xi'').$$

由 $A^{n_0} > 0$ 知，$\nu(\xi'') > 0$ 的概率大于 0. 所以这时有 $\mathbf{P}_x\{\nu(\xi(2n_0)) > \nu(\xi(0))\} > 0$. 定理得证.

注. 不难构造出具有素阵 A 的非奇异自返分枝过程的例子. 例如，设过程有两个质点，经单位时间第一个质点以概率 1 消失，而第二个质点产生两个后代：一个是第一型质点，而另一个是第二型质点. 那末此过程就是非奇异自返过程.

利用所证明的定理不难验证，对 $\lambda_1 \leq 1$ 分枝过程退化.

定理 5 设 $\xi(n)$ 是非奇异分枝过程，矩阵 A 是素阵，$\lambda_1 \leq 1$. 那末，过程 $\xi(n)$ 以概率 1 退化.

证. 设 $\|x\| = x^1 + x^2 + \cdots + x^n (x \in \mathscr{X})$. 那末 $\|\xi(n)\|$ 为在时刻 n 存在的质点的总数. 由定理 4 知，极限 $\lim \|\xi(n)\|$ 存在，并且不是等于 0 就是等于 ∞. 如果 $\lambda_1 \leq 1$，则当 $n \to \infty$ 时矩阵 A^n 有界. 所以

$$\mathbf{E}_x \underline{\lim} \|\xi(n)\| \leq \underline{\lim}\, \mathbf{E}_x \|\xi(n)\| = \underline{\lim} \sum_{k=1}^{m} (A^n x)^k \leq C,$$

其中 $(A^n x)^k$ 是向量 $A^n x$ 的第 k 个分量. 由此不等式可见 $\mathbf{P}_x\{\lim \|\xi(n)\| = \infty\} = 0$，从而，对任意 x 有 $\mathbf{P}_x\{\lim \|\xi(n)\| = 0\} = 1$. 定理得证.

注 1. 如果 $\lambda_1 < 1$，则由 Fatou 不等式得 $\mathbf{E}_x \lim \|\xi(n)\| = 0$；而最后的式子成立，当且仅当对任意 x 自某个 n 起有 $\mathbf{P}\{\xi(n) = 0\} = 1$，即过程 $\xi(n)$ 退化. 这时，矩阵 A 的素性或过程 $\xi(n)$ 的非奇异性可能不成立.

注 2. 如果定理的条件成立，则在区域 $\|w\| \leq r < 1$ 内一致有

$$g_n(w) \to 1.$$

而若 $\lambda_1 < 1$，则此式在区域 $\|w\| \leq 1$ 内一致成立，并且不依赖上一定理的其它条件.

为在 $\lambda_1 \leq 1$ 的情形下更确切的表征分枝过程的渐近行为，要用到对母函数 $g(k, w)$ 的一些估计.

引理 2 如果向量 $\xi(1)$ 有有穷的一阶矩和二阶矩，$\|w\|\leqslant 1$，则

$$1-g(|w|)\geqslant \Big|1-|w|\Big|A-\frac{1}{2}\Big|1-|w|\Big|\Big|1-|w|\Big|\tilde{B},$$

其中 $\tilde{B}=\{\tilde{b}_r^{kj}\}$, $k, j, r=1, \cdots, m$, $\tilde{b}_r^{kj}=\mathbf{E}_r\xi^k(1)[\xi^j(1)-\delta^{kj}]$，而 $\Big|1-|w|\Big|\Big|1-|w|\Big|\tilde{B}$ 表示以

$$\sum_{k,j=1}^{m}(1-|w_k|)(1-|w_j|)\tilde{b}_r^{kj}, \quad r=1,\cdots,m,$$

为分量的向量.

证. 不难验证，如果 $\alpha_k\in[0,1]$，则

$$\prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k)\leqslant 1-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k+\sum_{k<j}\alpha_k\alpha_j.$$

从而

$$\begin{aligned}1-g(r,|w|)&=\sum_{x\in\mathscr{X}}p(r,x)(1-|w|^x)\\&\geqslant\sum_{x\in\mathscr{X}}p(r,x)\Big[\sum_{k=1}^{m}x^k(1-|w_k|)\\&\quad-\sum_{k<j}x^kx^j(1-|w_k|)(1-|w_j|)\\&\quad-\sum_{k}\frac{(x^k-1)x^k}{2}(1-|w_k|)^2\Big]\\&=\sum_{k=1}^{n}\alpha_r^k(1-|w_k|)-\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m}\tilde{b}_r^{kj}(1-|w_k|)\\&\quad\times(1-|w_j|).\end{aligned}$$

引理得证.

定理 6 设 A 为素阵，$\lambda_1<1$. 那末在区域 $\|w\|\leqslant 1$ 内一致有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-g_n(w)}{\lambda_1^n}=h(w)v', \tag{22}$$

其中函数 $h(w)$ 对 $\|w\|\leqslant 1$ 有界，在区域 $\|w\|<1$ 内 $h(w)$ 是

解析函数,并且 $h(1)=0$, $h(0)>0$.

证. 令

$$d_n(w)=\frac{1-g_n(w)}{\lambda_1^n}.$$

首先注意到,由引理 1 和式(11),(13)

$$|d_n(w)|\leqslant\frac{|1-w|A^n}{\lambda_1^n}\leqslant c,$$

其中 c 是常数,不依赖 n 和 $w(\|w\|\leqslant 1)$. 由于函数 $g(w)$ 在区域 $\|w\|\leqslant 1$ 内有一致有界的一阶和二阶偏导数,可见

$$d_{n+1}=\frac{g(1)-g(g_n(w))}{\lambda_1^{n+1}}=\frac{1}{\lambda_1^{n+1}}[(1-g_n(w))A$$

$$+O(\|1-g_n(w)\|^2)]=d_n\frac{A}{\lambda_1}+O(\lambda_1^{n-1}),$$

其中 $O(\lambda_1^{n-1})$ 是一向量,满足 $\|O(\lambda_1^{n-1})\|\leqslant c_1\lambda_1^{n-1}$, 而 c_1 是不依赖 w 和 n 的常数. 利用归纳法得

$$d_{n+m}=d_n\left(\frac{A}{\lambda_1}\right)^m+\sum_{k=0}^{m-1}O(\lambda_1^{n+k-1})\left(\frac{A}{\lambda_1}\right)^k$$

$$=d_n\left(\frac{A}{\lambda_1}\right)^m+O(\lambda_1^{n-1}). \tag{23}$$

所以

$$\|d_{n+m}-d_{n+l}\|\leqslant\left\|\left(\frac{A}{\lambda_1}\right)^m-\left(\frac{A}{\lambda_1}\right)^l\right\|\cdot c+\|O(\lambda_1^{n-1})\|,$$

从而当 $n\to\infty$, $m\to\infty$, $l\to\infty$ 时, 在区域 $\|w\|\leqslant 1$ 一致有 $\|d_{n+m}-d_{n+l}\|\to 0$. 于是,对 $\|w\|\leqslant 1$ 极限 $\lim\limits_n d_n(w)=d(w)$ 存在,并且在区域 $\|w\|<1$ 内是解析函数. 在 (23) 式中令 $m\to\infty$, $n\to\infty$ 并取极限,得

$$d(w)=(d(w),u)v',$$

于是(22)式得证;这时 $h_n(w)=(d(w),u)$.

由 $d(w)$ 的定义知, $d(1)=0$. 只剩下证明 $h(0)>0$. 令 $h_n(w)=(d_n(w),u)$. 由引理 2 可推出不等式

$$d_{n+1}(0) \geqslant d_n(0)\frac{A}{\lambda_1} - \frac{\lambda_1^{n-1}}{2} d_n(0)d_n(0)\widetilde{B}.$$

两侧同对向量 u 求数积，并且注意到向量 u 是正的，而且 $Au = \lambda_1 u$，可见存在一常数 c_2，使

$$h_{n+1}(0) \geqslant h_n(0)(1 - c_2\lambda_1^{n-1});$$

由此可见，对充分大的 n

$$h_{n+m}(0) \geqslant h_n(0)\prod_{j=0}^{m-1}(1 - c_2\lambda_1^{n+j-1}),$$

$$h(0) \geqslant h_n(0)\prod_{j=0}^{\infty}(1 - c_2\lambda_1^{n+j-1}).$$

现在来证明对任意 n 有 $h_n(0) > 0$。事实上，如果 $w_k \in (0,1)$，则

$$1 - g_n(0) \geqslant 1 - g_n(w) \geqslant (1 - w)A^n - \frac{1}{2}(1 - w)(1 - w)\widetilde{B}^n;$$

由此得

$$h_n(0) \geqslant (1 - w, u) - \frac{\lambda_1^{-n}}{2}((1 - w)(1 - w)\widetilde{B}^n, u).$$

选择 w，使它离 1 充分地近，得 $h_n(0) > 0$. 定理得证.

在 $\xi(n) > 0$ 的条件下，下面的定理提供了关于 $n \to \infty$ 时向量 $\xi(n)$ 的分布的信息.

定理 7 设 A 是素阵，$\lambda_1 < 1$. 那末，在 $\xi(n) \neq 0$ 和 $\xi(0) = x$ 的条件下，向量 $\xi(n)$ 的条件分布收敛于以不依赖于 x 的函数

$$g^*(\omega) = 1 - \frac{h(w)}{h(0)} \tag{24}$$

为母函数的分布. 函数 $g^*(w)$ 满足函数方程

$$g^*(g(w)) = 1 - \lambda_1 + \lambda_1 g^*(w). \tag{25}$$

证. 在 $\xi(0) = x$, $\xi(n) > 0$ 的条件下，向量 $\xi(n)$ 的母函数记作 $g_n^*(x, w)$. 那末

$$g_n^*(x, w) = \mathbf{E}_x\{w^{\xi(n)} | \xi(n) > 0\} = \frac{\mathbf{E}_x w^{\xi(n)} - \mathbf{P}_x\{\xi(n) = 0\}}{1 - \mathbf{P}_x\{\xi(n) = 0\}}$$

$$= \frac{g_n(x, w) - g_n(x, 0)}{1 - g_n(x, 0)} = 1 - \frac{1 - g_n(x, w)}{1 - g_n(x, 0)}.$$

因为 $g_n(x, w) = [g_n(w)]^*$，则利用定理 6 得

$$\frac{1 - g_n(x, w)}{1 - g_n(x, 0)} = \frac{1 - \prod_1^m \{1 - [1 - g_n(x, w)]\}^{x^k}}{1 - \prod_1^m \{1 - [1 - g_n(k, 0)]\}^{x^k}}$$

$$\to \frac{h(w)(v, x)}{h(0)(v, x)} = \frac{h(w)}{h(0)}.$$

这就证明了向量 $\xi(n)$ 的极限条件分布的存在性和(24)式。

此外，

$$g^*(g(w)) = 1 - \lim_n \frac{1 - g_n(x, g(w))}{1 - g_n(x, g(0))} \cdot \frac{1 - g_n(x, g(0))}{1 - g_n(x, 0)}.$$

由等式

$$\lim_n \frac{1 - g_n(x, g(w))}{1 - g_n(x, g(0))} = \lim_n \frac{1 - g_{n+1}(x, w)}{1 - g_{n+1}(x, 0)} = \frac{h(w)}{h(0)}$$

以及(22)式得

$$\lim_n \frac{1 - g_{n+1}(0)}{1 - g_n(0)} = \lambda_1.$$

因而

$$g^*(g(w)) = 1 - \lambda_1 \frac{h(w)}{h(0)} = 1 - \lambda_1 + \lambda_1 g^*(w).$$

定理得证.

由函数方程(25)得

$$1 - g^*(g_n(w)) = \lambda_1^n (1 - g^*(w)),$$

而作为特殊情形有

$$1-g^*(g_n(0))=\lambda_1^n, \quad n\geqslant 1.$$

在 $\xi(n)\neq 0$ 的条件下，为求 $n\to\infty$ 时群体中质点的渐近数量的数学期望，需要对 $w=1$ 计算 $\nabla g^*(w)$.

为此，我们考虑极限

$$\lim_{s\downarrow 0}\frac{g^*(1)-g^*(1-sw)}{s}$$

$$=\lim_{s\downarrow 0}\frac{h(1-sw)}{sh(0)}=(\nabla g^*(1),w).$$

如果仍使用定理 6 的证明中的记号，则有

$$h(w)=\lim_n h_n(w)=\lim_n(d_n(w),u).$$

假设向量 w 非负，而且 $\|w\|<1$. 由引理 1

$$h_n(w)\leqslant((1-w),u). \tag{26}$$

另一方面，有

$$1-g_{n+1}(w)\geqslant(1-g_n(w))A-\frac{1}{2}(1-g_n(w))$$

$$\times(1-g_n(w))\widetilde{B},$$

并且仿照定理 6 的证明可得估计

$$h(w)\geqslant h_n(w)\prod_{j=0}^{\infty}(1-\lambda_1^{n+j-1}c\|1-w\|^2).$$

这里，如果把 w 换成 $1-sw$ (其中 w 仍然是非负向量，而且 $\|w\|\leqslant 1$)，并且考虑到不等式(26)，即可得到

$$(w,u)\geqslant\lim_{s\downarrow 0}\frac{h(1-sw)}{s}\geqslant\lim_{s\downarrow 0}\frac{h_n(1-sw)}{s}=(w,u).$$

于是，

$$(\nabla g^*(1),w)=\frac{(u,w)}{h(0)}. \tag{27}$$

临界情形 已经清楚，当 $\lambda_1>1$ 时，分枝过程质点的数量无限增长；而当 $\lambda_1<1$ 时，过程以概率 1 退化. 称 $\lambda_1=1$ 的情形为临界情形. 如果再加上关于过程非奇异性的要求，则在这种情形下它仍以概率 1 退化. 与 $\lambda_1<1$ 的情形一样，对于 $\lambda_1=1$ 的

情形，也可以考虑在 $\xi(n)>0$ 的条件下 $n\to\infty$ 时向量 $\xi(n)$ 的条件分布。结果表明，在这些条件下向量 $\xi(n)/n$ 的极限条件分布存在。它对应于在空间中有固定方向（即向量 u 的方向）的向量，而此随机向量服从指数分布。

为简便计，我们限于考虑仅有一种类型质点的过程。这时

$$g(w)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k w^k,\quad p_k=\mathbf{P}\{\xi(1)=k|\xi(0)=1\}.$$

对过程的非奇异性的要求意味着 $p_1\neq 1$。向量 $\xi(1)$ 的一阶矩的矩阵现在化为一个数

$$a=\sum_{k=1}^{\infty}kp_k.$$

对于临界状态，$a=1$，从而 $p_0\neq 1$。由此可见，$g(w)$ 是非线性的。现在我们只在线段 $w\in[0,1]$ 考虑函数 $g(w)$。在此线段上 $g(w)$ 可微，$g'(1)=1$，而且对 $w\in(0,1)$ 有 $0<g'(w)<1$。因为 $g(1)-g(w)=g'(\tilde{w})(1-w)$，$w<\tilde{w}<1$，而且 $g(1)=1$，故 $g(w)>w\ (w\in[0,1))$。其次，$1>g_{n+1}(0)=g(g_n(0))>g_n(0)$。令 $q=\lim g_n(0)$；q 是过程的退化概率。因为 $g(q)=q$，故由以上知 $q=1$，而且方程 $g(x)=x$ 在区间 $(0,1)$ 上无解。因为

$$\begin{aligned}1-g_n(w)&\leqslant|1-g_n(0)|+|g_n(w)-g_n(0)|\\&\leqslant 2(1-g_n(0)),\end{aligned}$$

故当 $n\to\infty$ 时对 $w\in[0,1]$ 一致有 $g_n(w)\to 1$。现在估计差 $1-g_n(w)$ 的量级以进一步阐明此结果。假设

$$b=g''(1)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)p_k<\infty.$$

那末

$$\begin{aligned}g(w)&=g(1)+(w-1)g'(1)+\frac{1}{2}(w-1)^2g''(1)\\&\quad+o((1-w)^2)=w+\frac{b}{2}(1-w)^2\end{aligned}$$

$$+ o((1-w)^2).$$

所以,当 $n\to\infty$ 时 对 $w\in[0,1]$ 一致有

$$\frac{g_{n+1}(w)-g_n(w)}{1-g_n(w)}\to 0,$$

$$\frac{g_{n+1}(w)-g_n(w)}{[1-g_n(w)]^2}\to \frac{b}{2}.$$

我们要用恒等式

$$\frac{1}{1-g_{k+1}(w)}=\frac{1}{1-g_k(w)}+h_k(w),$$

其中

$$h_k(w)=\frac{g_{k+1}(w)-g_k(w)}{[1-g_k(w)]^2}\Big/\left(1-\frac{g_{k+1}(w)-g_k(w)}{1-g_k(w)}\right).$$

将此恒等式从 1 到 n 对 k 求和,然后除以 $n+1$, 得

$$\frac{1}{(n+1)[1-g_{n+1}(w)]}=\frac{1}{(n+1)[1-g(w)]}$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}h_k(w).$$

由此得

$$\lim(n+1)[1-g_{n+1}(w)]=\frac{2}{b}. \tag{28}$$

它告诉我们,在这种情形下应如何把随机变量 $\xi(n)$ 规范化,以使极限分布退化.

设 $\mathbf{E}$ 表示在"开始时体系由一个质点组成"的条件下的条件数学期望. 那末 $\mathbf{E}\xi(n)=1$, 而且

$$\mathbf{E}\{\xi(n)|\xi(n)>0\}=\frac{\mathbf{E}\xi(n)}{\mathbf{P}\{\xi(n)>0\}}$$

$$=\frac{1}{1-g_n(0)}=\frac{bn}{2}+o(n).$$

定理 8 如果 $a=1$, $b<\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{2}{bn}\xi(n)<t|\xi(n)>0,\ \xi(0)=1\right\}=1-e^{-t}. \tag{29}$$

证. 考虑随机变量 $\frac{2}{bn}\xi(n)$ 的条件分布的 Laplace 变换 $J_n(p)$:

$$J_n(p) = \mathbf{E}\{e^{-\frac{2p}{bn}\xi(n)} \mid \xi(n) > 0\}$$
$$= \frac{g_n(w) - g_n(0)}{1 - g_n(0)} = 1 - \frac{n[1 - g_n(w_n)]}{n[1 - g_n(0)]},$$

其中 $w_n = e^{-2p/bn}$. 令 $z_{nj} = 1 - g_n(w_j)$. 那末,由以上有

$$\frac{1}{z_{n+1,j}} = \frac{1}{z_{nj}} + h_{nj},$$

其中

$$h_{nj} = \frac{g_{n+1}(w_j) - g_n(w_j)}{[1 - g_n(w_j)]^2} \Big/ \left(1 - \frac{g_{n+1}(w_j) - g_n(w_j)}{1 - g_n(w_j)}\right),$$

而

$$\frac{1}{nz_{nn}} = \frac{1}{n(1 - w_n)} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} h_{kn}.$$

若令 $w = g_n(w_n)$, 则有

$$\lim_{n\to\infty} h_{kn} = \lim_{w\uparrow 1}\left[\frac{g(w) - w}{(1 - w)^2} \Big/ \left(1 - \frac{g(w) - w}{1 - w}\right)\right]$$
$$= \frac{b}{2};$$

因而

$$\lim \frac{1}{nz_{nn}} = \frac{b}{2p} + \frac{b}{2} = \frac{b}{2}\frac{p+1}{p}.$$

于是

$$\lim J_n(p) = 1 - \frac{p}{1+p} = \frac{1}{p+1} = J(p),$$

其中 $J(p)$ 是极限分布的 Laplace 变换. 定理得证.

连续时间分枝过程 设 $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, 是连续时间的齐次马尔科夫分枝过程. $\mathscr{X}$ 仍表示过程 $\xi(t)$ 的相空间,即分量为非负整数的 m 维向量的点阵. 记 $p_t(x, y)$ 为过程 $\xi(t)$ 的转移概率;

和以前一样，记 $p_t(e_i, y)=p_t(i, y)$，$p_t(x, e_j)=p_t(x, j)$，$p_t(e_i, e_j)=p_t(i, j)$. 假设转移概率满足条件

$$\lim_{t\downarrow 0} p_t(x, y)=\delta(x, y).$$

我们首先看分枝过程的 Колмогоров 微分方程. 根据齐次马尔科夫过程的一般理论，存在极限

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{p_t(x, y)-\delta(x, y)}{t}=q(x, y).$$

我们只考虑规则分枝过程，即假设满足条件

$$-q(x, y)<\infty,\quad \sum_{y\in\mathscr{X}} q(x, y)=0.$$

规则分枝过程的转移概率满足 Колмогоров 向后方程

$$\frac{dp_t(i, x)}{dt}=\sum_{y\in\mathscr{X}} q(i, y)p_t(y, x),\ i=1,\cdots,m. \tag{30}$$

(以后处处分别以 $q(i, y)$，$q(x, j)$，$q(i, j)$ 表示 $q(e_i, y)$，$q(x, e_j)$，$q(e_i, e_j)$.) 此方程组是不完全的；而若给它补上 $p_t(z, x)$，$z\in\mathscr{X}$，的导数的方程，则得到的是无穷方程组. 如果考虑母函数，则由(30)不难得到母函数的常微分方程的有限闭方程组. 将方程(30)乘以 w^x，$w=(w_1, w_2,\cdots, w_m)$，$|w_k|\leqslant 1$，然后对一切 $x\in\mathscr{X}$ 求和，得

$$\frac{dg_t(i, w)}{dt}=\sum_{y\in\mathscr{X}} q(i, y)g_t(y, w),$$

其中 $g_t(y, w)=\sum_{x\in\mathscr{X}} p(y, x)w^x$. 因为 $g_t(y, w)=[g_t(w)]^y$，故上面的等式可以写成

$$\frac{dg_t(i, w)}{dt}=Q(i, g_t(w)),\ i=1, 2,\cdots, m, \tag{31}$$

其中 $g_t(w)=(g_t(1, w),\cdots, g_t(m, w))$，$Q(i, w)=\sum_{y\in\mathscr{X}} q(i, y)w^y$. 方程组(31)可以写成向量形式:

$$\frac{dg_t(w)}{dt}=Q(g_t(w)), \tag{32}$$

其中 $Q(w)=(Q(1,w),Q(2,w),\cdots,Q(m,w))$ 是向量函数. 函数 $g_t(w)$ 满足初始条件

$$g_0(w)=w. \tag{33}$$

在推导 Колмогоров 向前方程之前，我们先指出：分枝条件(1)容许用 $q(i,y),i=1,2,\cdots,m$，来表示量 $q(x,y)$. 事实上，由等式

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{p_t(x,y)}{t}=\sum_{\Sigma y_{ij}=y}\lim\frac{1}{t}\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{x^i}p_t(e_i,y_{i_j}) \tag{34}$$

可见(对 $x\neq y$)，(34) 式右侧的项不等于0，当且仅当对下标偶 (i,j) 有 $e_i\neq y_{ij}$，且 $x+y_{ij}-e_i=y$. 而此时该项等于 $q(i,y-x+e_i)$. 在 $y-x+e_i\in\mathscr{X}$ 的条件下，在(34)式右侧的和中有x^i个这样的项. 当 $\min x^k<0$ 时设 $q(i,x)=0$，从而把函数 $q(i,z)$ 开拓到坐标皆为整数(正、负整数或0)的m维向量的点阵. 那末

$$q(x,y)=\sum_{i=1}^{m}x^iq(i,y-x+e_i).$$

由(34)式可见，上式对 $x=y$ 也成立.

根据所得到的公式，由马尔科夫过程的 Колиогоров 向前方程得

$$\begin{aligned}\frac{dp_t(k,x)}{dt}&=\sum_{y\in\mathscr{X}}p_t(k,y)q(y,x)\\&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{y\in\mathscr{X},x-y+e_i\in\mathscr{X}}p_t(k,y)y^iq(i,x-y+e_i),\\&\quad x\in\mathscr{X},\end{aligned} \tag{35}$$

此乃求函数 $p_t(k,x)$，$x\in\mathscr{X}$，的无穷线性微分方程组. 如果改为考虑母函数，则该方程组可以换成有穷的一阶线性偏微分方程组. 事实上

$$\frac{dg_t(k,w)}{dt}=\sum_{x\in\mathscr{X}}\sum_{y\in\mathscr{X}}\sum_{i=1}^{m}y^ip_t(k,y)w^{y-e_i}q$$

$$\times(i,x-y+e_i)w^{x-y+e_i}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{y\in\mathscr{X}}y^ip_t(k,y)$$

$$\times w^{y-e_i}Q(i,w)$$

或

$$\frac{dg_t(k,w)}{dt}=\sum_{i=1}^{m}Q(i,w)\frac{\partial g_t(k,w)}{\partial w_i},\ k=1,\cdots,m. \tag{36}$$

该方程组还应附上初始条件(33).

矩(连续时间) 假设

$$\sum_{x\in\mathscr{X}}q(i,x)x^k=\alpha_i^k\neq\infty\ \ (k,i=1,\cdots,m). \tag{37}$$

因为 $Q(i,w)$ 在区域 $\|w\|<1$ 内是解析函数，故在此区域内可以对方程(32)求微商. 有

$$\frac{da_j^k(t,w)}{dt}=\sum_{r=1}^{m}Q_j^r(g_t(w))a_r^k(t,w),$$

$$a_j^k(0,w)=\delta_j^k, \tag{38}$$

其中

$$Q_j^k(t,w)=\frac{\partial Q(j,w)}{\partial w_k}=\sum_{x\in\mathscr{X}}q(j,x)x^kw^{x-e_k},$$

而

$$a_j^k(t,w)=\frac{\partial g_t(j,w)}{\partial w_k}.$$

假设向量 w 的分量是正的，且 $w_k\uparrow 1$. 那末，由 Lebesgue 定理

$$\lim_{w\uparrow 1}a_j^k(t,w)=\lim_{w\uparrow 1}\mathbf{E}_j\xi^k(t)w^{\xi(t)}$$

$$=\mathbf{E}_j\xi^k(t)=a_j^k(t),$$

而由 Dini 定理，关于 t 一致有 $g_t(w)\to 1$. 当 $w\uparrow 1$ 时在等式

$$a_j^k(t, w) = \delta_j^k + \int_0^t \sum_{r=1}^m Q_j^r(g_s(w)) a_r^k(s, w) ds$$

中取极限,得

$$a_j^k(t) = \delta_j^k + \int_0^t \sum_{r=1}^m \alpha_j^r a_r^k(s) ds.$$

这样,如果条件(37)成立,则矩阵 $A(t)$ 对 t 可微,并且满足方程

$$A'(t) = A(t)\alpha, \quad A(0) = I,$$

其中 α 是以 α_j^k 为元的矩阵. 从而

$$A(t) = e^{\alpha t}.$$

此结果可以推广到高阶矩. 对方程(32)再求一次微商,得

$$\frac{d\tilde{b}_j^{kl}(t, w)}{dt} = \sum_{r=1}^m Q_j^r(g_t(w)) \tilde{b}_r^{kl}(t, w) + \sum_{r,s=1}^m Q_j^{rs}(g_t(w)) a_r^k(t, w) a_s^l(t, w),$$

其中

$$\tilde{b}_j^{kl}(t, w) = \frac{\partial^2 g_t(j, w)}{\partial w_k \partial w_l} = \mathbf{E}\xi^k(t)[\xi^l(t) - \delta^{kl}] w^{\xi - e_k - e_l},$$

而

$$Q_j^{rs}(w) = \frac{\partial^2 Q(j, w)}{\partial w_r \partial w_s} = \sum_{x \in \mathscr{X}} q(j, x) x^r (x^s - \delta^{rs}) w^{x - e_r - e_s}.$$

和前面同样,可以断定: 在

$$\beta_j^{rs} = \sum_{x \in \mathscr{X}} q(j, x) x^r (x^s - \delta^{rs}) < \infty (r, s, j = 1, \cdots, m) \tag{39}$$

的条件下,矩

$$\tilde{b}_j^{kl}(t) = \mathbf{E}_j \xi^k(t)[\xi^l(t) - \delta^{kl}], \quad t > 0,$$

存在,可微,并且满足方程

$$\frac{d\tilde{b}_j^{kl}(t)}{dt} = \sum_{r=1}^m \tilde{b}_r^{kl}(t) \alpha_j^r + \sum_{r,s=1}^m \beta_j^{rs} a_r^k(t) a_s^l(t), \tag{40}$$

$$\tilde{b}_j^{kl}(0) = 0, \quad (k, l, j = 1, \cdots, m).$$

设 $\widetilde{B}^k(t)$ 为以 $\widetilde{b}_j^{kl}(t), l, j=1,\cdots,m$, 为元的矩阵;记 $\widetilde{A}^k(t)$ 为以 $\widetilde{a}_j^{kl}$ 为元的矩阵,其中

$$\widetilde{a}_j^{kl}=\sum_{r=1}^{m} a_r^k(t)\beta_j^{rl}.$$

那末,方程组(40)的解可以表为

$$\widetilde{B}^k(t)=\int_0^t A(\theta)\widetilde{A}^k(\theta)e^{\alpha(t-\theta)}d\theta. \tag{41}$$

我们把这些关系式化为略微不同的形式. 记 $\widetilde{B}_j(t)$ 为以 $\widetilde{b}_j^{kl}(t)$, $k, l=1,\cdots,m$, 为元的矩阵. 由(41)式

$$\widetilde{b}_j^{kl}(t)=\int_0^t \sum a_r^l(\theta)\alpha_j^k(\theta)\beta_s^{ir}a_j^s(t-\theta)d\theta,$$

于是

$$\widetilde{B}_j(t)=\int_0^t A(\theta)\sum_{s=1}^{m}\beta_s a_j^s(t-\theta)A'(\theta)d\theta, \tag{42}$$

其中 β_j 是以 β_j^{rs}, $r, s=1,\cdots,m$, 为元的矩阵.

对于三阶矩可以得到类似的公式.

在研究连续时间分枝过程的渐近行为时, 我们只假设成立条件(37)和(39),而矩阵 α 具有如下性质:

条件 (Π): 存在 n,对任意 $k, j=1,\cdots,m$, 可以找到一列数 $r_1, r_2,\cdots, r_n$, $r_k=1, 2,\cdots, m$, 使

$$\alpha_{r_1}^k\alpha_{r_2}^{r_1}\cdots\alpha_j^{r_n}>0.$$

此条件的直观意义是: 对任意 k 和 j, 它保证"第 k 型质点经 n 次演变产生包含第 j 型质点的后代"的可能性.

由条件(Π)可知,对某充分大的 c, 矩阵 $\alpha+cI$ 是非负的和素的. 从而,对它可以用 Perron 定理, 以及在对离散时间场合研究矩阵 A 时由该定理所得到的结论. 这样, 矩阵 α 有简单最大特征值 μ_1 (它现在未必是正的),而有一正特征向量与 μ_1 相对应, 记作 u; 对应于同一特征值 μ_1 的转置矩阵 α 的正特征向量记作 v,并且假设向量 u 和 v 是由条件 $(u, v)=1$ 规范化的. 矩阵 α 可以写为

$$\alpha = \mu_1\alpha_1 + \alpha_2,$$

其中 $\alpha_1 = uv'$，$\alpha_1^2 = \alpha_1$，$\alpha_1\alpha_2 = \alpha_2\alpha_1 = 0$，而矩阵 α_2 的特征值的实部小于 μ_1.

由等式

$$\alpha^n = \mu_1^n\alpha_1 + \alpha_2^n$$

可得

$$e^{\alpha t} = e^{\mu_1 t}\alpha_1 + e^{\alpha_2 t} = e^{\mu_1 t}(\alpha_1 + \psi(t)), \tag{43}$$

其中 $\psi(t)$ 是一矩阵，当 $t\to\infty$ 时它的元递减并且对某个 $c>0$ 与函数 e^{-ct} 同阶.

现在不难确定矩阵 $\widetilde{B}_j(t)$ 的渐近行为. 由于

$$\widetilde{B}_j(t) = e^{2\mu_1 t}\int_0^t e^{-\mu_1(t-\theta)}[e^{-\mu_1\theta}A(\theta)]$$

$$\times\left[\sum_{s=1}^m \beta_s e^{-\mu_1(t-\theta)}a_j^s(t-\theta)\right][e^{-\mu_1(\theta)}A(\theta)]d\theta$$

$$= e^{2\mu_1 t}\left\{\int_0^t e^{-\mu_1(t-\theta)}\left[\alpha_1\sum_s \beta_s e^{-\mu_1(t-\theta)}a_j^s(t-\theta)\right]\right.$$

$$\left.\alpha_1' d\theta + \varepsilon_t\right\},$$

其中当 $t\to\infty$时 $\varepsilon_t\to 0$，故

$$e^{-2\mu_1 t}\widetilde{B}_j(t) = \alpha_1\sum_s \beta_s\rho_j^s\alpha_1' + \varepsilon_t. \tag{44}$$

这里 ρ_j^s 是矩阵

$$\rho = \int_0^\infty e^{-2\mu_1 t}A(t)dt = \int_0^\infty e^{(\alpha-z\mu_1 I)t}dt$$

的元. 我们注意到

$$\rho = \frac{1}{2\mu_1}\left(I - \frac{\alpha}{2\mu_1}\right)^{-1}.$$

令

$$k_j = \sum_{s=1}^m (v'\beta_s v)\rho_j^s; \tag{45}$$

我们可以把(44)式写为

$$e^{-\mu_1 t}\widetilde{B}_j(t) = k_j uu' + \varepsilon_t, \tag{46}$$

其中当 $t\to\infty$时 $\varepsilon_t\to 0$.

定理 9 如果矩阵 α 满足条件 (Π), 而且条件(37)和(39)成立,则分枝过程 $\xi(t)$ 有有穷二阶矩,而(46)式决定它们的渐近行为. 对 $\mu_1>0$, 当 $t\to\infty$ 时向量 $e^{-\mu_1 t}\xi(t)$ 均方收敛于某一随机向量ζ, 且ζ与u共线.

证. 设 $\zeta(t)=e^{-\mu_1 t}\xi(t)$, $B_j(t)=\mathbf{E}_j\xi(t)\xi'(t)$, $D_j(t)$ 是对角阵,对角线上的元为 $a_j^k(t)$, $k=1,\cdots,m$. 注意到

$$B_j(t)=\widetilde{B}_j(t)+D_j(t),$$

$$\begin{aligned}\delta &= \mathbf{E}_j[\zeta(t+\tau)-\zeta(t)][\zeta(t+\tau)-\zeta(t)]'\\ &= e^{-2\mu_1(t+\tau)}B_j(t+\tau)-e^{-\mu_1(2t+\tau)}\mathbf{E}_j\xi(t+\tau)\xi'(t)\\ &\quad -e^{-\mu_1(2t+\tau)}\mathbf{E}_j\xi(t)\xi'(t+\tau)+e^{-2\mu_1 t}B_j(t).\end{aligned}$$

利用过程 $\xi(t)$ 的马尔科夫性得

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_j\xi(t+\tau)\xi'(t) &= \mathbf{E}_j[\mathbf{E}_{\xi(t)}\xi(t+\tau)]\xi'(t)\\ &= \mathbf{E}_jA(\tau)\xi(t)\xi'(t)=A(\tau)B_j(t);\end{aligned}$$

同理可得

$$\mathbf{E}_j\xi(t)\xi'(t+\tau)=B_j(t)A'(\tau).$$

因为当 $t\to\infty$时 $e^{-\mu_1 t}A(t)\to\alpha_1$, $e^{-2\mu_1 t}D_j(t)\to 0$, 而 $\mu_1>0$, 故

$$\begin{aligned}\delta &= e^{-2\mu_1(t+\tau)}\widetilde{B}_j(t+\tau)-e^{-\mu_1\tau}A(\tau)e^{-2\mu_1 t}\widetilde{B}_j(t)\\ &\quad -e^{-2\mu_1 t}\widetilde{B}_j(t)e^{-\mu_1\tau}A'(\tau)+e^{-2\mu_1 t}\widetilde{B}_j(t)+\varepsilon_t'\\ &= 2k_juu'-(\alpha_1+e^{-\mu_1\tau}e^{\alpha_2\tau})k_juu'-k_juu'(\alpha_1\\ &\quad +e^{-\mu_1\tau}e^{\alpha_2\tau})'+\varepsilon_t'',\end{aligned}$$

其中当 $t\to\infty$时 ε_t' 和 ε_t'' 趋于 0.

因为 $\alpha_1 u=u$, $\alpha_2 u=(\alpha-\mu_1\alpha_1)u=\mu_1 u-\mu_1 u=0$, $e^{\alpha_2\tau}u=0$, 故由上式可知,当 $t\to\infty$时

$$\delta=\varepsilon_t''\to 0.$$

这就证明了均方极限 $\zeta=\underset{t\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\zeta(t)$ 存在. 定理得证.

我们引进随机向量ζ的分布的 Laplace 变换:

$$J(k,p)=\mathbf{E}_k e^{-p(u,\zeta)}.$$

这里 p 是复数，$\mathrm{Re}p \geqslant 0$. 以后我们假设 $\sum_{k=1}^{n}(u^k)^2 = 1$. 与过程 $\xi(t)$ 同时我们可以考虑离散时间分枝过程 $\xi(n\Delta)$，$\Delta > 0$，$n = 0, 1, \cdots$. 向量 ζ 的分布与向量 $e^{-\mu_1 n\Delta}\xi(n\Delta)$ 的极限分布重合；所以，由(18)式对任意 $t > 0$ 有

$$J(k, e^{\mu_1 t}p) = g_t(k, J(p)), \tag{47}$$

其中 $J(p)$ 是以 $J(k, p)$ 为分量的向量. 将该式对 t 求微商，然后令 $t = 0$，得微分方程组

$$\mu_1 p J'(k, p) = Q(k, J(p)). \tag{48}$$

这时

$$J(k, 0) = 1,\ J'(k, 0) = -v^k\left(\sum_{k=1}^{n}(u^k)^2 = 1\right).$$

我们来求过程的退化概率. 设

$$q^k = \mathbf{P}_k\ \{\text{从某个 } t \text{ 起 } \xi(t) = 0\},$$

而 $q = (q^1, \cdots, q^m)$. 因为

$$q^k = \lim_{R_e p \to +\infty} J(k, p),$$

故由方程(47)对任意 $t > 0$ 有

$$q^k = g_t(k, q).$$

将此式对 t 求微商，再利用(48)式可知，向量 q 满足关系式

$$Q(k, q) = 0,\quad k = 1, \cdots, m.$$

现在设 $\mu_1 \leqslant 0$. 仍假设矩阵 a 满足条件 (Π). 以前对离散时间得到的某些结果，可以直接移到连续时间过程.

我们假设过程 $\xi(t)$ 是可分的、右连续的和强马尔科夫的. 我们给出过程非自返的定义. 设 τ_1 是首次出现 $\xi(t) \neq \xi(0)$ 的时刻. 如果不存在这样一个时刻，则令 $\tau_1 = \infty$，$\xi(\infty) = b$. 同样，定义 τ_2 为首次出现 $\xi(t) \neq \xi(\tau_1)$ 的时刻 t (如果 $\tau_1 < \infty$ 而且这样的 t 存在的话)；若 $\tau_1 = \infty$ 或 τ_2 不存在，则令 $\tau_2 = \infty$；依此类推.

称过程 $\xi(t)$ 为**非自返的**，如果对任意 $x (x \neq 0)$，在序列

$$x = \xi(0),\ \xi(\tau_1), \cdots, \xi(\tau_n), \cdots$$

中状态 x 以概率 $\mathbf{P}_x$ 等于 1 只出现有限多次.

显然,过程 $\xi(t)$ 是非自返的，当且仅当对任意 $\Delta > 0$ 离散时间过程 $\xi(n\Delta)$ 是非自返的.

这一点容许立即把定理 4 移到连续时间过程

定理 10 如果分枝过程 $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, 是非奇异的，而矩阵 α 满足条件 (Π), 则它是非自返的.

定理 11 如果过程 $\xi(t)$ 非奇异,矩阵 α 满足条件 (Π),而且 $\mu_1 \leqslant 0$, 则过程 $\xi(t)$ 以概率 1 退化.

该定理的证明和定理 5 的证明没有区别.

在次临界情形和临界情形下 $(\mu_1 \leqslant 0)$ 过程的渐近性质与离散时间过程的性质类似.

只有一种类型质点的分枝过程 现在我们来比较详细地研究只有一种类型质点的连续时间分枝过程.

这时集合 $\mathscr{X}$ 和数列 $0, 1, \cdots, n, \cdots$ 重合,而 $p_t(1, x)$是"体系在开始时有一个质点,而在时刻 t 有 x 个质点"的概率. 令 $q(1, n) = q_n$, $Q(w) = \sum_0^\infty q_n w^n$ (w 是复数, $|w| \leqslant 1$), $g_t(w) = \sum_0^\infty p_t(1, n) w^n$. 这时,对 $k = 0, 2, 3, \cdots$ 有 $q_k \geqslant 0$, 而 $-q_1 = q_0 + q_2 + \cdots$, $p_0(1, n) = \delta_{1n}$. 代替微分方程组(32), 这里是一个常微分方程

$$\frac{dg_t(w)}{dt} = Q(g_t(w)),\ g_0(w) = w, \tag{49}$$

而代替方程组(36),是一阶线性偏微分方程

$$\frac{\partial g_t(w)}{\partial t} = Q(w)\frac{\partial g_t(w)}{\partial w},\ g_0(w) = w. \tag{50}$$

容易指出它的解. 此解形为

$$g_t(w) = \psi\left(t + \int_0^w \frac{dv}{Q(v)}\right),$$

其中 $\psi(t)$ 是函数 $t=\varphi(w)=\int_0^w \frac{dv}{Q(v)}$ 的反函数. 以前引进的矩阵 α 在这里是一个数 $\alpha=\sum_{n=1}^{\infty} nq_n=Q'(1)$，而矩阵 α 的特征值现在就是数 α 本身. 由以上可知: 对 $\alpha\leqslant 1$，过程的退化概率 q 等于 1; 而对 $\alpha>1$，$q<1$. 这时，退化概率是方程 $Q(x)=0$ 的根.

注意到，对 $x\in[0,1]$ 有 $Q''(x)\geqslant 0$. 因为 $Q(1)=0$，故函数 $Q(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上最多一次取 0 为值. 因而，退化概率是方程 $Q(x)=0$ 在线段 $[0,1]$ 上的最小根.

现在我们来研究退化过程在时间段 $(0,t)$ 上的退化概率 $p_t(1,0)$，$t\to\infty$，的渐近行为. 记 $q(t)=p_t(1,0)$，$p(t)=1-q(t)$.

定理 12 如果 $\alpha=Q'(1)\leqslant 0$，$\beta=Q''(1)<\infty$，则

$$p(t)\approx ke^{\alpha t},\quad \alpha<0,$$

$$p(t)\approx \frac{2}{Bt},\quad \alpha=0.$$

证. 因为 $p_t(1,0)=q_t(0)$，故由方程(49)可见，函数 $p(t)$ 满足方程

$$\frac{dp(t)}{dt}=-Q(1-p(t)),\quad p(0)=1.$$

利用有限增量公式，得

$$\frac{dp(t)}{dt}=-Q(1)+p(t)Q'(\theta)=p(t)Q'(\theta),$$

其中 θ 介于 $p(1,0)$ 和 1 之间. 因为 $Q'(x)$ 是单增函数，$\theta\to 1$ $(t\to\infty)$，故 $Q'(\theta)=Q'(1)-\varepsilon(t)$，而 $\varepsilon(t)>0$，$\lim\limits_{t\to\infty}\varepsilon(t)=0$. 这样

$$\frac{dp(t)}{dt}=p(t)(\alpha-\varepsilon(t)),$$

由此得

$$p(t)=\exp\left\{\alpha t-\int_0^t \varepsilon(\tau)d\tau\right\}.$$

注意到，对 $\theta<\theta'<1$ 有

$$\begin{aligned}0<\varepsilon(t)&=Q'(1)-Q'(\theta)=Q''(\theta')(1-\theta')\\&\leqslant Q''(1)[1-p_t(1,0)]\leqslant\beta e^{\alpha t},\end{aligned}$$

所以积分 $\int_0^\infty \varepsilon(t)dt$ 有限．由此可见，对 $\alpha<0$ 有

$$p(t)\approx ke^{\alpha t},\ \text{其中}\ k=\exp\left(-\int_0^\infty \varepsilon(t)dt\right)$$

现在看 $\alpha=0$ 的情形．有

$$\begin{aligned}\frac{dp(t)}{dt}&=-Q(t)[1-p(t)]=-Q(1)\\&\quad+p(t)Q'(1)-\frac{p^2(t)}{2}Q''(\theta_1),\end{aligned}$$

其中 θ_1 是区间（$p_t(1,0)$，1）上的一个数．因为当 $t\to\infty$ 时 $Q''(\theta_1)\to Q''(1)$，故

$$\frac{dp(t)}{dt}=-\frac{p^2(t)}{2}(\beta+\varepsilon(t)),$$

其中 $\varepsilon(t)\to 0$ $(t\to\infty)$．由此可见

$$p(t)=\frac{2}{\beta t+\int_0^t \varepsilon(s)\,ds+2}=\frac{2}{\beta t}+o\left(\frac{1}{t}\right).$$

定理得证．

我们给定理 12 补充一个有关的结果，它涉及退化过程之概率 $p_t(1,n)$ 的渐近行为．设

$$p(t,w)=1-g_t(w).$$

对 $w=0$ 有：$p(0,t)=1-q_t(0)=1-p_t(1,0)=p(t)\approx ke^{\alpha t}$．可以假设，对于 $w\neq 0$ 的情形，函数 $p(w,t)$ 也有同一递减速度．为此我们设

$$\varphi(w,t)=\frac{p(w,t)}{p(t)}=\frac{1-g_t(w)}{p(t)}.$$

注意，函数

$$g_t^*(w) = 1 - \varphi(w,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_t(1,n)}{p(t)} w^n$$

是质点个数 $\nu(t)$ 在“它于时刻 t 不等于 0” 的条件下之条件分布的母函数.

定理 13 如果 $\alpha = Q'(1) < 0$, $\beta = Q''(1) < \infty$, 则当 $t \to \infty$ 时,质点个数 $\nu(t)$ 在 “过程于时刻 t 不退化 $(\nu(t) \neq 0)$” 的条件下的条件分布收敛,极限分布的母函数为

$$g^*(w) = 1 - \exp\left\{\alpha \int_0^w \frac{dv}{Q(v)}\right\}.$$

证. 考虑函数 $\varphi(w,t)$. 由(49)可见, $\varphi(w,t)$ 满足方程

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{p(t)} Q(1 - p(t)\varphi) + \frac{\varphi}{p(t)} Q(1 - p(t)). \quad (51)$$

将此式右侧按 Taylor 公式展开,得

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{p(t)}\Big[Q(1) - p(t)\varphi Q'(1) + \frac{(p(t)\varphi)^2}{2}(Q''(1) + \varepsilon_1(t))\Big] + \frac{\varphi}{p(t)} \times \Big[Q(1) - p(t)Q'(1) + \frac{p^2(t)}{2} \times (Q''(1) + \varepsilon_2(t))\Big],$$

其中 $\varepsilon_1 = Q''(\theta_1) - Q''(1)$, $\varepsilon_2 = Q''(\theta_2) - Q''(1)$, θ_1 和 θ_2 分别为介于 $g_t(w)$ 与 1 和 $g_t(0)$ 与 1 之间的两个数. 当 $t \to \infty$ 时, 在任意区域 $|w| \leqslant \rho < 1$ 内一致有 $\varepsilon_1(t) \to 0$ 和 $\varepsilon_2(t) \to 0$. 上式可以写成

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{p(t)\varphi^2}{2}(\beta + \varepsilon_1) + \frac{p(t)\varphi}{2}(\beta + \varepsilon_2). \quad (52)$$

自某个充分大的 t 起,有

$$\frac{d\varphi}{dt} < \frac{p(t)\varphi}{2}\left(\beta + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{3}{4}\beta p(t)\varphi;$$

由此

$$\varphi(w,t) \leqslant \varphi(w,t_0)\exp\left\{-\frac{3}{4}\beta\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right\}.$$

由于积分 $\int_{t_0}^{\infty} p(s)ds$ 收敛，可见当 $t\to\infty$ 时函数 $\varphi(w,t)$ 有界。所以方程(51)可以表为

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{p(t)\varphi}{2}[\beta(1-\varphi)+\varepsilon],$$

$$\varphi(w,0) = 1-w,$$

其中 $\varepsilon = \varepsilon_2 - \varphi\varepsilon_1 \to 0\ (t\to\infty)$。如果把此方程的解表为

$$\varphi(w,t) = (1-w)\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t p(s)[\beta(1-\varphi(w,s))+\varepsilon]\ ds\right\},$$

则可以断定

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(w,t) = K(w).$$

此外，由(52)式有 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{d\varphi}{dt} = 0$。因为 $\varphi(w,t)$ 在圆 $|w|<1$ 内是解析函数，而且所涉及到的极限运算在任何圆 $|w|\leqslant\rho<1$ 内都是一致的，故函数 $K(w)$ 在此圆内也是解析的，并且在任意圆 $|w|\leqslant\rho<1$ 内一致有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{d\varphi(w,t)}{dw} = \frac{dK(w)}{dw}.$$

为求函数 $K(w)$ 可以利用方程(50)。把 $g_t(w) = 1-p(t)\varphi(w,t)$ 代入此方程，得

$$-p'(t)\varphi(w,t) - p(t)\frac{d\varphi(w,t)}{dt}$$

$$= -Q(w)p(t)\frac{d\varphi(w,t)}{dw}.$$

将此方程除以 $p(t)$，令 $t\to\infty$；由于 $p'(t)/p(t)\to\alpha\ (t\to\infty)$（见定理 12 的证明），得

$$\alpha K(w) = Q(w)\frac{dK(w)}{dw},$$

而且 $K(0) = \lim\limits_{t\to\infty}\varphi(0,t) = 1$。于是

$$K(w)=e^{\alpha\int_0^w\frac{dv}{Q(v)}},$$

定理得证。

§2. 连续状态分枝过程

如果分枝过程由大量不同类型的质点组成，则为了描绘群体的数量，往往引进相对量，即在给定时刻一定类型质点的数量对某个参数的比，而此参数表征群体中质点的数量级．在其它类似的场合，则用一定类型的质点的质量或它们所占据的几何体积来表征群体数量．这时可以用向量来描述体系的状态：向量的维数等于质点的不同类型的个数，而其分量等于相应类型质点的体积(质量)．和以前不同，过程的状态现在是用任意非负向量来表征的．这时，分枝过程的基本性质可以概括地表述如下：随着时间的流逝，群体的每一部分的演变不依赖群体其余部分的演化．

在有些场合，有兴趣的是群体质点的类型可以构成任意集合的情形．例如，考虑质点的内在区别的同时还要考虑它们的显著区别，即它们特征(以前称做类型)的区别，而这些特征是由一取无穷多个值的参数(能量，空间位置)来表征的．

这一节研究由 m 种类型连续分量(质量)构成的群体；下一节要研究具有有限种类型的有限个质点的过程，但是假设群体中的每个质点与某一马尔科夫过程相对应，它是在相空间中运动的．

设 E 是质点类型的任意集合；e 是 E 中的点；$\mathscr{E}$ 是 E 的子集(包括单点子集 $\{e\}$) 的 σ 代数．

设 $b_*(\mathscr{E})$ 是 E 上一切复值的有界 $\mathscr{E}$ 可测函数的空间，而 $\mathscr{M}(\mathscr{E})[\mathscr{M}_+(\mathscr{E})]$ 是 $\mathscr{E}$ 上一切有限负荷[测度]的空间．如果 $\mu\in\mathscr{M}(\mathscr{E})$，则记 $\|\mu\|$ 为负荷 μ 的完全变差．设 $\mathfrak{L}_+=\mathfrak{L}_+(\mathscr{M}(\mathscr{E}))$ 是 $\mathscr{M}_+(\mathscr{E})$ 中包含它的一柱集的最小 σ 代数；这里所说的柱集，即满足如下条件的测度 μ 的集合：

$$c_k\leqslant\mu(A_k)\leqslant d_k,\quad k=1,\cdots,n,$$

其中 c_k, d_k 是任意实数，$A_k \in \mathscr{E}$ 是任意集. 对任意 $p = p(e) \in b_*(\mathscr{E})$ 和 $\mu \in \mathscr{M}(\mathscr{E})$，记

$$\langle p, \mu \rangle = \int_E p(e)\mu(de).$$

定义 1 设 $\{\nu_t, \mathfrak{S}_t, \mathbf{P}_\nu\}$ 是一齐次马尔科夫过程，$\{\mathscr{M}_+(\mathscr{E}), \mathfrak{L}\}$ 是它的相空间. 我们称此过程为具有连续状态并以 $\{E, \mathscr{E}]$ 为质点类型空间的分枝过程 ν_t, $t \geqslant 0$，如果它满足下列条件:

a) 对任意 $t > 0$

$$\mathbf{P}_0\{\nu_t = 0\} = 1, \tag{1}$$

而且对任意 $\varepsilon > 0$，当 $\|\nu\| \to 0$ 时

$$\mathbf{P}_\nu\{\|\nu(t)\| > \varepsilon\} \to 0; \tag{2}$$

b) 对任意 $p \in b_*(\mathscr{E})$, $\mathrm{Re}p \geqslant 0$, 和 $\nu_i \in \mathscr{M}_+(\mathscr{E})$ 有

$$\mathbf{E}_{\nu_1+\nu_2} e^{-\langle p, \nu_t \rangle} = \mathbf{E}_{\nu_1} e^{-\langle p, \nu_t \rangle} \mathbf{E}_{\nu_2} e^{-\langle p, \nu_t \rangle}; \tag{3}$$

c) 过程 ν_t 随机连续: 对任意 $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}_\nu\{\|\nu_t - \nu\| > \varepsilon\} \to 0 \quad (t \to 0).$$

条件(1)表明质点可以自生但不存在移入；条件(2)表明，小质量的群体增长到有限的规模需要很长的时间段；我们称条件(3)为过程的分枝条件，它是分枝过程特有的基本性质: 群体两个不同部分是相互独立地发展的.

对于只有有限多种质点的情形，一般定义可以大大简化. 这时，空间 E 由有限个点 $e_1, e_2, \cdots, e_m$ 组成；$\mathscr{M}_+(\mathscr{E})$ 与具有非负分量的 m 维向量的集合 $\mathscr{R}_+^m$ 等距: $\mu = (\mu^1, \cdots, \mu^m)$, $\mu^k = \mu(e_k)$; $\mathfrak{L}_m$ 可以等同于 $\mathscr{R}_+^m$ 中 Borel 子集的 σ 代数 $\mathfrak{B}_+^m$; ν_t 是满足定义 1 中条件 a), b), c) 的马尔科夫过程，$(\mathscr{R}_+^m, \mathfrak{B}_+^m)$ 是它的相空间.

设

$$J(\nu, t, p) = \mathbf{E}_\nu e^{-\langle p, \nu_t \rangle}.$$

对 $p = -iu$, $u \in b(\mathscr{E})$, $J(\nu, t, p) = J(\nu, t, -iu)$ 是随机过程 ν_t 的特征泛函，而对一般情形它是在 $\nu_0 = \nu$ 的条件下，随机测

度 ν_t 的条件分布的 Laplace 变换.

由(2)式可见, $J(\nu, t, p) \to 1$ ($\|\nu\| \to 0$). 由此可知, $J(\nu, t, p)$ 是 $\nu[\nu \in \mathscr{M}_+(\mathscr{E})]$ 的连续函数. 事实上, 设 $\nu - \nu_n = \mu_n' - \mu_n''$, 其中 μ_n' 是负荷 $\nu - \nu_n$ 的正变差, 而 μ_n'' 是它的负变差. 如果 $\|\nu - \nu_n\| \to 0$, 则 $\|\mu_n'\| \to 0$, $\|\mu_n''\| \to 0$, $\nu + \mu_n'' = \nu_n + \mu_n'$, 而且由等式(3)有

$$J(\nu, t, p)J(\mu_n'', t, p) = J(\nu_n, t, p)J(\mu_n', t, p),$$

由此得 $\lim J(\nu_n, t, p) = J(\nu, t, p)$.

特别, 由条件(3)可见, 对任意 $s_k > 0$, λ, $\mathrm{Re}\lambda > 0$ (λ 是复数)有

$$J\left(\left(\sum_1^n s_k\right)\nu, t, \lambda p\right) = \prod_{k=1}^n J(s_k\nu, t, \lambda p).$$

所以, 对固定的 ν, t 和 p, 函数 $J(s\nu, t, \lambda p)$ 可以视为某一随机连续齐次独立增量数值过程 $\zeta(s)$ 的分布的 Laplace 变换. 如果再假设 $p \geqslant 0$, $\lambda = -iu$, 则量 $\zeta(s)$ 是非负的. 所以, 在这些条件下函数 $J(s\nu, t, -iup)$ 有如下表示:

$$J(s\nu, t, -iup) = \exp s\left\{iua(\nu, t, p) + \int (e^{iuz} - 1)\Pi(\nu, t, p, dz)\right\},$$

其中 $a = a(\nu, t, p) \geqslant 0$, 而测度 $\Pi(\nu, t, p, B)$, $B \in \mathscr{R}^1$, 满足

$$\Pi(\nu, t, p, \{0\}) = 0,$$

$$\int_{|z|<c} \|z\| \Pi(\nu, t, p, dz) < \infty, \tag{4}$$

$$\Pi(\nu, t, p, \|z\| > \varepsilon) < \infty.$$

如果设 $-\lambda p = \sum_1^m iu_k p_k$, 其中 u_k 是实数, 而 $p_k = p_k(\nu) \geqslant 0$, 则用同样的方法可以说明, $J(s\nu, t, \lambda p)$ 是随机连续的齐次独立和非负增量 m 维随机过程的特征函数. 从而

$$J\left(s\nu, t, -i\sum_{1}^{m} u_k p_k\right) = \exp s\Big\{i(u, a_m(\nu, t, p))$$

$$+\int_{\mathscr{R}_+^m}(e^{i(u,z)}-1)\Pi_m(\nu, t, p, dz)\Big\}, \tag{5}$$

其中 $a_m(\nu, t, p)$ 是具有非负分量的m维向量，而测度 Π_m 定义在 $\mathfrak{B}_+^m$ 上并且满足条件(4),其中 z 表示 $\mathscr{R}_+^m$ 中的点. 由特征函数表现为(5)式的唯一性可得

$$a\left(\nu t, \sum_{k=1}^{m} u_k p_k\right) = \left(u, a_m\left(\nu, t, \sum_{1}^{m} u_k p_k\right)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} u^k a(\nu, t, p_k),$$

即 $a(\nu, t, p)$ 是 p 的线性泛函. 显然，$J(\nu, t, p)$ 是 p 的连续函数(对关于非负 p 的一致收敛或单调收敛而言). 从而,如果记

$$a(\nu, t, \chi_A) = a(\nu, t, A),$$

则作为A的函数 $a(\nu, t, A)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的测度,并且

$$a(\nu, t, p) = \int_E p(e)a(\nu, t, de).$$

至于说对 ν 的依赖关系，则 $a(\nu, t, p)$ 以及 $\Pi(\nu, t, p, B)$均为 ν 的线性连续泛函.

为便于叙述，现在我们来考虑有限多种类型质点的情形. 那末,如前所指 $\nu = \sum_{k=1}^{m} x_k e_k$, 并且可以把 $\mathscr{M}_+(\mathscr{E})$ 与空间 $\mathscr{R}_+^m$ 等同;代替函数 $p(e), e \in E$,我们考虑向量 $p = (p^1, p^2, \cdots, p^m)$. 记 $a(e_k, t, p) = a_k(t, p)$. 那末 $a_k(t, p) = (p, a_k(t))$, 其中 $a_k(t)$ 是具有非负分量的m维向量. 其次，记 $\Pi(e_k, t, 1, B) = \Pi_k(t, B)$. 那末 $\Pi_k(t, B)$ 是测度,满足:

$$\Pi_k(t, \{0\}) = 0, \quad \int_{S_c} |z| \Pi_k(t, dz) < \infty,$$

$$\Pi_k(t, \bar{S}_c) < \infty, \tag{6}$$

其中 S_c是中心在点 0 半径为 $c(c > 0)$ 的球,而 $\bar{S}_c$ 是 S_c 的补. 这

时(5)式形为

$$J_k(s, t, -iu) = \exp s\left\{i(u, a_k(t)) + \int_{\mathscr{R}_+^m} (e^{i(u,z)} - 1)\Pi_k(t, dz)\right\},$$

其中 u 是具有实分量 u^i 的向量，$J_k(s, t, -iu) = J(se_k, t, -iu)$.

记

$$\phi_k(t, p) = (p, a_k(t)) + \int (1 - e^{-(p,z)})\Pi_k(t, dz); \qquad (7)$$

因为函数 $J_k(s, t, p)$ 和 $e^{-s\phi_k(t,p)}$ 在区域 $\mathrm{Re}\, p > 0$ 内解析，并且在其边界上重合，所以对 $\mathrm{Re}\, p > 0$ 有

$$J_k(s, t, p) = e^{-s\phi_k(t,p)}.$$

令

$$\phi(t, p) = \{\phi_1(t, p), \phi_2(t, p), \cdots, \phi_m(t, p)\}.$$

由等式(5)可见

$$J(x, t, p) = e^{-(\phi(t,p), x)}. \qquad (8)$$

这里在($\mathscr{E}$ 上的)测度 ν 的位置上是 $\mathscr{R}_+^m$ 中的向量 x.

在推导上式时只用到随机过程 $\xi(t)$ 的分枝性. 现在我们利用该过程的马尔科夫性. 有

$$J(x, t+s, p) = \mathbf{E}_x e^{-(p, \xi(t+s))} = \mathbf{E}_x \mathbf{E}_{\xi(t)} e^{-(p, \xi(s))}$$
$$= \mathbf{E}_x e^{-(\xi(t), \phi(s,p))} = e^{-(x, \phi[t, \phi(s,p)])}.$$

在推导此等式时曾用到 $\mathrm{Re}\,\phi_k(s, p) \geqslant 0$ 这一事实. 于是，函数 $\phi(t, p)$ 满足下列函数方程

$$\phi(t+s, p) = \phi[t, \phi(s, p)], \; t > 0, \; s > 0, \qquad (9)$$

和初始条件

$$\phi(0, p) = p. \qquad (10)$$

后者由过程 ν_t 的随机连续性推出. 方程(9)是具有整数分量的分枝过程之母函数的函数方程.

我们证明，所得到的关系式完全表征具有连续状态和 m 种类型质点的分枝过程，此过程满足定义 1 的条件.

设已给向量函数族 $\{\phi(t, p), t \geqslant 0\}$，满足下列条件:

a) 函数 $\phi(t, p)$ 定义在空间 C^m 中的锥体 $\mathrm{Re}p \geqslant 0$ 上，并在此锥体上有表示(7)，其中 $a_k(t) \geqslant 0$，而测度 $\Pi_k(t, B)$ 具备性质(6).

b) 函数 $\phi(t, p)$ 满足函数方程(9)和初始条件(10).

定理 1 在上述条件下，可以在相空间 $\mathscr{R}^m$ 中构造一分枝过程，使它的 Laplace 变换由(8)式给出.

证. 根据给定函数 $\phi(t,p)$ 定义函数 $J(x, t, p) = e^{-(\phi(t,p),x)}$. 它是具有无穷可分分布的非负随机向量的 Laplace 变换. 设 $P_t(x, B)$ 是对应于此过程的随机核. 我们证明 $\{P_t(x, B), t>0\}$ 是马尔科夫核族. 为此考虑核 $P_t(x, B)$ 和 $P_s(x, B)$ 的卷积的 Laplace 变换. 因为

$$\iint\limits_{\mathscr{R}_+^m \mathscr{R}_+^m} e^{-(p,z)} P_t(x, dy) P_s(y, dz)$$

$$= \int_{\mathscr{R}_+^m} e^{-(\phi(s,p),y)} P_t(x, dy) = e^{-(\phi[t,\phi(s,p)],x)}$$

$$= e^{-(\phi(t+s,p),x)} = \int_{\mathscr{R}_+^m} P_{t+s}(x, dy) e^{-(p,y)},$$

故由于 Laplace 变换唯一决定分布，有

$$P_{t+s}(x, B) = \int_{\mathscr{R}_+^m} P_t(x, dy) P_s(y, B).$$

从而，可以根据核族 $\{P_t(x, B), t > 0\}$ 在相空间 $\mathscr{R}_+^m$ 中构造一马尔科夫过程. 由函数 $J(x, t, p)$ 的形状立即可以看出，此过程满足分枝过程的条件 a) 和 b)；而由(8)式和 $\phi(t, p)$ 的初始条件可知，此过程随机连续. 定理得证.

我们考虑 $\phi_k(t, p)$ 作为变元 t 的函数的性质. 首先证明函数 $\phi_k(t, p)$ 在点 $t = 0$ 可微.

引理 1 对 $\mathrm{Re}p > 0$ 存在极限

$$K(p) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\phi(t, p) - p}{t}.$$

证. 引进函数

$$\varphi_k(h, p) = \frac{1}{h}\int_0^h \phi_k(t, p)dt.$$

函数 $\varphi_k(h, p)$ 在区域 $\operatorname{Re}p > 0$ 内是解析函数,而在闭区域 $\operatorname{Re}p \geqslant 0$ 上一致有界. 因为

$$\lim_{h\to 0}\varphi_k(h, p) = p_k,$$

故对 $\operatorname{Re}p > 0$, 当 $h \to 0$ 时,函数 $\varphi_k(h, p)$ 的任意阶导数收敛于函数 p_k 的相应导数. 从而

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{\partial\varphi_k(h, p)}{\partial p_r} = \delta_{kr}.$$

对方程(9)求积分,得等式

$$\frac{1}{h}\int_0^h \phi(t+s, p)dt = \varphi(h, \phi(s, p)), \quad s > 0,$$

其中 $\varphi(h, p) = (\varphi_1(h, p), \cdots, \varphi_m(h, p))$, 由此得

$$\varphi(h, \phi(s, p)) - \varphi(h, p) = \frac{1}{h}\left\{\int_h^{s+h}\phi(t, p)dt - \int_0^s \phi(t, p)dt\right\}.$$

利用 Taylor 公式得

$$(\nabla\varphi(h, p) + Z)(\phi(s, p) - p) = \frac{1}{h}\left\{\int_h^{s+h}\phi(t, p)dt - \int_0^s \phi(t, p)dt\right\},$$

其中 $\nabla\varphi(h, p)$ 是矩阵,偏导数 $\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial p_j}$ $(j = 1, \cdots, m)$ 是它的第 k 行, Z 是一矩阵,当 $\phi(s, p) - p \to 0$,即 $s \to 0$ 时,矩阵 Z 的元趋于 0. 因为当 $h \to 0$ 时 $\nabla\varphi(h, p) \to I$, 故对充分小的 h 矩阵 $\nabla\varphi(h, p)$ 可逆. 所以对充分小的 $h(h > 0)$,

$$\lim_{s\downarrow 0}\frac{\phi(s, p) - p}{s} = [\nabla\varphi(h, p)]^{-1} \times \frac{1}{h}[\phi(h, p) - p]. \tag{11}$$

引理得证.

注. 由证明过程可见，如果 p 的变化域是区域 $\operatorname{Re}p>0$ 内的任意紧集，则(11)式中的收敛对 p 一致.

由刚证明的引理和函数方程 (9) 立即可以得到函数 $\phi(s, p)$ 的两个微分方程. 其中一个是常微分方程，但是非线性的，另一个是线性偏微分方程. 这些方程形为

$$\frac{\partial\phi(t, p)}{\partial t}=K[\phi(t, p)],\quad \operatorname{Re}p>0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial\phi(t, p)}{\partial t}=\nabla\phi(t, p)K(p),\quad \operatorname{Re}p>0, \tag{13}$$

并且函数 $\phi(t, p)$ 还满足初始条件(10).

为证明其中的第一个方程取 $t_2>t_1$, 并考虑关系式

$$\frac{\phi(t_2, p)-\phi(t_1, p)}{t_2-t_1}=\frac{\phi(t_2-t_1, \phi(t_1, p))-\phi(t_1, p)}{t_2-t_1}.$$

由于(11)式中的收敛(对 p) 一致，并且令 $t_2\downarrow t$, $t_1\uparrow t$, 故可得方程(12). 因而导数 $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ 的存在性得证，所以为推导方程(13)只需对 $\Delta t>0$ 考虑关系式

$$\frac{\phi(t+\Delta t, p)-\phi(t, p)}{\Delta t}=\frac{\phi(t, \phi(\Delta t, p))-\phi(t, p)}{\Delta t}$$

$$=[\nabla\phi(t, p)+O(\phi(\Delta t, p))]\frac{\phi(\Delta t, p)-p}{\Delta t}.$$

令 $\Delta t\downarrow 0$ 在此式中取极限，得方程(13).

定理 2 设函数 $\phi(t, p)$ 对应于满足定义 1 的条件(对 $\operatorname{Re}p>0$) 的连续状态分枝过程. 那末，$\phi(t, p)$ 对 t 可微，并且满足方程(12),(13)和边界条件(10).

我们称向量函数 $K(p)$ 为分枝过程的累积量. 现在来求它的一般表示.

仍然设 $p=-iu$, 其中 u 是实分量向量. 由累积量的定义可见，$e^{K_j(-iu)}$ 是无穷可分分布的特征函数的极限，因而 $e^{K_j(-iu)}$ 也是无穷可分分布的特征函数. 从而

$$K_j(-iu)=i(a_j,u)-\frac{1}{2}(B_ju,u)$$

$$+\int_{\mathscr{R}_+^m}\left(e^{i(u,z)}-1-\frac{i(u,z)}{1+(z,z)}\right)\Pi_j(dz),\quad(14)$$

其中 a_j 是一向量，B_j 是非负定对称算子，而测度 $\Pi_j(B)$ 具备相应的性质. 下面的引理对于所考虑的情形进一步说明函数 $K_j(-iu)$ 的构造.

引理 2 假设 $\mathscr{R}^m$ 中无穷可分分布的累积量的序列

$$K^{(n)}(-iu)=i(a^{(n)},u)+\int_{\mathscr{R}_+^m}(e^{i(u,z)}-1)\Pi^{(n)}(dz)$$

收敛于一累积量

$$K(-iu)=i(a,u)-\frac{1}{2}(Bu,u)$$

$$+\int_{\mathscr{R}_+^m}\left(e^{i(u,z)}-1-\frac{i(u,z)}{1+(z,z)}\right)\Pi(dz),$$

并且存在一子空间 $\mathscr{L}$，使对一切 n 有 $P_{\mathscr{L}}a^{(n)}\in\mathscr{R}_+^m\cap\mathscr{L}$，其中 $P_{\mathscr{L}}$ 是向 $\mathscr{L}$ 上的投影算子. 那末

$$\int_{|z|<1}|P_{\mathscr{L}}z|\Pi(dz)<\infty,$$

对一切 $u\in\mathscr{L}$ 有 $(Bu,u)=0$，$P_{\mathscr{L}}a\geqslant 0$.

证. 因为

$$\lim_{n\to\infty}K^{(n)}(-iP_{\mathscr{L}}u)=K(-P_{\mathscr{L}}u),$$

而

$$K^{(n)}(-iP_{\mathscr{L}}u)=i(P_{\mathscr{L}}a^{(n)},u)+\int_{\mathscr{R}_+^m}(e^{i(P_{\mathscr{L}}u,z)}-1)$$

$$\times\Pi^{(n)}(dz)$$

是集中在锥体 $\mathscr{R}_+^m\cap\mathscr{L}$ 上的无穷可分分布的累积量，故极限分布也集中在此锥体上. 因此，根据第四章 § 1 定理 7 的系，该分布的累积量形为

$$K(-iP_{\mathscr{L}}u)=i(b,P_{\mathscr{L}}u)+\int_{\mathscr{R}_+^m\cap\mathscr{L}}(e^{i(P_{\mathscr{L}}u,z)}-1)\Pi_{\mathscr{L}}(dz),$$

并且

$$\int_{\mathscr{R}_+^m \cap \mathscr{L} \cap \{|z|\le 1\}} |z| \Pi_{\mathscr{L}}(dz) < \infty.$$

另一方面

$$K(-iP_{\mathscr{L}}u) = i(a, P_{\mathscr{L}}u) - \frac{1}{2}(BP_{\mathscr{L}}u, P_{\mathscr{L}}u)$$

$$+ \int_{\mathscr{R}_+^m} \left(e^{i(P_{\mathscr{L}}u, z)} - 1 - \frac{i(P_{\mathscr{L}}u, z)}{1+(z,z)} \right) \Pi(dz).$$

将此式与上面的式子比较,即可得所要证的结果.

由刚证明的引理可见,(14)式可化为

$$K_j(-iu) = i(a_j, u) - \frac{b_j^2}{2}(u i)^2$$

$$+ \int_{\mathscr{R}_+^m} \left(e^{i(u,z)} - 1 - \frac{iu^j z^j}{1+(z,z)} \Pi_j(dz) \right), \tag{15}$$

其中向量 a_j 和测度 $\Pi_j(B)$ 满足: 对 $k \neq j$ 有 $a_j^k > 0$, 而

$$\int_{S_c} \left(\sum_{k \neq j} |z^k| + (z^j)^r \right) \Pi_j(dz) < \infty, \quad \Pi_j(\bar{S}_c) < \infty. \tag{16}$$

利用所得到的各式, 可以容易地找出过程的生成算子的明显形式. 为此我们指出,由函数 $K(-iu)$ 的定义

$$\lim_{t \to 0} [e^{-i(u,x)} J(x, t, -iu)]^{1/t} = \exp(K(-iu), x).$$

从而

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{e^{-i(u,x)} J(x, t, -iu)}{t} = (K(-iu), x).$$

根据第一卷第三章§1的结果可见,对任意二次可微函数 $f(x)$, 如果 $f(x)$ 及其一阶二阶偏导数有界,则

$$\mathfrak{A} f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \left[\int_{\mathscr{R}_+^m} f(y) P_t(x, dy) - f(x) \right]$$

$$= \sum_{j=1}^m \left\{ (a_j, \nabla f) + \frac{b_j^2}{2} \frac{\partial^2 f}{(\partial x^j)^2} \right.$$

$$\left. + \int_{\mathscr{R}_+^m} \left[f(x+z) - f(x) - \frac{z^j \dfrac{\partial f(x)}{\partial x^j}}{1+(y,y)} \right] \Pi_j(dz) \right\}.$$

§3. 有分枝的一般马尔科夫过程

到现在为止我们所研究的分枝过程，其状态完全决定于每型质点的数目以及（在某些场合）质点的"年龄"。为描绘体系的进化，在许多场合还需要考虑质点在相空间中的位置（并且此位置随时间连续地变化），而质点的生存时间以演变的概率依赖于它在相空间的轨道。分枝过程的基本性质——各质点进化的独立性——自然不变。这一节就是研究这类过程。

过程的构造性描述 假设已给一可测空间 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$，称之为过程的相空间。有 m 种类型 $(T_1, \cdots, T_m)$ 的质点在此相空间中运动。每型质点的个数在 0 到 ∞ 之间变化。如果质点的总数在某一时刻变为 ∞，则过程在此时刻中断。如果在开始时相空间中恰有一个质点，属于 T_k 型，则它一般沿某一中断齐次马尔科夫过程 $\{\mathscr{F}^{(k)}, \mathscr{N}^{(k)}, \mathbf{P}_x^{(k)}\}$ 的轨道运动。记 ζ_k 为此过程的中断时间。那末在相空间中于时刻 ζ_k，一个 T_k 型的质点变为 $n_1, \cdots, n_m$ 个分别属于 $T_1, \cdots, T_m$ 型的质点，并且 n_i 个 T_i 型质点的位置分别为 $x_1^{(i)}, \cdots, x_{n_i}^{(i)}$。这些位置可以由 $\{\mathscr{X}, \mathfrak{B}\}$ 上的随机测度 μ^i 来表征，这里测度 μ^i 定义为

$$\mu^i(B) = \sum_{k=1}^{n_i} \chi_B(x_k^{(i)}).$$

测度 $\mu^i(B)$ 决定在演变时刻出现在集 B 中的 i 型质点的个数。考虑形如

$$\mathbf{P}\{\mu^i(B_j) = n_j^i, i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, N\}$$

的边沿分布，其中 $B_1, \cdots, B_N$ 是任意一组两两不相交的集：$B_j \in \mathfrak{B}$，$\bigcup_{k=1}^{N} B_k = \mathscr{X}$。那末随机测度 $\mu^1, \cdots, \mu^m$ 的联合分布，完全决定于它的上述边沿分布。为求随机测度 μ^i 和表示 T_k 型质点在时刻 $t < \zeta_k$ 之位置的变量的联合分布，我们引进概率

$$Q_{t,x}^{(k)}(B_1,\cdots,B_N;n_1^1,\cdots,m_1^m,\cdots,n_N^1,\cdots,n_N^m)$$
$$=\mathbf{P}_x^{(k)}\{\zeta_k>t,\mu^i(B_j)=n_j^i,i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,N\},\tag{1}$$

这些概率是在"开始时在相空间中有一个 T_k 型质点"的条件下来计算的. 记 $P^{(k)}(t,x,B)$ 为过程 $\{\mathscr{F}^{(k)},\mathscr{N}^{(k)},\mathbf{P}_x^{(k)}\}$ 的转移概率. 那末，概率 $Q_{t,x}^{(k)}$ 连同 $P^{(k)}(t,x,B)$ 完全决定 $x^{(k)}(t)$ $(t<\zeta_k)$ 和 $\mu^i(i=1,2,\cdots,m)$的联合分布: 对 $0<t_1<\cdots<t_n<s$,

$$\mathbf{P}_x^{(k)}\{\zeta_k>s,x_{t_l}^{(k)}\in A_l,\ l=1,\cdots,n;$$
$$\mu^i(B_j)=n_j^i,i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,N\}$$
$$=\int_{A_1}P^{(k)}(x,t_1,dx_1)\int_{A_2}P^{(k)}(x_1,t_2-t_1,dx_2)\cdots$$
$$\times\cdots\int_{A_n}P^{(k)}(x_{n-1},t_n-t_{n-1},dx_n)$$
$$\times Q_{s-t_n,x_n}^{(k)}(B_1,\cdots,B_N;n_1^1,\cdots,n_1^m,\cdots,$$
$$n_N^1,\cdots,n_N^m).\tag{2}$$

概率 $Q_{t,x}^{(k)}(B_1,\cdots,B_N,n_1^1,\cdots,n_1^1,\cdots,n_N^1,\cdots,n_N^m)$宜于用关于 t 的 Laplace 变换给出:

$$q_\lambda^{(k)}(x,B_1,\cdots,B_N;\ n_1^1,\cdots,n_1^m,\cdots,\ n_N^1,\cdots,n_N^m)$$
$$=\int_0^\infty e^{-\lambda t}Q_{t,x}^{(k)}(B_1,\cdots,B_N;\ n_1^1,\cdots n_1^m,\cdots,$$
$$n_N^1,\cdots,n_N^m)dt.$$

对任何一组 $B_1,\cdots,B_N$, n_i^j, 作为 x 的函数 $q_\lambda^k(x,\cdot)$ 是过程 $x_t^{(k)}$ 的 λ 过份函数. 事实上,

$$\int P^{(k)}(x,t,dy)q_\lambda^{(k)}(y,\cdot)=\int_0^\infty e^{-\lambda s}\int P^{(k)}(t,x,dy)Q_{s,y}^{(k)}(\cdot)ds$$
$$=\int_0^\infty e^{-\lambda s}Q_{t+s,x}^{(k)}(\cdot)ds,$$

因为,由(2)式

$$\int P^{(k)}(t,x,dy)Q_{s,y}^{(k)}(\cdot)=Q_{x,t+s}^{(k)}(\cdot),$$

所以

$$e^{-\lambda t}\int P^{(k)}(t, x, dy)q_\lambda^{(k)}(y, \cdot) = q_\lambda^{(k)}(x_i, \cdot)$$

$$- e^{-\lambda t}\int_0^t e^{-\lambda t}\underset{\sim}{Q}_{s,x}^{(k)}(\cdot)ds.$$

由最后的等式可知，$q_\lambda^{(k)}(x, \cdot)$ 是 λ 过份函数.

在相当广的条件下(第二章 §6，定理 3)，可以把 λ 过份函数 $q_\lambda^{(k)}(x, \cdot)$ 与过程 $x_t^{(k)}$ 的一 W 泛函 $\varphi_t^{(k)}(\cdot)$ 相联系，使

$$q_\lambda^{(k)}(x, \cdot) = \mathbf{E}_x^{(k)}\int_0^\infty e^{-\lambda t}d\varphi_t^{(k)}(\cdot).$$

我们指出，量

$$\varphi_t^{(k)} = \sum_{n_1^1,\cdots,n_1^m,\cdots,n_N^1,\cdots,n_N^m}\varphi_t^{(k)}(B_1, \cdots, B_N;\ n_1^1, \cdots,$$

$$n_1^m, \cdots, n_N^1, \cdots, n_N^m)$$

(这里对一切非负 n_j^i 求和) 有限并且也是 W 泛函. 这由下式可见:

$$\mathbf{E}_x^{(k)}\int_0^\infty e^{-\lambda t}d\varphi_t^{(k)} = \sum_{n_1^1,\cdots,n_N^m} q_\lambda^{(k)}(x;\ B_1, \cdots,\ B_N,$$

$$n_1^1, \cdots, n_1^m, \cdots, n_N^1, \cdots, n_N^m) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{P}_x^{(k)}$$

$$\times\{\zeta_k > t\}dt = \mathbf{E}_x^{(k)}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\chi_{\{\zeta_k > t\}}dt$$

$$= \mathbf{E}_x\frac{1 - e^{-\lambda\zeta_k}}{\lambda}. \tag{3}$$

因而，泛函 $\varphi_t^{(k)}$ 不依赖于 $B_1, \cdots, B_N$.

我们现在假设，对于过程 $\{\mathscr{F}^{(k)}, \mathscr{N}^{(k)}, \mathbf{P}_x^{(k)}\}$，$\sigma$ 代数 $\mathscr{N}_{t+0}^{(k)}$ 包含在 $\mathscr{N}_t^{(k)}$ 对任意测度 $\mathbf{P}_x^{(k)}$ 的完备化中. 那末，仿照第三章 §4 (见(8)式)，由不等式

$$\varphi_t^{(k)}(B_1, \cdots, B_N, n_1^1, \cdots, n_1^m, \cdots, n_N^1, \cdots, n_N^m) \leqslant \varphi_t^{(k)}$$

可以证明，存在一函数 $G^{(k)}(x,\ B_1, \cdots,\ B_N;\ n_1^1, \cdots,\ n_1^m, \cdots, n_N^1, \cdots, n_N^m)$，使

$$\varphi_t^{(k)}(B_1, \cdots, B_N; n_1^1, \cdots, n_1^m, \cdots, n_N^1, \cdots, n_N^m)$$

$$
-\int_0^t G^{(k)}(x_s^{(k)}, B_1, \cdots, B_N;\ n_1^1, \cdots, n_1^m, \cdots, n_N^1, \cdots, n_N^m) d\varphi_s^{(k)}. \tag{4}
$$

函数 $G^{(k)}(x, B_1, \cdots, B_N; n_1^1, \cdots, n_1^m, \cdots, n_N^1, \cdots, n_N^m)$ 非负，并且满足

$$
\sum_{n_1^1 \cdots n_N^m} G^{(k)}(x, B_1, \cdots, B_N;\ n_1^1, \cdots, n_1^m, \cdots, n_N^1, \cdots, n_N^m) = 1, \tag{5}
$$

它可以解释为在"演变发生在点 x"的条件下，在演变之后事件 $\{\mu^i(B_j)=n_j^i,\ i=1, \cdots, m,\ j=1, \cdots, N\}$ 的概率.

由(3)式可见,泛函 $\varphi_t^{(k)}$ 完全决定于转移概率 $P^{(k)}(t, x_k, B)$. 所以，为了给出随机变量 $x_t^{(k)}$, $(t<\zeta_k)$, 和 $\mu^1, \cdots, \mu^m$ 的联合分布,只需给出转移概率 $P^{(k)}(t, x, B)$ 和函数

$$
G^{(k)}(x, B_1, \cdots, B_N, n_1^1, \cdots, n_1^m, \cdots, n_N^1, \cdots, n_N^m).
$$

在演变之后,每一个新出现的质点(在不依赖于其它质点的情形下)开始自己的运动,而且如果它是 T_k 型,则它沿过程 $\{\mathscr{F}^{(k)}, \mathscr{N}^{(k)}, \mathbf{P}_x^{(k)}\}$ 的轨道运动.

过程的基本特征是概率

$$
P_{t,x}^{(k)}(N, B_1, \cdots, B_N; n_1^1, \cdots, n_1^m, \cdots, n_N^1, \cdots, n_N^m), \tag{6}
$$

它是如下事件的概率：在开始时位于点 x 的一个 T_k 型质点，经过时间 t 变为 $n_1^i+\cdots+n_N^i$ 个 $T_i, i=1, \cdots, m$ 型质点，而且集合 $B_j \in \mathfrak{B}$ 包含 n_j^i 个 T_i 型质点.

概率(6)宜于用母函数给出. 设

$$
\psi_{t,x}^{(k)}(N, B_1, \cdots, B_N, z_1^1, \cdots, z_1^m, \cdots, z_N^1, \cdots, z_N^m)
$$
$$
=\sum_{n_1^1, \cdots, n_N^m} P_{t,x}^{(k)}(N, B_1, \cdots, B_N, n_1^1, \cdots, n_1^m, \cdots, n_N^1, \cdots, n_N^m)(z_1^1)^{n_1^1} \cdots (z_N^m)^{n_N^m}.
$$

原来，可以同时对一切 N, $B_1, \cdots, B_N$, 用如下方式给出函数 $\psi_{t,x}^{(k)}(\cdot)$. 记 $\mu_t^i(\cdot)$ 为 $\mathfrak{B}$ 上的随机测度，其中 $\mu_t^i(B)$, $B \in \mathfrak{B}$,

表示在时刻 t 位于集 B 中的 T_i 型质点的个数. 那末，对 $z_j^i \leqslant 1$

$$\psi_{t,x}^{(k)}(N, B_1, \cdots, B_N, z_1^1, \cdots, z_N^m)$$

$$= \mathbf{E}_x^{(k)} \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{N} (z_j^i)^{\mu_t^i(B_j)} = \boldsymbol{E}_x^{(k)}$$

$$\times \prod_{i=1}^{m} e^{\sum_{j=1}^{N} \ln z_j^i \cdot \mu_t^i(B_j)}.$$

记 $\varphi^i(x) = -\ln z_j^i$, $x \in B_j$. 那末

$$\sum_{j=1}^{N} \ln z_j^i \mu_t^i(B) = -\int \varphi^i(x) \mu_t^i(dx).$$

所以

$$\psi_{t,x}^{(k)}(N, B_1, \cdots, B_N, z_1^1, \cdots, z_N^m)$$

$$= \mathbf{E}_x^{(k)} \exp\left\{-\sum_{1}^{m} \int \varphi^i(x) \mu_t^i(dx)\right\}.$$

于是，概率组(6)唯一决定于泛函

$$\psi_{t,x}^{(k)}(\varphi^1, \cdots, \varphi^m) = \mathbf{E}_x^{(k)} \exp\left\{-\sum_{1}^{m} \int \varphi^i(x) \mu_t^i(dt)\right\}; \qquad (7)$$

我们称此泛函为**母泛函**(仿照母函数)，它对一切非负 $\mathfrak{B}$ 可测函数 $\varphi^1(x), \cdots, \varphi^m(x)$ 定义.

同样，对概率族 $Q_{t,x}^{(k)}(\cdot)$ 也可以定义母泛函. 如果 μ^i 是随机测度，它决定在演变发生后的瞬时每个集合中 T_i 型质点的数量，则概率族 $Q_{t,x}^{(k)}(\cdot)$ 的母泛函决定于

$$q_{t,x}^{(k)}(\varphi^1, \cdots, \varphi^m) = \mathbf{E}_x^{(k)} \exp\left\{-\sum_{1}^{m} \int \varphi^i(x) \mu^i(dx)\right\} \chi_{\{\zeta_k > t\}}. \qquad (8)$$

母泛函 $\psi_{t,x}^{(k)}$ 和 $q_{t,x}^{(k)}$ 以某个方程相联系；如果假设过程中断于相空间中首次聚集无穷个质点的时刻，则可以由此方程求出 $\psi_{t,x}^{(k)}$. 我们来推导此方程.

假设开始时相空间中有一个质点，它位于点 x，属于 T_k 型. 那末

$$\psi_{t,x}^{(k)}(\varphi^1,\cdots,\varphi^{(m)})=\mathbf{E}_x^{(k)}\exp\left\{-\sum_1^m\int\varphi^i(x)\mu_t^i(dx)\right\}\chi_{\{\zeta_k>t\}}$$

$$+\ \mathbf{E}_x^{(k)}\exp\left\{-\sum_1^m\int\varphi^i(x)\mu_t^i(dx)\right\}\chi_{\{\zeta_k<t\}}$$

$$=\mathbf{E}_x^{(k)}\exp\{-\varphi^k(x_t^{(k)})\}\chi_{\{\zeta_k>t\}}$$

$$+\ \mathbf{E}_x^{(k)}\mathbf{E}\left(\exp\left\{-\sum_1^m\int\varphi^i(x)\mu_t^i(dx)\right\}\middle|\zeta_k,\mu^1,\cdots,\mu^m\right)$$

$$\times\chi_{\{\zeta_k<t\}}. \tag{9}$$

第一项等于

$$\int e^{-\varphi^k(y)}p^{(k)}(t,x,dy).$$

为计算第二项,我们假设在演变发生的时刻有强马尔科夫性,即在演变发生之后，过程的行为就象它在一开始就有相应数量的各型质点一样．注意,在从构造上描绘过程时,我们并不明显地假设有强马尔科夫性,只是假设每个质点的行为,就象它单独时的行为一样,不依赖其它的质点．我们假设,在开始时每种类型各有若干个质点，而 $\nu^i(B)$ 表位于集 B 中质点的个数．那末

$$\mathbf{E}\exp\left\{-\sum_1^m\int\varphi^i(x)\mu_t^i(dx)\right\}=\prod_{k=1}^m\prod_{j=1}^{n_k}\mathbf{E}_{x_j^k}^{(k)}$$

$$\times\exp\left\{-\sum_1^m\int\varphi^i(x)\mu_t^i\ (dx)\right\},$$

其中 $\nu^k(B)=\sum_{j=1}^{n_k}\chi_B(x_j^k)$，即 n_k 是 T_k 型质点数，$x_1^k,\cdots,x_{n_k}^k$ 是它们的初始位置．所以

$$\mathbf{E}\exp\left\{-\sum_1^m\int\varphi^i(x)\mu_t^i(dx)\right\}=\prod_{k=1}^m\prod_{j=1}^{n_k}\psi_{t,x_j^k}^{(k)}(\varphi^1,\cdots,\varphi^m)$$

$$=\exp\left\{-\sum_{k=1}^m\int[-\ln\psi_{t,x}^{(k)}(\varphi^1,\cdots,\varphi^m)]\nu^k(dx)\right\} \tag{10}$$

（注意，$\varphi^i\geqslant 0,-\ln\psi_{t,x}^{(k)}\geqslant 0$）．由等式（10）以及在时刻 ζ_k 的强马尔科夫性,得

$$\mathbf{E}\left(\exp\left\{-\sum_{1}^{m}\int\varphi^{i}(x)\mu_{t}^{i}(dx)\right\}\middle|\zeta_{k},\mu^{1},\cdots,\mu^{m}\right)$$

$$=\exp\left\{-\sum_{i=1}^{m}\int[-\ln\phi_{t-\zeta_{k},x}^{(i)}(\varphi^{1},\cdots,\varphi^{m})]\mu^{i}(dx)\right\}.$$

我们现在根据函数 $q_{t,x}^{(k)}(\varphi^{1},\cdots,\varphi^{m})$ 定义积分

$$\int_{0}^{t}q_{ds,x}^{(k)}(\varphi_{s}^{1},\cdots,\varphi_{s}^{m})$$

$$=\mathbf{E}_{x}^{(k)}\exp\left\{-\sum_{k=1}^{m}\int\varphi_{\zeta_{k}}^{i}(x)\mu^{i}(dx)\right\}\chi_{\{\zeta_{k}<t\}},\quad(11)$$

其中 $\varphi_{s}^{i}(x)$ 为 $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}_{+}$ 可测，$\mathfrak{B}_{+}$ 是 $[0,\infty)$ 上 Borel 集的 σ 代数. 显然，该积分唯一决定于泛函 $q_{t,x}^{(k)}(\varphi^{1},\cdots,\varphi^{m})$，因为对 s 的阶梯函数，此泛函唯一决定积分(11). 利用积分 (11) 可以把 (9)式化为：

$$\phi_{t,x}^{(k)}(\varphi^{1},\cdots,\varphi^{m})=\int e^{-\varphi^{k}(y)}P^{(k)}(t,x,dy)$$

$$+\int_{0}^{t}q_{ds,x}^{(k)}(-\ln\phi_{t-s,x}^{(1)}(\varphi^{1},\cdots,\varphi^{m}),\cdots,$$

$$-\ln\phi_{t-s,x}^{(m)}(\varphi^{1},\cdots,\varphi^{m})).\quad(12)$$

为了摆脱非平常的(11)型积分，我们指出：函数

$$q_{t,x}^{(k)}(\varphi^{1},\cdots,\varphi^{m})$$

关于非减函数

$$F_{x}^{(k)}(t)=\mathbf{P}_{x}^{(k)}\{\zeta_{k}\leqslant t\}$$

绝对连续，因为对 $s<t$ 由(8)式有

$$|q_{t,x}^{(k)}(\varphi^{1},\cdots,\varphi^{m})-q_{s,x}^{(k)}(\varphi^{1},\cdots,\varphi^{m})|\leqslant\mathbf{P}_{x}^{(k)}\{s<\zeta_{k}<t\}.$$

所以

$$q_{0,x}^{(k)}(\varphi^{1},\cdots,\varphi^{m})-q_{t,x}^{(k)}(\varphi^{1},\cdots,\varphi^{m})$$

$$=\int_{0}^{t}P_{s,x}^{(k)}(\varphi^{1},\cdots,\varphi^{m})dF_{x}^{(k)}(s),\quad(13)$$

其中 $P_{s,x}^{(k)}(\varphi^{1},\cdots,\varphi^{m})$ 是一个对变量的全体可测的函数. 利用(13)式可得

$$\int_{0}^{t}q_{ds,x}^{(k)}(\varphi_{s}^{1},\cdots,\varphi_{s}^{m})=\int_{0}^{t}P_{s,x}^{(k)}(\varphi_{s}^{1},\cdots,\varphi_{s}^{m})dF_{x}^{(k)}(s).$$

于是，方程(13)化为

$$\psi_{t,x}^{(k)}(\varphi^1,\cdots,\varphi^m)=\int e^{-\varphi^{k}(y)}p^{(k)}(t,x,dy)$$
$$+\int_0^t P_{s,x}^{(k)}(-\ln\psi_{t-s,x}^{(1)}(\varphi^1,\cdots,\varphi^m),\cdots,$$
$$-\ln\psi_{t-s,x}^{(m)}(\varphi^1,\cdots,\varphi^m))dF_x^{(k)}(s). \tag{14}$$

这是一个方程组 ($k=1,\cdots,m$). 可以用逐步逼近法求解：设

$${}_0\psi_{t,x}^{(k)}(\varphi^1,\cdots,\varphi^m)=\int e^{-\varphi^{k}(y)}p^{(k)}(t,x,dy),$$

$${}_{n+1}\psi_{t,x}^{(k)}(\varphi^1,\cdots,\varphi^m)=\int e^{-\varphi^{k}(y)}p^{(k)}(t,x,dy)$$
$$+\int_0^t P_{t,x}^{(k)}(-\ln[{}_n\psi_{t-s,x}^{(1)}(\varphi^1,\cdots,\varphi^m)],$$
$$\cdots,-\ln[{}_n\psi_{t-s,x}^{(m)}(\varphi^1,\cdots,\varphi^m)])dF_x^{(k)}(s), \tag{15}$$

$n=0,1,\cdots$.

利用归纳法可以验证：${}_n\psi_{t,x}^{(k)}$ 非负，关于 n 不减，以 1 为界。所以存在极限

$$\psi_{t,x}^{(k)}=\lim_{n\to\infty}{}_n\psi_{t,x}^{(k)},$$

而这些极限满足方程组(14)。如果它有唯一解，则这样就决定了过程的母泛函。用逐步逼近法所得到的解，是方程组(14)的不大于 1 的最小非负解。

构造马尔科夫过程 为运用马尔科夫过程论中的一般方法来研究有分枝的马尔科夫过程，最好是设法用一特别马尔科夫过程类来描绘这样的过程(例如，象在半马尔科夫过程的场合一样)。在这一节里就要解决这个问题。只需考虑只有一种类型质点的情形。因为，如果以 $\mathscr{A}$ 表质点的各类型所构成的集合(它可以是任意的)，则可以考虑集合 $\mathscr{X}\times\mathscr{A}$ 上只有一种类型的质点的过程；相点 (x,a)，$x\in\mathscr{X}$，$a\in\mathscr{A}$，一方面确定质点在相空间 $\mathscr{X}$ 中的位置 x，另一方面确定了质点的类型 a。显然，过程于演变发生前在 $\mathscr{X}\times\mathscr{A}$ 中的运动，完全决定于马尔科夫过程族 $\{\mathscr{F}^{(a)},\mathscr{N}^{(a)},\mathbf{P}_x^{(a)}\}$，因为在演变发生之前，过程的分量 a 不变。

这样，设 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 是一相空间。我们考虑形如上一小节所描绘的有一种类型质点的过程。这样过程的状态完全决定于质点的数量以及它们在相空间中的位置。因为质点都是相同的，故坐标的重新排列不改变过程的状态（这里，我们简称相空间中的位置为坐标）。

我们构造过程的相空间如下。

设 $\tilde{\mathscr{X}}_n$，$n \geq 1$，是这样一个空间：$\tilde{\mathscr{X}}_n$ 中的每一个点与 $\mathscr{X}^n$ 中点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的一个集合一一对应。每个这样集合中点的坐标仅排列的顺序不同。以 $\tilde{\mathfrak{B}}_n$ 表 σ 代数 $\mathfrak{B}^n$ 在上述 $\mathscr{X}^n$ 到 $\tilde{\mathscr{X}}_n$ 的映射中的象。我们再引进一个空间 $\tilde{\mathscr{X}}_0$，它由唯一一点构成，此点亦记作 $\tilde{\mathscr{X}}_0$。如果在相空间中没有质点，则认为过程处于状态 $\tilde{\mathscr{X}}_0$。如果在相空间 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 中有坐标为 $x_1,\cdots,x_n$ 的 n 个质点，则过程位于点 $(x_1,\cdots,x_n)\in\tilde{\mathscr{X}}_n$。于是，所有集 $\tilde{\mathscr{X}}_n$，$n=0,1,\cdots$，的并构成过程的相空间，记作 $\tilde{\mathscr{X}}$。记 $\tilde{\mathfrak{B}}$ 为包含 $\tilde{\mathscr{X}}_0$ 和 σ 代数 $\tilde{\mathfrak{B}}_n$ 的、空间 $\tilde{\mathscr{X}}$ 的子集的最小 σ 代数。可以把有分枝的马尔科夫过程与相空间 $\{\tilde{\mathscr{X}},\tilde{\mathfrak{B}}\}$ 中的一个马尔科夫过程相联系。对于有分枝的齐次过程，此过程也是齐次的。自然应局限于考虑在“过程开始位于 $\tilde{\mathscr{X}}_n$ 中”的条件下，首次流出每个集 $\tilde{\mathscr{X}}_n$ 的时间大于 0 的过程。由加在过程上的其它条件可知，为此只需使在“过程开始位于 $\tilde{\mathscr{X}}_1$ 中”的条件下，首次流出 $\tilde{\mathscr{X}}$ 的时间是正的。

设 $P(t,\tilde{x},\tilde{B})$，$\tilde{x}\in\tilde{\mathscr{X}}$，$\tilde{B}\in\tilde{\mathfrak{B}}$，是过程的转移概率。我们现在讨论，为使各质点的演变相互独立，$P(t,\tilde{x},\tilde{B})$ 应满足哪些条件？

记 μ_t 是决定时刻 t 质点在 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 中的分布的随机测度、为求 $P(t,\tilde{x},\tilde{B})$，只需对不同的集 $B\in\mathscr{X}$ 知道其边沿分布 $\mu_t(B)$，而后者决定于

$$\mathbf{E}\exp\left\{-\int_{\mathscr{X}}\varphi(x)\mu_t(dx)\right\} \tag{16}$$

（这里，数学期望是在过程的初始状态为 $\tilde{x}$ 的条件下求的）。但是，

如果在时刻 t 过程位于点 $(x_1,\cdots,x_n)\in\tilde{\mathscr{X}}_n$，则

$$\exp\left\{-\int_{\mathscr{X}}\varphi(x)\mu_t(dx)\right\}=\exp\left\{-\sum_{k=1}^{n}\varphi(x_k)\right\}.$$

因而，如果设

$$f(\tilde{x})=\prod_{k=1}^{n}f(x_k),\ \tilde{x}\in\tilde{\mathscr{X}},\ \tilde{x}=(x_1,\cdots,x_n);\tag{17}$$
$$\tilde{f}(\tilde{\mathscr{X}}_0)=1,\quad f(x)=e^{-\varphi(x)},$$

则可以看出，转移概率完全决定于积分

$$\int\tilde{f}(\tilde{y})P(t,\tilde{x},d\tilde{y}),$$

其中 $\tilde{f}(\tilde{x})$ 形如(17).

设 $\tilde{x}\in\tilde{\mathscr{X}}_m,\tilde{x}=(x_1,\cdots,x_m)$. 显然，为使不同质点的演化相互独立，必须使表现

$$\mu_t=\sum_{i=1}^{m}\mu_t^{(i)}\tag{18}$$

中的随机测度 $\mu_t^{(i)}$ 相互独立，其中 $\mu_t^{(i)}$ 是开始时位于点 x_i 的质点的后代在 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 中的分布. 那末，如果把(18)代入(16)，并且在满足独立性的前提下求数学期望，就可以得到

$$\mathbf{E}_{\tilde{x}}\exp\left\{-\int_{\mathscr{X}}\varphi(x)\mu_t(dx)\right\}=\prod_{k=1}^{m}g(x_k),$$

其中

$$g(x_k)=\mathbf{E}_{\tilde{x}=x_k}\exp\left\{-\int_{\mathscr{X}}\varphi(x)\mu_t(dx)\right\}.$$

而若 $\tilde{x}=\tilde{\mathscr{X}}_0$，则 $\mu_t(\mathscr{X})=0$，并且

$$\mathbf{E}_{\tilde{x}}\exp\left\{-\int_{\mathscr{X}}\varphi(x)\mu_t(dx)\right\}=1.$$

因而，

$$\int\tilde{f}(\tilde{y})P(t,\tilde{x},dy)=\tilde{g}(\tilde{x}),\tag{19}$$

其中 $\tilde{f}$ 决定于(17)式；而若在(17)式中把 f 换成 g，则 $\tilde{g}(\tilde{x})$ 也具

$$\tilde{B}_m = \{\tilde{x} = (x_1, \cdots, x_m): x_1 \in B_{i_1}, \cdots, x_m \in B_{i_m}\}, \quad (25)$$

则令

$$P(t, x, \tilde{B}_m) = L_{t,x}^{(m)}(B_1, \cdots, B_N, n_1, \cdots, n_N), \quad (26)$$

$$n_k = \sum_{j=1}^{m} \delta_{k,i_j}.$$

记 $\tilde{\mathfrak{B}}_m(B_1, \cdots, B_m)$ 为 $\tilde{\mathfrak{B}}_m$ 中形如(25)的集合的代数. (26) 式在代数 $\tilde{\mathfrak{B}}_m(B_1, \cdots, B_m)$ 上决定 $P(t, x, \tilde{B}_m)$. 如果 $B_1', \cdots, B_N'$, $B_i' \in \mathfrak{B}$, 满足条件: $\bigcup_{k=1}^{N} B_k' = \mathscr{X}$, B_i' 两两不相交, 而且 $\tilde{\mathfrak{B}}_m(B_1, \cdots, B_N) \subset \tilde{\mathfrak{B}}_m(B_1', \cdots, B_N')$, 则

$$P(t, x, \tilde{B}_m) = \Sigma P(t, x, \tilde{B}_m'),$$

其中左侧对包含在形如(25)的集合 $\tilde{B}_m$ 中的一切集

$$\tilde{B}_m' = \{\tilde{x} = (x_1, \cdots, x_m): x_1 \in B_{i_1}', \cdots, x_m \in B_{i_m}'\}$$

求和. 为证明此结果只需看到: 对满足 $B_i' \subset B_k$ 的一切 i 和 k, 当 $z_i' = z_k$ 时, 有

$$G_t\left(\sum_{k=1}^{N} z_k \chi_{B_k}\right) = G_t\left(\sum_{k=1}^{N} z_k' \chi_{B_k'}\right).$$

所以, 在形如 $\tilde{\mathfrak{B}}_m(B_1, \cdots, B_N)$ 的一切代数的并上所建立的函数 $P(t, x, \tilde{B})$ 是完全可加的, 上述代数的并记作 $\tilde{\mathfrak{B}}_m^0$.

如果 f 是任意有限 $\mathfrak{B}$ 可测函数, 则对任意 m, $\prod_{k=1}^{m} f(x_k)$ 作为 $\tilde{x} = (x_1, \cdots, x_m)$ 的函数为 $\tilde{\mathfrak{B}}_m^0$ 可测. 如果 $f(x) = \sum_{i=1}^{N} z_i \chi_B(x)$, 则由(26)得

$$\int S[f](\tilde{y}) P(t, x, d\tilde{y})$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n_1+\cdots+n_N=m} z_1^{n_1} \cdots z_N^{n_N}$$

$$\times \frac{\partial^m}{\partial z_1'^{n_1} \cdots \partial z_N'^{n_N}} G_t\left(\sum_{k=1}^{N} z_k' \chi_{B_k}(x)\right)\Bigg|_{z_1'=0,\cdots,z_N'=0}$$

$\mathscr{M}_{\mathscr{X}}$，如果 $f_n \uparrow f$（或 $f_n \downarrow f$），则 $G_t(f)=\lim\limits_{n\to\infty} G_t(f_n)$。

下面的一条性质不那么显然：

3）如果 $B_1,\cdots,B_n\in\mathfrak{B}$ 两两不相容，并且 $\bigcup\limits_k B_k=\mathscr{X}$，而 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\chi_{B_k}(x)$，其中 $0\leqslant z_k\leqslant 1$，$k=1,\cdots,n$，则函数

$$G_t(f)=q(z_1,\cdots,z_n)$$

对 $|z_1|\leqslant 1,\cdots,|z_n|\leqslant 1$ 为 $z_1,\cdots,z_n$ 的解析函数，并且在该区域内可以展成具有非负系数的幂级数。

事实上，

$$G_t(f)=\tilde{\mathbf{T}}_t S[f]=\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\mathscr{X}_m}\prod_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} z_k\chi_{B_k}(x_i) \times P(t,x,d(x_1,\cdots,x_m)), \tag{24}$$

其中 $x\in\tilde{\mathscr{X}}$ 是初始点，而 $\tilde{x}=(x_1,\cdots,x_m)$ 是集 $\tilde{\mathscr{X}}_m$ 中的变点。合并 $z_1^{i_1},\cdots,z_n^{i_n}$ 项的系数，可以看出它们是非负的；而因为 $G_t(f)\leqslant 1$，故 $z_1,\cdots,z_n$ 的幂的级数收敛；因此，该级数在区域 $|z_i|\leqslant 1$ 内绝对并且一致收敛，而在区域 $|z_i|<1$ 内是解析函数。

设 $G_t(f)$ 是从 $\mathscr{M}_{\mathscr{X}}$ 到 $\mathscr{M}_{\mathscr{X}}$ 的映射族，满足(23)和条件1)—3)。我们证明，这时存在一"减弱的"转移概率 $P(t,\tilde{x},\tilde{B})$，$(\tilde{x}\in\tilde{\mathscr{X}},\ B\in\tilde{\mathfrak{B}})$，使以(21)式与 $P(t,\tilde{x},\tilde{B})$ 相联系的半群 $\tilde{\mathbf{T}}_t$ 满足等式(22)。先定义 $P(t,x,B)$，即所需要求的转移概率，其中 $\tilde{x}=x$，$\tilde{x}\in\tilde{\mathscr{X}}_1$。设

$$L_{t,x}^{(m)}(B_1,B_2,\cdots,B_N,n_1,\cdots,n_N)$$
$$=\frac{1}{m!}\frac{\partial^{n_1+\cdots+n_N}}{\partial z_1^{n_1}\cdots\partial z_N^{n_N}}G_t\left(\sum_{k=1}^{N} z_k\chi_{B_k}(x)\right)\bigg|_{z_1=0,\cdots,z_N=0},$$

其中 $m=n_1+\cdots+n_N$，$\bigcup\limits_{k=1}^{N} B_k=\mathscr{X}$，而 B_i 两两不相交。如果

有(17)的形式．函数 f 和 g 满足不等式 $0\leqslant f\leqslant 1$ 和 $0\leqslant g\leqslant 1$.

我们引进定义在 $\tilde{\mathscr{X}}$ 上的 $\tilde{\mathfrak{B}}$ 可测函数 $\tilde{f}(\tilde{x})$ 的空间 $\tilde{\mathscr{M}}_{\tilde{\mathscr{X}}}$:对每个 $\tilde{f}(\tilde{x})\in\tilde{\mathscr{M}}_{\tilde{\mathscr{X}}}$ 存在一$\mathfrak{B}$可测函数 $f(x)$, $0\leqslant f\leqslant 1$, 使

$$\tilde{f}(\tilde{x})=\prod_{k=1}^{m}f(x_k),\quad \tilde{x}\in\tilde{\mathscr{X}}_n,\quad \tilde{x}=(x_1,\cdots,x_n),$$

$$\tilde{f}(\tilde{\mathscr{X}}_0)=1. \tag{20}$$

其次,设 $\mathscr{M}_{\mathscr{X}}$ 是 $\mathfrak{B}$ 可测函数 $f(x)$, $0\leqslant f\leqslant 1$,的集合．如果在函数 $\tilde{f}(\tilde{x})\in\tilde{\mathscr{M}}_{\tilde{\mathscr{X}}}$ 而 $f(x)\in\mathscr{M}_{\mathscr{X}}$ 之间存在关系(20),则写为

$$\tilde{f}(\tilde{x})=S[f](\tilde{x}).$$

对于任意 $\mathfrak{B}$ 可测的有界函数 $\psi(\tilde{x})$,我们定义过程的半群算子 $\tilde{\mathbf{T}}_t$:

$$\tilde{\mathbf{T}}_t\psi(\tilde{x})=\int\psi(\tilde{y})P(t,\tilde{x},d\tilde{y}). \tag{21}$$

那末,由(19)式知,集 $\tilde{\mathscr{M}}_{\tilde{\mathscr{X}}}$ 关于算子族 $\tilde{\mathbf{T}}_t$ 的不变性是分枝过程的基本性质．所以,自然地提出下面的一般定义.

定义 1 相空间 $\{\tilde{\mathscr{X}},\tilde{\mathfrak{B}}\}$ 中的任一齐次马尔科夫过程称做相空间 $\{\mathscr{X},\mathfrak{B}\}$ 中的**齐次分枝过程**,如果满足下列条件:

a) 伴随过程的算子半群 $\mathbf{T}_t$ 把 $\tilde{\mathscr{M}}_{\tilde{\mathscr{X}}}$ 变到 $\tilde{\mathscr{M}}_{\tilde{\mathscr{X}}}$,

b) 在开始时过程位于 $\tilde{\mathscr{X}}_n$ 中的条件下，它流出集 $\tilde{\mathscr{X}}_n$ 的时刻是正的，而且过程关于该时刻具有强马尔科夫性,

c) $\tilde{\mathscr{X}}_0$ 是吸收状态,过程在时刻 $\zeta=\sup\limits_n\tau_n$ 中断，其中 τ_n 是首次流出 $\bigcup\limits_{k=0}^{n}\tilde{\mathscr{X}}_k$ 的时刻.

$\tilde{\mathscr{M}}_{\tilde{\mathscr{X}}}$ 上的半群完全决定于从 $\mathscr{M}_{\mathscr{X}}$ 到 $\mathscr{M}_{\mathscr{X}}$ 的变换族；记此变换族为 $G_t(f)$，它满足条件

$$\mathbf{T}_tS[f]=S[G_t(f)]. \tag{22}$$

由 $\mathbf{T}_t$ 的半群性质可以得到变换族 $G_t(f)$ 的下列关系式:

$$G_{t+s}(f)=G_t(G_s(f)). \tag{23}$$

我们称 $G_t(f)$ 为**生成变换族**．显然,$G_t(f)$ 有下列性质:

1) $G_t(f)\leqslant 1$;

2) 对 $f_1\leqslant f_2$ 有 $G_t(f_1)\leqslant G_t(f_2)$ $(f_1,f_2\in\mathscr{M}_{\mathscr{X}}$; 对 f_n, $f\in$

$$= G_t(f),$$

这里令 $P(t, x, \mathscr{X}_0) = G_t(1(x))$. 现在定义算子 $\widetilde{\mathbf{T}}_t$:

$$\widetilde{\mathbf{T}}_t f(x) = \int S[f](\tilde{y}) P(t, x, d\tilde{y}) = G_t(f)(x).$$

它暂时在有限函数 $f \in \mathscr{M}_{\mathscr{X}}$ 上定义. 当 f 单调变化时, 利用 $G_t(f)$ 的连续性可知,对一切 $f \in \mathscr{M}_{\mathscr{X}}$

$$\int S[f](\tilde{y}) P(t, x, d\tilde{y}) = G_t(f)(x) = \widetilde{\mathbf{T}}_t f(x). \tag{27}$$

(注意,虽然 $P(t, x, \widetilde{B}_m)$只有限可加, 对任意有界 $\mathfrak{B}$ 可测函数 f, 可以用一般方法定义积分

$$\int_{\widetilde{\mathscr{X}}_m} \prod_{k=1}^{m} f(x_k) P(t, x, d(x_1, \cdots, x_m));$$

所以,(27)中的积分也对 $f \in \mathscr{M}_{\mathscr{X}}$ 有定义).

设 $\mathfrak{B}^0$ 是所有 σ 代数 $\mathfrak{B}_m^0$ 的并. 在 $\mathfrak{B}^0$ 上用如下方法定义一有限可加测度 $P(t, \tilde{x}, \widetilde{B})$. 设 $\tilde{x} = (x_1, \cdots, x_m)$, $\widetilde{B} \in \mathfrak{B}_n^0$, $\widetilde{B} = B \times \cdots \times B$ (即 $\widetilde{B} = \{\tilde{x} \in \widetilde{\mathscr{X}}_n : x_i \in B, i = 1, \cdots, n\}$). 令

$$P(t, \tilde{x}, \widetilde{B}) = \sum_{n_1 + \cdots + n_m = n} P(t, x_1, \widetilde{B}_{n_1}) \cdots P(t, x_m, \widetilde{B}_{n_m}), \tag{28}$$

其中 $\widetilde{B}_0 = \mathscr{X}_0$, $\widetilde{B}_k \subset \widetilde{\mathscr{X}}_k$, $\tilde{x} \in \widetilde{B}_k$, 如果 $x_i \in B$, $i = 1, \cdots, k$, $\tilde{x} = (x_1, \cdots, x_k)$. 对于上述形的集 $\widetilde{B}$ 知道了 $P(t, \tilde{x}, \widetilde{B})$, 就可以把 $P(t, \tilde{x}, \widetilde{B})$ 唯一地开拓到整个 σ 代数 $\widetilde{\mathfrak{B}}^0$. 这一点容易证明, 只需注意到我们所给出的定义等价于: 对 $\tilde{x} \in \widetilde{\mathscr{X}}_m$, $\tilde{x} = (x_1, \cdots, x_m)$

$$\int_{\widetilde{\mathscr{X}}_m} P(t, \tilde{x}, d(y_1, \cdots, y_n)) \prod_{k=1}^{n} f(y_k)$$

$$= \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \prod_{k=1}^{m} G(\lambda f)(x_i). \tag{29}$$

事实上,如果对形如 $f(y) = \sum_{i=1}^{N} z_i \chi_{B_i}(y)$ 的函数知道

$$\int_{\tilde{\mathscr{X}}_n} P(t, \tilde{x}, d(y_1, \cdots, y_n)) \prod_{k=1}^{n} f(y_k),$$

就可以对 $\tilde{B} \subset \tilde{\mathscr{X}}_n$ 求出 $P(t, \tilde{x}, \tilde{B})$，其中若 $x_1 \in B_{i_1}, \cdots, x_n \in B_{i_n}$，则 $\tilde{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \tilde{B}$。

因而，可以构造一有限可加转移概率 $P(t, \tilde{x}, \tilde{B})$，使对一切 $f \in \tilde{\mathscr{M}}_{\mathscr{X}}$，积分$\int P(t, \tilde{x}, d\tilde{y})\tilde{f}(\tilde{y})$ 有定义，并且对 $f \in \mathscr{M}_{\mathscr{X}}$ 有

$$\tilde{\mathbf{T}} f(\tilde{x}) = \int P(t, \tilde{x}, d\tilde{y}) S[f](\tilde{y}) = S[G_t(f)](\tilde{x}). \qquad (30)$$

由于对 $\tilde{B} \in \tilde{\mathfrak{B}}^0$, $P(t, \tilde{x}, \tilde{B})$，$\tilde{x} \in \tilde{\mathscr{X}}_m$ 作为 $\tilde{x}$ 的函数，可以表为形如 $\prod_{k=1}^{m} \tilde{f}_k(\tilde{x})$，$f \in \mathscr{M}_{\mathscr{X}}$ 的函数的线性组合（这由(29)可以得知），故可以确定

$$\int P(t, \tilde{x}, d\tilde{y}) P(s, \tilde{y}, \tilde{B}).$$

利用(23)和(30)可知，在 $\tilde{\mathscr{M}}_{\mathscr{X}}$ 上有

$$\tilde{\mathbf{T}}_t \tilde{\mathbf{T}}_s \tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{\mathbf{T}}_{t+s} \tilde{f}(\tilde{x}).$$

因为 $\tilde{\mathbf{T}}_{t+s} f(\tilde{x})$ 唯一决定 $P(t+s, \tilde{x}, \tilde{B})$，故对 $\tilde{B} \in \tilde{\mathfrak{B}}^0$

$$\int P(t, \tilde{x}, d\tilde{y}) P(t, \tilde{y}, \tilde{B}) = P(t+s, \tilde{x}, \tilde{B}).$$

于是，$P(t, \tilde{x}, \tilde{B})$ 与转移概率的区别仅仅在于它只在代数 $\tilde{\mathfrak{B}}^0$ 上定义，并且在此代数上有限可加. 如果 $\mathscr{X}$ 是可分度量空间，而 $\mathfrak{B}$ 是它的 Borel 集的 σ 代数，则 $P(t, \tilde{x}, \tilde{B})$ 也必定完全可加，从而可以把它开拓到 $\mathfrak{B}$ 上.

过程的特征算子 设 $\mathscr{X}$ 是一拓扑空间，$\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{X}$ 上的连续函数所产生的 σ 代数. 那末，在每一个 $\mathscr{X}_m$ 上定义了与 $\mathscr{X}$ 中的拓扑相容的拓扑，而 $\tilde{\mathfrak{B}}_m$ 由 $\mathscr{X}_m$ 上的连续函数产生. 如果对点 $\tilde{x} \in \tilde{\mathscr{X}}$，把它在 $\tilde{\mathscr{X}}_m$ 中的邻域定义为它在$\mathscr{X}$中的邻域，这样就在$\tilde{\mathscr{X}}$ 中定义了拓扑.那末，每一个集合 $\tilde{\mathscr{X}}_m$ 既是$\tilde{\mathscr{X}}$ 中的开集，同时也是 $\tilde{\mathscr{X}}$ 中的闭集. 设 $\tilde{U}$ 是点 $\tilde{x}$ 的邻域，并且完全内含于 $\tilde{x}$ 所在的那个集合 $\tilde{\mathscr{X}}_m$ 之中. 设 τ_U 是过程首次流出邻域U的时

刻；其次，设ζ是过程首次流出$\tilde{\mathscr{X}}_m$的时刻($\tilde{x}\in\tilde{\mathscr{X}}_m$是过程的初始位置)。那末，对于任意有界连续函数$f(\tilde{x})$，$\tilde{x}\in\tilde{\mathscr{X}}$，有

$$\mathbf{E}_{\tilde{x}}f(\tilde{x}(\tau_U))=\mathbf{E}_{\tilde{x}}f(\tilde{x}(\tau_U))\chi_{\{\tau_U<\zeta\}}+\mathbf{E}_{\tilde{x}}f(\tilde{x}(\tau_U))\chi_{\{\tau_U\geq\zeta\}},$$

其中$\tilde{x}(t)$是马尔科夫分枝过程在相空间$(\tilde{\mathscr{X}},\tilde{\mathfrak{B}})$中的轨道，这里(和以后)$\mathbf{E}_{\tilde{x}}$和$\mathbf{P}_{\tilde{x}}$都表示与过程相联系的数学期望和概率。我们现在指出

$$\mathbf{E}_{\tilde{x}}f(\tilde{x}(\tau_U))\chi_{\{\tau_U=\zeta\}}=\mathbf{E}_{\tilde{x}}f(\tilde{x}(\zeta))\chi_{\{\tau_U=\zeta\}}$$
$$=\mathbf{E}_{\tilde{x}}f(\tilde{x}(\zeta))-\mathbf{E}_{\tilde{x}}f(\tilde{x}(\zeta))\chi_{\{\tau_U<\zeta\}}.$$

假设过程$\tilde{x}(t)$是强马尔科夫的。那末

$$\mathbf{E}_{\tilde{x}}f(\tilde{x}(\zeta))\chi_{\{\tau_U<\zeta\}}=\mathbf{E}_{\tilde{x}}[\mathbf{E}_{x(\tau_U)}f(\tilde{x}(\zeta))]\chi_{\{\tau_U<\zeta\}}.$$

我们引进算子$\mathscr{T}$：$\mathscr{T}f(\tilde{x})=\mathbf{E}_{\tilde{x}}f(\tilde{x}(\zeta))$。那末

$$\mathbf{E}_{x}f(\tilde{x}(\tau_U))=\mathbf{E}_{\tilde{x}}f(\tilde{x}(\tau_U))\chi_{\{\tau_U<\zeta\}}$$
$$+\mathscr{T}f(\tilde{x})-\mathbf{E}_{\tilde{x}}\mathscr{T}f(x(\tau_U))\chi_{\{\tau_U<\zeta\}}.$$

现在我们考虑$\tilde{\mathscr{X}}_m$中的一马尔科夫过程：在时刻ζ之前此过程与$\tilde{x}(t)$重合，而在时刻ζ此过程中断。与此过程相联系的数学期望和概率记作$\mathbf{E}_{\tilde{x}}^{(m)}$和$\mathbf{P}_{\tilde{x}}^{(m)}$，而过程本身记作$\tilde{x}^{(m)}(t)$。由上一等式得

$$\mathbf{E}_{\tilde{x}}f(\tilde{x}(\tau_U))-f(\tilde{x})$$
$$=\mathbf{E}_{\tilde{x}}^{(m)}[f(\tilde{x}^{(m)}(\tau_U))-\mathscr{T}f(\tilde{x}^{(m)}(\tau_U))]$$
$$-[f(\tilde{x})-\mathscr{T}f(\tilde{x})]. \tag{31}$$

因而，如果函数$f(\tilde{x})-\mathscr{T}f(\tilde{x})$，$\tilde{x}\in\tilde{\mathscr{X}}_m$，属于特征算子$\mathfrak{A}^{(m)}$的定义域，则函数$f(\tilde{x})$，$\tilde{x}\in\tilde{\mathscr{X}}_m$，属于过程$\tilde{x}(t)$的特征算子$\mathfrak{A}$的定义域。这时

$$\mathfrak{A}f(x)=\mathfrak{A}^{(m)}[f(x)-\mathscr{T}f(x)].$$

为求特征算子$\mathfrak{A}$，只需求出算子$\mathscr{T}$和特征算子$\mathfrak{A}^{(m)}$.

我们利用只有一类质点的过程的构造性定义.转移概率$P(t,x,B)$和概率$Q_{t,x}(B_1,\cdots,B_N,n_1,\cdots,n_N)$是这种过程的基本特征：转移概率$P(t,x,B)$，$x\in\mathscr{X}$，$B\in\mathfrak{B}$，决定质点在演变发生之前的运动；而$Q_{t,x}(B_1,\cdots,B_N,n_1,\cdots,n_N)$是如下事件的概率：质点的运动始于点$x$，演变发生在$t$之后的时刻，质点蜕

变为$n_1+\cdots+n_N$个质点，其中n_i个质点落入集B_i，$i=1,\cdots,N$ $\left(\text{集 } B_i \text{ 为 } \mathfrak{B} \text{ 可测，两两不相交，而且 } \bigcup_{i=1}^{N} B_i=\mathscr{X}\right)$。我们看如何通过过程的这些特征来表示算子$\mathscr{T}$和$\mathfrak{A}^{(m)}$。由于$\tilde{\mathscr{X}}_0$是吸收点，故

$$\mathfrak{A}f(\tilde{\mathscr{X}}_0)=0 \tag{32}$$

所以，应对$\tilde{x}\in\tilde{\mathscr{X}}_0$求$\mathscr{T}f(\tilde{x})$，而对$m>0$求$\mathfrak{A}^{(m)}$。先设$\tilde{x}\in\tilde{\mathscr{X}}_1$。如果$\tilde{x}=(x)\in\tilde{\mathscr{X}}_1$，则把$\tilde{x}$与$x\in\mathscr{X}$等同。为求算子$\mathscr{T}$只需找出随机核$\mathscr{T}(x,\tilde{B})$，其中$\tilde{B}\in\tilde{\mathfrak{B}}$。此核完全决定于积分

$$\int\mathscr{T}(x,d\tilde{y})S[f](\tilde{y}),$$

其中$f\in\mathscr{M}_{\mathscr{X}}$，因为知道了这些积分，也就可以确定

$$\int_{\mathscr{X}_m}\mathscr{T}(x,d\tilde{y})S[f](\tilde{y}); \tag{33}$$

而形如$S[f]$，$f\in\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$的函数的线性组合，关于有界收敛拓扑可以逼近$\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$中的任何有界连续函数。但是对$f=\sum_{k=1}^{N}z_k\chi_{B_k}(x)$，$0\leqslant z_k\leqslant 1$，满足等式

$$\int\mathscr{T}(x,d\tilde{y})S\left[\sum_{k=1}^{N}z_k\chi_{B_k}(x)\right](\tilde{y})
=\sum_{n_1,\cdots,n_N}Q_{0,x}(B_1,\cdots,B_N,n_1,\cdots,n_N)z_1^{n_1}\cdots z_N^{n_N}. \tag{34}$$

通过在(34)中取极限可以看出，(33)式对一切$f\in\mathscr{M}_{\mathscr{X}}$成立。从而可以确定核$\mathscr{T}(x,\tilde{B})$以及算子$\mathscr{T}$。

现在设$\tilde{x}\in\tilde{\mathscr{X}}_m$。如果$\tilde{x}=(x_1,\cdots,x_m)$，而$\zeta$是过程首次流出$\tilde{\mathscr{X}}_m$的时刻，则$\zeta=\min[\zeta_1,\cdots,\zeta_m]$，其中$\zeta_k$是自点$x_k$出发的质点蜕变的时刻。我们假设随机变量$\zeta_k$的分布连续。由于这些变量独立，故其中任何两个重合的概率等于0。因此ζ只

与 $\zeta_1, \cdots, \zeta_m$ 中的一个重合。如果 $\zeta = \zeta_k$，而且自点 x_k 出发的质点蜕变为 n 个质点，则在体系中共有 $n+m-1$ 个质点。设 $\mu^{(k)}$ 是随机测度，它决定在时刻 ζ_k 出现的质点的位置。那末在时刻 ζ_k 位于集 B 中的质点的个数等于

$$\mu^{(k)}(B) + \sum_{j \neq k} \chi_B(x_j(\zeta_k)),$$

其中过程 $x_j(t)$ 决定自点 x_j 出发的质点的运动，随机变量 $\mu^{(k)}(B)$ 和 ζ_k 以及 $x_j(t)$ $(j \neq k)$ 相互独立。因此，表征质点在时刻 ζ 的分布的随机测度 μ 决定于等式

$$\mu(B) = \sum_{k=1}^{m} \left[\mu^{(k)}(B) + \sum_{j \neq k} \chi_B(x_j(\zeta_k)) \right] \times \prod_{j \neq k} \chi_{\{\zeta_j > \zeta_k\}}. \tag{35}$$

现在我们注意到，对 $f \geqslant 0$

$$\mathbf{E}_x e^{-\int f(x)\mu(dx)} = \int \mathscr{T}(\tilde{x}, d\tilde{y}) S[e^{-f}](\tilde{y}). \tag{36}$$

由(35)可见

$$\int f(x)\mu(dx) = \sum_{k=1}^{m} \left[\int f(x)\mu^k(dx) + \sum_{j \neq k} f(x_j(\zeta_k)) \right] \prod_{j \neq k} \chi_{\{\zeta_j > \zeta_k\}}.$$

于是

$$e^{-\int f(x)\mu(dx)} = \sum_{k=1}^{m} \exp\left\{ -\int f(x)\mu^{(k)}(dx) - \sum_{j \neq k} f(x_j(\zeta_k)) \right\} \prod_{j \neq k} \chi_{\{\zeta_j > \zeta_k\}}, \tag{37}$$

因为 $\prod_{j \neq k} \chi_{\{\zeta_j > \zeta_k\}}$ 只取 0 或 1 为值，而这些乘积之和不大于 1。如果对固定的 $\mu^{(k)}$ 和 ζ_k 求数学期望，则由 $x_j(t)$ 的相互独立性，以及它们对 $\mu^{(k)}$ 和 ζ_k 的独立性可见：

$$\mathbf{E}\left[\exp\left\{-\sum_{j\neq k} f(x_j(\zeta_k))\right\}\prod_{j\neq k}\chi_{\{\zeta_j>\zeta_k\}}\middle|\zeta_k\right]$$
$$=\prod_{j\neq k}\int e^{-f(y)}P(\zeta_k, x_j, dy).$$

所以对 $\tilde{x}=(x_1,\cdots,x_m)$

$$\int\mathscr{T}(\tilde{x}, d\tilde{y})S[e^{-f}](\tilde{y})$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\mathbf{E}_{x_k}\exp\left\{-\int f(x)\mu(dx)\right\}$$
$$\times\prod_{j\neq k}\int e^{-f(y)}P(\zeta_k, x_j, dy), \tag{38}$$

其中 $\mathbf{E}_{x_k}$ 表示 $\mathbf{E}_{\tilde{x}}$，$\tilde{x}\in\mathscr{X}$，$\tilde{x}=(x_k)$，而测度 μ 决定质点在蜕变时刻的分布(数学期望是在“开始时体系中有一个质点”的条件下求的)．仿照得到等式(7)和(8)的情形，根据函数 $Q_{t,x}(B_1,\cdots,B_N, n_1,\cdots, n_N)$ 可以确定

$$\mathbf{E}_x e^{-\int f(x)\mu(dx)}\chi_{\{\zeta>t\}}=q_{t,x}(f),$$

如果泛函 $q_{t,x}(f)$ 已给，则对 $[0, \infty)$ 上的任意右连续函数 $\alpha(s)$ 有

$$\mathbf{E}_x\exp\left\{-\int f(x)\mu(dx)\right\}\alpha(\zeta)$$
$$=-\int_0^\infty\alpha(s)d_sq_{s,x}(f). \tag{39}$$

利用此式由(38)式可得

$$\int\mathscr{T}(\tilde{x}, d\tilde{y})S[e^{-f}](\tilde{y})$$
$$=\sum_{k=1}^{m}-\int_0^\infty\left[\prod_{j\neq k}\int e^{-f(y)}P(s, x_j, dy)\right]d_sq_{s,x_k}(f).$$

如果引进伴随转移概率 $P(s,x,dy)$ 的半群 $\mathbf{T}_t$，则可将上式化为更方便的形式．设 $\varphi\in\mathscr{M}_{\mathscr{X}}$．那末在 $q_{s,x}(f)$ 连续的条件下有

$$\int\mathscr{T}(\tilde{x}, d\tilde{y})S[\varphi](\tilde{y})$$

$$= -\sum_{k=1}^{m}\int_0^\infty \prod_{j=1}^{m} \mathbf{T}_s\varphi(x_j)\frac{1}{\mathbf{T}_s\varphi(x_k)}\, d_s q_{s,x_k}(-\ln\varphi)$$

$$= \int_0^\infty \prod_{j=1}^{m} [T_t\varphi(x_j)] \exp\left\{\int_0^t \frac{1}{T_s\varphi(x_j)}\, dq_{s,x_j}(-\ln\varphi)\right\}$$

$$\times\, d_t \prod_{j=1}^{m} \exp\left\{-\int_0^t \frac{1}{T_s\varphi(x_j)} dq_{s,x_j}(-\ln\varphi)\right\}. \qquad (40)$$

对 $\varphi\in\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ 记

$$W_{t,x}(\varphi) = \exp\left\{-\int_0^t \frac{1}{T_s\varphi(x)}\, dq_{s,x}(-\ln\varphi)\right\}. \qquad (41)$$

那末 $\mathscr{T}(\tilde{x},\tilde{B})$ 最终决定于

$$\int \mathscr{T}(\tilde{x}, d\tilde{y})S[\varphi](\tilde{y})$$

$$= \int_0^\infty S\left[\frac{T_t\varphi}{W_{t,\cdot}(\varphi)}\right](\tilde{x})d_t S[W_{t,\cdot}(\varphi)](\tilde{x}). \qquad (42)$$

除特征算子 $\tilde{\mathfrak{A}}^{(m)}$，我们再定义过程 $\tilde{\mathscr{X}}^{(m)}(t)$ 的生成算子 $\mathbf{A}^{(m)}$[1]：

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(m)}f(\tilde{x}) = \lim_{t\downarrow 0}\frac{\mathbf{E}_{\tilde{x}}^{(m)}f(\tilde{x}_t^{(m)}) - f(\tilde{x})}{t},\ \tilde{x}\in\tilde{\mathscr{X}}_m. \qquad (43)$$

满足下列条件的 f 属于算子 $\tilde{\mathbf{A}}^{(m)}$ 的定义域：f 使上式中的极限存在，而且极限号后面的式子关于 t 和 x 有界．显然，若 $\tilde{x} = (x_1,\cdots,x_m)$，则

$$\mathbf{E}_{\tilde{x}}^{(m)}f(\tilde{x}_t^{(m)}) = \int\cdots\int P(t,x_1,dy_1)\cdots$$

$$P(t,x_m,dy_m)f(y_1,\cdots,y_m).$$

因此，(43)式中的极限至少对满足下列条件的函数 f 存在：

a)

$$\frac{1}{t}\left[\int P(t,x_k,dy_k)f(y_1,\cdots,y_m) - f(y_1,\cdots,\right.$$

---

1) 通常定义特征算子是为了以后根据它来建立生成算子，在过程充分规则的条件下，这两个算子在连续函数上重合．

$$x_k, \cdots, y_m)\Big]$$

关于一切 t，$y_i \in \mathscr{X}$，$x_k \in \mathscr{X}$，有界；

b）对每个 $\tilde{x}$，极限

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \Big[\int P(t, x_k, dy_k) f(y_1, \cdots, y_m) - f(y_1, \cdots, x_k, \cdots, y_m) \Big]$$

存在，当 $y_1, \cdots, y_m$ 在 $\tilde{x}$ 的某邻域变化时，收敛关于 $y_1, \cdots, y_m$ 是一致的。

如果条件 a）和 b）成立，则

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(m)} f(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{A}_{x_k} f(\tilde{x}), \tag{44}$$

其中若把 $f(\tilde{x})$ 看成一个变量 x_k 的函数（其它变量固定），则 $\mathbf{A}_{x_k}$ 表示半群 $\mathbf{T}_t$ $(\mathbf{T}_t f(x) = \int P(t, x, dy) f(y))$ 的算子 $\mathbf{A}$ 用于函数 $f(\tilde{x})$. 特别，如果 $f(\tilde{x}) = \prod_{k=1}^{m} f_k(x_k)$，$\tilde{x} = (x_1, \cdots, x_m)$，则为条件 a）和 b）成立，需使 $f_k \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}}$，其中 $\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$ 是算子 $\mathbf{A}$ 的定义域；这时

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(m)} \prod_{k=1}^{m} f_k(x_k) = \sum_{k=1}^{m} \Big(\prod_{i \neq k} f_i(x_i) \Big) \mathbf{A} f_k(x_k). \tag{45}$$

附　　注

第　一　章

§1. 本书中称为广义马尔科夫过程的,过程论的一般定义、分类和基本方程,是 A. H. Колмогоров 在他的著名论文"概率论的解析方法"[1]中提出来的.这篇文章不但是马尔科夫过程论的基础,而且也是一般随机过程论的基础. W. Feller[1] 研究了马尔科夫过程之 Колмогоров 方程的解的存在性定理,并且在[2]中研究了广义跳跃马尔科夫过程. 在第四章中要详细研究独立增量过程,而弱可微马尔科夫过程,则放到这部专著的第三卷中去研究.

§§2,3. Doob[2] 发展并分析了马尔科夫随机函数的概念. 我们所用的马尔科夫过程的定义,是 Дынкин[5] 提出的. 本章中的内容以及以后各节内容的基本出处是 Дынкин [5] 及 Blumenthal 和 Getoor [1] 等专著.

§4. Doob[2] 最早就特殊情形明晰地表述和证明了强马尔科夫性. Юшкевич[1] 和 Chung (钟开莱)[1] 研究了可列状态齐次马尔科夫过程的强马尔科夫性. Дынкин[5], Дынкин 和 Юшкевич[1], Blumenthal[1] 研究了一般情形的强马尔科夫过程. 与循序可测性有关的过程之性质的研究见 Doob 和 Chung 的文章[1].

§5. 很多作者研究了可乘泛函的特别类(例如, Kac [2]). 可乘泛函的一般定义、马尔科夫过程的子过程理论、根据可乘泛函构造子过程等属于 Дынкин[5].

§6. 马尔科夫族是 Дынкин[5] 引进的. 马尔科夫过程右连续的准则是 Kinney[1] 给出的; 连续性定理是 Kinney[1] 和 Дынкин[1] 证明的. 拟左连续的概念是 Hunt 引进的,"标准过程"的名称是 Дынкин 引进的. 在 Doob 和 Chung 的文章 [1] 中证明了循序可测过程的存在定理.

第　二　章

运用 Banach 空间中线性变换的半群理论，来研究一般时间齐次马尔科夫过程的特别方法属于 W. Feller[3],[4]. E. Б. Дынкин 和他的学生进一步运用了这一方法，并且给出了对相当广的过程类的构造性描述. 它们所取得的结果后经归纳和整理，收进 E. Б. Дынкин 的专著《马尔科夫过程》[6]. 对于深入研究齐次马尔科夫过程，这部专著至今仍然是基本参考书. 本书的第二章并不追求 E. Б. Дынкин 专著中那样的一般性，然而它却包含上述专著中所没有的一系列结果，其中有些结果还是第一次发表. 作者选择了略有不同的叙述内容的方案，并且使用了简化记号.

§§ 1—4. 这里主要介绍马尔科夫过程论的熟知事实.

§ 5. 关于强马尔科夫性的定义和条件在第一章的附注中已经提到. 特征算子的概念是 E. Б. Дынкин[3] 引进的. 在研究规则化了的过程的特征算子与原过程的特征算子的联系时，我们引用了 E. Б. Дынкин 的结果 [2]. 在首次流出一切紧集的时刻中断的过程的构造，看来本书还是第一次介绍. 在构造不中断强马尔科夫过程时延用的思路，与 E. Б. Дынкин 在[4]中对跳跃马尔科夫过程提出的思想相似.

§ 6. 可乘泛函和可加泛函的定义属于 E. Б. Дынкин. 关于这一点在第一章的附注中已经提到. M. Koc[1] 最早研究了 Wiener 过程的积分型可加泛函. 这篇文章激起了一系列其它工作，特别是 E. Б. Дынкин[2] 的工作. 从此开始了对泛函的一般研究. P. A. Meyer[1] 研究了上述形泛函的一般性质. 在可加泛函中特别受到重视的是 W 泛函；这个名称是 Дынкин 引进的. B. A. Волконсий[2] 利用积分的极限得到了一些 W 泛函类的表现. E. Б. Дынкин 把这种表现推广到一切 W 泛函. E. Б. Дынкин 在[6]一书的第 IV 章详尽地阐述了 W 泛函理论. 我们指出，本书中把一切连续泛函表为积分型泛函的极限(定理 1). Hunt[1] 引进了过份函数的概念，并且研究了过份函数与可加泛函的联系. M. Г.

Шур 在 [1],[2] 中继续作了这方面的研究. 我们这里提出了对应于已给过份函数的 W 泛函存在的条件. 这些条件的表述完全不同于 M. Г. Шур 所提的条件,它也适用于非标准过程. B. A. Волконский[1] 研究了一般形马尔科夫过程之时间的随机替换.

第 三 章

Doob (见 [1], 那里还援引了更早期的文献)研究了齐次跳跃马尔科夫过程的样本函数的结构, 以及根据过程的无穷小特征来构造跳跃马尔科夫过程的问题.

Колмогоров[3] 证明了, 可列状态的齐次过程的转移概率在 0 点可微. 钟开莱在一系列文章中对有可列个状态的过程进行了研究;他的结果以及其他作者的一些结果收进了其专著[1].

半马尔科夫过程是 Lévy[3] 和 Smith[1] 引进的.

第 四 章

§ 1. Bachelier[1] 最早研究了连续的独立增量过程. N. Wiener[1] 对 Wiener 过程及其样本函数的性质进行了严格的研究. B. Finetti[1], A. H. Колмогоров[1], P. Lévy[1] 等研究了一般独立增量过程. P. Lévy 证明过程的中心化定理, 找到了特征函数的一般形式 (A. H. Колмогоров[1] 对方差有限和齐次过程的情形指出了特征函数). A. Я. Хинчин[1] 研究了跳跃独立增量过程. 根据过程的跃度构造的随机测度是 K. Ito (伊藤 · 清)[1] (又见 [2])引进的, 它还研究了此测度的性质. 过程跳跃的条件及变差有界的条件是 A. B. Скороход 得到的.

§ 2. 许多作者进行过对独立增量过程基本泛函的性质的研究. 这里 F. Spitzer 的工作[1]起了重要作用. Б. A. Рогозин[1] 推广了 F. Spitzer 的结果, 他研究了越过由和的序列所给水平的跳跃的分布; 他还把这些研究推广到独立增量过程[3]. 关于跳跃度和跳跃时刻联合分布的更一般结果属于 Д. B. Гусак[1]: 定理 4

重述了他的结果. 过程的上确界和过程值的联合分布是 Д. В. Гусак 和 В. С. Королюк[2] 得到的. 对于对称过程, Baxter 和 Donsker[1] 得到了过程绝对值之最大值的分布(即它对空间和时间的重 Laplace 变换). А. В. Скороход 在 [1] 中最早进行了对有同号跳的过程的研究,并在此文中建立了 $\xi(t)$ 的特征和 τ_x 之间的联系. (72) 式是 В. М. Золотарев[2] 和 А. А. Боровков[1] 证明的,而(73)式是 Э. С. Штатланд[2] 证明的. P. Lévy 证明了式(75).

§3. Э. С. Штатланд 在[1]中证明了定理 1 的命题 1; 他对有同号跳跃的过程也证明了命题 2. Б. А. Рогозин 在 Э. С. Штатланд 对一般情形的证明中发现了错误, 并在[4]中给出了正确的证明. 定理 2 属于 А. В. Скороход[1]. Wiener 过程的重对数定律是 А. Я. Хинчин[1] 得到的. А. Я. Хинчин 在文章[2]中研究了稳定过程的局布增长的性质. В. М. Золотарев 在 [1] 中援引了与定理 5 类似的结果. А. Я. Хинчин 在[3]中证明, 对没有扩散的过程,以概率 1 有 $\lim\limits_{t\downarrow 0}|\xi(t)| \Big/ \sqrt{t\ln\ln\frac{1}{t}} = 0$. 定理 6 是 Б. А. Рогозин[3] 证明的. Б. В. Гнеденко[1] 研究了独立增量过程的重对数定律.

§4. А. В. Скороход[2] 研究独立增量过程的非负可加泛函.

第 五 章

最初与家族的生存问题相联系, 研究了最简单情形的分枝过程. 在 Harris 的专著[3]中,相当完整地反映了此理论在 1963 年以前的历史和基本结果. Колмогоров 和 Дмитриев[1] 最早给出了有多型质点的分枝过程的一般定义和研究. А. М. Яглом[1] 确立了有一类质点的分枝过程的渐近行为, 而 Harris[1], Jirina[1], Севастьянов[3] 研究了有多型质点的情形. Jirina[2] 引进了具连续状态集的分枝过程. §2 的叙述以 Рыжов 和 Скороход 的文章[1]为基础. Watanabe 的文章[1]讨论了二维情形, Севастьянов[2]

• 544 •

研究了带扩散的分枝过程. Moyal[1], Скороход[1] 以及 Watanabe, Ikeda 和 Nagasawa 的一列文章(例如 [1])中分析了分枝过程的一般定义。

参考文献

Бакстер, Донскер (Baxter J., Donsker M).

[1] On the distribution of the supremum functional for processes with stationary, independent increments, Trans. Amer. Math. Soc. **85** (1957), 73.

Боровков А. А.

[1] О времени первого прохождения для одного класса процессов с независимыми приращениями, Теория вероятностей и ее применения **X** (1965), 360—364.

Башелье (Bachelier P.)

[1] Theorie de la speculation, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **17** (1900), 21—86.

Блюменталь (Blumenthal R. M.)

[1] An extended Markov property, Trans. Amer. Math. Soc. **85** (1957), 52—72.

Блюменталь, Гетур (Blumenthal R. M., Getoor R. K.)

[1] Markov Processes and Potential Theory, N. Y.: Academic Press, 1968.

Ватанабе (Watanabe S.)

[1] On two-dimensional Markov processes with branching property, Trans. Amer Math. Soc. **136** (1969), 447—466.

Ватанабе, Икеда, Нагасава (Watanabe S., Ikeda N., Nagasawa M.)

[1] Branching Markov processes, I, II, III, J. Math. Kyoto Univ. **8**, 2 (1968). 233—278, 364—410, **9**, 1 (1969), 95—160.

Винер (Wiener N. D.)

[1] Differential space, J. Math. Phys. Mass. Inst. Technology **2** (1923). 131—174.

[2] Generalized harmonic analysis, Acta Math. **55** (1930), 117—258.

Волконский В. А.

[1] Случайная замена времени в строго марковских процессах, Теория вероятностей и ее применения III (1958), 332—350.

[2] Аддитнвные функционалы от марковских процессов, Труды Моск. матем. о-ва **9** (1960). 143—189.

Гнеденко Б. В.

[1] О росте однородных случайных процессов с независимыми приращениями, Изв. АН СССР. серия матем. **7** (1943), 89—110.

[2] К теории роста однородных случайных процессов с независимыми приращениями. Сб. трудов ин-та математ. АН УССР. **10** (1948), 60—82.

Гнеденко Б. В., Колиогоров А. Н.

[1] Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М. -Л., Гостехиздат, 1949.(中译本：«相互独立的随机变量之和的

极限分布»(王寿仁译)).

Гусак Д. В.

[1] О совместном распределении времени и величины первого перескока для однородных процессов с независимыми приращениями, Теория вероятностей и ее применения **XIV, 1** (1969), 15—23.

Гусак Д. В., Королюк В. С.

[1] О моменте первого прохождения заданного уровня для процессов с независимыми приращениями, Теория вероятностей и ее применения **XIII, 3** (1968), 471—478.

[2] О совместном распределении процесса со стандартными приращениями и его максимума. Теория вероятностей и ее применения **XIV, 3** (1969), 421—430.

Дуб (Doob J. L.)

[1] Markoff chains-denumerable case, Trans. Amer. Math. Soc. **58** (1945), 455—473.

[2] Вероятностные процессы, М., ИЛ, 1958 (перевод книги «Stochastic processes», New York-London, 1953).

Дуб. Чжун (Doob J. L. Chung K. L.)

[1] Fields, Optionality and Measurability, Amer. J. Math. **87** (1965), 397—424.

Дынкин Е. Б.

[1] Критерий непрерывности и отсутствия разрывов второго рода для траекторий марковского случайного процесса, Изв. АН СССР. серия матем. **16** (1952), 563—572.

[2] Функционалы от траекторий марковских случайных процессов, ДАН СССР **104** (1955), 691—694.

[3] Инфинитезимальные операторы марковских процессов. Теория вероятностей и ее применения **I** (1956), 38—60.

[4] Скачкообразные марковские процессы, Теория вероятностей и ее применения **III** (1958), 41—60.

[5] Основания теории марковских процессов, М., Физматгиз, 1959,(中译本: «马尔科夫过程论基础»(王梓坤译)).

[6] Марковские процессы, М., Физматгиз, 1963.

Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А.

[1] Строго марковские процессы, Теория вероятностей и ее применения, **I** (1956), 149—155.

Золотарев, В. М.

[1] Аналог закона повторного логарифма для полунепрерывных устойчивых процессов, Теория вероятностей и ее применения **IX** (1964), 566.

[2] Момент первого прохождения уровня и поведение на бесконечности одного класса процессов с независимыми приращениями, Теория вероятностей и ее применения **III** (1969), 724—733.

Ито (Itô K.)

[1] On stochastic processes Japan J. Math. 18 (1942), 261—301.

[2] Вероятностные процессы, вып. I, М., ИЛ, 1960. (中译本：伊藤清«随机过程»(刘璋温译)).

Иржина (Jiřina M.)

[1] Асимптотическое поведение ветвящихся случайных процессов, Czechoslovak. Math. J. 7 (1957), 130—153.

[2] Stochastic branching processes with continuous state space, Chechoslovak. Math. J. 8 (1958), 292—313.

Кац (Kac M.)

[1] On distribution of certain Wiener functionals, Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1949), 1—13.

[2] On some connection between probability theory and differential equations, Proc. 2nd Berkeley Symp. Math. Statist., Probability, 1950, 189—215.

Кинни (Kinney J. R.)

[1] Continuity properties of sample functions of Markov processes, Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953), 280—302.

Колмогоров А. Н.

[1] Об аналитических методах в теории вероятностей, Успехи матем. наук 5 (1938), 5—41 (перевод статьи из Math. Ann. (1931), 415—458). (中译本：«概率论的解析方法»(郑绍濂译)).

[2] Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo. Atti Accad. Lincei 15 (1932), 805—808; 866—869.

[3] К вопросу о дифференцируемости переходных вероятностей в однородных по времени процессах Маркова со счетным числом состояний, Ученые записки МГУ 148, Математика 4 (1951). 53—59.

Колмогоров А Н., Дмитриев Н. А.

[1] Ветвящиеся случайные процессы, ДАН СССР 56, 1 (1947), 7—10.

Леви (Lévy P.)

[1] Sur les integrales dont les elements sont des variables aleatoires independents. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 2 (1934), 337—366. 4 (1935). 217—218.

[2] Processus stochastiques et mouvement brownien, Paris, 1948.

[3] Processus semi-markoviens, Proc: III Internat. Congr. Math. (Amsterdam). (1954). 416—426.

Мейер (Meyer P.)

[1] Fonctionelles multiplicatives et additives de Markov, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 19 (1962), 125—230.

Мойал (Moyal J. E.)

[1] Multiplicative population chains, Proc. Roy. Soc. A 266, 1327 (1962), 519—526.

Рогозин Б. А.

[1] О распределении величины первого перескока. Теория вероятностей и ее применения IX (1964), 498—515.

[2] О некоторых классах процессов с независимыми приращениями. Теория вероятностей и ее применения **X** (1965), 527—531.

[3] О распределении некоторых функционалов, связанных с граничными задачами для процессов с независимыми приращениями, Теория вероятностей и ее применения **XI** (1966), 656—670.

[4] О локальном поведении процессов с независимыми приращениями. Теория вероятностей и ее применения **XIII** (1968), 507—512.

Рыжов Ю. М. Скороход А. В.

[1] Однородные ветвящиеся процессы с конечным числом типов и непрерывно меняющейся массой, Теория вероятностей и ее применения **XV** (1970), 722—726.

Севастьянов Б. А.

[1] Теория ветвящихся случайных процессов, Успехи матем. наук **6**, 6 (1951), 47—99.

[2] Ветвящиеся случайные процессы для частиц, диффундирующих в ограниченной области, Теория вероятностей и ее применения **III** (1958), 121—136.

[3] Переходные явления в ветвящихся случайных процессах, Теория вероятностей и ее применения **IV** (1959), 121—135.

Скороход А. В.

[1] Ветвящиеся диффузионные процессы, Теория вероятностей и ее применения **IX**, 3 (1964), 492—497.

[2] Случайные процессы с независимыми, приращениями, М., Изд-во «Наука», 1967.

[3] Неотрицательные аддитивные функционалы от процесса с независимыми приращениями,в сб.: Теория вероятностей и математическая статистика, Изд-во Киевск. ун-та, **4** (1971).

Смит (Smith R. L.)

[1] Regenerative stochastic processes, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **A 232** (1955), 6—31.

Спицер (Spitzer F.)

[1] A combinatorial lemma and its application to probability theory, Trans. Amer. Math. Soc. **82** (1956), 323—339.

[2] Принципы случайного блуждания, М. Изд-во «Мир», 1969.

Феллер (Feller W.)

[1] Zur Theorie der stochastischen Prozesse. Math. Ann. **113** (1936), 113—160.

[2] On integro-differential equations for purely discontinuous Markov processes, Trans. Amer. Math. Soc **46** (1940) 488—515.

[3] The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations, Ann. Math. **55** (1952), 468—519.

[4] Diffusion processes in one dimension, Trans. Amer. Math. Soc. **77** (1954). 1—31.

Финетти (Finetti B.)

[1] Sulla funzioni a incremento aleatorio, Rend. Acad. Noz. Lincei Cl. Sci. Fis. Math. Natur. (6) **10** (1829), 163—168.

Хант (Hunt J. A.)

[1] Markoff processes and potentials, Illinois J. Math. **1** (1957), 44—93, 316—369, **2** (1958), 151—213 (русский перевод: «Марковские процессы и потенциалы», М., ИЛ, 1962).

Харрис (Harris T. E.)

[1] Some mathematical models for branching processes, Proc. 2nd Berkeley Symp. Math. Statist. Probability, 1951, 305—328.

[2] Теория ветвящихся случайных процессов. М., изд-во «Мир», 1966.

Хинчин А. Я.

[1] Асимптотические законы теории вероятностей, М. -Л, ОНТИ, 1936.

[2] Две теоремы о стохастических процессах с однотипными приращениями, Матем. сб. **3** (**45**): 3(1938). 577—584.

[3] О локальном росте однородных стохастических процессов без последействия, Изв. АН СССР, серия матем. **5—6** (1939), 487—508.

Чжун Кай-Лай (Kai-Lai Chung)

[1] Однородные цепи Маркова, М. Изд-во «Мир», 1964 (переводкниги «Markov chains with stationary transition probabilities», Springer-Verlag, 1960).

Штатланд Э. С.

[1] О локальных свойствах процессов с независимыми приращениями, Теория вероятностей и ее применения **X**, **2** (1965), 344—350.

[2] О распределении максимума процесса с независимыми приращениями, Теория вероятностей и ее применения **X**, **3** (1965), 531—535.

Шур М. Г.

[1] Непрерывные аддитивные функционалы от марковских процессов и эксцессивные функции, ДАН СССР **137** (1961), 800—803.

[2] Эксцессивные функции и аддитивные функционалы от марковских процессов, ДАН СССР **143** (1962), 293—296.

Юшкевич А. А.

[1] О строго марковских процессах. Теория вероятностей и ее применения **II** (1957), 187—213.

Яглом А. М.

[1] Некоторые предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов. ДАН СССР **56** (1947), 795—798.

索　引

六 画

七 画

八 画

九　画

十　画

十 一 画

十二画以上

其　它

目　　录

第一章　鞅与随机积分

§1. 鞅及其推广

以前结果的概述　我们从回顾并更确切地说明关于鞅与半鞅的基本定义和原先得到的结果(第一卷第二章§2和第三章§4)开始.

设 $\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$ 是某个概率空间,T 是任意有序集(今后只考虑 T 是广义实直线$[-\infty,+\infty]$的子集这一情形),$\{\mathfrak{F}_t,t\in T\}$是 σ-代数流 $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}_t\subset\mathfrak{S})$; 如果 $t_1<t_2$, 那末 $\mathfrak{F}_{t_1}\subset\mathfrak{F}_{t_2}$. 用 $\{\xi(t),\mathfrak{F}_t,t\in T\}$ 或简记 $\{\xi(t),\mathfrak{F}_t\}$, 表示由可测空间 $\{\Omega,\mathfrak{S}\}$ 上的 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t,t\in T\}$ 和适应于 $\{\mathfrak{F}_t,t\in T\}$ 的随机过程 $\xi(t),t\in T$ (即对每个 $t\in T$,$\xi(t)$ 是 $\mathfrak{F}_t$-可测的)所组成的对象. 今后也称它为随机过程.

随机过程 $\{\xi(t),\mathfrak{F}_t,t\in T\}$ 称为$\mathfrak{F}_t$-鞅(或鞅,当所指的那一个 σ-代数流不会含混时),如果

$$\mathbf{E}|\xi(t)|<\infty,\forall t\in T \tag{1}$$

和

$$\mathbf{E}\{\xi(t)|\mathfrak{F}_s\}=\xi(s),\ 当\ s<t,s,t\in T;$$

称 $\{\xi(t),\mathfrak{F}_t,t\in T\}$ 为上鞅(下鞅),如果条件(1)满足及

$$\begin{gathered}\mathbf{E}\{\xi(t)|\mathfrak{F}_s\}\leqslant\xi(s),s<t,s,t\in T\\(\mathbf{E}\{\xi(t)|\mathfrak{F}_s\}\geqslant\xi(s),s<t).\end{gathered}\tag{2}$$

我们指出,这里的定义区别于第一卷所用的定义,因为现在要求 $\xi(t)$ 的教学期望都是有限的. 例如在上鞅情况,以前仅假定量 $\mathbf{E}\xi^-(t)$ 是有限的.

所引入的定义等价于:$\{\xi(t),\mathfrak{F}_t,t\in T\}$ 是鞅(上鞅),如果对任意集合 $B_s\in\mathfrak{F}_s$ 及任意 $s,t\in T,s<t$,

$$\int_{B_s} \xi(t)\, d\mathbf{P} = \int_{B_s} \xi(s) d\mathbf{P} \quad \left(\int_{B_s} \xi(t)\, d\mathbf{P} \leqslant \int_{B_s} \xi(s) d\mathbf{P}\right).$$

上鞅和下鞅也称为半鞅.

本节基本上研究连续变量半鞅.

在区间 $[0,T]$ 上,对每个 $t\in(0,T]$ 有左极限且在 $[0,T)$ 上右连续的全体实函数,用 $\mathscr{D}$ 或 $\mathscr{D}[0,T]$ 表示. 记号 $\mathscr{D}[0,T)$, $\mathscr{D}[0,\infty)$ 或 $\mathscr{D}[0,\infty]$ 有类似的意义.

在鞅论中一系列不等式及极限的存在定理起着重要作用. 在第一卷(第二章 §2) 已确定如下关系:

如果 $\xi(t), t\in T$, 是可分下鞅,那末

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} \xi^+(t) \geqslant C\right\} \leqslant \frac{\sup_{t\in T} \mathbf{E}\xi^+(t)}{C}, \tag{3}$$

$$\mathbf{E}[\sup_{t\in T} \xi^+(t)]^p \leqslant q^p \sup_{t\in T} \mathbf{E}[\xi^+(t)]^p, \quad q = \frac{p}{p-1}, \quad p > 1, \tag{4}$$

$$\mathbf{E}\nu[a,b) \leqslant \sup_{t\in T} \frac{\mathbf{E}(\xi(t) - b)^+}{b-a}, \tag{5}$$

其中 $a^+ = a$, 当 $a \geqslant 0$, $a^+ = 0$, 当 $a < 0$,以及 $\nu[a,b)$ 表示过程 $\xi(t)$ 的样本函数由上到下相交于区间 $[a,b)$ 的数目(更确切的定义在第一卷第二章 §2 给出).

我们回顾半鞅的封闭元的定义.

设 $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t\in T\}$ 是半鞅且集合 T 没有最大(最小)元素. 随机变量 η 被称为半鞅 $\xi(t)$ 的右(左)封闭元, 如果可以扩充集合 T, 补充一新元素 $b(a)$, 使得与 T 中元素有关系

$$t < b \ (t > b) \quad \forall t\in T,$$

和补充合适的 σ-代数 $\mathfrak{F}_b(\mathfrak{F}_a)$ 于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t\in T\}$ 中, 使得扩充的随机变量族 $\xi(t), t\in T'$, $T' = T\cup\{b\}$ ($T' = T\cup\{a\}$) 重新成为 $\mathfrak{F}_t$-半鞅.

定理 1 设 $\xi(t), t\in T$, 是可分下鞅, $T\subset(a,b)$, 点 a 及 b 是集合 T 的极限点($-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$). 此时,存在概率为 0 的集合 Λ,使当 $\omega \bar{\in} \Lambda$ 时:

1）在集合T的每一内点t，存在极限$\xi(t-)$及$\xi(t+)$；

2）如果 $\sup\{\mathbf{E}\xi^+(t), t\in T\}<\infty$，那末存在极限$\xi(b-)$；这时，如果对某个$t_0$，随机变量族$\{\xi(t), t\in[t_0,b)\}$一致可积，那末极限$\xi(b-)$也在$L_1$中存在，且$\xi(b-)$是下鞅的右封闭元；

3）如果 $\lim\limits_{t\to a}\mathbf{E}\xi(t)>-\infty$，那末随机变量族$\{\xi(t), t\in(a, t_0]\}$一致可积，对每个$\omega\in\Lambda$和在$L_1$收敛意义下极限$\xi(a+)$存在，且$\xi(a+)$是下鞅的左封闭元。

证. 前已证明(第一卷第三章§4)在条件 $\sup\{E\xi^+(t), t\in(a, b)\}<\infty$ 下，对每个$t\in[a,b]$，单方极限$\xi(t-)$及$\xi(t+)$以概率1存在。

此外，如果族$\{\xi(t), t\in[t_0, b)\}$是一致可积的，则由$t\uparrow b$时$\xi(t)$以概率1收敛于$\xi(b-)$推得也在L_1中收敛，且$\xi(b-)$是下鞅$\xi(t), t\in(a,b)$，的右封闭元。其证明类似于离散变量下鞅情形(第一卷第二章§2)*。

余下要证明论断3)。

设 $l=\lim\limits_{t\downarrow a}\mathbf{E}\xi(t)$。因为$\mathbf{E}\xi(t)$是单调不减函数，所以这极限存在。又

$$|\xi(t)|=2\xi^+(t)-\xi(t),$$

故

$$\sup_{t\in(a,t_0]}\mathbf{E}|\xi(t)|\leqslant 2\mathbf{E}\xi^+(t_0)-l=C<\infty.$$

由 Чебышев 不等式 $\mathbf{P}(B_t)\leqslant\frac{C}{N}$，其中 $B_t=\{|\xi(t)|>N\}$，即当$N\to\infty$时按t一致地有$\mathbf{P}(B_t)\to 0$。设$\varepsilon>0$是任意数，t_1是这样的：对所有$t\leqslant t_1$均有$\mathbf{E}\xi(t)-l<\frac{\varepsilon}{2}$，则当$t\in(a, t_1]$

---

* 此段的证明是英译本补充的. ——译者注

$$\int_{B_t} |\xi(t)| d\mathbf{P} = \int_{\{\xi(t)>N\}} \xi(t) d\mathbf{P} + \int_{\{\xi(t)>-N\}} \xi(t)\, d\mathbf{P} - \mathbf{E}\xi(t)$$
$$\leqslant \int_{\{\xi(t)>N\}} \xi(t_1) d\mathbf{P} + \int_{\{\xi(t)>-N\}} \xi(t_1) d\mathbf{P} - \mathbf{E}\xi(t)$$
$$\leqslant \int_{B_t} |\xi(t_1)| d\mathbf{P} + \frac{\varepsilon}{2},$$

所以,对所有 $t \in (a, t_1]$ 和足够大的 N,有 $\int_{B_t} |\xi(t)| d\mathbf{P} < \varepsilon$. 因此,族 $\{\xi(t), t \in (a, t_0]\}$ 一致可积. 故极限 $\lim\limits_{t \downarrow a} \xi(t)$ 以概率 1 存在,从而在 L_1 收敛意义下也存在.

由不等式

$$\int_B \xi(s) d\mathbf{P} \leqslant \int_B \xi(t) d\mathbf{P}, s < t, B \in \bigcap_{t \in T} \mathfrak{F}_t,$$

当 $s \downarrow a$ 时,极限可移至积分号内得到 $\xi(a+)$ 是下鞅 $\{\xi(t), t \in T\}$ 的左封闭元.

注 1. 定理 1 中"下鞅"可以用"上鞅"或"鞅"代替.

注 2. 定理的论断 3)显然可直接搬到序列的情形. 此时它可陈述为

3) 如果 $\{\cdots\xi(-n), \xi(-n+1), \cdots, \xi(0)\}$ 是下鞅,且 $\lim\limits_n \mathbf{E}\xi(-n) > -\infty$, 那末序列 $\{\xi(-n)\}$ 一致可积且以概率 1 及在 L_1 意义下均存在极限 $\xi_\infty = \lim \xi(-n)$, 并且此极限是下鞅 $\{\xi(n), n = \cdots, -k, -k+1, \cdots, 0\}$ 的左封闭元.

今后,如果相应的随机变量族 $\xi(t), t \in T$, 是一致可积的,我们称半鞅为一致可积;如果 $\sup\{\mathbf{E}|\xi(t)|, t \in T\} < \infty$, 则称半鞅为可积的.

定理 2 设 $T \subset (a, b)$, a 和 b 是集合 $T(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$ 的极限点. 为使鞅 $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$ 是一致可积的充分必要条件是存在随机变量 η, 使

$$\mathbf{E}|\eta| < \infty, \xi(t) = \mathbf{E}\{\eta | \mathfrak{F}_t\}, t \in T. \tag{6}$$

如果这条件成立,那末可以认为 $\eta = \lim\limits_{t \uparrow b} \xi(t)$, 且变量 η 在所

有 $\sigma\{\mathfrak{F}_t, t\in T\}$-可测随机变量的类中被唯一地确定（mod $\mathbf{P}$）.

证. 如果鞅 $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t\in T\}$ 一致可积，那末按定理 1 它有右封闭元，因此可得式(6).

现设鞅 $\xi(t)$ 按公式(6)表出. 这时

$$\int_A \xi(t)d\mathbf{P} = \int_A \eta d\mathbf{P}, \forall A\in\mathfrak{F}_t,$$

由此得

$$\int_B |\xi(t)|d\mathbf{P} \leqslant \int_B |\eta|d\mathbf{P}, \ \forall B\in\mathfrak{F}_t. \tag{7}$$

特别，$\mathbf{E}|\xi(t)| \leqslant \mathbf{E}|\eta|$. 因此由 Чебышев 不等式得，当 $N\to\infty$ 时，关于 t 一致地 $\mathbf{P}\{|\xi(t)|>N\}\to 0$. 应用不等式 (7) 于集合 $B=B_t=\{|\xi(t)|>N\}$，可见族 $\{\xi(t), t\in T\}$ 一致可积.

余下要证明在全体 $\sigma\{\mathfrak{F}_t, t\in T\}$-可测随机变量的类中，表示式(6)是唯一的. 如果存在用随机变量 $\eta_i, i=1,2$ 表示的两个这样的表示式，那末

$$\mathbf{E}\{\zeta|\mathfrak{F}_t\}=0, \quad \forall t\in T,$$

其中 $\zeta=\eta_1-\eta_2$.

因此，对 $\mathfrak{F}_t$ 中所有 A 和 T 中所有 t，

$$\int_A \zeta d\mathbf{P}=0$$

成立，于是对 $\sigma\{\mathfrak{F}_t, t\in T\}$ 中的所有 A 也成立. 因为量 ζ 是 $\sigma\{\mathfrak{F}_t, t\in T\}$-可测，所以 $\zeta=0 (\mathrm{mod}\ P)$.

注. 如果 $\{\xi(t), t\in T\}$ 是鞅，且在 T 中存在极大元，那末随机变量族 $\xi(t), t\in T$，一致可积.

在表示式(6)中 $\sigma\{\mathfrak{F}_t, t\in T\}$-可测随机变量 η 称为鞅 $\xi(t), t\in T$ 的边界值.

在第一卷（第三章 §4）中已指出，在十分一般的假设下对给定的半鞅存在随机等价的过程 $\{\zeta(t), \mathfrak{F}_t, t\geqslant 0\}$，其样本函数属于 $\mathscr{D}[0,\infty)$，且 σ-代数流 $\mathfrak{F}_t$ 是右连续的，即

$$\mathfrak{F}_{t+}=\mathfrak{F}_t, \forall t>0.$$

在本节如无相反的特别声明，我们通常将假定所考虑的半鞅具有

这些性质。

拟鞅 设 $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$ 是右连续 σ 代数流 $(\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_{t+})$。

定义 适应于 $\mathfrak{F}_t$ 的过程 $\{\xi(t), t \geqslant 0\}$ 称为拟鞅（$\mathfrak{F}_t$-拟鞅），如果

$$\mathbf{E}|\xi(t)| < \infty, \forall t \geqslant 0,$$

且

$$\sup \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}|\xi(t_k) - \mathbf{E}\{\xi(t_{k+1})|\mathfrak{F}_{t_k}\}| = V < \infty,$$

其中 sup 是按任意值 n 和 $t_0, t_1, \cdots, t_n$ 取的；$0 \leqslant t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n < \infty$。

下面将指出拟鞅的研究可归结为半鞅的研究。

鞅和满足 $\inf \mathbf{E}\xi(t) > -\infty$ $(\sup \mathbf{E}\xi(t) < \infty)$ 的上（下）鞅都是拟鞅的例子，两个上鞅之差的过程也是拟鞅。事实显示出所有拟鞅只限于这些例子。

设

$$\delta(s,t) = \xi(s) - \mathbf{E}\{\xi(t)|\mathfrak{F}_s\}, (s < t), a(t) = \mathbf{E}\xi(t).$$

此时，

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a(t_k) - a(t_{k+1})| = \sum_{k=0}^{n-1} |\mathbf{E}\delta(t_k, t_{k+1})| \leqslant V,$$

即 $a(t)$ 是有界变差函数。特别，对任意 $t > 0$ 极限 $a(t-)$ 和 $a(t+)$ 存在，而 $a(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} a(t)$ 也存在。

不等式 (3)—(5) 可以推广到拟鞅。为此我们注意在第一卷（第二章 §2）对可列序列已建立的不等式 (21) 和 (23) 适用于可分拟鞅，这时它可以写成如下形式：

$$\mathbf{P}\{\sup \xi(t) \geqslant C\} \leqslant \frac{\sup \mathbf{E}\xi^+(t) + V}{C}, \tag{8}$$

$$E\nu[a,b) \leqslant \frac{\sup\limits_t \mathbf{E}(\xi(t) - b)^+ + V}{b - a}, \tag{9}$$

其中 $\nu[a,b)$ 是由上到下相交于区间 $[a, b)$ 的数目. 利用不等式(9),如半鞅时一样,可建立如下定理(第一卷第三章 §4 定理 6 和 7):

定理 3 可分拟鞅 $\xi(t), t>0$, 以概率 1 对每个 t 有左、右极限. 这时 $\{\xi(t+), \mathfrak{F}_{t+}, t \geqslant 0\}$ 也是拟鞅,且其样本函数右连续和对每个使 $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_{t+}$ 及 $\mathbf{E}\xi(t)$ 连续的点 t, $\mathbf{P}\{\xi(t) = \xi(t+)\} = 1$.

由这个定理,不失一般性,今后我们可以只考虑样本函数以概率 1 属于 $\mathscr{D}$ 和对所有 $t \geqslant 0, \mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_{t+}$ 的拟鞅. 在本段我们将认为此条件成立.

定理 4 任意拟鞅可以有分解式

$$\xi(t) = \mu(t) + \zeta(t),$$

其中 $\mu(t)$ 是鞅,且 $\mathbf{E}|\zeta(t)| \to 0$, 当 $t \to \infty$.

此分解式是唯一的.

如果 $\xi(t)$ 是满足条件 $\inf\xi(t) > -\infty$ 的上鞅,那末 $\zeta(t)$ 是非负上鞅.

证. 对每个 $s > 0$ 和 $t \geqslant 0$, 令

$$\xi(s,t) = \mathbf{E}\{\xi(s+t)|\mathfrak{F}_t\},$$

并考虑过程 $\xi(s,t)$ 的可分修正. 我们来证明对固定的 $t, \xi(s,t)$ 作为 s 的函数以概率为 1 是有界变差的.

事实上,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\xi(s_k,t) - \xi(s_{k+1},t)| = \sum_{k=0}^{n-1} |\mathbf{E}\{\xi(s_k+t) - \mathbf{E}\{\xi(s_{k+1}+t)\mathfrak{F}_{s_{k+1}}|\mathfrak{F}_t\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}\{|\delta(s_k+t, s_{k+1}+t)|\mathfrak{F}_t\}$$

且

$$\mathbf{E}\sum_{k=0}^{n-1} |\xi(s_k,t) - \xi(s_{k+1},t)| \leqslant V.$$

可以认为变量 s 和 t 的函数 $\xi(s,t)$ 的可分点集具有形式 $I\times I$. 对每个 $t\in I$ 取序列 $\{s_0,s_1,\cdots,s_n\}$, $s_k\in I$, 使当 n 递增时,它是单调递增集合且在极限情形取尽全部 I. 这时和 $\sum_{k=0}^{n-1}|\xi(s_k,t)-\xi(s_{k+1},t)|$ 单调不减且趋向本身的上限 $V(t)$. 因此 $\mathbf{E}V(t)\leqslant V$ 及 $V(t)<\infty$ 对每个 t 以概率 1 成立. 由此得知存在这样的集合 $N\in\mathfrak{S},\mathbf{P}(N)=0$,使得如果 $\omega\notin N$,那末对任意 $t,V(t)<\infty$. 于是以概率 1 存在极限

$$\mu(t)=\lim_{s\uparrow\infty}\xi(s,t).$$

设 $s_n\uparrow\infty$. 因为

$$|\mu(t)-\xi(s_n,t)|\leqslant\sum_{n}^{\infty}|\xi(s_k,t)-\xi(s_{k+1},t)|\leqslant V(t),$$

所以 $\mu(t)$ 是可积随机变量且序列 $\xi(s_n,t)$ 有可积控制变量, 于是当 $t_1<t_2$ 时

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{\mu(t_2)|\mathfrak{F}_{t_1}\}&=\mathbf{E}\{\lim_{s\to\infty}E\{\xi(s+t_2)|\mathfrak{F}_{t_2}\}|\mathfrak{F}_{t_1}\}\\&=\lim_{s\to\infty}E\{\xi(s+t_2)|\mathfrak{F}_{t_1}\}=\mu(t_1).\end{aligned}$$

这样就证明了 $\mu(t)$ 是 $\mathfrak{F}_t$-鞅.

令 $\zeta(t)=\xi(t)-\mu(t)$. 这时 $\mathbf{E}|\zeta(t)|\to0$ 当 $t\to\infty$.

事实上,若不然,那末可找到 $\varepsilon>0$ 及对任意的$N>0$ 有 $t=t_N$, $t_N>N$, 使得 $\mathbf{E}|\xi(t_N)|>\varepsilon$. 取某个 t_1,因为

$$\mathbf{E}|\zeta(t_1)|=\mathbf{E}|\xi(t_1)-\lim_{s\to\infty}\xi(t_1,s)|=\lim_{s\to\infty}\mathbf{E}|\xi(t_1)-\xi(t_1,s)|,$$

所以可找到 s_1 使 $\mathbf{E}|\xi(t_1)-\xi(t_1,s_1)|>\varepsilon$. 令 $t_2=t_1+s_1$ 则可找到 $t_3>t_2$ 使 $\mathbf{E}|\zeta(t_3)|>\varepsilon$. 继续此步骤至无穷. 此时,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\sum_{1}^{2n-1}|\delta(t_k,t_{k+1})|&\geqslant\mathbf{E}\sum_{1}^{n}|\delta(t_{2k-1},t_{2k})|\\&=\mathbf{E}\sum_{1}^{n}|\xi(t_{2k})-\mathbf{E}\{\xi(t_{2k})|\mathfrak{F}_{t_{2k-1}}\}|\end{aligned}$$

$$\geqslant n\varepsilon \to \infty,$$

这和拟鞅的定义相矛盾。

因此，存在满足定理条件的分解。我们来证明其唯一性。

设存在两个分解式：$\xi(t)=\mu_1(t)+\zeta_1(t)=\mu_2(t)+\zeta_2(t)$，这时 $\mu_1(t)-\mu_2(t)=\zeta_2(t)-\zeta_1(t)$，且 $\mathbf{E}|\zeta_1(t)-\zeta_2(t)|\to 0$ 当 $t\to\infty$。另方面，$|\mu_1(t)-\mu_1(t)|$ 是下鞅且 $\mathbf{E}|\mu_1(t)-\mu_2(t)|$ 是 t 的单调不减函数。于是 $\mathbf{E}|\mu_1(t)-\mu_2(t)|\equiv 0$ 因而 $\mu_1(t)=\mu_2(t)(\mathrm{mod}\mathbf{P})$。最后如果 $\xi(t)$ 是上鞅，那末 $\mu(t)=\lim\limits_{s\uparrow\infty}\xi(s,t)=\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{E}\{\xi(s+t)|\mathfrak{F}_t\}\leqslant\xi(t)$，因此，$\zeta(t)=\xi(t)-\mu(t)\geqslant 0$。

定义 满足当 $t\to\infty$ 时 $\mathbf{E}\xi(t)\to 0$ 的非负上鞅称为位势。

我们指出，对位势来说，极限 $\xi_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}\xi(t)$ 存在且以概率 1，$\xi_\infty=0$。

因此，满足条件 $\inf\mathbf{E}\xi(t)>-\infty$ 的上鞅有分解式 $\xi(t)=\mu(t)+\pi(t)$，其中 $\mu(t)$ 是鞅，$\pi(t)$ 是位势。此分解式是唯一的。类似于古典的上调和函数理论，它称为 Riesz 分解。我们约定在定理 4 所建立的分解也称为 Riesz 分解，而满足条件 $\mathbf{E}|\zeta(t)|\to 0$（当 $t\to\infty$）的拟鞅称为拟位势。

现来证明任意拟位势可表为两位势之差。

设 $\zeta(t)$ 是拟位势。令

$$\delta_{k,n}=\delta\left(\frac{k}{2^n},\ \frac{k+1}{2^n}\right),$$

$$\delta_{k,n}^+=\max(\delta_{k,n},0),\delta_{k,n}^-=\delta_{k,n}^+-\delta_{k,n}$$

$$\pi_+^n(t)=\mathbf{E}\left\{\sum_{k=j(t)}^{\infty}\delta_{k,n}^+|\mathfrak{F}_t\right\},$$

$$\pi_-^n(t)=\mathbf{E}\left\{\sum_{k=j(t)}^{\infty}\delta_{k,n}^-|\mathfrak{F}_t\right\},$$

其中 $j(t)$ 是由条件 $\frac{j(t)-1}{2^n}<t\leqslant\frac{j(t)}{2^n}$ 所确定的整数。

我们注意，当 $t=\frac{j}{2^n}$ 时

$$\zeta(t)=\mathbf{E}\left\{\sum_{k=j}^{\infty}\delta_{k,n}|\mathfrak{F}_t\right\}=\pi_+^n(t)-\pi_-^n(t),$$

而且级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\delta_{k,n}$ 绝对收敛 (mod$P$) 及可积性可由拟鞅的定义得到. 显然, $\mathbf{E}\{\pi_+^n(t)|\mathfrak{F}_s\}\leqslant\pi_+^n(s)$, 当 $s<t$, 因此 $\pi_+^n(t)$ 是位势.

现来证明 $\pi_+^n(t)\leqslant\pi_+^{n+1}(t), n=1,2,\cdots$. 取包含在 $\pi_+^n(t)$ 的表达式中的某一被加项, 例如, $\mathbf{E}\{\delta_{k,n}^+|\mathfrak{F}_t\}\left(\frac{k}{2^n}\geqslant t\right)$. 我们有

$$\mathbf{E}\{\delta_{k,n}^+|\mathfrak{F}_t\}=\mathbf{E}\left\{\left[\zeta\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right)\right\}-\mathbf{E}\left\{\zeta\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\Big|\mathfrak{F}_{\frac{2k}{2^{n+1}}}\right\}\right.$$

$$\left.+\zeta\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)-\mathbf{E}\left\{\zeta\left(\frac{2k+2}{2^{n+1}}\right)\Big|\mathfrak{F}_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}\right\}\Big|\mathfrak{F}_{\frac{k}{2^n}}\right]^+|\mathfrak{F}_t\right\}$$

$$\leqslant\mathbf{E}\{[\delta_{2k,n+1}^++\delta_{2k+1,n+1}^+]|\mathfrak{F}_t\},$$

由此得到序列 $\pi_+^n(t)$ 的单调性. 由证明得 $\pi_-^n(t)$ 也是位势且 $\pi_-^n(t)\leqslant\pi_-^{n+1}(t)$.

令 $\pi_+(t)=\lim\pi_+^n(t)$, $\pi_-(t)=\lim\pi_-^n(t)$. 对每个 t, 此极限以概率 1 存在. 因为 $E(\pi_+^n(t)+\pi_-^n(t))=\mathbf{E}\sum_{k=0}^{\infty}|\delta_{k,n}|\leqslant V$, 所以 $\mathbf{E}\pi_\pm(t)<\infty$. 显然 $\pi_\pm(t)$ 是上鞅.

还不难证明 $E\pi_\pm^n(t)\to 0$ 当 $t\to 0$ 时对 n 一致成立. 于是 $\pi_\pm(t)$ 是位势.

对所有 $t\geqslant 0$, 我们定义过程 $\pi_\pm(t)$ 使其样本函数以概率 1 右连续. 顾及到过程 $\zeta(t)$ 也是右连续, 可见等式 $\zeta(t)=\pi_+(t)-\pi_-(t)$ 对所有 t 以概率 1 成立.

定理 5 如果 $\zeta(t)$ 是样本函数属于 $\mathscr{D}$ 的拟位势, 那末存在

位势 $\pi_+(t)$ 和 $\pi_-(t)$ 使

$$\zeta(t)=\pi_+(t)-\pi_-(t),\quad \forall t\geqslant 0,$$

以概率为 1 成立。

停止与时间的随机置换 在本段将考虑半鞅

$$\{\xi(t),\mathfrak{F}_t,t\in T\},\ 其中\ T=N=\{0,1,\cdots,n,\cdots\}$$
$$或\ T=[0,\infty).$$

如果 $T=[0,\infty)$，那末我们假定过程 $\xi(t)$ 的样本函数属于 $\mathscr{D}[0,\infty)$ 和 $\mathfrak{F}_t=\mathfrak{F}_{t+},t\in[0,\infty)$。

先来回顾随机时间的定义(第一卷第一章 §1)。设$\{\mathfrak{F}_t,t\in T\}$是某个 σ-代数流. 取值于T的函数 $\tau=f(\omega),\omega\in\Omega_\tau\subset\Omega$,称为在$\{\mathfrak{F}_t,t\in T\}$ 上的随机时间(或 $\mathfrak{F}_t$-随机时间),如果 $\{\tau\leqslant t\}\in\mathfrak{F}_t$,对所有 $t\in T$。

今后将考虑定义在整个空间 $\Omega(\Omega_\tau=\Omega)$ 上的随机时间。

每个随时间 τ 对应于事件的 σ-代数 $\mathfrak{F}_\tau$,$\mathfrak{F}_\tau$ 称为由 τ 前事件所生成的 σ-代数. 它是由所有满足如下条件的事件 $B\in\mathfrak{S}$ 组成:

$$B\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathfrak{F}_t,\ \forall t\in T.$$

不难验证,如果 $\tau_1\leqslant\tau_2$, 那末 $\mathfrak{F}_{\tau_1}\subset\mathfrak{F}_{\tau_2}$(第一卷第一章 §1). 在第一卷(第二章 §2)已证明如下结果:

引理 1 设T是有限集, $\tau_k,k=1,\cdots,s$ 是定义在整个Ω的$\{\mathfrak{F}_t,t\in T\}$ 上的随机时间序列且 $\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant\cdots\leqslant\tau_s$,$\mathfrak{F}_k^*=\mathfrak{F}_{\tau_k}$ 是随机时间 $\tau_k(k=1,\cdots,s)$ 所生成的σ-代数. 如果 $\{\xi(t),\mathfrak{F}_t,t\in T\}$是上鞅(鞅),那末 $\{\xi(\tau_k),\mathfrak{F}_k^*,k=1,\cdots,s\}$ 也是上鞅(鞅)。

我们将此结果推广到本节所研究的半鞅。

设 $\{\xi(t),\mathfrak{F}_t,t\in T\}$ 是满足下面条件的上鞅: 存在可积随机变量 η, 使得

$$\xi(t)\geqslant\mathbf{E}\{\eta|\mathfrak{F}_t\}.\tag{10}$$

考虑取值于 T,还可取 $t=\infty$的随机时间 τ. 令

$$\mathfrak{F}_\infty=\sigma\{\sigma(\eta),\mathfrak{F}_t,t\in[0,\infty)\},$$

$$\xi_\tau=\begin{cases}\xi(t), & 当\ \tau=t,\ t\in T;\\ \eta, & 当\ \tau=\infty.\end{cases}$$

则随机变量 ξ_τ 是 $\mathfrak{F}_\tau$-可测的*. 事实上，在离散时间情形，已在第一卷第一章 §1 的引理 5 证明了. 对 $T=[0,\infty)$ 证明如下:

取随机时间 τ 的离散渐近序列 $\tau^{(n)}=\frac{k+1}{2^n}$，如果 $\tau\in\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]$; $\tau^{(n)}=0$，如果 $\tau=0$. 由过程 $\xi(t)$ 的样本函数的右连续性推得 $\lim\xi(\tau_n)=\xi(\tau)$. 另方面

$$\{\xi(\tau)<a\}\cap\{\tau<t\}=\lim\{\xi(\tau^{(n)})<a\}\cap\{\tau^{(n)}<t\}.$$

对 $t\in\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]$ 有

$$\{\xi(\tau^{(n)})<a\}\cap\{\tau^{(n)}<t\}\in\mathfrak{F}_{\frac{k+1}{2^n}}.$$

因此

$$\{\xi(\tau)<a\}\cap\{\tau<t\}\in\mathfrak{F}_{t+}=\mathfrak{F}_t.$$

再次利用 $\mathfrak{F}_{t+}=\mathfrak{F}_t$，我们有

$$\{\xi(\tau)<a\}\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathfrak{F}_t.$$

这就证明了 $\xi(\tau)$ 是 $\mathfrak{F}_\tau$-可测的.

定理 6 设上鞅满足条件(10)，σ，τ 是随机时间且 $\sigma\leqslant\tau$. 这时随机变量 ξ_σ 和 ξ_τ 是可积的且

$$\mathbf{E}\{\xi_\tau|\mathfrak{F}_\sigma\}\leqslant\xi_\sigma. \tag{11}$$

证. 首先研究 $T=N$ 的情形，设 $\sigma_k=\sigma\wedge k$，$\tau_k=\tau\wedge k$. 设 $\xi(t)=\zeta(t)+\eta(t)$，其中 $\eta(t)=\mathbf{E}\{\eta|\mathfrak{F}_t\}$，$\zeta(t)=\xi(t)-\eta(t)$. 由定理的条件得 $\zeta(t)\geqslant 0$，此外，$\zeta(t)$ 是上鞅.

先考察过程 $\zeta(t)$. 由引理 1 得 $\mathbf{E}\zeta_{\tau_k}\leqslant\mathbf{E}\zeta_0$. 当 $k\to\infty$ 取极限并利用 Fatou 引理得 $\mathbf{E}\zeta_\tau=\mathbf{E}\lim\limits_{k\to\infty}\zeta_{\tau_k}\leqslant\mathbf{E}\zeta_0$，因此 $\mathbf{E}\zeta_\tau<\infty$.

设 $B\in\mathfrak{F}_\sigma$，这时由引理 1，有

$$\int_{B\cap\{\tau<k\}}\zeta_\tau d\mathbf{P}\leqslant\int_{B\cap\{\sigma<k\}}\zeta_\tau d\mathbf{P}\leqslant\int_{B\cap\{\sigma<k\}}\zeta_{\sigma_k}d\mathbf{P}$$

---

* 以下证明是英译本补充的. ——译者注

$$=\int_{B\cap\{\sigma<k\}}\zeta_\sigma d\mathbf{P}.$$

顾及到当 $\sigma=\infty$ 时 $\zeta_\tau=\zeta_\sigma=0$ 且当 $k\to\infty$ 将所得的关系式取极限,得

$$\int_B\zeta_\tau d\mathbf{P}\leqslant\int_B\zeta_\sigma d\mathbf{P}, \tag{12}$$

从而对于过程 $\zeta(t)$ 得到定理的结论.我们转来考察过程 $\eta(t)$.它是一致可积鞅。注意

$$\eta_\tau=\mathbf{E}\{\eta\mid\mathfrak{F}_t\}\big|_{t=\tau}=\mathbf{E}\{\eta\mid\mathfrak{F}_\tau\}. \tag{13}$$

事实上,如果 $A\in\mathfrak{F}_\tau$, $A_k=A\cap\{\tau=k\}$, $k=0,1,\cdots,n,\cdots,\infty$, 那末

$$\int_{A_k}\eta_\tau d\mathbf{P}=\int_{A_k}\mathbf{E}\{\eta\mid\mathfrak{F}_k\}d\mathbf{P}=\int_{A_k}\eta d\mathbf{P}.$$

对此等式按所有 k 求和,得

$$\int_A\eta_\tau d\mathbf{P}=\int_A\eta d\mathbf{P}.$$

因为 η_τ 是 $\mathfrak{F}_\tau$-可测随机变量,所以由最后的关系式得(13)及 $\mathbf{E}_{\eta_\tau}$ 是有限值。此外,由此得知对任意 $B\in\mathfrak{F}_\sigma(\mathfrak{F}_\sigma\subset\mathfrak{F}_\tau)$,

$$\int_B\eta_\tau d\mathbf{P}=\int_B\eta_\sigma d\mathbf{P}.$$

后一等式与不等式(12)两边相加得式(11).

考虑 $T=[0,\infty)$ 的情形。 引入量 τ 及 σ 的离散逼近 $\tau^{(n)}$ 及 $\sigma^{(n)}$, 令

$$\tau^{(n)}=\frac{k}{2^n},\ \text{如果}\ \tau\in\left(\frac{k-1}{2^n},\ \frac{k}{2^n}\right],$$

$$\tau^{(n)}=\infty,\ \text{如果}\ \tau=\infty,$$

类似地定义 $\sigma^{(n)}$. 由前面

$$\int_A\xi_{\tau^{(n)}}d\mathbf{P}\geqslant\int_A\xi_{\sigma^{(n)}}d\mathbf{P},\ \forall A\in\mathfrak{F}_{\sigma^{(n)}}.$$

这时

$$\sigma\leqslant\sigma^{(n+1)}\leqslant\sigma^{(n)},\ \mathfrak{F}_\sigma\subset\mathfrak{F}_{\sigma^{(n)}},\ \forall n.$$

因此对所有 $A\in\mathfrak{F}_\sigma$ 上关系式成立.由过程 $\xi(t)$ 的右连续性推得

$\xi_{\tau^{(n)}} \to \xi_t$ 和 $\xi_{\sigma^{(n)}} \to \xi_\sigma$ 均以概率 1 成立。因此为证明定理只要验证随机变量序列 $\{\xi_{\tau^{(n)}},\ n=1,2,\cdots\}$ 和 $\{\xi_{\sigma^{(n)}},\ n=1,2,\cdots\}$ 一致可积就够了。

注意，$\sigma^{(n)} \leqslant \sigma^{(n-1)}$。因此

$$\xi_{\sigma^{(n)}} \geqslant \mathbf{E}\{\xi_{\sigma^{(n-1)}} | \mathfrak{F}_{\sigma^{(n)}}\}.$$

如果令 $\xi_{\sigma^{(n)}} = \eta_{-n}$，$\mathfrak{F}_{\sigma^{(n)}} = \mathfrak{G}_{-n}$，那末因为 $\mathbf{E}\eta_{-n} = \mathbf{E}\xi_{\sigma^{(n)}} \leqslant \mathbf{E}\xi_0$，不等式

$$\eta_{-n} \geqslant \mathbf{E}\{\eta_{-n+1} | \mathfrak{G}_{-n}\}$$

表明 $\{\eta_k, \mathfrak{G}_k,\ k=\cdots,-n,\ -n+1,\cdots,\ -1\}$ 构成上鞅，且 $\mathbf{E}\eta_{-n} \leqslant C$。因此随机变量族 η_{-n} 一致可积。此论证也适用于序列 $\xi_{\tau^{(n)}}$。

推论 1 如果 $\{\xi_t,\ \mathfrak{F}_t,\ t \geqslant 0\}$ 是一致可积鞅，σ 和 τ 是随机时间，$\sigma \leqslant \tau$，那末

$$\xi_\sigma = \mathbf{E}\{\xi_\tau | \mathfrak{F}_\sigma\}$$

且 ξ_τ 可积。

推论 2 如果 $\eta(t) = \mathbf{E}\{\eta | \mathfrak{F}_t\}$ 及 τ 是随机时间，那末

$$\eta_\tau = \eta(\tau) = \mathbf{E}\{\eta | \mathfrak{F}_\tau\}.$$

推论 3 如果 $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$ 是一致可积上鞅(鞅)，那末过程

$\{\eta(t), \mathfrak{F}_t^*, t \geqslant 0\}$，其中 $\eta(t) = \xi(\tau \wedge t), \mathfrak{F}_t^* = \mathfrak{F}_{\tau\wedge t}$，也是上鞅(鞅)。

此过程称为过程 $\xi(t)$ 的停止(或 τ-停止)。

定理 6 在今后将多次用到。作为它的应用之一，现在我们来导出今后也利用到的结论。

定理 7 设 $\{\xi(t),\ t \geqslant 0\}$ 是非负右连续上鞅。令

$$\tau = \inf\{t: \xi(t) = 0 \text{ 或 } \xi(t-) = 0\},$$

如果 t 的对应的集合不空；$\tau = \infty$，在相反的情形。那末以概率 1 对所有 $t \geqslant \tau (\tau < \infty), \xi(t) = 0$。

证。设 $\tau_n = \inf\left\{t: \xi(t) < \dfrac{1}{n}\right\}$ (约定 $\inf\varnothing = \infty$)，χ_n 是事

件 $\tau_n<\infty$ 的示性函数。显然，$\tau_n\leqslant\tau_{n+1}\leqslant\tau$。设 $\sigma=\sup\tau_n$ 及 χ 是事件 $\sigma<\infty$的示性函数。这时 $\sigma\leqslant\tau$。由定理 6 得

$$\mathbf{E}\xi_{\tau_n}\chi_n\geqslant\mathbf{E}\xi_{\sigma\vee t}\chi_n\geqslant\mathbf{E}\xi_{\sigma\vee t}\chi.$$

因为 $\mathbf{E}\xi_{\tau_n}\chi_n\leqslant\frac{1}{n}$，所以 $\mathbf{E}\xi_{\sigma\vee t}\chi=0$，即是对每个 t 以概率 1 在集合 $t>\sigma,\sigma<\infty$ 上有 $\xi(t)=0$。由 $\xi(t)$ 的样本函数右连续 (modP) 得以概率 1 对所有 $t>\sigma$，$\sigma<\infty$有 $\xi(t)=0$。

以 $\mathscr{T}$ 或 $\mathscr{T}(T)$ 表示 $\{\mathfrak{F}_t,\ t\in T\}$ 上所有随机时间的族。

定义 适应于 $\{\mathfrak{F}_t,t\in T\}$ 的随机变量族 $\{\xi(t),t\in T\}$ 称为完全一致可积的或者 D 类过程，如果族 $\{\xi_\tau,\ \tau\in\mathscr{T}\}$ 是一致可积的。

如果对任意 $a>0$ 族 $\{\xi_\tau,\tau\in\mathscr{T}([0,a])\}$ 是一致可积的，则称它为 DL 类过程。

定理 8 1）一致可积鞅 $\{\xi(t),\ t\in T\}$ 是完全一致可积的。

2）如果 $\{\xi(t),\ t\in T\}$ 是非负下鞅且存在随机变量 η，使得

$$\eta\geqslant 0,\ \xi(t)\leqslant\mathbf{E}\{\eta|\mathfrak{F}_t\},\ \forall t\in T,$$

那末族 $\{\xi(t),t\in T\}$ 完全一致可积。

3）如果 $T=N$且下鞅 $\{\xi(t),\ t\in N\}$ 是一致可积的，那末它是完全一致可积的。

证。1）设 $\xi(t)=\mathbf{E}\{\eta|\mathfrak{F}_t\}$，其中 $\eta=\lim\limits_{t\to\infty}\xi(t)$。令 $B=\{|\xi_\tau|>C\}$。因为

$$\mathbf{P}\{|\xi_\tau|>C\}\leqslant\mathbf{P}\{\sup|\xi(t)|>C\}\leqslant\frac{\sup\mathbf{E}|\xi(t)|}{C},$$

所以当 $C\to\infty$时，按所有 $\tau\in\mathscr{T}$ 一致地有 $\mathbf{P}(B)\to 0$。因为 $|\xi(t)|$ 是下鞅，所以(定理 6)

$$\int_B|\xi(\tau)|d\mathbf{P}\leqslant\int_B|\eta|d\mathbf{P},\ \forall B\in\mathfrak{F}_\tau,$$

定理的结论 1）得证。

类似地可证明 2)。首先

$$\int_{\{\xi_\tau \geqslant C\}} \xi_\tau d\mathbf{P} \leqslant \int_{\{\xi_\tau \geqslant C\}} \eta d\mathbf{P},$$

其次当 $C \to \infty$ 时按 τ 一致地

$$\mathbf{P}\{\xi_\tau \geqslant C\} \leqslant \frac{\mathbf{E}\xi_\tau}{C} \leqslant \frac{\mathbf{E}\eta}{C} \to 0.$$

3) 因为一致可积下鞅可以表为一致可积鞅与位势之差，所以顾及 1) 可限于考虑位势 $\pi(t)$. 我们有

$$\int_{\{\pi_\tau > C\}} \pi_\tau d\mathbf{P} = \sum_{j=1}^{k} \int_{\{\pi_\tau > C\} \cap \{\tau = j\}} \pi_\tau d\mathbf{P} + \int_{\{\pi_\tau > C\} \cap \{\tau > k\}} \pi_\tau d\mathbf{P}.$$

顾及到 $\{\pi_\tau > C\} \cap \{\tau > k\} \in \mathfrak{F}_\tau$ 和应用定理 6 于时间 τ 和 k，得

$$\int_{\{\pi_\tau > C\} \cap \{\tau > k\}} \pi_\tau d\mathbf{P} \leqslant \int_{\{\pi_\tau > C\} \cap \{\tau > k\}} \pi(k) d\mathbf{P}.$$

因为 $\mathbf{E}\pi(n) \to 0$，所以对任意 $\varepsilon > 0$ 可选取 k，使 $\mathbf{E}\pi(k) < \frac{\varepsilon}{2}$.

然后选 C，使

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{\{\pi(j) > C\} \cap \{\tau = j\}} \pi(j) d\mathbf{P} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是得知存在不依赖于 τ 的 C，使

$$\int_{\{\pi_\tau > C\}} \pi_\tau d\mathbf{P} < \varepsilon.$$

注 1. 在证明定理的结论 3) 时所采用的方法适用于连续变量的下鞅情形.

以 $\mathscr{T}_a$ 表示满足 $\tau \leqslant a(\mathrm{mod}\mathbf{P})$ 的所有随机时间的类. 这时，如果下鞅 $\{\xi(t),\ t \geqslant 0\}$ 一致可积且对每个 $a > 0$，随机变量族 $\{\xi_\tau, \tau \in \mathscr{T}_a\}$ 一致可积，那末族 $\{\xi(t),\ t \geqslant 0\}$ 是完全一致可积的.

事实上，由 Riesz 分解得知可限于考虑位势 $\{\pi(t), t \geqslant 0\}$. 我们可以找到这样的 a，使 $\mathbf{E}\pi(t) < \frac{\varepsilon}{2}$，当 $t \geqslant a$，其中 ε 是预先

任意给定的正数．那末

$$\int_{\{\pi_\tau>C\}}\pi_\tau d\mathbf{P}\leqslant\int_{\{\pi_\tau>C\}\cap\{\tau<a\}}\pi_\tau d\mathbf{P}+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leqslant\int_{\{\pi_{\tau\wedge a}>C\}}\pi_{\tau\wedge a}d\mathbf{P}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面，当 $C\to\infty$ 时按假设对 τ 一致地 $\int_{\{\pi_{\tau\wedge a}>C\}}\pi_{\tau\wedge a}d\mathbf{P}\to0$．由此得到族 $\{\pi_\tau,\tau\in\mathscr{T}\}$ 一致可积．

注2. 设半鞅 $\{\xi(t),t\in T\}$ 属于类 D．这时族 $\{\xi(t),t\in T\}$ 一致可积且存在极限 $\lim\limits_{t\to\infty}\xi(t)=\xi_\infty$． 因此 ξ_τ 对取无穷值的随机时间可以有定义．因为一致可积随机变量族的闭包（关于几乎处处收敛）也是一致可积，所以族 $\{\xi_\tau,\tau\in\mathscr{T}_\infty\}$ 也一致可积，其中 $\mathscr{T}_\infty$ 是取值 $\leqslant\infty$ 的随机时间类．

今后考虑一致可积半鞅 $\xi(t)$，$t\geqslant0$ 时，对 $\tau\in\mathscr{T}_\infty$ 我们总认为以此方式定义 ξ_τ．

上鞅分解定理 我们从离散时间情形开始． 我们证明上鞅 $\{\xi_n, n=0,1,\cdots\}$ 可以表为两个序列——鞅与不减随机变量序列之差．

令

$$\begin{aligned}
&\Delta\xi_n=\xi_n-\xi_{n-1}, && n=1,2,\cdots\\
&\eta_0=\xi_0, && \alpha_0=0,\\
&\eta_1=\eta_0+(\Delta\xi_1-\mathbf{E}\{\Delta\xi_1|\mathfrak{F}_0\}, && \alpha_1=-\mathbf{E}\{\Delta\xi_1|\mathfrak{F}_0\},\\
&\cdots, && \cdots\\
&\eta_n=\eta_{n-1}+(\Delta\xi_n-\mathbf{E}\{\Delta\xi_n|\mathfrak{F}_{n-1}\}, && \alpha_n=\alpha_{n-1}-\mathbf{E}\{\Delta\xi_n|\mathfrak{F}_{n-1}\},\\
&\cdots, && \cdots
\end{aligned}$$

这时

$$\xi_n=\eta_n-\alpha_n, \tag{14}$$

$\alpha_n\geqslant\alpha_{n-1}$（因为对上鞅来说，$\mathbf{E}\{\Delta\xi_n|\mathfrak{F}_{n-1}\}\leqslant0$），$\alpha_n$ 是 $\mathfrak{F}_{n-1}$-可测随机变量且 $\{\eta_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 是鞅，式(14)称为上鞅的 Doob 分解．

不难证明，当 η_n 是鞅，而 α_n 适应于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_{n-1},n=1,2,$

$\cdots\}$ 及 $\alpha_0=0$ 时，表示式(14)是唯一的。

事实上，假定变量 α_k，η_k，$k=0,1,2,\cdots,n$，被唯一地确定(按定义，当 $n=0$ 时这是正确的)。由于变量 α_{n+1}，$\mathbf{E}\{\xi_{n+1}|\mathfrak{F}_n\}=\mathbf{E}\{\eta_{n+1}-\alpha_{n+1}|\mathfrak{F}_n\}=\eta_n-\alpha_{n+1}$ 是 $\mathfrak{F}_n$-可测的，因此 α_{n+1} 和 η_{n+1} 被唯一确定。注意到如果代替变量 α_{n+1} 的 $\mathfrak{F}_n$-可测性，仅要求 α_{n+1} 是 $\mathfrak{F}_{n+1}$-可测，那末表达式(14)的唯一性一般来说不成立。

如果 ξ_n 是位势，那末序列 ξ_n，$n=1,2,\cdots$ 一致可积（因为它在 L_1 收敛于 0）。在式(14)中相应的过程 α_n 也是一致可积的，因为 $0\leqslant\alpha_n\leqslant\alpha_{n+1}\leqslant\alpha_\infty$，其中 $\alpha_\infty=\lim\alpha_n$，而且 $\mathbf{E}\alpha_\infty\leqslant\lim\mathbf{E}\eta_n=\mathbf{E}\eta_0$。因此鞅 η_n 一致可积，从而 $\eta_n=\mathbf{E}\{\eta_\infty|\mathfrak{F}_n\}$，其中 $\eta_\infty=\lim\eta_n=\lim\alpha_n=\alpha_\infty$。我们得到如下结果。

引理 2 位势 $\{\xi_n,\mathfrak{F}_n,n=0,1,\cdots\}$ 可以分解为

$$\xi_n=\mathbf{E}\{\alpha_\infty|\mathfrak{F}_n\}-\alpha_n,$$

其中

1) α_n 是 $\mathfrak{F}_{n-1}$-可测随机变量，$n=1,2,\cdots$，$\alpha_\infty\geqslant 0$，且 $\mathbf{E}\alpha_\infty<\infty$，$\alpha_0=0$;

2) 序列 α_n 是非负单调不减的，且 $\alpha_\infty=\lim\alpha_n$。

在条件1)下，序列 α_n 以唯一方式被确定 (mod$\mathbf{P}$)。

满足引理 2 条件的过程 $\{\alpha_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 被称为联系于位势(上鞅) $\xi(t)$ 的过程。

将条件 1) 改写为更便于推广到连续情形的形式。

如果 $\alpha_0=0$，$\alpha_n\leqslant\alpha_{n+1}$，$\mathbf{E}\alpha_\infty<\infty$，其中 $\alpha_\infty=\lim\alpha_n$，我们约定称 $\{\alpha_n,\mathfrak{F}_n,n\in N\}$ 为可积增过程。

引理 3 为使得可积增过程$\{\alpha_n,\mathfrak{F}_n,n\in N\}$适应于流 $\{\mathfrak{F}'_n,n=1,2,\cdots\}$，其中 $\mathfrak{F}'_n=\mathfrak{F}_{n-1}$，$n=1,2,\cdots$，充分必要条件是对任意以概率 1 有界的 $\mathfrak{F}_n$-鞅 $\{\eta_n,n=0,1,2,\cdots\}$，等式

$$\mathbf{E}\sum_{n=1}^{\infty}\eta_{n-1}\Delta\alpha_n=\mathbf{E}\eta_\infty\alpha_\infty \tag{15}$$

成立，其中 $\Delta\alpha_n=\alpha_n-\alpha_{n-1}$，$\eta_\infty=\lim\eta_n$。

证。必要性。注意到 $\sum_{n=1}^{N}\eta_{n-1}\Delta\alpha_n=\sum_{n=1}^{N-1}\alpha_n(\eta_{n-1}-\eta_n)+\alpha_N\eta_{N-1}$。利用 Lebesgue 控制收敛定理及序列 η_n 的有界性，得

$$\mathbf{E}\sum_{n=1}^{\infty}\eta_{n-1}\Delta\alpha_n=\lim\mathbf{E}\sum_{1}^{N}\eta_{n-1}\Delta\alpha_n$$

$$=\lim\sum_{1}^{N}\mathbf{E}\{\alpha_n\mathbf{E}(\eta_{n-1}-\eta_n)|\mathfrak{F}_{n-1}\}$$

$$+\lim\mathbf{E}\alpha_N\eta_{N-1}=\lim\mathbf{E}\alpha_N\eta_{N-1}=\mathbf{E}\alpha_\infty\eta_\infty.$$

充分性．令 $\eta_0=\eta_1=\cdots=\eta_{n-1}=0$，$\eta_n=\eta_{n+1}=\cdots=\zeta$，其中 $\zeta=\eta-\mathbf{E}\{\eta|\mathfrak{F}_{n-1}\}$，$\eta$ 是任意 $\mathfrak{F}_n$-可测有界变量．显然，$\mathbf{E}\{\zeta|\mathfrak{F}_{n-1}\}=0$，由(15)得，$\mathbf{E}\zeta(\alpha_\infty-\alpha_n)=\mathbf{E}\zeta\alpha_\infty$ 或 $\mathbf{E}\zeta\alpha_n=0$．对任意 $\mathfrak{F}_{n-1}$-可测随机变量 ϕ，$\mathbf{E}\zeta\phi=0$ 成立，所以

$$\mathbf{E}\zeta(\alpha_n-\mathbf{E}\{\alpha_n|\mathfrak{F}_{n-1}\})=0,$$

由此得，

$$\mathbf{E}\eta(\alpha_n-\mathbf{E}\{\alpha_n|\mathfrak{F}_{n-1}\})=0.$$

设 ϕ^c 表示ϕ的"截尾"量，即是，$\phi^c=\phi$，当 $|\phi|\leqslant c$ 及 $\phi^c=0$，当 $|\phi|\geqslant c$．由上等式得

$$\mathbf{E}(\alpha_n-\mathbf{E}\{\alpha_n|\mathfrak{F}_{n-1}\})^c(\alpha_n-\mathbf{E}\{\alpha_n|\mathfrak{F}_{n-1}\})=0$$

或

$$\mathbf{E}[(\alpha_n-\mathbf{E}\{\alpha_n|\mathfrak{F}_{n-1}\})^c]^2=0$$

对任意 $c>0$ 成立。因此，$\alpha_n=\mathbf{E}\{\alpha_n|\mathfrak{F}_{n-1}\}$ (modP)。引理得证。

在本段将把引理 2 推广到连续参数的上鞅。与离散时间情形不同，相应的证明不能认为是简单的，所证明的事实是十分深刻的。

下面我们认为某个σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t,t\geqslant 0\}$ 是固定的，$\mathfrak{F}_t=\mathfrak{F}_{t+}$，且如无特别声明，所考虑的半鞅均认为是 $\mathfrak{F}_t$-半鞅。我们约定将 $\alpha(t)$ 称为**增过程**，如果 $\alpha(t)$ 适应于 $\{\mathfrak{F}_t,\ t\geqslant 0\}$，且它的样本函数以概率 1 单调不减、右连续和 $\alpha(0)=0$。

增过程将称为可积的，如果 $\sup \mathbf{E}\alpha(t) < \infty$。

定义. 可积增过程 $\alpha(t)$, $t \geqslant 0$ 称为自然的，如果对任意非负且以概率 1 有界的鞅 $\eta(t)$,

$$\mathbf{E}\int_0^\infty \eta(t-)d\alpha(t) = \mathbf{E}\alpha(\infty)\eta(\infty). \tag{16}$$

满足条件(16)的过程 $\alpha(t)$ 也称为自然的，当它是两个可积增过程之差时。

关系式(16)是等式(15)在连续情形的翻板，等式(16)的左边的积分是通常意义的 Lebesgue-Stieltjes 积分并对过程 $\alpha(t)$ 的每个样本函数以概率 1 存在.事实上，当固定 ω 时单调函数 $\alpha(t) = \alpha(t,\omega)$ 在 $[0,\infty)$ 上生成测度 $\alpha(A)$，而且 $\alpha(c, d] = \alpha(d) - \alpha(c)$ 及积分

$$\int_0^\infty \varphi(t)d\alpha(t)$$

对其样本函数以概率 1 为 Borel 可测的且对于测度 $d\alpha$ 为可积(或非负)的任意随机过程 $\varphi(t)$，以概率 1 有定义。

我们给出分部积分的如下公式。

设 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 是两个增过程

$$\alpha(0) = \beta(0) = 0,\ \alpha(\infty) < \infty,\ \beta(\infty) < \infty,$$

那末

$$\int_0^\infty \beta(s)d\alpha(s) + \int_0^\infty \alpha(s-)d\beta(s) = \alpha(\infty)\beta(\infty). \tag{17}$$

这公式容易得到，只要将等于 $\alpha(\infty)\beta(\infty)$ 的重积分 $\int_0^\infty\int_0^\infty d\alpha(s) \times d\beta(u)$ 表成按区域 $\{(s,u): s > u,\ u \in [0,\infty)\}$ 及 $\{(s,u): u \in [0,\infty), u \leqslant s\}$ 的积分之和。利用 Fubini 定理，那末我们得

$$\alpha(\infty)\beta(\infty) = \int_0^\infty [\beta(\infty) - \beta(s)]d\alpha(s)$$
$$+ \int_0^\infty [\alpha(\infty) - \alpha(u-)]d\beta(u),$$

由此得(17)。

关于等式(61)我们作一系列附注。

1）如果 $\eta(t)$ 是任意非负一致可积*鞅，而 $\alpha(t)$ 是可积增过程，那末

$$\mathbf{E}\int_0^\infty \eta(t)d\alpha(t) = \mathbf{E}\eta(\infty)\alpha(\infty). \tag{18}$$

事实上，首先假定 $\alpha(\infty) \leqslant n$。那末考虑到过程 $\eta(t)$ 右连续，我们有如下等式：

$$\mathbf{E}\int_0^\infty \eta(t)d\alpha(t) = \mathbf{E}\lim\sum_{k=0}^\infty \eta\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\left[\alpha\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \alpha\left(\frac{k}{2^n}\right)\right]$$

$$= \lim \mathbf{E}\left\{\eta(\infty)\alpha(\infty)\right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^\infty \left[\eta\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \eta\left(\frac{k}{2^n}\right)\right]\alpha\left(\frac{k}{2^n}\right)\right\}$$

$$= \mathbf{E}\eta(\infty)\alpha(\infty).$$

这里我们利用到

$$\sum_{k=0}^\infty \eta\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\left[\alpha\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \alpha\left(\frac{k}{2^n}\right)\right]$$

$$\leqslant \sup \eta(t)\alpha(\infty) \leqslant n \sup\eta(t).$$

为过渡到任意单调不减函数 $\alpha(t)$ 的情况，令 $\alpha_n(t) = \alpha(t) \wedge n$。那末式(18)在 $\alpha(t) = \alpha_n(t)$ 时令 $n \to \infty$ 取极限，我们得到一般情形的等式(18)。

2）设 $\alpha(t)$ 是自然过程，$\eta(t)$ 是正的一致可积鞅。那末

$$\mathbf{E}\int_0^\infty \eta(t-)d\alpha(t) = \mathbf{E}\int_0^\infty \eta(t)d\alpha(t). \tag{19}$$

为了证明只要注意到等式(19)对鞅 $\eta^{(n)}(t) = \mathbf{E}\{\eta(\infty)\wedge n | \mathfrak{F}_t\}$ 成立。另方面，序列 $\eta^{(n)}(t)$ 单调不减且

$$\mathbf{P}(\sup_t(\eta(t) - \eta^{(n)}(t) > \varepsilon)$$

* 如下证明用到 $\eta(t)$ 的有界性。一般情形的证明可参看其它鞅论专著，例如 Dellacherie, C, Meyer, P. A., Probabilite's et Potentiel. ——译者注

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}[\eta(\infty)-\eta^{(n)}(\infty)]\to 0, n\to\infty.$$

因此存在序列 n_j 使以概率 1 按 t 一致地有 $\eta^{(n_j)}(t)\to\eta(t)$。式(19)在 $\eta(t)=\eta^{(n_j)}(t)$ 时当 $n_j\to\infty$ 取极限,就得到一般情形的公式(19).

3) 连续可积增过程是自然的。

4) 如果 $\alpha(t)$ 是自然过程, $\eta(t)$ 是非负有界鞅, τ 是随机时间,那末

$$\mathbf{E}\int_{[0,\tau]}\eta(t-)d\alpha=\mathbf{E}\eta(\tau)\alpha(\tau). \tag{20}$$

事实上,设 $\bar\eta(t)=\eta(t)\chi(t<\tau)+\eta(\tau)\chi(t\geqslant\tau)$. 这时 $\bar\eta(t)$ 也是有界鞅且

$$\mathbf{E}\bar\eta(\infty)\alpha(\infty)=\mathbf{E}\int_0^\infty\bar\eta(t-)d\alpha=\mathbf{E}\int_{[0,\tau]}\eta(t-)d\alpha$$
$$+\mathbf{E}\eta(\tau)[\alpha(\infty)-\alpha(\tau)],$$

由此得等式(20).

等式(20)可用如下方式说明:如果 $\alpha(t)$ 是自然过程,那末它的停止 $\alpha(t\wedge\tau)$ 也是自然过程(对于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_{t\wedge\tau},t\geqslant 0\}$).

5) 特别,在上述假设下

$$\mathbf{E}\int_0^t\eta(s-)d\alpha(s)=\mathbf{E}\eta(t)\alpha(t). \tag{21}$$

6) 如果 $\alpha(t)$ 是自然增过程,那末 $\bar\alpha(t)=\alpha(t)\chi(t\leqslant\tau)+\alpha(\tau)\chi(t>\tau)$ 也是自然增过程.

事实上, $\bar\alpha(t)$ 是自然过程的要求等价于条件:对任意有界非负鞅 $\eta(t)$

$$\mathbf{E}\eta(\infty)\bar\alpha(\infty)=\mathbf{E}\int_0^\infty\eta(t-)d\bar\alpha$$
$$=\mathbf{E}\int_{[0,\tau]}\eta(t-)d\alpha. \tag{22}$$

另一方面,

$$\mathbf{E}\eta(\infty)\bar\alpha(\infty)=\mathbf{E}\eta(\infty)\alpha(\tau)=\mathbf{E}\{\alpha(\tau)\mathbf{E}\{\eta(\infty)|\mathfrak{F}_\tau\}\}$$
$$=\mathbf{E}\alpha(\tau)\eta(\tau),$$

因此条件(22)与等式(20)相同。

还应指出等式(19)的如下变形。由公式(19)及类似于推导式(22)的证明，可得

7) $$\mathbf{E}\int_{[0,\tau]}\eta(t-)d\alpha=\mathbf{E}\int_{[0,\tau]}\eta(t)d\alpha. \tag{23}$$

8) 如果 $\alpha(t)$ 是自然过程，那末 $\beta(t)=\alpha(t)\wedge n$ 也是自然过程。

事实上，如果 $\tau=\inf\{t,\alpha(t)\geqslant n\}$，那末由于 $\beta(\infty)=\alpha(\tau)$，所以

$$\mathbf{E}\int_0^\infty \eta(t-)d\beta=\mathbf{E}\int_{[0,\tau]}\eta(t-)d\alpha=\mathbf{E}\eta(\tau)\alpha(\tau)$$
$$=\mathbf{E}\eta(\infty)\alpha(\tau)=\mathbf{E}\eta(\infty)\beta(\infty).$$

为了证明重要的 Meyer 定理(定理 9)——本段的主要定理，需要如下引理。今后为了别的目的也要用到这一引理。

引理 4 设 $\{\xi^{(z)}(n),\mathfrak{F}_n,n=0,1,\cdots\}$，$z\in Z$，是某一位势集，$\alpha^{(z)}(n)$ 是联系于 $\xi^{(z)}(n)$ 的过程，$\mathscr{T}$ 是N上全体有限 $\mathfrak{F}_n$-随机时间的集合。假定

$$\sup_z\sup_{\tau\in\mathscr{T}}\int_{\{\xi_\tau>C\}}\xi_\tau^{(z)}d\mathbf{P}=\rho(C)<\infty$$

且 $\rho(C)\to 0$ 当 $C\to\infty$，则随机变量族 $\{\alpha^{(z)}(\infty),z\in Z\}$ 一致可积。

证。为方便起见，约定略去 $\xi^{(z)}(n)$ 和 $\alpha^{(z)}(n)$ 中的指标 z。令 $\tau_N=\inf\{n,\ \alpha_{n+1}\geqslant N\}$。因为 $\alpha(n)$ 是 $\mathfrak{F}_{n-1}$-可测的随机变量，所以 τ_N 是 $\{\mathfrak{F}_n,\ n=0,\ 1,\cdots\}$ 上的随机时间。由关系式 $\xi(n)=\mathbf{E}\{\alpha(\infty)|\mathfrak{F}_n\}-\alpha(n)$ 得

$$\mathbf{E}\{\alpha(\infty)|\mathfrak{F}_{\tau_N}\}=\xi(\tau_N)+\alpha(\tau_N)$$

和

$$\int_{\{\alpha(\infty)>N\}}\alpha(\infty)d\mathbf{P}\leqslant\int_{\{\alpha(\infty)>N\}}\xi(\tau_N)d\mathbf{P}$$
$$+N\mathbf{P}\{\alpha(\infty)>N\}. \tag{24}$$

利用这个不等式，我们得

$$NP\{\alpha(\infty)\geqslant 2N\}\leqslant\int_{\{\alpha(\infty)>2N\}}(\alpha(\infty)-N)d\mathbf{P}$$

$$=\int_{\{\alpha(\infty)>N\}}(\alpha(\infty)-N)d\mathbf{P}\leqslant\int_{\{\alpha(\infty)>N\}}\xi(\tau_N)d\mathbf{P}.$$

在式(24)中用 $2N$ 代换N和利用后一不等式，可见

$$\int_{\{\alpha(\infty)>2N\}}\alpha(\infty)d\mathbf{P}\leqslant\int_{\{\alpha(\infty)>2N\}}\xi(\tau_{2N})d\mathbf{P}$$

$$+2\int_{\{\alpha(\infty)>N\}}\xi(\tau_N)d\mathbf{P}.$$

因为

$$\int_{\{\alpha(\infty)>N\}}\xi(\tau_N)d\mathbf{P}\leqslant\rho(C)+\int_{\{\alpha(\infty)>N\}\cap\{\xi(\tau_N)\leqslant C\}}\xi(\tau_N)d\mathbf{P}$$

$$=\rho(C)+C\mathbf{P}\{\alpha(\infty)>N\},$$

$$N\mathbf{P}\{\alpha(\infty)>N\}\leqslant\mathbf{E}\alpha(\infty)=\mathbf{E}\xi(0),$$

所以

$$\int_{\{\alpha(\infty)>2N\}}\alpha(\infty)d\mathbf{P}\leqslant 3\rho(C)+\frac{5C\mathbf{E}\xi(0)}{2N}.\tag{25}$$

这时，例如令 $C=N^{1/2}$，就得所求结果.

定理 9 （Meyer 定理） 为使上鞅 $\xi(t)$, $t\geqslant 0$ 能表成

$$\xi(t)=\mu(t)-\alpha(t),\tag{26}$$

其中 $\mu(t)$ 是一致可积鞅，而 $\alpha(t)$ 是可积增过程，其充分必要条件是过程属于类 D。如果该条件成立，那末过程 $\alpha(t)$ 可以选为自然的，且在要求 α 是自然过程的分解类中，分解(26)是唯一的.

分解式 (26)在 $\mu(t)$ 是鞅，而 $\alpha(t)$ 是自然过程时称为上鞅 $\xi(t)$ 的 Doob 分解.

证. 定理的条件的必要性差不多是显然的. 如果鞅 $\mu(t)$ 一致可积，那末它属于类 D(定理 8). 另一方面，族 $\{\alpha(t),t\geqslant 0\}$ 完全一致可积，因为对任意 $\tau\in\mathscr{T}$, $\alpha(\tau)\leqslant\alpha(\infty)$ 和 $\mathbf{E}\alpha(\infty)<\infty$。因为过程 $\{\xi(t),t\geqslant 0\}$ 完全一致可积.

现设 $\{\xi(t),\ t\geqslant 0\}$ 是类D的上鞅. 这时它可以唯一地表为 $\xi(t)=\eta(t)+\pi(t)$ 的形式，其中 $\eta(t)$ 是鞅，而 $\pi(t)$ 是类D的位势. 因此只要对位势证明定理 9 就够了. 于是，在下面假定 $\xi(t)$

是类D的位势。

对每个整数 n,序列 $\xi_k^{(n)}=\xi\left(\frac{k}{2^n}\right)$, $k=0,1,2,\cdots$ 是关于σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_k^{(n)}=\mathfrak{F}_{\frac{k}{2^n}},\ k=0,1,\cdots\}$ 的位势。由于引理 2，存在序列 $\alpha_n(k)$，更恰当地记为 $\alpha_n\left(\frac{k}{2^n}\right)$, $k=0,1,\cdots$, $n=1,2,\cdots$,使得

$$\xi\left(\frac{k}{2^n}\right)=\mathbf{E}\{\alpha_n(\infty)|\mathfrak{F}_{\frac{k}{2^n}}\}-\alpha_n\left(\frac{k}{2^n}\right), \tag{27}$$

其中 $\alpha_n(\infty)=\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_n\left(\frac{k}{2^n}\right)$, $\alpha_n\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\geqslant\alpha_n\left(\frac{k}{2^n}\right)$ 而 $\alpha_n\left(\frac{k}{2^n}\right)$是$\mathfrak{F}_{\frac{k-1}{2^n}}$-可测随机变量。因为 $\xi(t)$ 是类D的位势,所以量

$$\rho(C)=\sup_{\tau\in\mathscr{T}}\int_{\{\xi(\tau)>C\}}\xi(\tau)d\mathbf{P}<\infty$$

且 $\rho(C)\to 0$ 当 $C\to\infty$。将引理 4 应用于位势族$\left\{\xi\left(\frac{k}{2^n}\right),\mathfrak{F}_{\frac{k}{2^n}},\right.$ $\left.k=0,1,\cdots\right\}$,$n=1,2,\cdots$。于是序列$\{\alpha_n(\infty),n=1,2,\cdots\}$一致可积。

由 Dunford-Pettis 定理得知存在子序列 n_j 使 $\alpha_{n_j}(\infty)$ 弱收敛于某极限 α_∞,即是对任意有界随机变量 η

$$\mathbf{E}\alpha_{n_j}(\infty)\eta\to\mathbf{E}\alpha_\infty\eta.$$

我们指出,对每个 r,随机变量序列 $\mu_n(r)=\mathbf{E}\{\alpha_n(\infty)|\mathfrak{F}_r\}$, $n=1,2,\cdots$ 一致可积。事实上,

$$NP\{\mu_n(r)>N\}\leqslant\int_{\{\mu_n(r)>N\}}\mu_n(r)d\mathbf{P}$$

$$\leqslant\int\alpha_n(\infty)d\mathbf{P}.$$

因此 $\mathbf{P}\{\mu_n(r)>N\}\to 0$ 关于N一致地成立,且由等式

$$\int_{\{\mu_n(r)>N\}} \mu_n(r)d\mathbf{P} = \int_{\{\mu_n(r)>N\}} \alpha_n(\infty)d\mathbf{P} \tag{28}$$

得序列 $\mu_n(r)$，$n=1,2,\cdots$是一致可积的。由此序列 $\mu_n(r)$ 也是弱紧的.利用对角线步骤,可以选取序列 k_j 使 $\alpha_{k_j}(\infty)\to\alpha(\infty)$ 和对每个二进制有理数 r，在弱收敛意义下 $\mu_{k_j}(r)\to\mu_\infty(r)$.因为对任意 $B_r\in\mathfrak{F}_r$

$$\int_{B_r} \mu_\infty(r)d\mathbf{P} = \lim_{j\to\infty}\int_{B_r} \mathbf{E}\{\alpha_{k_j}(\infty)|\mathfrak{F}_r\}d\mathbf{P}$$
$$= \lim\int_{B_r} \alpha_{k_j}(\infty)d\mathbf{P} = \int_{B_r} \alpha_\infty d\mathbf{P},$$

所以 $\mu_\infty(r) = \mathbf{E}\{\alpha_\infty|\mathfrak{F}_r\}$。

设 $s<r$，s 及 r 是二进制有理数.由式 $\alpha_n(s)=\mu_n(s)-\xi(s)\leqslant\mu_n(r)-\xi(r)$，取极限得

$$\int_B (\mu_\infty(s)-\xi(s))d\mathbf{P} \leqslant \int_B (\mu_\infty(r)-\xi(r))d\mathbf{P}$$

对任意可测集 B 成立。因此 $\mu_\infty(s)-\xi(s)\leqslant\mu_\infty(r)-\xi(r)$。令

$$\alpha(t) = \mathbf{E}\{\alpha_\infty|\mathfrak{F}_t\} - \xi(t),\ t>0. \tag{29}$$

这时,我们将 $\mathbf{E}\{\alpha_\infty|\mathfrak{F}_t\}$ 理解为样本函数属于 $\mathscr{D}$ 的鞅。这时过程 $\alpha(t)$ 的样本函数也属于 $\mathscr{D}$ 和单调不减。现在来证明过程 $\alpha(t)$ 是自然的。

设 $\eta(t)$ 是任意有界鞅,它的样本函数属于 $\mathscr{D}$。这时以概率 1 有

$$\int_0^\infty \eta(s-)d\alpha(s) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^\infty \eta\left(\frac{k}{2^n}\right)$$
$$\times\left[\alpha\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-\alpha\left(\frac{k}{2^n}\right)\right],$$

而根据 Lebesgue 控制收敛定理,有

$$\int_0^\infty \eta(s-)d\alpha(s) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^\infty \mathbf{E}\eta\left(\frac{k}{2^n}\right)$$
$$\times\left[\alpha\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-\alpha\left(\frac{k}{2^n}\right)\right].$$

由 $\alpha(t)$ 的定义，式(23)和引理 3 得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{E}\eta\left(\frac{k}{2^n}\right)\left[\alpha\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-\alpha\left(\frac{k}{2^n}\right)\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{E}\eta\left(\frac{k}{2^n}\right)\left[\xi\left(\frac{k}{2^n}\right)-\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{E}\eta\left(\frac{k}{2^n}\right)\left[\alpha_n\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-\alpha_n\left(\frac{k}{2^n}\right)\right]$$

$$=\mathbf{E}\eta(\infty)\alpha_n(\infty). \tag{29'}$$

按变量 α_∞ 的定义

$$\mathbf{E}\eta(\infty)\alpha_{k_j}(\infty)\to\mathbf{E}\eta(\infty)\alpha_\infty,\ 当\ k_j\to\infty,$$

由此，顾及到上等式我们得

$$\mathbf{E}\int_0^\infty\eta(s-)d\alpha(s)=\mathbf{E}\eta(\infty)\alpha_\infty,$$

这就证明了过程 $\alpha(t)$ 是自然的。

余下验证过程 $\alpha(t)$ 的唯一性 (mod**P**)。

由上述计算得知序列 $\alpha_n(\infty)$ 弱收敛于 $\alpha(\infty)$。事实上，首先

$$\mathbf{E}\eta(\infty)\alpha_\infty=\lim\mathbf{E}\eta(\infty)\alpha_n(\infty).$$

设 η 是任意 $\mathfrak{S}$-可测有界变量和 $\eta_\infty=\mathbf{E}\{\eta|\mathfrak{F}_\infty\}$；那末

$$\mathbf{E}\eta\alpha_\infty=\mathbf{E}\mathbf{E}\{\eta\alpha_\infty|\mathfrak{F}_\infty\}=\mathbf{E}\eta_\infty\alpha_\infty=\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\eta_\infty\alpha_n(\infty)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\eta\alpha_n(\infty),$$

也就证明了 $\alpha_n(\infty)$ 弱收敛于 α_∞。

设存在位势 $\xi(t)$ 的某个表达式

$$\xi(t)=\mathbf{E}\{\beta_\infty|\mathfrak{F}_t\}-\beta(t),$$

其中 $\beta(t)$ 是自然过程。由等式(29)得

$$\mathbf{E}\int_0^\infty\eta(s-)d\beta(s)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{E}\eta\left(\frac{k}{2^n}\right)$$

$$\times\left[\alpha_n\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-\alpha_n\left(\frac{k}{2^n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\eta(\infty)\alpha_n(\infty)$$

$$= \mathbf{E}\eta(\infty)\alpha_\infty,$$

且由于过程 $\beta(t)$ 是自然的，

$$\mathbf{E}\eta(\infty)\alpha_\infty = \mathbf{E}\eta(\infty)\beta(\infty),$$

由此得 $\alpha_\infty = \beta(\infty)$ 和 $\beta(t) = \alpha(t) \pmod{\mathbf{P}}$。

定理得证。

注 1. 如果 $\xi(t) = \mu(t) - \alpha(t)$ 是类 D 的上鞅 $\xi(t)$ 的 Doob 分解式，那末等式 $\xi(t\wedge\tau) = \mu(t\wedge\tau) - \alpha(t\wedge\tau)$ 是上鞅 $\xi(t\wedge\tau)$ 的 Doob 分解式。

注 2. 在证明过程 $\alpha(t)$ 的自然性时，鞅 $\eta(t)$ 的有界性条件是极限可移至数学期望号内的根据. 但是可以发现当 $\mathbf{E}\alpha_\infty^2<\infty$，鞅 $\eta(t)$ 是一致可积且 $\mathbf{E}\eta^2(\infty)<\infty$ 时，等式(16)亦成立。我们来证明此事实。首先证明，如果 $\mathbf{E}\alpha_\infty^2<\infty$，那末

$$\mathbf{E}\alpha_n^2(\infty) \leqslant 2\mathbf{E}\alpha_\infty^2. \tag{30}$$

令

$$\Delta_{nk}\xi = \xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k}{2^n}\right), \Delta_{n,k}\alpha = \alpha\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \alpha\left(\frac{k}{2^n}\right), \quad \mathfrak{F}_{nk} = \mathfrak{F}_{\frac{k}{2^n}}.$$

由等式

$$\mathbf{E}\{\Delta_{nk}\xi \mid \mathfrak{F}_{nk}\} = -\mathbf{E}\{\Delta_{nk}\alpha \mid \mathfrak{F}_{nk}\}$$

得

$$\mathbf{E}(\alpha_n(N))^2 = \mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{N\cdot 2^n-1} \Delta_{nk}\alpha_n\right)^2$$

$$= \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{N\cdot 2^n-1} \mathbf{E}\{\Delta_{nk}\alpha \mid \mathfrak{F}_{nk}\}\right]^2$$

$$\leqslant \mathbf{E}2\sum_{k=0}^{n\cdot 2^n-1} \mathbf{E}\{\Delta_{nk}\alpha \mid \mathfrak{F}_{nk}\}$$

$$\times \sum_{j=k}^{n\cdot 2^n-1} \mathbf{E}\{\Delta_{nj}\alpha \mid \mathfrak{F}_{nj}\}$$

$$= 2\mathbf{E}\sum_{k=0}^{n\cdot 2^n-1}\mathbf{E}\{\mathbf{E}(\Delta_{nk}\alpha|\mathfrak{F}_{nk})$$

$$\times\sum_{j=k}^{n\cdot 2^n-1}\mathbf{E}(\Delta_{nj}\alpha|\mathfrak{F}_{nj})|\mathfrak{F}_{nk}\}$$

$$= 2\mathbf{E}\sum_{k=0}^{n\cdot 2^n-1}\mathbf{E}\left\{\left(\alpha(N)-\alpha\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)\Delta_{nk}\alpha|\mathfrak{F}_{nk}\right\}$$

$$\leqslant 2\mathbf{E}\alpha(N)\sum_{k=0}^{n\cdot 2^n-1}\Delta_{nk}\alpha$$

$$= 2\mathbf{E}\alpha^2(N)\leqslant 2\mathbf{E}\alpha_\infty^2.$$

当$N\to\infty$时取极限，得不等式(30)。由不等式(30)推得，对 $\mathbf{E}\eta^2<\infty$ 的任意随机变量 η

$$\mathbf{E}\eta\alpha_n(\infty)\to\mathbf{E}\eta\alpha_\infty,\ 当\ n\to\infty. \tag{31}$$

事实上，

$$\begin{aligned}|E\eta\alpha_n(\infty)-\mathbf{E}\eta\alpha_\infty| &\leqslant |\mathbf{E}\eta^N(\alpha_n(\infty)-\alpha_\infty)| \\ &\quad+|\mathbf{E}(\eta-\eta^N)(\alpha_n(\infty)-\alpha_\infty)| \\ &\leqslant |\mathbf{E}\eta^N(\alpha_n(\infty)-\alpha_\infty)| \\ &\quad+[6\mathbf{E}\alpha_\infty^2\mathbf{E}(\eta-\eta^N)^2]^{1/2},\end{aligned}$$

其中 $\eta^N=\eta$ 当 $|\eta|\leqslant N$，且 $\eta^N=0$ 当 $|\eta|>N$。当 N 足够大时，量 $\mathbf{E}(\eta-\eta^N)^2$ 可任意小，而当选定N后由于 $\alpha_n(\infty)$ 弱收敛于 α_∞，所以 $\mathbf{E}\eta^N(\alpha_n(\infty)-\alpha_\infty)\to 0$. 在作这些注解后，当 $\mathbf{E}\alpha^2(\infty)<\infty$，鞅 $\eta(t)$一致可积且 $\mathbf{E}\eta^2(\infty)<\infty$ 时，式(16)的证明依据下述推理。由不等式

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\eta\left(\frac{k}{2^n}\right)\Delta\alpha_{nk}\right|\leqslant\zeta\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\alpha_{nk}=\zeta\alpha(\infty),$$

$$\mathbf{E}\zeta\alpha(\infty)<\infty,$$

其中 $\zeta=\sup|\eta(t)|$，可以得到和 $\sum_{k=0}^{\infty}\eta\left(\frac{k}{2^n}\right)\Delta\alpha_{nk}$ 一致可积，这只要根据在证明定理 9 时利用到的计算即可。

注 3. 在证明 Doob 分解的唯一性时，关于过程 $\beta(t)$ 的单调性实际未被利用到. 假定过程 $\beta(t)$ 能表为两个自然可积增过程之差就够了，这时由证明的推导得出 $\beta(t)=\alpha(t)$.

Meyer 定理的推广 我们推广自然过程的定义至任意(即一般说来，不可积)的增过程. 就是说，增过程 $\alpha(t)$ 称为自然的，如果对任意有界非负鞅 $\eta(t)$ 和及任意 $a>0$

$$\mathbf{E}\int_0^a \eta(t-)d\alpha(t)=\mathbf{E}\int_0^a \eta(t)d\alpha(t).$$

由(21)得，在刚才所说的意义下，可积自然过程是自然的.

定理 10 上鞅 $\xi(t)$ 可分解为

$$\xi(t)=\mu(t)-\alpha(t), \tag{32}$$

其中 $\mu(t)$ 是鞅而 $\alpha(t)$ 是增过程，当且仅当 $\xi(t)$ 属于类 DL. 在要求过程 $\alpha(t)$ 是自然时，分解是唯一的.

证. 设 $\xi(t)$ 是类 DL 的上鞅. 那末 $a>0$ 时 $\xi_a(t)=\xi(a\wedge t)$ 是类 D 的上鞅，由定理 9

$$\xi_a(t)=\mu_a(t)-\alpha_a(t),$$

其中 $\mu_a(t)$ 是一致可积鞅，而 $\alpha_a(t)$ 是可积自然过程. 设 $b>a$. 这时 $\xi_a(t)=\xi_b(t\wedge a)=\mu_b(t\wedge a)-\alpha_b(t\wedge a)$ 且由 Doob 分解的唯一性得 $\mu_b(t)=\mu_a(t), \alpha_b(t)=\alpha_a(t)$, 当 $t\leqslant a$. 于是，以概率 1 存在极限 $\mu(t)=\lim\mu_a(t), \alpha(t)=\lim\alpha_a(t)$，而且显然 $\mu(t)$ 是鞅，$\alpha(t)$ 是自然过程和 $\xi(t)=\mu(t)-\alpha(t)$. 分解式 (32) 的存在性得证.

现设过程 $\xi(t)$ 以式(32)表出，对每个 $a>0$，关系式 $\xi(a\wedge t)=\mu(a\wedge t)-\alpha(a\wedge t)$ 是 Doob 分解，其中 $\mu(a\wedge t)$ 是一致可积鞅，$\alpha(a\wedge t)$ 是可积自然过程，且由于定理 9，$\xi(a\wedge t)$ 是类 D 的上鞅，于是 $\xi(t)$ 是类 DL 的上鞅.

有自然过程 $\alpha(t)$ 的分解(32) 的唯一性容易由定理 9 所建立的分解的唯一性得到.

现在需推广鞅的概念.

定义 过程 $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t\geqslant 0\}$ 称为局部鞅，如果它的样本函

数属于 $\mathscr{D}$ 且存在这样的单调不减 $\mathfrak{F}_t$-随机时间序列 τ_n, $n=1$, $2,\cdots$使得

1) $\lim\tau_n=\infty(\bmod \mathbf{P})$,

2) $\xi(\tau_n\wedge t)$ 是关于 $\{\mathfrak{F}_{t\wedge\tau_n},t\geqslant 0\},n=1,2,\cdots$ 的一致可积鞅。

称满足定义中的条件的序列 τ_n, $n=1,2,\cdots$ 为完全导出局部鞅 $\xi(t)$,而随机时间 τ 若使得 $\xi(\tau\wedge t)$ 是一致可积鞅，则称 τ 为导出秧 $\xi(t)$。

定理 11 设 $\xi(t)$ 是非负上鞅。这时它可以有分解(32)，其中 $\mu(t)$ 是局部鞅，而 $\alpha(t)$ 是自然可积增过程。此分解是唯一的。

其证明类似于上定理的证明.引进随机时间序列 $\tau_n=\inf\{t:\xi(t)\geqslant n\},n=1,2,\cdots$和停止上鞅 $\xi_n(t)=\xi(\tau_n\wedge t)$。显然 $\xi_n(t)$ 属于类 D,因为 $\xi_n(t)\leqslant\max(\xi(\tau_n),n)$。于是根据定理 9 存在分解 $\xi_n(t)=\mu_n(t)-\alpha_n(t)$，其中 $\alpha_n(t)$ 是可积自然过程。与证明定理 10 时一样,可证 $\mu_n(t)=\mu_{n+1}(t)$ 和 $\alpha_n(t)=\alpha_{n+1}(t)$ 当 $t\leqslant\tau_n$，对所有 n 成立,且以概率 1 存在极限 $\mu(t)=\lim\mu_n(t)$, $\alpha(t)=\lim\alpha_n(t)$。因为 $\sup\xi(t)<\infty\ (\bmod \mathbf{P})$，所以 $\xi(t)=\lim\xi_n(t)=\mu(t)-\alpha(t)$.但现时只能够确定过程 $\mu(t)$ 是局部鞅.另方面,$\alpha(t)$ 是可积过程。事实上,由于控制收敛定理

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\alpha(t)&=\lim\mathbf{E}\alpha_n(t)=\lim\mathbf{E}(\mu_n(t)-\xi_n(t))\\&=\lim\mathbf{E}(\xi_n(0)-\xi_n(t))\leqslant\lim\mathbf{E}\xi_n(0)\\&=\mathbf{E}\xi(0).\end{aligned}$$

所考虑的分解的唯一性不难由定理 9 的分解的唯一性得到。

注意到已证明的定理和定理 5，容易得如下结果：

定理 12 任意拟鞅可以有分解式

$$\xi(t)=\mu(t)+\nu(t)+\beta(t),\tag{33}$$

其中 $\mu(t)$ 是鞅，$\nu(t)$ 是两个可积的非负局部鞅之差,而 $\beta(t)$ 是两个可积自然增过程之差。

不言而喻,反之亦正确。如果过程 $\xi(t)$ 能有分解(33)，那末

它是拟鞅.

为确认这点,验证 $\nu(t)$ 是拟鞅就够了. 这由非负局部鞅是上鞅可得.后者由不等式 ($s<t,\nu\geqslant 0,\nu$ 是可积局部鞅)

$$\mathbf{E}\{\nu(t)\,|\,\mathfrak{F}_s\}=\mathbf{E}\{\lim_{n\to\infty}\nu(\tau_n\wedge t)\,|\,\mathfrak{F}_s\}$$

$$\leqslant \lim \mathbf{E}\{\nu(\tau_n\wedge t)\,|\,\mathfrak{F}_s\}$$

$$\leqslant \lim \nu(\tau_n\wedge s)=\nu(s)$$

得到.

正则上鞅

定义 出现在上鞅 $\xi(t)$ 的分解式中的自然过程称为联系于 $\xi(t)$ 的过程.

同样地, 每个可积过程 $\alpha(t)$ 可以唯一的 (modP) 对应于联系于它的位势

$$\pi(t)=\mathbf{E}\{\alpha(\infty)\,|\,\mathfrak{F}\}-\alpha(t).$$

在很多场合联系过程的性质之间有着重要和相当简单的联系. 其中一些将在本段研究.

定义 半鞅 $\{\xi(t),t\geqslant 0\}$ 称为正则的,如果对任意收敛于以概率 1 有界的随机时间 τ 的递增随机时间序列 τ_n,有

$$\lim \mathbf{E}\xi(\tau_n)=\mathbf{E}\xi(\tau). \tag{34}$$

按定义每个可积鞅是正则的.

注意到如果上鞅是正则和完全一致可积的, 则式(34)对可取无穷值的任意不减随机时间序列成立. 这时我们假定当 $\tau=\infty$ 时 $\xi(\tau)$ 的值按以前指出的方式定义.

本段的基本结果是下述定理:

定理 13 设 $\xi(t)$ 是类 D 的上鞅. 联系过程 $\alpha(t)$ 是连续的当且仅当过程 $\xi(t)$ 是正则的.

为证明此定理需要一系列结果,这些结果具有独立的价值.它们和以有界连续位势逼近位势的可能性有关.

定理 14 如果 $\xi(t)$ 是完全一致可积位势,$\alpha(t)$ 是联系过程,那末

$$\mathbf{E}\alpha^2(\infty) = \mathbf{E}\int_0^\infty [\xi(t) + \xi(t-)]d\alpha(t). \tag{35}$$

证. 设 $\alpha_n(t) = \alpha(t)\wedge n$ 及 $\xi_n(t)$ 是联系过程为 $\alpha_n(t)$ 的位势，$\eta_n(t) = \mathbf{E}\{\alpha_n(\infty)|\mathfrak{F}_t\}$. 因为 $\alpha(t)$ 是自然过程，所以

$$\mathbf{E}\alpha(\infty)\alpha_n(\infty) = \mathbf{E}\int_0^\infty \eta_n(t-)d\alpha(t).$$

另一方面(见(18))，

$$\mathbf{E}\alpha(\infty)\alpha_n(\infty) = \mathbf{E}\int_0^\infty \eta_n(t)d\alpha(t),$$

因此

$$\begin{aligned}2\mathbf{E}\alpha(\infty)\alpha_n(\infty) &= \mathbf{E}\int_0^\infty (\eta_n(t-) + \eta_n(t))\,d\alpha(t)\\ &= \mathbf{E}\int_0^\infty (\xi_n(t) + \xi_n(t-))d\alpha(t)\\ &\quad + \mathbf{E}\int_0^\infty (\alpha_n(t) + \alpha_n(t-)d\alpha(t).\end{aligned}$$

由分部积分公式(17)，得

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty (\alpha_n(t) + \alpha_n(t-))d\alpha(t)\\ &\quad = 2\alpha(\infty)\alpha_n(\infty) - \int_0^\infty [\alpha(t) + \alpha(t-)]d\alpha_n(t).\end{aligned} \tag{36}$$

于是

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\int_0^\infty (\xi_n(t) + \xi_n(t-)d\alpha(t)\\ &\quad = \mathbf{E}\int_0^\infty [\alpha(t) + \alpha(t-)]d\alpha_n(t).\end{aligned}$$

由单调收敛定理，有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\int_0^\infty [\alpha(t) + \alpha(t-)]d\alpha_n(t)\\ &\quad = \mathbf{E}\int_0^\infty [\alpha(t) + \alpha(t-)]d\alpha(t),\end{aligned}$$

再由(36)，它等于 $\mathbf{E}\alpha^2(\infty)$.

另一方面，$\xi_n(t) = \mathbf{E}\{\alpha_n(\infty) - \alpha_n(t)|\mathfrak{F}_t\}, n = 1,2,\cdots$ 构成非负随机变量的单调不减序列，为证明式(35)，只要验证存在序

列 n_j 使得 $\xi_{n_j}(t)$ 以概率 1 一致收敛于 $\xi(t)$ 就够了(这时以概率 1 有 $\xi_n(t-)\to\xi(t-)$)。

因为 $\xi_n(t)=\eta_n(t)-\alpha_n(t)$ 及 $\sup(\alpha(t)-\alpha_n(t))=\alpha(\infty)-n\wedge\alpha(\infty)\to 0$，所以要证序列 $\xi_n(t)$ 具备所需的性质，只须对序列 $\eta_n(t)$ 验证就够了。

但

$$\mathbf{P}(\sup|\eta(t)-\eta_n(t)|>\varepsilon)\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\sup\mathbf{E}|\eta(t)-\eta_n(t)|$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}|\alpha(\infty)-\alpha_n(\infty)|\to 0.$$

由 Riesz 引理知存在下标的子序列 n_j，使得以概率 1 有 $\sup_t|\eta(t)-\eta_{n_j}(t)|\to 0$。

定理得证。

推论 1 在上述定理的条件下，如果 $|\xi(t)|\leqslant c$，那末 $\mathbf{E}\alpha^2(\infty)\leqslant 2c^2$。

事实上，

$$\mathbf{E}\alpha^2(\infty)\leqslant 2c\mathbf{E}\alpha(\infty)=2c\mathbf{E}\xi(0)\leqslant 2c^2.$$

推论 2 因为两个属于类 D 的位势之和仍属于 D，所以由(35)得等式

$$2\mathbf{E}\alpha_1(\infty)\alpha_2(\infty)=\mathbf{E}\int_0^\infty[\xi_1(t)+\xi_2(t-)]d\alpha_2(t)$$

$$+\mathbf{E}\int_0^\infty[\xi_2(t)+\xi_1(t-)]d\alpha_1(t),$$

其中 $\alpha_i(t)$ 是联系于位势 $\beta_i(t),i=1,2$ 的过程。由此得，如果 $\eta(t)=\xi_1(t)-\xi_2(t)$，$\xi(t)=\alpha_1(t)-\alpha_2(t)$，那末

$$\mathbf{E}\beta^2(\infty)=\mathbf{E}\int_0^\infty[\eta(t)+\eta(t-)]d\beta(t). \tag{37}$$

设 $\{\xi(t),\mathfrak{F}_t,t>0\}$ 是某个上鞅。假设

$$\eta_h(t)=\mathbf{E}\{\xi(t+h)|\mathfrak{F}_t\},h>0.$$

我们来建立过程 $\eta_h(t)$ 的一系列性质。

(1) 过程 $\eta_h(t)$ 是上鞅.

事实上,设 $s < t$; 那末

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{\eta_h(t)|\mathfrak{F}_s\} &= \mathbf{E}\{\xi(t+h)|\mathfrak{F}_s\}\\ &= \mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\xi(t+h)|\mathfrak{F}_{s+h}\}|\mathfrak{F}_s\}\\ &\leqslant \mathbf{E}\{\xi(s+h)|\mathfrak{F}_s\} = \eta_h(s).\end{aligned}$$

因为函数 $\mathbf{E}\eta_h(t) = \mathbf{E}\xi(t+h)$ 右连续, 所以过程 $\eta_h(t)$ 存在样本函数右连续的修正. 下面只考虑过程 $\eta_h(t)$ 的这一修正.

(2) 如果 $\xi(t)$ 是类 D 的位势,那末 $\eta_h(t)$ 也是类 D 的位势.

$\eta_h(t)$ 是位势是显然的, 而它的完全一致可积性由不等式 $\eta_h(t) \leqslant \xi(t)$ 得到.

(3) 设 τ 是有限或无穷的随机时间. 则

$$\eta_h(\tau) = \mathbf{E}\{\xi(\tau+h)|\mathfrak{F}_\tau\}. \tag{38}$$

证. 假设 $\tau_n = \frac{k}{2^n}$, 如果 $\tau \in \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$ 并设 $A \in \mathfrak{F}_{\tau_n}$, 那末

$$\begin{aligned}\int_A \xi(\tau_n+h)d\mathbf{P} &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{A\cap\{\tau_n=\frac{k}{2^n}\}} \xi\left(\frac{k}{2^n}+h\right)d\mathbf{P}\\ &= \sum_k \int_{A\cap\{\tau_n=\frac{k}{2^n}\}} \mathbf{E}\left\{\xi\left(\frac{k}{2^n}+h\right)\Big|\mathfrak{F}_{\frac{k}{2^n}}\right\}d\mathbf{P}\\ &= \int_A \eta_h(\tau_n)d\mathbf{P},\end{aligned} \tag{39}$$

由此得到对 $\tau = \tau_n$ 的公式(38).

现设 $n \to \infty$. 由过程 $\eta_h(t)$ 的右连续性, 得知以概率 1 有 $\eta_h(\tau_n) \to \eta_h(t)$. 顾及到随机变量族 $\xi(\tau_n+h)$ 和 $\eta_h(\tau)$ 的一致可积性,可见当 $n\to\infty$时等式(39)两端趋向极限.

另一方面,如果对任意 $A \in \mathfrak{F}_{\tau_n}, n = 1,2,\cdots$这等式成立, 那末对 $\mathfrak{F}_\tau$ 中任意 A 也成立.

(4) 如果 $\xi(t)$ 是类 D 的正则位势, 那末 $\eta_h(t)$ 也是正则位势.

设 $\tau_n \uparrow \tau$，τ_n 是随机时间。那末

$$\mathbf{E}\eta_h(\tau_n) = \mathbf{E}\mathbf{E}\{\xi(\tau_n + h) | \mathfrak{F}_{\tau_n}\} = \mathbf{E}\xi(\tau_n + h)$$
$$\to \mathbf{E}\xi(\tau + h).$$

设 $\xi(t)$ 是类 D 的位势。假定

$$\alpha_h(t) = \int_0^t \frac{\xi(s) - \eta_h(s)}{h} ds. \tag{40}$$

显然，$\alpha_h(t)$ 是单调不减连续过程。我们来证明它是可积的。因为

$$\begin{aligned} h\mathbf{E}\alpha_h(t) &= \int_0^t (\mathbf{E}\xi(s) - \mathbf{E}\xi(s + h))ds \\ &= \int_0^h \mathbf{E}\xi(s)ds - \int_t^{t+h} \mathbf{E}\xi(s)ds \\ &\leqslant \int_0^h \mathbf{E}\xi(s)ds, \end{aligned}$$

由此可见 $\mathbf{E}\alpha_h(\infty) < \infty$。

以 $\xi_h(t)$ 表示联系于增过程 $\alpha_h(t)$ 的位势。这时

$$\begin{aligned} \xi_h(t) &= \mathbf{E}\{\alpha_h(\infty) - \alpha_h(t) | \mathfrak{F}_t\} \\ &= \mathbf{E}\left\{\int_t^\infty \frac{\xi(s) - \eta_h(s)}{h} ds | \mathfrak{F}_t\right\} \\ &= \lim_{N\to\infty} \mathbf{E}\frac{1}{h}\left\{\int_t^N (\xi(s) - \mathbf{E}\{\xi(s + h) | \mathfrak{F}_s\}) ds | \mathfrak{F}_t\right\} \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{h}\int_t^N (\mathbf{E}\{\xi(s) | \mathfrak{F}_t\} - \mathbf{E}\{\xi(s + h) | \mathfrak{F}_t\}) ds \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{h}\left[\int_t^{t+h} \mathbf{E}(\xi(s) | \mathfrak{F}_t)\, ds \right. \\ &\qquad \left. - \int_N^{N+h} \mathbf{E}(\xi(s) | \mathfrak{F}_t) ds\right] = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \mathbf{E}\{\xi(s) | \mathfrak{F}_t\} ds \\ &= \mathbf{E}\left\{\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \xi(s) ds | \mathfrak{F}_t\right\}. \end{aligned}$$

因为当 $s > t, h > 0$ 时，

$$\mathbf{E}\{\xi(s + h) | \mathfrak{F}_t\} = \mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\xi(s + h) | \mathfrak{F}_s\} | \mathfrak{F}_t\}$$

$$\leqslant \mathbf{E}\{\xi(s)|\mathfrak{F}_t\},$$

即函数 $\mathbf{E}\{\xi(s)|\mathfrak{F}_t\}, s>t$ 是单调不增及右连续的，所以由已得到的公式，有

定理 15 设 $\xi(t)$ 是类 D 的位势，过程

$$\xi_h(t)=\mathbf{E}\left\{\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\xi(s)ds|\mathfrak{F}_t\right\} \tag{41}$$

是联系于连续增过程

$$\alpha_h(t)=\frac{1}{h}\int_0^t(\xi(s)-\eta_h(s))ds$$

的位势．当 $h\downarrow 0$ 时变量 $\xi_h(t)$ 单调不减且当 $h\to 0$ 时以概率 1 对每个 t 有 $\xi_h(t)\to\xi(t)$．此外，$\xi_h(t)\in D$.

后一结论可由下述证明得到．不难看出，导出式(40)的计算同样适用于以任意随机时间 τ 代替 t 的情形．于是

$$\xi_h(\tau)=\mathbf{E}\left\{\frac{1}{h}\int_\tau^{\tau+h}\xi(s)ds|\mathfrak{F}_\tau\right\},$$

由此对任意 $A\in\mathfrak{F}_\tau$，得等式

$$\int_A\xi_h(t)d\mathbf{P}=\frac{1}{h}\int_\tau^{\tau+h}\left(\int_A\xi(s)d\mathbf{P}\right)ds.$$

由 $\xi(t)$ 的一致可积性，对任意 $\varepsilon>0$ 能找到 $\delta>0$，使当 $\mathbf{P}(A)<\delta$ 时对每个 $s>0$ 有 $\int_A\xi(s)d\mathbf{P}<\varepsilon$，从而对任意随机时间 τ，不等式 $\int_A\xi_n(\tau)d\mathbf{P}<\varepsilon$ 成立，也就证明了随机变量族 $\{\xi_h(\tau),\tau\in\mathscr{T}\}$ 一致可积.

定理得证.

引理 5 类 D 的每一位势 $\xi(t)$ 均可表为

$$\xi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n(t),$$

其中 $\xi_n(t)$ 是有界位势．如果位势 $\xi(t)$ 是正则的，那末 $\xi_n(t)$ 也可选取为正则的.

证. 设

$$\xi(t)=\mathbf{E}\{\alpha(\infty)|\mathfrak{F}_t\}-\alpha(t),\alpha_n(t)=\alpha(t)\wedge n,$$

$$\beta_n(t)=\alpha_{n+1}(t)-\alpha_n(t),\xi_n(t)=\mathbf{E}\{\beta_n(\infty)|\mathfrak{F}_t\}-\beta_n(t).$$

那末 $\xi_n(t)$ 是有界位势且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n(t)=\mathbf{E}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(\infty)|\mathfrak{F}_t\right\}$$

$$-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(t)\right)=\xi(t).$$

注意, $\xi(t)-\xi_n(t)=\zeta(t)$ 是完全一致可积位势. 为方便起见,假定 $\xi_n(t)=\eta(t)$.

设 τ_n 是任意有界不减随机时间序列, $\tau_n\uparrow\tau$. 因为 $\mathbf{E}\eta(\tau_n)\geqslant\mathbf{E}\eta(\tau),\mathbf{E}\zeta(\tau_n)\geqslant\mathbf{E}\zeta(\tau)$, 所以由过程 $\xi(t)$ 的正则性得

$$\mathbf{E}\eta(\tau)+\mathbf{E}\zeta(\tau)=\mathbf{E}\xi(\tau)=\lim\mathbf{E}\xi(\tau_n)$$

$$=\lim(\mathbf{E}\eta(\tau_n)+\mathbf{E}\zeta(\tau_n))$$

成立仅当 $\lim\mathbf{E}\eta(\tau_n)=\mathbf{E}\eta(\tau)$ 和 $\mathbf{E}\zeta(\tau_n)=E\zeta$, 即过程 $\eta(t)=\xi_n(t)$ 是正则时才有可能.

引理 6 设 $\xi(t)$ 是类 D 的正则位势, $\xi_n(t)$ 是位势的任意不减序列,它以概率 1 收敛于 $\xi(t)$. 设 $\varepsilon>0$,

$$\tau_{n\varepsilon}=\inf\{t:\xi(t)-\xi_n(t)>\varepsilon\}.$$

那末

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\tau_{n\varepsilon}<\infty\}=0.$$

证. 显然, $\tau_{n\varepsilon}$ 是随机时间的不减序列. 令 $\tau=\lim\tau_{n\varepsilon}$. 这时 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{E}\xi_p(\tau_{n\varepsilon})\geqslant\mathbf{E}\xi_p(\tau)$. 利用 $\xi(t)$ 的正则性,可见 $\mathbf{E}(\xi(\tau)-\xi_p(\tau))\geqslant\lim\mathbf{E}(\xi(\tau_{n\varepsilon}-\xi_p(\tau_{n\varepsilon}))$. 因为当 $p\leqslant n$ 时, $\xi(\tau_{n\varepsilon})-\xi_p(\tau_{n\varepsilon})\geqslant\xi(\tau_{n\varepsilon})-\xi_n(\tau_{n\varepsilon})\geqslant\varepsilon\chi(\tau_{n\varepsilon}<\infty)$,所以对所有 $p>0$, $\mathbf{E}(\xi(\tau)-\xi_p(\tau))\geqslant\varepsilon\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\tau_{n\varepsilon}<\infty\}$. 当 $p\to\infty$ 时由后一不等式得引理.

引理 7 设上引理的条件成立且位势 $\xi(t)$ 有界,则

$$\mathbf{E}[\alpha(\infty)-\alpha_n(\infty)]^2\to 0,\ 当\ n\to\infty\ 时,$$

其中 $\alpha(t)$ 和 $\alpha_n(t)$ 是分别联系于 $\xi(t)$ 和 $\xi_n(t)$ 的自然过程.

证. 设 $\xi(t)\leqslant c$,那末就有 $\xi_n(t)\leqslant c$ 及由于定理 14 推论 1, $\mathbf{E}\alpha^2(t)<\infty$, $\mathbf{E}\alpha_n^2(\infty)<\infty$.

假定 $\eta(t)=\xi(t)-\xi_n(t)$, $\beta(t)=\alpha(t)-\alpha_n(t)$. 利用定理 14,有

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\alpha(\infty)-\alpha_n(\infty))^2&=\mathbf{E}\int_0^\infty(\eta(u)+\eta(u-1))d\beta(u)\\
&=\mathbf{E}\left(\int_{[0,\tau_{n\varepsilon})}+\int_{[\tau_{n\varepsilon},\infty)}\right)\\
&\leqslant 2\varepsilon\mathbf{E}(\alpha(\infty)+\alpha_n(\infty))\\
&\quad+\mathbf{E}\left\{\chi(\tau_{n\varepsilon}<\infty)\int_0^\infty 4c\,d(\alpha+\alpha_n)\right\}\\
&\leqslant 4\varepsilon\mathbf{E}\xi(0)+8c\mathbf{E}\chi(\tau_{n\varepsilon}<\infty)\alpha(\infty)\\
&\leqslant 4\varepsilon\mathbf{E}\xi(0)+8c(\mathbf{P}(\tau_{n\varepsilon}<\infty))^{1/2}.
\end{aligned}$$

利用引理 6 就得到所需的证明.

定理 13 的证明. 不失一般性,可认为 $\xi(t)$ 是位势.现在来证明, 如果它是正则的, 那末联系过程是连续的. 首先假定位势 $\xi(t)$ 是正则及有界的. 设

$$\mu(t)=\xi(t)+\alpha(t)=\mathbf{E}\{\alpha(\infty)\mid\mathfrak{F}_t\},$$
$$\mu_h(t)=\xi(t)+\alpha_h(t)=\mathbf{E}\{\alpha_h(\infty)\mid\mathfrak{F}_t\},$$

其中 $\alpha(t)$ 和 $\xi_h(t)$ 分别是由公式(40)和(41)所定义的过程. 由引理 7 得

$$\mathbf{E}[\alpha(\infty)-\alpha_h(\infty)]^2\to 0,\ 当\ h\to 0\ 时.$$

于是, $\sup\limits_t|\mu(t)-\mu_h(t)|^2\to 0$ 依概率收敛, 而由引理 6, 也就有 $\sup\limits_t|\xi(t)-\xi_h(t)|\to 0$ 依概率收敛. 于是, 当 $h\to 0$ 时, 依概率 $\sup\limits_t|\alpha_h(t)-\alpha(t)|\to 0$. 由 Riesz 引理,存在子序列 h_j 使当 $j\to\infty$时以概率 1 有 $\sup\limits_t|\alpha_{h_j}(t)-\alpha(t)|\to 0$. 因此, 以概率 1, $\alpha(t)$ 是连续函数.

现假定 $\xi(t)$ 不必是有界位势. 根据引理 5, $\xi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n(t)$, 其中 $\xi_n(t)$ 是类 D 的正则有界位势.

设 $\alpha_n(t)$ 是联系于 $\xi_n(t)$ 的过程. 它是连续的. 因为 $\mathbf{E}\sum\alpha_n(\infty)=\mathbf{E}\sum\xi_n(0)=\mathbf{E}\xi(0)<\infty$, 所以级数 $\sum\alpha_n(\infty)$ 以概率为 1 收敛. 但这时级数 $\sum\alpha_n(t)$ 以概率 1 按 t 一致收敛, 且是连续函数. 显然, 过程 $\alpha(t)$ 是自然的且联系于位势 $\xi(t)$.

现证明其逆. 如果过程 $\alpha(t)$ 连续和联系于位势 $\xi(t)$, 那末 $\xi(t)$ 是正则的.

设 τ_n 是收敛于 τ 的随机时间的递增序列, $\lim\mathbf{E}\alpha(\tau_n)=\mathbf{E}\alpha(\tau)$. 于是

$$\lim\mathbf{E}\xi(\tau_n)=\lim\mathbf{E}(\alpha(\infty)-\alpha(\tau_n))=\mathbf{E}[\alpha(\infty)-\alpha(\tau)]=\mathbf{E}\xi(\tau).$$

定理得证.

平方可积鞅 设 $\{\mu(t),\ \mathfrak{F}_t;\ t\geqslant 0\}$ 是样本函数属于 $\mathscr{D}$ 的鞅, $\mathfrak{F}_t=\mathfrak{F}_{t+}$ 且

$$\sup_{t>0}\mathbf{E}|\mu(t)|^2<\infty.$$

有此性质的鞅称为平方可积鞅, 而关于给定的 σ 代数流 $\{\mathfrak{F}_t,\ t\geqslant 0\}$ 和概率测度 $\mathbf{P}$ 的全体平方可积鞅类记为 $\mathscr{M}_2=\mathscr{M}_2\{\mathfrak{F}_t,\mathbf{P}\}$. $\mathscr{M}_2$ 中样本函数以概率 1 连续的子集 (称这些鞅为连续平方可积鞅) 记为 $\mathscr{M}_2^c=\mathscr{M}_2^c\{\mathfrak{F}_t,\mathbf{P}\}$.

因为(见(4))

$$\mathbf{E}\sup_{t>0}|\mu(t)|^2\leqslant 4\sup_{t>0}E|\mu(t)|^2<\infty,$$

所以随机变量族 $\{\mu(t),t\geqslant 0\}$ 一致可积且极限

$$\mu(\infty)=\lim_{t\to\infty}\mu(t)$$

以概率 1 及在均方意义下存在, 而且 $\mu(t)=\mathbf{E}\{\mu(\infty)|\mathfrak{F}_t\}$.

在 μ_2 中引进内积, 令

$$(\mu,\nu)=\mathbf{E}\mu(\infty)\nu(\infty)(\mu,\nu\in\mathscr{M}_2).$$

不难验证所引进的双线性齐式具有内积的性质. 并且, $\mathscr{M}_2$ 和满足 $\mathbf{E}\eta^2<\infty$ 的 $\mathfrak{F}_\infty$-可测随机变量 η 的全体的类 $L_2=L_2\{\mathfrak{F}_\infty, \mathbf{P}\}$ 之间存在等距关系

$$\eta \to \mu(t)=\mathbf{E}\{\eta|\mathfrak{F}_t\}, \mu(t)\to\eta=\lim_{t\to\infty}\mu(t),$$

而且,若 $\eta\longleftrightarrow\mu(t)$, 则

$$\mathbf{E}\mu^2(t)\leqslant\mathbf{E}\eta^2.$$

定理 16 $\mathscr{M}_2$ 是 Hilbert 空间,而 $\mathscr{M}_2^c$ 在 $\mathscr{M}_2$ 中是闭的.

证. 设 $\{\mu_n(t), n=1,2,\cdots\}$ 是 $\mathscr{M}_2$ 中的基本列, 那末 $\lim\mu_n(\infty)=\mu_\infty$ 存在. 构造样本函数属于 $\mathscr{D}$ 的鞅 $\mu(t)=\mathbf{E}\{\mu_\infty|\mathfrak{F}_t\}$. 它属于 $\mathscr{M}_2$,

$$\mathbf{E}\mu^2(t)=\mathbf{E}(\mathbf{E}\{\mu_\infty|\mathfrak{F}_t\})^2\leqslant\mathbf{E}\mathbf{E}\{\mu_\infty^2|\mathfrak{F}_t\}=\mathbf{E}\mu_\infty^2$$
$$<\infty,$$

及它是序列 $\mu_n(t)$ 在 $\mathscr{M}_2$ 中的极限. 因为

$$\mathbf{E}\sup_t|\mu_n(t)-\mu(t)|^2\leqslant4\mathbf{E}|\mu_n(\infty)-\mu_\infty|^2\to0,$$

所以存在子序列 $\mu_{n_k}(t), k=1,2,\cdots$, 使当 $k\to\infty$时以概率 1 有 $\sup_t|\mu_{n_k}(t)-\mu(t)|\to0$. 特别是,如果过程 $\mu_n(t)$ 是连续的, 那末鞅 $\mu(t)$ 也是连续的.

注. 我们还证明了如果 $\mu_n(t)$ 在 $\mathscr{M}_2$ 收敛于 $\mu(t)$, 那末存在鞅的子序列 $\mu_{n_k}(t)$,其样本函数以概率 1 按 $t\geqslant0$ 一致收敛于 $\mu(t)$ 的样本函数.

设 $\mu\in\mathscr{M}_2$. 这时 $\mu^2(t)$ 是下鞅且

$$\mu^2(t)\leqslant\mathbf{E}\{\mu^2(\infty)|\mathfrak{F}_t\}=\xi(t),$$

其中 $\xi(t)$ 是一致可积鞅. 因为 $\xi(t)$ 是完全一致可积过程,所以 $\mu^2(t)$ 是类 $\mathscr{D}$ 的下鞅. 由于 Meyer 定理, 存在唯一的自然可积过程 $\alpha(t)$ 及鞅 $\nu(t)$,使

$$\mu^2(t)=\nu(t)+\alpha(t). \tag{42}$$

定义 在分解式(42)中自然过程 $\alpha(t)$ 称为 $\mu(t)(\mu(t)\in\mathscr{M}_2)$ 的特征,且记为 $\langle\mu,\mu\rangle_t$.

顾及到当 $t>s$ 时

$$\mathbf{E}\{(\mu(t)-\mu(s))^2|\mathfrak{F}_s\}=E\{\mu^2(t)-\mu^2(s)|\mathfrak{F}_s\},$$

我们得

$$\mathbf{E}\{(\mu(t)-\mu(s))^2|\mathfrak{F}_s\}=\mathbf{E}\{\langle\mu,\mu\rangle_t-\langle\mu,\mu\rangle_s|\mathfrak{F}_s\}. \quad (43)$$

反之显然：如果 $\langle\mu,\mu\rangle_t$ 是自然过程且对任意t, $s(s<t)$ 等式(43)成立,那末 $\langle\mu,\mu\rangle_t$ 是鞅 $\mu(t)$ 的特征.

例. 设 $\mu(t)$ 是独立增量过程且 $\mu\in\mathscr{M}_2$. 这时

$$\mathbf{E}\mu(t)=\alpha=\text{常数}$$

$$\mathbf{E}(\mu(t)-\alpha)^2=\sigma^2(t)<\infty$$

且

$$\mathbf{E}\{(\mu(t)-\mu(s))^2|\mathfrak{F}_s\}=\mathbf{E}(\mu(t)-\mu(s))^2$$
$$=\sigma^2(t)-\sigma^2(s).$$

因此具有独立增量过程的特征 $\langle\mu,\mu\rangle_t=\sigma^2(t)$ 是非随机的.

设 σ 及 τ 是关于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t,\ t\geqslant 0\}$ 的两个随机时间且 $\sigma\leqslant\tau(\mathrm{mod}\mathbf{P})$, 顾及到定理 6 的推论 1,得

$$\mathbf{E}\{(\mu(\tau)-\mu(\sigma))^2|\mathfrak{F}_\sigma\}=\mathbf{E}\{\mu^2(\tau)$$
$$-2\mu(\sigma)\mathbf{E}\{\mu(\tau)|\mathfrak{F}_\sigma\}+\mu^2(\sigma)|\mathfrak{F}_\sigma\}$$
$$=\mathbf{E}\{\mu^2(\tau)-\mu^2(\sigma)|\mathfrak{F}_\sigma\},$$

由此得到式(43)的推广:

$$\mathbf{E}\{(\mu(\tau)-\mu(\sigma))^2|\mathfrak{F}_\sigma\}=\mathbf{E}\{\langle\mu,\mu\rangle_\tau-\langle\mu,\mu\rangle_\sigma|\mathfrak{F}_\tau\}. \quad (44)$$

任意两个平方可积鞅的乘积一般来说不是鞅.

定理 17 乘积 $\mu_1(t)\mu_2(t)(\mu_i\in\mathscr{M}_2, i=1,2)$ 是鞅当且仅当

$$\langle\mu_1+\mu_2,\mu_1+\mu_2\rangle_t=\langle\mu_1,\mu_1\rangle_t+\langle\mu_2,\mu_2\rangle_t.$$

证. 必要性由特征的唯一性和等式

$$(\mu_1(t)+\mu_2(t))^2=\nu_1(t)+\nu_2(t)+2\mu_1(t)\mu_2(t)$$
$$+(\alpha_1(t)+\alpha_2(t))$$

可得,其中 $\mu_i^2(t)=\nu_i(t)+\alpha_i(t)$ 是下鞅 $\mu_i^2(t)$ 的 Doob 分解,由此等式得, 如果 $\alpha_1(t)+\alpha_2(t)$ 是鞅 $\mu_1(t)+\mu_2(t)$ 的特征, 那末 $\mu_1(t)\mu_2(t)$ 是鞅.

定义 随机过程

$$\langle \mu_1, \mu_2 \rangle_t = \frac{1}{2} [\langle \mu_1 + \mu_2, \mu_1 + \mu_2 \rangle_t - \langle \mu_1, \mu_1 \rangle_t - \langle \mu_2, \mu_2 \rangle_t]$$

称为鞅 $\mu_1(t)$ 和 $\mu_2(t)(\mu_i \in \mathscr{M}_2, i = 1,2)$ 的互特征。

鞅 $\mu_1(t)$ 及 $\mu_2(t)$ 的互特征显然具有如下性质：它适应于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$，$\langle \mu_1, \mu_2 \rangle_0 = 0$ 且过程 $\langle \mu_1, \mu_2 \rangle_t$ 能表为两个自然过程之差。

引入两个鞅的互特征的用处在于使得过程

$$\mu_1(t)\mu_2(t) - \langle \mu_1, \mu_2 \rangle_t$$

是鞅。这由容易验证的等式

$$\mu_1(t)\mu_2(t) - \langle \mu_1, \mu_2 \rangle_t = \frac{1}{2}(\nu_3(t) - \nu_1(t) - \nu_2(t))$$

立刻得到，其中 $\nu_3(t) = (\mu_1(t) + \mu_2(t))^2 - \langle \mu_1 + \mu_2, \mu_1 + \mu_2 \rangle_t$，而 $\nu_i(t)(i = 1,2)$ 的意义和前面一样。

特别由此得知，如果 σ 和 τ 是随机时间且 $\sigma \leqslant \tau$，那末

$$\mathbf{E}\{\mu_1(\tau)\mu_2(\tau) - \mu_1(\sigma)\mu_2(\sigma) | \mathfrak{F}_\sigma\} = \mathbf{E}\{\langle \mu_1, \mu_2 \rangle_\tau - \langle \mu_1, \mu_2 \rangle_\sigma | \mathfrak{F}_\sigma\}.$$

后一关系式还可写为

$$\mathbf{E}\{(\mu_1(\tau) - \mu_2(\sigma))(\mu_2(\tau) - \mu_2(\sigma)) | \mathfrak{F}_\sigma\} = \mathbf{E}\{(\langle \mu_1, \mu_2 \rangle_\tau - \langle \mu_1, \mu_2 \rangle_\sigma | \mathfrak{F}_\sigma\}. \quad (45)$$

由此得知，例如

$$|\mathbf{E}\{\Delta\langle \mu_1, \mu_2 \rangle | \mathfrak{F}_\sigma\}| \leqslant \sqrt{\mathbf{E}\{\Delta\langle \mu_1, \mu_1 \rangle | \mathfrak{F}_\sigma\}\mathbf{E}\{\Delta\langle \mu_2, \mu_2 \rangle | \mathfrak{F}_\sigma\}}, \quad (46)$$

其中 $\Delta\langle \mu_i, \mu_i \rangle = \langle \mu_i, \mu_i \rangle_\tau - \langle \mu_i, \mu_i \rangle_\sigma$ 及 $\Delta\langle \mu_1, \mu_2 \rangle$ 有类似的意义。

定理 18 对任意鞅 $\mu_1(t)$，$\mu_2(t)$ $(\mu_i \in \mathscr{M}_2, i = 1, 2)$ 存在过程 $\langle \mu_1, \mu_2 \rangle_t$ 并有如下性质：$\langle \mu_1, \mu_2 \rangle_t$ 是两个自然过程的差，而过程 $\mu_1(t)\mu_2(t) - \langle \mu_1, \mu_2 \rangle_t$ 是鞅。

此过程是唯一的且满足不等式(46)。

证. 过程 $\langle\mu_1, \mu_2\rangle_t$ 在前面已定义. 现证明其唯一性.

设 $\alpha(t)$ 表示满足定理条件的过程. 这时 $\beta(t)=\langle\mu_1,\mu_1\rangle_t+2\alpha(t)+\langle\mu_2, \mu_2\rangle_t$ 有如下性质: $\beta(t)$ 是两个自然过程的差且 $(\mu_1(t)+\mu_2(t))^2-\beta(t)$ 是鞅. 由 Meyer 定理 $\beta(t)=\langle\mu_1+\mu_2, \mu_1+\mu_2\rangle_t$. 因此 $\alpha(t)=\frac{1}{2}[\langle\mu_1+\mu_2,\mu_1+\mu_2\rangle_t-\langle\mu_1, \mu_1\rangle_t-\langle\mu_2,\mu_2\rangle_t]$. 从而,过程 $\alpha(t)$ 唯一地 (mod $\mathbf{P}$) 被确定.

局部平方可积鞅 类似于局部鞅的定义可引进局部平方可积鞅的概念.

定义 过程 $\{\mu(t),\mathfrak{F}_t, t\geqslant 0\}$ 称为局部平方可积鞅,如果它的样本函数属于 $\mathscr{D}$ 且存在 $\mathfrak{F}_t$-随机时间的单调不减序列 $\tau_n, n=1,2,\cdots$, 使得

1) $\lim\tau_n=\infty(\mathrm{mod}\,\mathbf{P})$,

2) 过程 $\mu(t\wedge\tau_n)$ 是关于流 $\{\mathfrak{F}_{t\wedge\tau_n}, t\geqslant 0\}$ 的平方可积鞅.

此时序列 τ_n 称为完全导出局部平方可积鞅 $\mu(t)$, 而对其停止过程 $\mu(t\wedge\tau)$ 是平方可积鞅的任意 $\mathfrak{F}_t$-随机时间 τ 称为导出 $\mu(t)$.

关于给定 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t\geqslant 0\}$ 的局部可积鞅的全体的类记为 $l\mathscr{M}$, 而局部平方可积鞅的类记为 $l\mathscr{M}_2$. 由样本函数以概率 1 连续的过程所组成的 $l\mathscr{M}(l\mathscr{M}_2)$ 的子类记为 $l\mathscr{M}^c$ $(l\mathscr{M}_2^c)$.

如果 $\mu(t)\in l\mathscr{M}_2$ 且 τ_n 是完全导出 $\mu(t)$ 的随机时间序列, 那末存在这样的自然增过程序列 $\alpha_n(t), t\geqslant 0, n=1,2,\cdots$,使过程 $\zeta_n(t)=\mu^2(t\wedge\tau_n)-\alpha_n(t)$, 对任意 $n=1,2,\cdots$是鞅. 当 $n<n'$ 时, 因为 $\mu^2((t\wedge\tau_{n'})\wedge\tau_n)=\mu^2(t\wedge\tau_n)$, 所以由特征的唯一性 $\alpha_{n'}(t\wedge\tau_n)=\alpha_n(t)$. 因此,当 $t<\tau_n$ 时, $\alpha_n(t)=\alpha_{n+1}(t)=\cdots$, 即对任意 $t>0$, 从某个 $n_0=n_0(\omega,t)$ 开始, 量 $\alpha_n(t)$ 相重合.

设 $\alpha(t)=\lim\alpha_n(t)$. 不难验证过程 $\alpha(t)$ 不依赖于(modP)序列 τ_n 的选取. 事实上,如果 τ'_n 是另一完全导出过程 $\mu(t)$ 的

随机时间序列，$\alpha'_n(t)$ 是鞅 $\mu(t\wedge\tau'_n)$ 的特征，$\alpha'(t)=\lim\alpha'_n(t)$，那末由式 $\mu((t\wedge\tau'_n)\wedge\tau_m)=\mu((t\wedge\tau_m)\wedge\tau'_n)$ 和特征的唯一性得 $\alpha_m(t)=\alpha'_n(t)$，当 $t<\tau_m\wedge\tau'_n$ 时。令 m 及 $n\to\infty$，得

$$\alpha(t)=\alpha'(t)\ (\mathrm{mod}\mathbf{P}).$$

类似的论证表明，如果 τ 是导出过程 $\mu(t)$ 的任意随机时间，那末 $\mu^2(t\wedge\tau)-\alpha(t\wedge\tau)$ 是鞅，而过程 $\alpha(t\wedge\tau)$ 是自然的(关于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_{t\wedge\tau},\ t\geqslant 0\}$；见等式 (20))。并且，具有指出的性质的过程 $\alpha(t)$ 是唯一的。

所作的论证适用于任意两个局部平方可积鞅。因此我们得出下命题：

定理 19 1) 如果 $\mu(t)\in l\mathscr{M}_2$，那末存在非负增过程 $\alpha(t)$，$t\geqslant 0$，使得对任意导出 $\mu(t)$ 的随机时间 τ，$\mu^2(t\wedge\tau)-\alpha(t>\tau)$ 是 $\mathfrak{F}_{t\wedge\tau}$-鞅，而 $\alpha(t\wedge\tau)$ 是自然过程。具有此性质的过程 $\alpha(t)$ 是唯一的。

2) 如果 $\mu_i(t)\in l\mathscr{M}_2$，$i=1, 2$，那末存在过程 $\beta(t)$ 能表为 $\beta(t)=\alpha_1(t)-\alpha_2(t)$，其中 $\alpha_i(t)$ 是这样的增过程，使对任意导出 $\mu_1(t)$ 和 $\mu_2(t)$ 的随机时间 τ 来说，$\gamma(t\wedge\tau)=\mu_1(t\wedge\tau)\times\mu_2(t\wedge\tau)-\beta(t\wedge\tau)$ 是 $\mathfrak{F}_{t\wedge\tau}$-鞅，及 $\alpha_i(t\wedge\tau)$ 是自然过程 $(i=1, 2)$。具有这些性质的过程 $\beta(t)$ 也是唯一的。

按前面我们仍称过程 $\alpha(t)$ 为局部平方可积鞅 $\mu(t)$ 的特征，而 $\beta(t)$ 称为过程 $\mu_1(t)$ 及 $\mu_2(t)$ 的互特征，并利用记号

$$\alpha(t)=\langle\mu,\mu\rangle_t,\quad \beta(t)=\langle\mu_1,\mu_2\rangle_t.$$

这时

$$\langle\mu_1,\mu_2\rangle_t=\frac{1}{2}\left[\langle\mu_1,\mu_2,\mu_1+\mu_2\rangle_t-\langle\mu_1,\mu_1\rangle_t\right.$$

$$\left.-\langle\mu_2,\mu_2\rangle_t\right].$$

注。不难相信，如果 τ 是任意随机时间，那末过程 $\mu(t\wedge\tau)$ $(\mu(\cdot)\in l\mathscr{M}_2)$ 的特征是函数 $\langle\mu,\mu\rangle_{t\wedge\tau}$。

具有连续特征的鞅 设 $\mu(t)\in\mathscr{M}_2$ 和 $\langle\mu,\mu\rangle_t$ 是 $\mu(t)$ 的特征。由于 Meyer 定理(定理 13)，过程 $\langle\mu,\mu\rangle_t$ 是连续的，当且

仅当对任意收敛于有限随机时间 τ 的单调不减随机时间序列 τ_n 有

$$\mathbf{E}\mu^2(\tau_n)\to\mathbf{E}\mu^2(\tau). \tag{47}$$

另一方面，如果这条件成立，那末

$$\mathbf{E}\mu(\tau)\mu(\tau_n)=\mathbf{E}\{\mu(\tau_n)E\{\mu(\tau)|\mathfrak{F}_{\tau_n}\}\}$$
$$=\mathbf{E}\mu^2(\tau_n)\to\mathbf{E}\mu^2(\tau),$$
$$\mathbf{E}(\mu(\tau)-\mu(\tau_n))^2=\mathbf{E}\{\mu^2(\tau)-2\mu(\tau)\mu(\tau_n)$$
$$+\mu^2(\tau_n)\}\to 0.$$

因为 $\mu^2\in D$，所以后一关系式成立，当且仅当

$$\mathbf{P}\text{-}\lim\mu(\tau_n)=\mu(\tau). \tag{48}$$

反之，如果关系式(48)成立，那末(47)也成立。

定义 鞅 $\{\mu(t),\mathfrak{F}_t,t\geqslant 0\}$ 称为拟左连续的，如果对任意单调不减随机时间序列 τ_n，$\tau=\lim\tau_n<\infty\ (\mathrm{mod}\ \mathbf{P})$，它满足条件(48)。如果 $\mu(t)$ 是局部鞅，那末称它为拟左连续的，如果对导出 $\mu(t)$ 的 τ 及收敛于 τ 的单调不减序列 τ_n，(48)式成立。

定理 20 为使过程 $\mu(t)\in l\mathscr{M}_2$ 的特征 $\langle\mu,\mu\rangle_t$ 连续的充分必要条件是过程拟左连续。

证明由上述论证容易得到。

推论 如果过程 $\mu_1(t)$ 及 $\mu_2(t)$ $(\mu_i(t)\in l\mathscr{M}_2,\ i=1,2)$ 的特征是连续的，那末它们的互特征也是连续的。

事实上，由过程 $\mu_1(t)$ 及 $\mu_2(t)$ 的拟左连续性得到它们的和的拟左连续性。

现建立一系列能求出鞅和局部鞅的特征的命题。

设 $\xi(t)=\mu(t)+\alpha(t)$，$t\in[0,T]$，其中 $\mu(t)$ 是 $\{\mathfrak{F}_t,t\in[0,T]\}$-鞅，而 $\alpha(t)$ 是在 $[0,T]$ 上任意的连续可积增过程，它适应于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t,t\in[0,T]\}$，且 $\alpha(0)=0$。考虑区间 $[0,T]$ 上的任意分割 λ，$\lambda=\{0=t_0,t_1,\cdots,t_{n-1},t_n=T\}$。如果 $\max\limits_{k=1,\cdots,n}(t_k-t_{k-1})\to 0$，则记为 $\lambda\to 0$。

设

$$= \mathbf{E}\{\xi(t_1) - \xi(t_0)|\mathfrak{F}_0\} + \mathbf{E}\{\xi(t_2) - \xi(t_1)|\mathfrak{F}_{t_1}\} + \cdots + \mathbf{E}\{\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})|\mathfrak{F}_{t_{n-1}}\}.$$

那末

$$\alpha_\lambda = \mathbf{E}\{\alpha(t_1)|\mathfrak{F}_0\} + \mathbf{E}\{\alpha(t_2) - \alpha(t_1)|\mathfrak{F}_{t_1}\} + \cdots + \mathbf{E}\{\alpha(t_n) - \alpha(t_{n-1})|\mathfrak{F}_{t_{n-1}}\}.$$

可见 α_λ 不依赖于 $\mu(t)$ 而完全由过程 $\alpha(t)$ 所确定。

定理 21 如果 $\alpha(t)$ 是 $[0, T]$ 上连续可积增过程，那末在 L_1 收敛意义下

$$\lim \alpha_\lambda = \alpha(T). \tag{49}$$

证。首先假定 $\mathbf{E}\alpha^2(T) < \infty$. 这时

$$\mathbf{E}(\alpha_\lambda - \alpha(T))^2 = \mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{E}\{\Delta\alpha_k|\mathfrak{F}_{t_{k-1}}\} - \Delta\alpha_k)\right]^2,$$

其中 $\Delta\alpha_k = \alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})$。因为等式右边的和的不同被加项正交，所以

$$\mathbf{E}(\alpha_\lambda - \alpha(T))^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}[\mathbf{E}\{\Delta\alpha_k|\mathfrak{F}_{t_{k-1}}\} - \Delta\alpha_k]^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \{\mathbf{E}\Delta\alpha_k^2 - \mathbf{E}[\mathbf{E}\{\Delta\alpha_k|\mathfrak{F}_{t_{k-1}}\}]^2\}$$

$$\leqslant \mathbf{E}\sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha_k^2 \leqslant \mathbf{E}(\sup_k \Delta\alpha_k \cdot \alpha(T)).$$

因为 $\sup_k \Delta\alpha_k \cdot \alpha(T) \leqslant \alpha^2(T)$, $\mathbf{E}\alpha^2(T) < \infty$ 且以概率 1 有 $\sup_k \Delta\alpha_k \to 0$，所以由 Lebesgue 控制收敛定理

$$\mathbf{E}(\alpha_\lambda - \alpha(T))^2 \to 0.$$

现转到一般情形。设 $\beta(t) = \alpha(t) \wedge n$, $\gamma(t) = \alpha(t) - \beta(t)$. 过程 $\beta(t)$ 及 $\gamma(t)$ 是连续且单调不减的，而且 $\beta(t) \leqslant n$。此时

$$\mathbf{E}|\alpha(T) - \alpha_\lambda| \leqslant \mathbf{E}[|\beta(T) - \beta_\lambda| + \gamma(T) + (\alpha_\lambda - \beta_\lambda)].$$

由关系式

$$0 \leqslant \mathbf{E}(\alpha_\lambda - \beta_\lambda) = \mathbf{E}\gamma(T) \leqslant \mathbf{E}\alpha(T)\chi\{\alpha(T) > n\}$$

得，对任意 $\varepsilon > 0$ 当 n 足够大时不依赖于 λ 有 $\mathbf{E}\gamma(T) < \frac{\varepsilon}{3}\mathbf{E}(\alpha_\lambda - \beta_\lambda) < \frac{\varepsilon}{3}$. 因为 $\mathbf{E}\beta^2(T) \leqslant n^2$，当选定 n 时，$\lambda \to 0$，$\mathbf{E}|\beta(T) - \beta(\lambda)| \to 0$. 由此得

$$\mathbf{E}|\alpha(T) - \alpha_\lambda| \to 0，当 \ \lambda \to 0 时.$$

注. 如果 $\mathbf{E}\alpha^2(T) < \infty$，那末式(49)在 L_2 收敛意义下也成立。

推论 1 如果鞅 $\mu(t) \in \mathscr{M}_2$ 的特征连续，那末

$$\langle \mu, \mu \rangle_t = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{\substack{k=1 \\ 0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t}}^{n} \mathbf{E}\{(\mu(t_k) - \mu(t_{k-1}))^2 | \mathfrak{F}_{t_{k-1}}\}.$$

推论 2 如果鞅 $\mu_i(t)(\mu_i(t) \in \mathscr{M}_2, i = 1,2)$ 的特征连续，那末

$$\langle \mu_1, \mu_2 \rangle_t = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{\substack{k=1 \\ 0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t}}^{n} \mathbf{E}\{(\mu_1(t_k) - \mu_1(t_{k-1}))(\mu_2(t_k) - \mu_2(t_{k-1})) | \mathfrak{F}_{t_{k-1}}\}. \tag{50}$$

这时应当指出的是由过程 $\langle \mu_i, \mu_i \rangle_t$ 的连续性得出过程 $\langle \mu_1 + \mu_2, \mu_1 + \mu_2 \rangle_t$ 的连续性(定理 20 的推论).

推论 3 如果鞅 $\mu_i(t)$，$i = 1,2$ 的特征连续，那末

$$|\Delta\langle \mu_1, \mu_2 \rangle_t|^2 \leqslant \Delta\langle \mu_1, \mu_1 \rangle_t \Delta\langle \mu_2, \mu_2 \rangle_t. \tag{51}$$

此不等式是不等式(46)的实质上的加强.

对具有连续特征的局部平方可积鞅，这不等式显然亦成立.

当鞅或局部鞅的样本函数连续 (mod $\mathbf{P}$) 时，可建立有可能计算过程的特征的另一种极限定理.

首先注意如果鞅(局部鞅)是连续的，那末它拟左连续. 其次，这时局部鞅是局部平方可积. 事实上，设

$$\tau_n = \inf\{t: |\mu(t)| \geqslant n\},$$

且若 $A_n=\{t: |\mu(t)|\geqslant n\}=\phi$，那末可以认为 $\tau_n=\infty$. 设 $\mu_n(t)=\mu(t\wedge\tau_n)$；这时，对于 $\omega\in A_n$ 和 $t\leqslant\tau_n$，$|\mu_n(t)|\leqslant n$，和由于 $\mu(t)$ 的连续性，对于 $t\geqslant\tau_n$，$|\mu_n(t)|=n$. 如果 $\omega\notin A_n$，那末对每个 t，$|\mu_n(t)|<n$. 因此以概率 1 有 $|\mu_n(t)|\leqslant n$. 于是，如果 $\mu(t)$ 是连续局部鞅，那末存在 $\mu(t)$ 的完全导出随机时间序列 τ_n，使 $\mu(t\wedge\tau_n)$ 是以概率 1 有界的鞅.

现来引入过程的平方变差概念.

首先，设 λ 表示在区间 $[0, T]$ 上用点 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=T$ 作出的某一分割，而 $\zeta(t)$，$t\in[0, T]$ 是任意随机过程.

定义 当 $\lambda\to 0$ 时，和数

$$\sigma_\lambda^2=\sigma_\lambda^2(T)=\sum_{k=1}^{n}[\zeta(t_k)-\zeta(t_{k-1})]^2$$

在依概率收敛意义下极限如果存在，则称它为过程 $\zeta(t)$ 在区间 $[0,T]$ 上的平方变差.

过程 $\zeta(t)$ 在区间 $[0, T]$ 上的平方变差以 $[\zeta, \zeta]_t$ 表示，$[\zeta,\zeta]_t=\mathbf{P}\text{-}\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_\lambda^2(t)$.

注. 如果过程 $\zeta(t)$ 的样本函数以概率 1 连续且在 $[0,T]$ 上有有界变差，那末 $[\zeta,\zeta]_T=0$.

事实上，$\sigma_\lambda^2\leqslant\max\limits_k|\zeta(t_k)-\zeta(t_{k-1})|V_T(\zeta)$，其中 $V_T(\zeta)=\sup\limits_\lambda\sum\limits_{k=1}^{n}|\zeta(t_k)-\zeta(t_{k-1})|$ 是 $\zeta(t)$ 在 $[0, T]$ 上的变差. 因为当 $\lambda\to 0$时，$\max|\zeta(t_k)-\zeta(t_{k-1})|\to 0$，所以以概率 1 有 $\sigma_\lambda^2\to 0$.

引理 8 如果 $\mu(t)$ 是 $[0,T]$ 上的平方可积鞅，那末随机变量族 $\{\sigma_\lambda^2(T)\}$ 是一致可积的.

证. 对每个 λ 我们定义位势 $\xi(n)=\xi_\lambda(n)$，设

$$\xi(0)=\mathbf{E}\{\mu^2(T)|\mathfrak{F}_0\},$$
$$\xi(k)=\mathbf{E}\{\mu^2(T)|\mathfrak{F}_{t_k}\}-\mu^2(t_k)+(\mu(t_k)-\mu(t_{k-1}))^2,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

这时

$$\mathbf{E}\{\xi(k)|\mathfrak{F}_{t_{k-1}}\} = \mathbf{E}\{\mu^2(T)|\mathfrak{F}_{t_{k-1}}\} - \mu^2(t_{k-1})$$
$$\leqslant \xi(k-1)$$

及

$$\Delta\alpha_k = (\mu(t_{k-1}) - \mu(t_{k-2}))^2,$$

其中

$$\Delta\alpha_k = \mathbf{E}\{\xi(k-1) - \xi(k)|\mathfrak{F}_{t_{k-1}}\},$$
$$k = 1,2,\cdots,n$$

（这里应认为 $\mu(t_{-1}) = 0$）及

$$\alpha(\infty) = \sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha_k = \sigma_\lambda^2(T).$$

另方面，不依赖于 λ 的选取

$$\xi(k) \leqslant \mathbf{E}\{\mu^2(T)|\mathfrak{F}_{t_k}\} + 4 \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \mu^2(t),$$

而因为鞅 $\mathbf{E}\{\mu^2(T)|\mathfrak{F}_t\}$ 一致可积，当 $c \to \infty$ 时

$$\rho(c) = \sup_{\lambda,\tau} \int_{\{\xi_\tau > c\}} \xi_\tau d\mathbf{P} \to 0,$$

其中 τ 是在 $\{\mathfrak{F}_{t_k},\ k = 0,1,\cdots,n\}$ 上的任意随机时间。于是应用引理 4，变量族 $\sigma_\lambda^2(t)$ 构成一致可积族。

定理 22 设 $\mu(t) \in l\mathscr{M}^c$。过程 $\mu(t)$，$t \in [0, T]$ 的平方变差对每个 $T > 0$ 存在且与它的特征重合，即

$$[\mu,\mu]_t = \langle \mu,\mu \rangle_t \quad (\mathrm{mod}\mathbf{P}). \tag{52}$$

证。首先设 $\mu(t)$ 是平方可积鞅。我们定义随机时间 $\tau = \tau_c$，设

$$\tau = \tau_c = \inf\{s: (|\mu(s)| \geqslant c) \cup (\langle \mu,\mu \rangle_s \geqslant c^2),$$
$$s \in [0,t]\},$$

如果在大括弧中的集合不空；反之则设 $\tau = t$。令

$$\mu'(t) = \mu(t\wedge\tau),\ \alpha'(t) = \langle \mu,\mu \rangle_{t\wedge\tau}\ \alpha(t) = \langle \mu,\mu \rangle_t,$$

$$\bar{\sigma}_\lambda^2 = \sum_{k=1}^{n} [\mu'(t_k) - \mu'(t_{k-1})]^2,$$

$$\sigma_\lambda^2 = \sum_{k=1}^{n} [\mu(t_k) - \mu(t_{k-1})]^2,$$

此时，$|\mu'(t)| \leqslant c$，$\alpha'(t) \leqslant c^2$。

由不等式

$$\mathbf{P}\{|\sigma_\lambda^2 - \langle\mu,\mu\rangle_t| > \varepsilon\} \leqslant \mathbf{P}\{|\bar{\sigma}_\lambda^2 - \alpha'(t)| > \varepsilon\} + \mathbf{P}\{\tau < t\}$$

及当 $c \to \infty$ 时

$$\mathbf{P}\{\tau < t\} = \mathbf{P}\{\sup|\mu(s)| \geqslant c) \cup (\alpha(t) > c^2)\} \to 0,$$

可见，只要验证当 $\lambda \to 0$ 时依概率 $\bar{\sigma}_\lambda^2 \to \alpha'(t)$，就在所考虑的情形证明了定理。

为此，注意

$$\mathbf{E}(\bar{\sigma}_\lambda^2 - \alpha'(t))^2 = \mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^{n} (\Delta\mu_k')^2 - \Delta\alpha_k'\right]^2 \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}[(\Delta\mu_k')^4 + (\Delta\alpha_k')^2],$$

其中 $\Delta\mu_k' = \mu'(t_k) - \mu'(t_{k-1})$，$\Delta\alpha_k' = \alpha'(t_k) - \alpha'(t_{k-1})$. 这时

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(\Delta\mu_k')^4 \leqslant 4c^2\mathbf{E}(\max_k|\Delta\mu_k'|^2),$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(\Delta\alpha_k')^2 \leqslant c^2\mathbf{E}(\max_k|\Delta\alpha_k'|).$$

因为以概率 1 有 $\max(\Delta\mu_k')^2 \to 0$，$\max\Delta\alpha_k' \to 0$，而且这些变量以非随机的常数为界，所以，$\mathbf{E}(\bar{\sigma}_\lambda^2 - \alpha'(t))^2 \to 0$ 及对于平方可积鞅情形证明了定理。

现设 $\mu(t) \in l\mathscr{M}^c$ 和 $\{\tau_n\}$ 是导出 $\mu(t)$ 的随机时间序列. 这时

$$\mathbf{P}\{|\sigma_\lambda^2 - \alpha(t)| > \varepsilon\} \leqslant \mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} (\Delta\mu_k^{(r)})^2 - \alpha(t\wedge\tau_r)\right| > \frac{\varepsilon}{3}\right\} + \mathbf{P}\left\{|\alpha(t\wedge\tau_r) - \alpha(t)| > \frac{\varepsilon}{3}\right\} + \mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}(\Delta\mu_k^{(r)})^2 - (\Delta\mu_k)^2\right| > \frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

$$\leqslant 2\mathbf{P}\{\tau_r < t\} + \mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}(\Delta\mu_k^{(r)})^2 - \alpha(t\wedge\tau_r)\right| > \frac{\varepsilon}{3}\right\},$$

其中 $\mu^{(r)}(t) = \mu(t\wedge\tau_r)$。容易由所得的不等式推得定理的结论。

推论 设 $\mu_i(t)\in l\mathscr{M}^c$。令

$$[\mu_1,\mu_2]_t = \mathbf{P} - \lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\mu_1(t_k)-\mu_1(t_{k-1}))(\mu_2(t_k) - \mu_2(t_{k-1})). \tag{53}$$

这时

$$[\mu_1,\mu_2]_t = \langle\mu_1,\mu_2\rangle_t.$$

下引理今后常常用到.

引理 9 设 $\mu(t)\in l\mathscr{M}_2$ 和特征 $\langle\mu,\mu\rangle_t$ 是连续的。这时

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\mu(t)|>\varepsilon\}\leqslant\frac{N}{\varepsilon^2}+\mathbf{P}\{\langle\mu,\mu\rangle_T\geqslant N\} \tag{54}$$

对任意正数 ε 及 N 成立。

证。对 $\mathscr{M}_2$ 中的鞅证明不等式(54)就够了，因为利用极限转换，以显然的方式可将其推广至局部平方可积鞅情形。于是设 $\mu(t)\in\mathscr{M}_2$。令 $\tau_n=\inf\{t:\langle\mu,\mu\rangle_t\geqslant N,\ t\leqslant T\}$，若在{ }中 t 的集合不空，否则令 $\tau_N = T$. 由于过程 $\langle\mu,\mu\rangle_t$ 的连续性，不等式 $\langle\mu,\mu\rangle_t\leqslant N$ 以概率 1 成立。

另一方面

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\mu(t)|>\varepsilon\} &= \mathbf{P}\{(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\mu(t)|>\varepsilon)\cap(\tau<T)\}\\ &\quad+\mathbf{P}\{(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\mu(t)|>\varepsilon)\cap(\tau=T)\}\\ &\leqslant\mathbf{P}\{\tau<T\}+\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau}|\mu(t)|>\varepsilon\}.\end{aligned}$$

顾及到

$$\mathbf{P}\{\tau<T\}\leqslant\mathbf{P}\{\langle\mu,\mu\rangle_T\geqslant N\},$$

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant \tau}|\mu(t)|>\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathbf{E}|\mu(\tau)|^2}{\varepsilon^2}\leqslant\frac{N}{\varepsilon^2},$$

可得不等式(54)。

推论 如果 $\mu_n(t)\in l\mathscr{M}_2$ 及 $\langle\mu,\mu\rangle_n$，$n=1,2,\cdots$ 的特征连续，那末由式

$$\langle\mu_{n+p}-\mu_n,\mu_{n+p}-\mu_n\rangle_t\xrightarrow{\mathbf{P}}0,\ \forall t>0,$$

得知存在过程 $\mu(t)\in l\mathscr{M}_2$，使

$$P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\mu(t)-\mu_n(t)|>\varepsilon\right\}\to 0,\ 当\ n\to\infty,\ \forall T>0\ 时.$$

证明引理 9 时利用到的论断可应用于离散时间鞅. 我们来指出在此情形需要确切地证明的部分. 设 $\{\mu_k,\mathfrak{F}_k,k=1,2,\cdots,n\}$ 是平方可积鞅，令

$$\Delta\mu_k=\mu_k-\mu_{k-1},\ \Delta\alpha_k=\mathbf{E}\{\Delta\mu_k^2|\mathfrak{F}_{k-1}\},\ \alpha_k=\sum_{j=1}^{k}\Delta\alpha_j,$$

且当有这样的 k 存在，使得

$$\alpha_1\leqslant N,\ \alpha_2\leqslant N,\cdots,\ \alpha_k\leqslant N,\ \alpha_{k+1}>N$$

时，令 $\tau=k$; 当这样的 k 不存在时令 $\tau=n$. 因为 α_{k+1} 是 $\mathfrak{F}_k$-可测随机变量，所以 τ 是随机时间. 令 $\tilde{\mu}_j=\mu_{j\wedge\tau}$, $j=1,\cdots,n$. 这时 $\mathbf{E}\tilde{\mu}_j^2\leqslant\mathbf{E}\alpha_{j\wedge\tau}\leqslant N$. 重复在证明引理 9 时所用的论证，我们得如下结果:

引理 10 如果 $\{\mu_k,\mathfrak{F}_k,k=1,\cdots,n\}$ 是平方可积鞅，那末对任意 $\varepsilon>0$, $N>0$, 有

$$\mathbf{P}\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\mu_k|>\varepsilon\}\leqslant\frac{N}{\varepsilon^2}+\mathbf{P}\{\alpha_n\geqslant N\}.$$

注. 如果 $\mu(t)=(\mu^1(t),\cdots,\mu^s(t))$ 是向量鞅，那末不等式(54)可用下不等式替换:

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\mu(t)|>\varepsilon\}$$
$$\leqslant\frac{N}{\varepsilon^2}+\mathbf{P}\left\{\sum_{j=1}^{s}\langle\mu^j,\mu^j\rangle_T\geqslant N\right\}.$$

不等式(55)可作类似的推广。证明与引理 9 的证明同样。

§2. 随机积分

分段为常数的函数的积分 随机积分

$$\int_a^b f(t)d\zeta(t) \tag{1}$$

的定义,其中 $\zeta(t)$ 是正交增量过程,而 $f(t)$ 是非随机函数,在第一卷(第四章 §4)已给出。不难发现,如果函数 $f(t)$ 是随机的,在那里所研究的积分的构造一般来说不适用。对非随机函数 $f(t)$ 来说,积分(1)是随机变量 $\zeta(t)-\zeta(a)$ 的值的线性闭包的元素,如果 $f(t)$ 是随机过程,那末一般来说不是这样。但是,在定义时保持小心和利用过程 $\zeta(t)$ 的补充假定,可以建立起应用方便和充分一般的按过程 $\zeta(t)$ 的随机函数积分理论,一般地说,这些随机函数的样本函数以概率 1 具有非有界变差。

下面的注解表明这时可能引起什么样的困难。

设 $f(t), t\in[0,1]$ 是随机函数,而 $f_n(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_n^k\chi_{(t_{k+1},t_k]}(t)$,
$n=1,2,\cdots$是收敛于 $f(t)$ 的简单函数序列($0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$)。这时积分和的序列

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_n^k[\zeta(t_k)-\zeta(t_{k-1})]$$

自然认为是函数 $f_n(t)$ 的积分(1)的值,但一般地说,它不趋向于那一个极限,即使在关于 $f_n(t)$ 对 $f(t)$ 的收敛性作了十分强的假设。我们用简单的例子来说明这点。

我们希望定义积分

$$\int_0^t w(t)dw(t),$$

其中 $w(t)$ 是 Wiener 过程。首先,如果令 $\beta_n^k=w(\theta_k)$,其中 $\theta_k\in(t_{k-1}, t_k]$,$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$,那末在所有通常应

用的拓扑下，$f_n(t)\to w(t)$.

这样此收敛性是以概率 1 按 t 一致的. 此外，$\mathbf{E}\sup_t|f_n(t)-w(t)|^2\to 0$ 并以概率 1

$$\int_0^t|f_n(t)-w(t)|^2dt\to 0.$$

另一方面,所考虑的积分不能定义为量

$$\int_0^1 f_n(t)\,dw=\sum_{k=1}^{n}w(\theta_k)[w(t_k)-w(t_{k-1})]$$

在均方意义下的极限,因为如果此极限存在,那末序列

$$\mathbf{E}\int_0^1 f_n(t)dw(t)=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}w(\theta_k)[w(t_k)-w(t_{k-1})]$$

$$=\Sigma(\theta_k-t_{k-1})$$

的极限存在. 可是这个和的极限点的集合与区间 [0,1] 相重合.

我们将随机积分的定义分为逐次增加其一般性的几个步骤.

首先我们研究当 $\zeta(t)$ 是平方可积鞅时积分的定义. 至于被积过程 $f(t)$ 的类，我们从分段常数和以概率 1 有界的函数开始，到有有限二阶矩的可积函数，然后到不必有任何阶有限矩的随机过程类、随机积分概念的进一步推广和求积分的随机过程类的开拓相联系. 代替平方可积鞅 $\zeta(t)$ 将考虑局部平方可积鞅. 最后,将研究按鞅测度的积分.

同时,不追求最大的一般性，在大多数情形中,只限于研究具有连续特征的鞅(局部鞅).

于是,设 $\{\mathfrak{F}_t,t\geqslant 0\}$ 是固定的 σ-代数流，$\mathfrak{F}_t=\mathfrak{F}_{t+}$，$\mathfrak{F}_0$ 包含所有 $\mathbf{P}$-零测集的子集(此假定在本节认为恒成立)，$\mu(t)$ 是平方可积 $\mathfrak{F}_t$-鞅,其样本函数以概率 1 属于 $\mathscr{D}$，且有特征 $\langle\mu,\mu\rangle_t$:

$$\sup_{0\leqslant t<\infty}\mathbf{E}|\mu(t)|^2<\infty,$$

$$\mathbf{E}\{(\mu(t)-\mu(s))^2|\mathfrak{F}_s\}=\mathbf{E}\{(\langle\mu,\mu\rangle_t-\langle\mu,\mu\rangle_s|\mathfrak{F}_s\},\quad s<t.$$

注意 $\mu(t)$ 是正交增量过程. 事实上,当 $t_1<t_2<t_3$ 时

$$\mathbf{E}\{(\mu(t_3)-\mu(t_2))(\mu(t_2)-\mu(t_1))|\mathfrak{F}_{t_2}\}$$
$$=(\mu(t_2)-\mu(t_1))\mathbf{E}\{\mu(t_3)-\mu(t_2)|\mathfrak{F}_{t_2}\}=0, \tag{2}$$

特别是，由此得

$$\mathbf{E}(\mu(t_3)-\mu(t_2))(\mu(t_2)-\mu(t_1))=0.$$

现在来描述被积函数类，首先约定仅考虑适应于 $\{\mathfrak{F}_t, t\geqslant 0\}$ 的过程。

以 $\mathfrak{L}_0=\mathfrak{L}_0\{\mathfrak{F}_t,t\geqslant 0\}$ 表示适应于 $\{\mathfrak{F}_t,t\geqslant 0\}$ 的过程类，且它们在有限个形如 $(s_{k-1},s_k]$ 的半开区间上取固定有界随机变量值 (mod **P**) 及在这些区间外等于 0。换而言之，$\eta(t)\in\mathfrak{L}_0$ 当且仅当

$$\eta(t)=\sum_{k=1}^{n}\eta_{k-1}\chi_{\Delta_k}(t),$$

其中 $\Delta_k=(s_{k-1},s_k]$，$0\leqslant s_0<s_1<\cdots<s_n$，$\chi_\Delta(t)$ 是集合 Δ 的示性函数，η_k 是以某个常数为界的 $\mathfrak{F}_{s_k}$ 可测随机变量($k=0,1,\cdots,n-1$)。注意函数 $\eta(t)$ 是左连续。

现对过程 $\eta(t)\in\mathfrak{L}_0$ 定义积分

$$I(\eta)=\int_0^\infty\eta(s)\mu(ds)=\int_0^\infty\eta d\mu.$$

这就是令

$$I(\eta)=\int_0^\infty\eta(s)\mu(ds)=\sum_{k=1}^{n}\eta_{k-1}[\mu(s_k)-\mu(s_{k-1})]. \tag{3}$$

尽管函数 $\eta(t)$ 表为半开区间的示性函数的线性组合不唯一，但不难验证值 $I(\eta)$ 被唯一地确定。显然算子 $I(\eta)$ 是线性的，

$$I(\gamma_1\eta^{(1)}+\gamma_2\eta^{(2)})=\gamma_1 I(\eta^{(1)})+\gamma_2 I(\eta^{(2)}), \tag{4}$$

其中 γ_i 是 $\mathfrak{F}_0$-可测有界随机变量，$\eta^{(i)}=\eta^{(i)}(t)\in\mathfrak{L}_0, i=1,2$。因为

$$\mathbf{E}\left\{\sum_{k=1}^{n}\eta_{k-1}[\mu(s_k)-\mu(s_{k-1})]|\mathfrak{F}_0\right\}$$
$$=\mathbf{E}\left\{\sum_{k=1}^{n}\eta_{k-1}\mathbf{E}\{\mu(s_k)-\mu(s_{k-1})|\mathfrak{F}_{s_{k-1}}\}|\mathfrak{F}_0\right\}=0,$$

所以

$$\mathbf{E}\{I(\eta)|\mathfrak{F}_0\} = 0. \tag{5}$$

设 $\eta_i(t)\in\mathfrak{L}_0$, $i=1,2$. 不失一般性,可认为

$$\eta_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \eta_{k-1}^{(i)}\chi_{\Delta_k}(t).$$

为简便起见,令 $\Delta\mu_k = \mu(s_k)-\mu(s_{k-1})$. 顾及(2),我们有

$$\mathbf{E}\{I(\eta_1)I(\eta_2)|\mathfrak{F}_0\} = \mathbf{E}\left\{\sum_{j,k=1}^{n} \eta_{k-1}^{(1)}\eta_{j-1}^{(2)}\Delta\mu_k\Delta\mu_j|\mathfrak{F}_0\right\}$$

$$= \mathbf{E}\left\{\sum_{k=1}^{n} \eta_{k-1}^{(1)}\eta_{k-1}^{(2)}\Delta\langle\mu,\mu\rangle_{s_k}|\mathfrak{F}_0\right\},$$

其中 $\Delta\langle\mu,\mu\rangle_{s_k} = \langle\mu,\mu\rangle_{s_k} - \langle\mu,\mu\rangle_{s_{k-1}}$. 因此

$$\mathbf{E}\left\{\int_0^\infty \eta_1 d\mu \int_0^\infty \eta_2 d\mu|\mathfrak{F}_0\right\} = \mathbf{E}\left\{\int_0^\infty \eta_1(s)\eta_2(s)d\langle\mu,\mu\rangle_s|\mathfrak{F}_0\right\}. \tag{6}$$

特别是,

$$\mathbf{E}\left|\int_0^\infty \eta_1 d\mu - \int_0^\infty \eta_2 d\mu\right|^2 = \mathbf{E}\int_0^\infty (\eta_1(s)-\eta_2(s))^2 d\langle\mu,\mu\rangle_s. \tag{7}$$

注意 $\langle\mu,\mu\rangle_t$ 是单调不减函数而在式(6)和(7)的右边出现的积分是以概率 1 存在的通常的 Lebesgue-Stieltjes 积分。

除定积分外,我们还考虑不定积分

$$I_t = I_t(\eta) \underset{\text{定义}}{=} \int_0^\infty \chi_{(0,t]}(s)\eta(s)\mu(ds) \underset{\text{定义}}{=} \int_0^t \eta(s)\mu(ds).$$

显然

$$I_t = \sum_{j=1}^{k} \eta_{j-1}\Delta\mu_j + \eta_k[\mu(t)-\mu(s_k)],\ t\in(s_k,s_{k+1}]. \tag{8}$$

我们来指出过程 I_t 的一系列性质.

1) 过程 I_t 适应于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t\geqslant 0\}$;它的样本函数右连续,对所有 $t\geqslant 0$ 有左极限 (mod$\mathbf{P}$),且

$$\delta I_t = \eta(t)\delta\mu(t),$$

其中 $\delta\mu(t)$ 是过程 $\mu(t)$ 在点 t 的跳跃，

$$\delta\mu(t)=\mu(t)-\mu(t-).$$

2）过程 I_t 是 $\mathfrak{F}_t$-鞅。

事实上，设 $0\leqslant t_1<t_2$。不失一般性可认为对某两个 k 及 l，$t_1=s_k$，$t_2=s_l$。

那末由于(2)

$$I_{t_2}-I_{t_1}=\sum_{j=k+1}^{l}\eta_{j-1}[\mu(s_j)-\mu(s_{j-1})]$$

和

$$\mathbf{E}\{I_{t_2}-I_{t_1}|\mathfrak{F}_{t_1}\}=0. \tag{9}$$

3）$I_t\in\mathscr{M}_2$，且

$$\mathbf{E}\{(I_{t_2}-I_{t_1})^2|\mathfrak{F}_{t_1}\}=\mathbf{E}\left\{\int_{t_1}^{t_2}\eta^2(s)d\langle\mu,\mu\rangle_s|\mathfrak{F}_{t_1}\right\}. \tag{10}$$

公式(10)容易由(6)得到。

不难验证，过程

$$\beta(t)=\int_0^t\eta^2(s)d\langle\mu,\mu\rangle_s$$

是自然的。事实上，如果过程 $\alpha(t)=\langle\mu,\mu\rangle_t$ 是自然的，那末(见§1)

$$\mathbf{E}\int_\Delta\xi(s-)d\alpha(s)=\mathbf{E}\int_\Delta\xi(s)d\alpha(s)$$

对任意半开区间 $\Delta=(a,b]$ 和任意有界(以概率 1)非负鞅 $\xi(t)$ 成立。令 $\Delta=\Delta_k=(s_{k-1},s_k]$，乘以 η_{k-1}^2 且按所有 $k=1,2,\cdots,n$ 求和，得

$$\mathbf{E}\int_0^\infty\xi(s-)\eta^2(s)d\alpha(s)=\mathbf{E}\int_0^\infty\xi(s)\eta^2(s)d\alpha(s),$$

由此得(见§1,(18))，

$$\mathbf{E}\int_0^\infty\xi(s-)d\beta=\mathbf{E}\xi(+\infty)\beta(+\infty),$$

这就证明了过程 $\beta(t)$ 的自然性。

因此等式(10)可更确切地叙述于下：

4）随机积分 I_t 的特征等于

$$\langle I, I\rangle_t = \int_0^t \eta^2(s) d\langle \mu, \mu\rangle_s.$$

由所得的公式容易得到如下关于随机积分 $I'_t = I_t(\eta')$ 及 $I''_t = I_t(\eta'')(\eta', \eta'' \in \mathfrak{L}_0)$ 的互特征的表达式：

$$\langle I', I''\rangle_t = \int_0^t \eta'(s)\eta''(s) d\langle \mu, \mu\rangle_s. \tag{11}$$

类似可得过程 $I_t(\eta)$ 和 $\nu(t)$ 的互特征的表达式，其中 $\nu(t)$ 是 $\mathscr{M}_2$ 类中的任意鞅。设 $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$。如以前一样，不失一般性将认为 $t_1 = s_k$，$t_2 = s_l$。这时

$$\mathbf{E}\{I_{t_2}\nu(t_2) - I_{t_1}\nu(t_1) | \mathfrak{F}_{t_1}\} = \mathbf{E}\left\{\sum_{j=k+1}^{l} \mathbf{E}\{\Delta I_{s_j}\Delta \nu_{s_j} | \mathfrak{F}_{s_{j-1}}\} | \mathfrak{F}_{t_1}\right\}$$

$$= \mathbf{E}\left\{\sum_{j=k+1}^{l} \eta_{j-1}\mathbf{E}\{\Delta \mu_{s_j}\Delta \nu_{s_j} | \mathfrak{F}_{s_{j-1}}\} | \mathfrak{F}_{t_1}\right\}$$

$$= \mathbf{E}\left\{\int_{t_1}^{t_2} \eta(s) d\langle \mu, \nu\rangle_s | \mathfrak{F}_{t_1}\right\}.$$

因此，

$$\mathbf{E}\{(I_{t_2} - I_{t_1})(\nu(t_2) - \nu(t_1)) | \mathfrak{F}_{t_1}\} = \mathbf{E}\left\{\int_{t_1}^{t_2} \eta(s) d\langle \mu, \nu\rangle_s | \mathfrak{F}_{t_1}\right\}. \tag{12}$$

由 3）得过程

$$\int_0^t \eta(s) d\langle \mu, \nu\rangle_s$$

是两个自然过程之差，且由于两个鞅的互特征的唯一性

$$\langle I, \nu\rangle_t = \int_0^t \eta(s) d\langle \mu, \nu\rangle_s.$$

还有下不等式

$$\mathbf{E}\int_0^\infty |\eta(s)| d\|\langle \mu, \nu\rangle\|_s \leqslant (\mathbf{E}\langle \nu, \nu\rangle_\infty)^{1/2}\left(\mathbf{E}\int_0^\infty \eta^2(s) d\langle \mu, \mu\rangle_s\right)^{1/2}. \tag{13}$$

此处 μ，$\nu \in \mathscr{M}_2$，$\eta \in \mathfrak{L}_0$ 和 $\|\langle \mu, \nu\rangle\|_t$ 表示函数 $\langle \mu, \nu\rangle_t$ 在区间

$[0,s]$ 上的全变差.

为了证明，我们利用 §1 的不等式(46)，由于这个不等式

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{|\eta_{k-1}|\Delta\langle\mu,\nu\rangle_{s_k}|\mathfrak{F}_{s_{k-1}}\} &\leqslant |\eta_{k-1}|(\mathbf{E}\{\Delta\langle\mu,\mu\rangle_{s_k}|\mathfrak{F}_{s_{k-1}}\})^{1/2} \\ &\quad\times(\mathbf{E}\{\Delta\langle\nu,\nu\rangle_{s_k}|\mathfrak{F}_{s_{k-1}}\})^{1/2} \\ &=(\mathbf{E}\{\eta_{k-1}^2\Delta\langle\mu,\mu\rangle_{s_k}|\mathfrak{F}_{s_{k-1}}\}^{1/2}(\mathbf{E}\{\Delta\langle\nu,\nu\rangle_{s_k}|\mathfrak{F}_{s_{k-1}}\})^{1/2}.\end{aligned}$$

考虑区间 $[s_{k-1},s_k]$ 的任意分割 $t_1,t_2,\cdots,t_n$. 将后一不等式应用于每个区间 $[t_{k-1},t_k]$，利用 Cauchy 不等式且取极限，得

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{|\eta_{k-1}|(\|\langle\mu,\nu\rangle\|_{s_k}-\|\langle\mu,\nu\rangle\|_{s_{k-1}})|\mathfrak{F}_{s_{k-1}}\} \\ \leqslant(\mathbf{E}\{\eta_{k-1}^2\Delta\langle\mu,\mu\rangle_{t_{k-1}}|\mathfrak{F}_{s_{k-1}}\})^{1/2} \\ \times(\mathbf{E}\{\Delta\langle\nu,\nu\rangle_{t_{k-1}}|\mathfrak{F}_{s_{k-1}}\})^{1/2}.\end{aligned}$$

将此不等式求和且再次利用 Cauchy 不等式，得出不等式(13).

在均方收敛意义下的随机积分 我们将随机积分的定义推广至更广泛的随机过程 $\eta(t)$ 类，且证明上述对函数 $\eta(t)\in\mathfrak{L}_0$ 所建立的随机积分的性质在推广的定义下仍保持.

在 $\mathfrak{L}_0$ 中引入由范数

$$\|\eta(\cdot)\|=\left(\mathbf{E}\int_0^\infty\eta^2(s)d\langle\mu,\mu\rangle_s\right)^{1/2} \tag{14}$$

所生成的 Hilbert 距离. 上述结果表明，对应 $\eta(\cdot)\to I(\eta)$ 是 $\mathfrak{L}_0$ 到 $\mathscr{M}_2$ 里的单值线性等距映象. 按引进的距离，考虑 $\mathfrak{L}_0$ 的完备化，所得的 Hilbert 空间记为 $\mathfrak{L}_2=\mathfrak{L}_2\{\mathfrak{F}_t,\mu\}$. 它能用如下方式描绘出. 在空间 $[0,\infty)\times\Omega$ 上考虑如下集合所成的类 $\mathscr{R}$: $[0]\times A_0$，其中$[0]$是点 0 的单点集，A_0 是任一 $\mathfrak{F}_0$-可测集，以及 $(a,b]\times A$，其中 A 是任一 $\mathfrak{F}_a$-可测集，$0\leqslant a<b$. 此集类是一半环. 在半环 $\mathscr{R}$ 上用如下方式定义测度 $\mathbf{P}'$: 令 $\alpha(t,\omega)=\langle\mu,\mu\rangle_t$. 对几乎所有 ω，我们能在半直线$[0,\infty)$的 Borel 子集上定义一测度 $\alpha(B,\omega)$ 令

$$\begin{aligned}\mathbf{P}'((a,b]\times A)&=\int_A\int_a^b\alpha(ds,\omega)\mathbf{P}(d\omega) \\ &=\mathbf{E}\chi_A[\langle\mu,\mu\rangle_b-\langle\mu,\mu\rangle_a].\end{aligned}$$

测度 $\mathbf{P}'$ 能扩张至包含$\mathscr{R}$的最小 σ-代数 $\tilde{\mathfrak{T}}$ 上，并以 $\hat{\mathfrak{T}}$ 表示 $\tilde{\mathfrak{T}}$ 关于 $\mathbf{P}'$ 的完备化 σ-代数. 其次，对任意非负 $\hat{\mathfrak{T}}$-可测函数 $\eta(t)=\eta(t,$

ω)，有

$$\int_0^\infty\int_\Omega \eta(t,\omega)\mathbf{P}'(dt,d\omega)=\mathbf{E}\int_0^\infty \eta(t)d\langle\mu,\mu\rangle_t.$$

空间 $\mathfrak{L}_2$ 是 $\tilde{\mathfrak{T}}$-可测函数 $g(t,\omega)$ 的等价类所成的空间：如果 $\tilde{\mathbf{P}}'\{(t,\omega):g(t,\omega)\neq g'(t,\omega)\}=0$，则 $g(t,\omega)$ 和 $g'(t,\omega)$ 是等价的．为简单起见，今后在所指出的意义下，等价的函数类与这个类的代表不加区别．其次，过程 $\eta(t)=g(t,\omega)$（更确地说是对应的等价类)属于 $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{F}_t,\mu)$ 当且仅当存在简单过程的序列 $\eta_n(t)\in\mathfrak{L}_0(\mathfrak{F}_t)$，使得

$$\mathbf{E}\int_0^\infty(\eta(t)-\eta_n(t))^2d\langle\mu,\mu\rangle_t\to 0$$

当 $n\to\infty$ 时

从 $\mathfrak{L}_2$-理论中的一般定理推得空间 $\mathfrak{L}_2\{\mathfrak{F}_t,\mu\}$ 是由满足

$$\int_0^\infty\int_\Omega \eta^2(t,\omega)\mathbf{P}'(dt,d\omega)=\mathbf{E}\int_0^\infty \eta^2(t)d\langle\mu,\mu\rangle_t<\infty$$

的全体 $\tilde{\mathfrak{T}}$-可测函数 $\eta(t)=\eta(t,\omega)$ 所组成．我们给出 $\tilde{\mathfrak{T}}$-可测过程类的例子．首先形为 $\xi(t)=\eta\chi_{(a,b]}(t)$ 其中 η 是一 $\mathfrak{F}_a$-可测随机变量及 $\chi_{(a,b]}$ 是半开区间 $(a,b]$ 的示性函数，就是 $\mathfrak{T}$-可测．因此，过程 $\xi(t)=\sum\eta_k\chi_{(s_k,s_{k+1}]}(t)$，其中 $s_1<s_2<\cdots$，及 η_k 是 $\mathfrak{F}_{s_k}$-可测随机变量，也是 $\mathfrak{T}$-可测的．

具有关于 t 左连续的（以概率 1）样本函数的任一过程 $\xi(t)$，$t\geq 0$，是 $\tilde{\mathfrak{T}}$-可测的．事实上，$\xi(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\xi_0\chi_{[0]}(t)+\sum\limits_{k=0}^\infty\xi\left(\frac{k}{n}\right)\right.$ $\left.\times\chi_{\left(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]}(t)\right)$ 以概率 1 对所有 t 成立．

若存在一 $\tilde{\mathfrak{T}}$-可测过程列 $\xi_n(t)$，使得

$$\mathbf{E}\int_0^\infty[\xi(t)-\xi_n(t)]^2a\langle\mu,\mu\rangle_t\to 0\quad 当\ n\to\infty\ 时,$$

则过程 $\xi(t)$ 也是 $\tilde{\mathfrak{T}}$-可测过程．

我们应用这附注于特征 $\langle\mu,\mu\rangle_t$ 是关于 t 绝对连续的情形，

即

$$\langle \mu, \mu \rangle_t = \int_0^t \varphi(s) ds,$$

其中 $\varphi(s)$ 是一非负可积函数．这时，适应于 $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$ 并满足条件

$$\mathbf{E} \int_0^\infty \xi^2(t) \varphi(t) dt < \infty$$

的任一过程 $\xi(t)$ 必属于 $\mathfrak{L}_2\{\mathfrak{F}_t, \mu\}$。为证明这一论断，只要考虑 $|\xi(t)| \leqslant c$ 及对于 $t \geqslant T$，$\xi(t) = 0$ 这种情形就够了．

此处过程

$$\zeta_h(t) = \xi(t) - \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \xi(s) ds, \quad h > 0,$$

是适应于 $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$ 并且以概率 1 有界及对所有 t 当 $h \downarrow 0$ 时趋于 0，因此对 $\mathbf{P}'$ 几乎所有 (t, ω)，当 $h \downarrow 0$ 时它也趋于 0．此处过程 $\frac{1}{h} \int_{t-h}^t \xi(s) ds$ 是连续的，从而属于 $\mathfrak{L}_2\{\mathfrak{F}_t, \mu\}$。因为

$$\mathbf{E} \int_0^\infty |\zeta_h(t)|^2 \varphi(t) dt \to 0, \text{ 当 } h \to 0 \text{ 时},$$

所以 $\xi(\cdot) \in \mathfrak{L}_2\{\mathfrak{F}_t, \mu\}$*.

因为映象 $I: \eta \to \{I_t(\eta)\}$ 是 $\mathfrak{L}_0$ 到 $\mathscr{M}_2$ 的线性等距映象，所以它可唯一地开拓为 $\mathfrak{L}_2\{\mathfrak{F}_t, \mu\}$ 到 $\mathscr{M}_2$ 的线性等距映象．开拓后的映象和以前一样视为随机积分，并用记号 $I = I(\eta)$ 表示，而过程 $I(\eta)$ 在时间 t 的值是

$$I_t(\eta) = \int_0^t \eta(s) \mu(ds) = \int_0^t \eta d\mu.$$

下面的定理列举了由上述定义几乎直接得出的随机积分的基本性质．

定理 1 $\mathfrak{L}_2\{\mathfrak{F}_t, \mu\}$ 中的每一过程 $\eta(t)$ 可对应于一过程 $\xi(t) \in \mathscr{M}_2$

$$\xi(t) = I_t(\eta) = \int_0^t \eta(s) \mu(ds),$$

---

* 此段关于被积函数类 $\mathfrak{L}_2\{\mathfrak{F}_t, \mu\}$ 的论述是英译本增加的．——译者注

此过程称为过程 $\eta(t)$ 按鞅 $\mu(t)$ ($\mu(t)\in\mathscr{M}_2$) 的随机积分，使得它有如下性质:

1) $I_\infty(\chi_{(0,a]})=\mu(a)-\mu(0)$;

2) $I_\infty(\chi_{(0,a]}\eta)=I_a(\eta)$;

3) $I_t(c_1\eta_1+c_2\eta_2)=c_1I_t(\eta_1)+c_2I_t(\eta_2)$;

4) $\mathbf{E}I_\infty(\eta_1)I_\infty(\eta_2)=\mathbf{E}\int_0^\infty\eta_1(s)\eta_2(s)d\langle\mu,\mu\rangle_s$;

5) 对任意鞅 $\nu(t)\in\mathscr{M}_2$

$$\mathbf{E}\{\nu(t)I_t(\eta)-\nu(s)I_s(\eta)|\mathfrak{F}_s\}$$
$$=\mathbf{E}\left\{\int_s^t\eta(\theta)d\langle\mu,\nu\rangle_\theta|\mathfrak{F}_s\right\};$$

特别是，

$$\mathbf{E}\{I_t^2-I_s^2|\mathfrak{F}_s\}=\mathbf{E}\left\{\int_s^t\eta^2(\theta)d\langle\mu,\mu\rangle_\theta|\mathfrak{F}_s\right\};$$

6) $\mathbf{E}\int_0^\infty|\eta(s)|d\|\langle\mu,\nu\rangle\|_s\leqslant(\mathbf{E}\langle\nu,\nu\rangle_\infty)^{1/2}\left(\mathbf{E}\int_0^\infty\eta^2(s)d\langle\mu,\mu\rangle_s\right)^{1/2}$;

7) 如果 $\mu_i\in\mathscr{M}_2, i=1,2$ 且 $\eta\in\mathfrak{L}_2\{\mathfrak{F}_t,\mu_1\}\cap\mathfrak{L}_2\{\mathfrak{F}_t,\mu_2\}$，那末

$$\int_0^t\eta d(\mu_1+\mu_2)=\int_0^t\eta d\mu_1+\int_0^t\eta d\mu_2;$$

8) 如果 $\mu(t)\in\mathscr{M}_2^c$，那末 $\xi(t)\in\mathscr{M}_2^c$.

证. 我们刚才已证明了具有性质 1)—4), 8) 的映象的存在. 此外,前面所进行的构造方式表明随机积分由性质 1)—4) 所唯一确定.

现来证明关系式 5)—7). 式(5)对 $\eta\in\mathfrak{L}_0$ 成立. 设 $\eta^{(n)}(\cdot)\in\mathfrak{L}_0$ 和 $\eta^n(\cdot)\xrightarrow{L_2}\eta(\cdot)$ 由不等式

$$\mathbf{E}|[\nu I(\eta^{(n)})-\nu I(\eta)|_s^t]|\leqslant\{\mathbf{E}(\nu|_s^t)^2\}^{1/2}\{\mathbf{E}([I\eta^{(n)}$$
$$-I(\eta)]_s^t)^2\}^{1/2}$$

得 $\nu I(\eta^{(n)})|_s^t$ 在 L_1 中收敛于 $\nu I(\eta)|_s^t$. 因此式

$$\int_{B_s} \nu I_s(\eta^{(n)})|_s^t d\mathbf{P} = \int_{B_s}\left(\int_s^t \eta^{(n)} d\langle\mu,\nu\rangle\right)d\mathbf{P},\quad B_s\in\mathfrak{F}_s$$

成立．当 $n\to\infty$ 时可趋向极限．这时得到等价于5)的等式．前面已对函数 $\eta\in\mathfrak{L}_0$ 建立了不等式 6)，对这些函数来说式 7)也显然成立．在一般情形可利用取极限的方法来证明 6)和 7)．

由已证明的定理得知鞅 $I_t = I_t(\eta)$ 的特征是

$$\langle I, I\rangle_t = \int_0^t \eta^2 d\langle\mu,\ \mu\rangle. \tag{15}$$

随机变量族 I_t^2 是一致可积．事实上，

$$I_t^2 \leqslant \sup_t I_t^2,\quad \mathbf{E}(\sup_t I_t^2)\leqslant 4\mathbf{E}I_\infty^2 < \infty.$$

而且，集合 $\{I_\tau^2, \tau\in\mathscr{T}\}$ 也一致可积，其中 $\mathscr{T}$ 是在 $\{\mathfrak{F}_t, t\in[0,\infty]\}$ 上的全体随机时间的集合族．

设 $\sigma,\tau\in\mathscr{T}$ 和 $\sigma\leqslant\tau(\mathrm{mod}\mathbf{P})$．令

$$\int_\sigma^\tau \eta d\mu \underset{\text{定义}}{=} I_\tau - I_\sigma.$$

由鞅的一般理论(§1，定理 6，推论 1 和 §1 式(44))得

$$\mathbf{E}\left\{\int_\sigma^\tau \eta d\mu \,\middle|\, \mathfrak{F}_\sigma\right\} = 0,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left\{\left(\int_\sigma^\tau \eta d\mu\right)^2 \middle|\, \mathfrak{F}_\sigma\right\} &= \mathbf{E}\{I_\tau^2 - I_\sigma^2 | \mathfrak{F}_\sigma\}\\ &= \mathbf{E}\{\langle I, I\rangle_\tau - \langle I, I\rangle_\sigma | \mathfrak{F}_\sigma\}.\end{aligned}$$

后一等式可有如下形式：

$$\mathbf{E}\left\{\left(\int_\sigma^\tau \eta d\mu\right)^2 \middle|\, \mathfrak{F}_\sigma\right\} = \mathbf{E}\left\{\int_\sigma^\tau \eta^2 d\langle\mu,\ \mu\rangle \,\middle|\, \mathfrak{F}_\sigma\right\}. \tag{16}$$

设 $\mu_\tau(t)$ 是 $\mu(t)$ 的 τ-停止鞅：$\mu_\tau(t) = \mu(t\wedge\tau)$．如果 $\eta(\cdot)\in\mathfrak{L}_2\{\mathfrak{F}_t,\mu\}$，那末 $\eta(t\wedge\tau)\in\mathfrak{L}_2\{\mathfrak{F}_{t\wedge\tau},\mu_\tau\}$ (§1 定理 6，推论 3) 和根据上述定义，积分 $\int_0^t \eta(s\wedge\tau)\mu_\tau(ds)$ 被定义．

引理 1

$$\int_0^t \eta(s\wedge\tau)\mu_\tau(ds) = \int_0^{t\wedge\tau} \eta(s)\mu(ds)$$

$$= \int_0^t \eta_\tau(s)\mu(ds), \tag{17}$$

其中 $\eta_\tau(t) = \eta(t)$ 当 $t < \tau$，和 $\eta_\tau(t) = 0$ 当 $t \geqslant \tau$.

证. 对函数 $\eta \in \mathfrak{L}_0$ 来说，这等式由随机积分的定义可得. 对 $\mathfrak{L}_2\{\mathfrak{F}_t, \mu\}$ 中的任意过程 $\eta(\cdot)$ 来说，等式(17)可以由使该式成立的函数类 $\eta(\cdot)$ 在 $\mathfrak{L}_2\{\mathfrak{F}_t, \mu\}$ 的封闭性得到.

引理 2 如果特征 $\langle\mu, \mu\rangle_t$ 是连续的，$\eta \in \mathfrak{L}_2$，那末对任意 $\varepsilon > 0$, $N > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leqslant t < \infty}\left|\int_0^t \eta(s)\mu(ds)\right| \geqslant \varepsilon\right\}$$
$$\leqslant \frac{N}{\varepsilon^2} + \mathbf{P}\left\{\int_0^\infty \eta^2(s)d\langle\mu, \mu\rangle_s > N\right\}. \tag{18}$$

证. 等式(18)由 §1 引理 9 直接得出.

关于鞅的随机积分的一般定义 推广随机积分至更一般的函数类 $\eta(t)$.

我们称函数序列 $\eta_n(t) \in \mathfrak{L}_0, n = 1, 2, \cdots$ 为 H_2-基本列，如果

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{n\to\infty, m>0} \int_0^\infty (\eta_n(t) - \eta_{n+m}(t))^2 d\langle\mu, \mu\rangle_t = 0. \tag{19}$$

如果序列 $\eta_n(t)$ 是 H_2-基本列，那末存在定义在 $[0, \infty) \times \Omega$ 上的 $\mathfrak{T} \times \mathfrak{S}$-可测函数 $g(t)$，使

$$\int_0^\infty g^2(t)d\langle\mu, \mu\rangle_t < \infty(\mathrm{mod}\mathbf{P}),$$

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty (g(t) - \eta_n(t))^2 d\langle\mu, \mu\rangle_t = 0. \tag{20}$$

用此方式得到的全体函数 $g(t)$ 的类记为 H_2 或 $H_2\{\mathfrak{F}_t, \mu\}$. 在 H_2 中引入拓扑：如果式(20)成立，就称 H_2 中的函数列 $\eta_n(t)$ 收敛于极限 $g(t, \omega)$. 显然 H_2 是线性完备空间，即任意 H_2-基本列在 H_2 中收敛于某一极限. 此外，$H_2 \supset \mathfrak{L}_2$ 且 $\mathfrak{L}_2$ 从而 $\mathfrak{L}_0$ 也在 H_2 中稠. 容易验证，H_2 是由满足(20) 中的第一式的全体 $\tilde{\mathfrak{T}}$-可测函数 $g(t) = g(t, \omega)$ 所组成的. 例如，任意左连续适应于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$ 且满足(20)中第一式的过程是属于 H_2 的. 如

在空间 $\mathfrak{L}_2\{\mathfrak{F}_t, \mu\}$ 时的论证一样，可以证明如果 $\langle\mu, \mu\rangle_t = \int_0^t \varphi(s)ds$，那末任意适应于流 $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ 且满足(20)中第一式的过程 $g(t)$ 必属于 H_2.

今后我们限于讨论特征是连续的过程的积分.

空间 $\mathscr{M}_2$ 中有连续特征的鞅所组成的子空间表示为$\mathscr{M}_2^c$(如果 $\mu(\cdot)\in\mathscr{M}_2^c$，那末 $\mu^2(t)$ 是正则下鞅).

设 $\mu(\cdot)\in\mathscr{M}_2^c$, $\eta(\cdot)\in H_2\{\mathfrak{F}_t, \mu\}$, $\eta_n(\cdot)\in\mathfrak{L}_2$, $n=1, 2,\cdots$和 $\eta_n(\cdot)$ 在 H_2 中收敛于 $\eta(\cdot)$. 令

$$I_t(\eta) \underset{\text{定义}}{=} \int_0^t \eta(s)\mu(ds) \underset{\text{定义}}{=} \mathbf{P}\text{-}\lim \int_0^t \eta_n(s)\mu(ds). \qquad (21)$$

由不等式(18)得知对在 H_2 中收敛于 $\eta(\cdot)$ 的序列 $\eta_n\in\mathfrak{L}_2$，式(21)的右边的极限存在，于是此极限仅依赖于 $\eta(\cdot)$.

等式(21)对每个 t 仅以概率为 1 确定值 $I_t(\eta)$. 可以利用这个事实来规定过程 $I_t(\eta)$ 使得它的现实以概率 1 属于 $\mathscr{D}$.

事实上，设 $\eta_n(t)\in\mathfrak{L}_2$ 和过程 $\eta_n(t)$ 在 H_2 中收敛于 $\eta(t)$. 由等式(18)得知存在整数序列 n_k，使得如果

$$A_k = \left\{\sup_t \left|\int_0^t \eta_{n_k} d\mu - \int_0^t \eta_{n_{k+1}} d\mu\right| > \frac{1}{2^k}\right\},$$

那末 $\mathbf{P}(A_k) < 2^{-k}$. 但这时事件 $\mathbf{E} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ 有概率 $\mathbf{P}(E)$

$$= \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{n}^{\infty}\mathbf{P}(A_k) = 0.$$

如果 $\omega \notin E$，那末对某个 ν，$\omega \notin \bigcup_{k=\nu}^{\infty} A_k$，于是 $\sup_t \left|\int_0^t \eta_{n_k} d\mu - \int_0^t \eta_{n_{k+1}} d\mu\right| < \frac{1}{2^k}$，$\forall k \geq \nu$. 因此，级数 $\int_0^t \eta_{n_0} d\mu + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^t \eta_{n_{k+1}} d\mu - \int_0^t \eta_{n_k} d\mu\right)$ 以概率 1 按 $t(t\geq 0)$ 一致收敛且它的和以概率 1 右连续并有左极限，这因为随机积分 $I_t(\eta_{n_k})$ 有这个性质. 当

鞅 $\mu(\cdot)$ 连续，由于同样的见解，所考虑的级数之和对所有 $t \geqslant 0$ 连续. 于是对任意过程 $\eta(\cdot) \in H_2\{\mathfrak{F}_t, \mu\}$ 可定义过程 $I_t(\eta)$, $t \geqslant 0$, 使得它的现实以概率 1 属于 $\mathscr{D}$，而当鞅 $\mu(\cdot)$ 连续时，它的现实是以概率 1 连续，此外对在拓扑 H_2 收敛于 $\eta(\cdot)$ 的任意序列 $\eta_n(\cdot) \in \mathfrak{L}_2\{\mathfrak{F}_t, \mu\}$ 和任意固定的 $t > 0$，式(21)成立.

定义 对每个 $t > 0$ 我们将满足式 (21) 且其样本函数属于 $\mathscr{D}$ 的随机过程

$$I_t(\eta) = \int_0^t \eta(s)\mu(ds)$$

称为随机积分，其中 $\mu(\cdot) \in \mathscr{M}_2'$ 和 $\eta(\cdot) \in H_2\{\mathfrak{F}_t, \mu\}$.

当 μ 是连续鞅时，可以假定过程 $I_t(\eta)$ 的现实以概率 1 对所有 $t \geqslant 0$ 是连续的.

定理 2 如果 $\eta(\cdot) \in H_2$ 及 $\mu(\cdot) \in \mathscr{M}_2'$，那末随机积分 $I_t(\eta)$ 在存并且具有如下性质:

1) 过程 $I_t(\eta)$ 适应于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$，且若 $\eta \in \mathfrak{L}_2$ 那末新的积分定义和前面给出的定义相一致.

2) $I_t(\eta)$ 是关于 η 的线性泛函.

3) 对任意函数 $\eta(\cdot) \in H_2$ 不等式(18)成立.

4) 在半开区间$[0, \infty)$上过程 $I_t(\eta)$ 的样本函数以概率 1 有界.

5) 如果 τ 是 $\mathfrak{F}_t$-随机时间且当 $t < \tau$ 时 $\eta_1 = \eta_2$，那末对所有 $t \leqslant \tau$ 以概率 1 有 $I_t(\eta_1) = I_t(\eta_2)$.

6) 过程 $I_t(\eta)$ 是有连续特征

$$\langle I(\eta), I(\eta)\rangle_t = \int_0^t \eta^2(s) d\langle \mu, \mu\rangle_s$$

的关于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$ 的局部平方可积鞅.

7) 如果 $\eta \in H_2\{\mu_1, \mathfrak{F}_t\} \cap H_2\{\mu_2, \mathfrak{F}_t\}$, $\mu_i \in \mathscr{M}_2'(\mathfrak{F}_t)$, $i = 1, 2$，那末

$$\int_0^t \eta d(\mu_1 + \mu_2) = \int_0^t \eta d\mu_1 + \int_0^t \eta d\mu_2.$$

8) 如果 τ 是 $\mathfrak{F}_t$-随机时间，$\mu_\tau(t) = \mu(t \wedge \tau)$，那末

$$\int_0^t \eta(s\wedge\tau)\mu_\tau(ds)=\int_0^{t\wedge\tau}\eta(s)\mu(ds),$$

其中 $\eta_\tau(t)=\eta(t)$ 当 $t<\tau$，$\eta_\tau(t)=0$ 当 $t\geqslant\tau$。

证．结论 1) 由关系式(21)直接得出．2) 是显然的，3) 容易由引理 2 得到，而 8) 可由引理 1 利用取极限的方法得到．

因为

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\geqslant 0}|I_t(\eta)|>c\right\}\leqslant\frac{N}{c_2}+\mathbf{P}\left\{\int_0^\infty \eta^2 d\langle\mu,\mu\rangle>N\right\},$$

所以，$\mathbf{P}\{\sup\limits_{t\geqslant 0}|I_t(\eta)|=\infty\}=0$。于是 4) 得证．

我们来证明5)。先设 $\eta_i(\cdot)\in\mathfrak{L}_2$，则有

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}|I_{t\wedge\tau}(\eta_1)-I_{t\wedge\tau}(\eta_2)|^2\\&\quad=\mathbf{E}\int_0^{t\wedge\tau}[\eta_1(s)-\eta_2(s)]^2 d\langle\mu,\mu\rangle_s=0,\end{aligned}$$

即是以概率 1 对每个 t 有 $I_{t\wedge\tau}(\eta_1)-I_{t\wedge\tau}(\eta_2)=0$。但由过程 $I_t(\eta)$ 的样本函数的右连续性得知此等式以概率 1 对所有 $t\geqslant 0$ 成立．现在考虑一般情形．

设 $\tau_N=\inf\left\{t:\min\limits_{i=1,2}\int_0^t \eta_i^2 d\langle\mu,\mu\rangle\geqslant N\right\}$，如果在大括弧中的集合不空；$\tau_N=\infty$，在相反情形．又当 $t<\tau$ 时 $\eta_i^N(t)=\eta_i(t)$ 且当 $t\geqslant\tau$ 时 $\eta_i^N(t)=0$。这时 $\eta_i^N(\cdot)\in\mathfrak{L}_2$ 且当 $N\to\infty$ 时以概率 1 有 $\tau_N\to\infty$。此外，以概率 1

$$\int_0^\infty(\eta_i-\eta_i^N)^2 d\langle\mu,\mu\rangle=\int_{\tau_N}^\infty \eta_i^2 d\langle\mu,\mu\rangle\to 0.$$

因此由不等式(18)得，当 $N\to\infty$ 时依概率 $\sup[I_t(\eta_i)-I_t(\eta_i^N)]\to 0$．如上面所指出的，对所有 $t\leqslant\tau$，$I_t(\eta_1^N)=I_t(\eta_2^N)(\mathrm{mod}\,\mathbf{P})$．当 $N\to\infty$ 时令此等式趋于极限，就得所需的证明．

余下要证明结论 6)．设

$$\tau_N=\inf\left\{t:\int_0^t \eta^2 d\langle\mu,\mu\rangle>N\right\},$$

而 $\eta^N(t)$ 如上述所定义．这时 $\eta^N(t)\in\mathfrak{L}_2$。由 5)得知当 $t\leqslant\tau$ 时 $I_t(\eta)=I_t(\eta^N)$，而由

$$\mathbf{E}|I_{t\vee\tau_N}(\eta^N)-I_{\tau_N}(\eta^*)|^2$$
$$=\mathbf{E}\int_{\tau_N}^{t\vee\tau_N}(\eta^N)^2 d\langle\mu,\mu\rangle=0$$
得知当 $t>\tau_N$ 时 $I_t(\eta^N)=I_{\tau_N}(\eta^N)$. 因此,对所有 $t>0$
$$I_{t\wedge\tau_N}(\eta)=I_t(\eta^N). \tag{22}$$

另一方面,由于 $\int_0^\infty \eta^2 d\langle\mu,\mu\rangle$的有限性(modP), $I_t(\eta^N)\in\mathscr{M}_2$ 且当 $N\to\infty$ 时 $\tau_N\to\infty$. 这证明了 $I_t(\eta)$ 是局部平方可积鞅及所给出的序列 τ_N 导出 $I_t(\eta)$.

此外,
$$\langle I(\eta),I(\eta)\rangle_{t\wedge\tau_N}=\langle I(\eta^N),I(\eta^N)\rangle_t$$
$$=\int_0^{t\wedge\tau_N}\eta^2 d\langle\mu,\mu\rangle.$$

推论 1 如果 $\eta_n\in H_2$ 和
$$\mathbf{P}\text{-}\lim\int_0^\infty(\eta-\eta_n)^2 d\langle\mu,\mu\rangle=0,$$
那末当 $n\to\infty$ 时
$$\mathbf{P}\left\{\sup_t\left|\int_0^t\eta d\mu-\int_0^t\eta_n d\mu\right|>\varepsilon\right\}\to 0. \tag{23}$$

推论 2 如果 $\eta_j(\cdot)\in H_2$, $i=1,2$, 那末过程 $I_t(\eta_i)$ 的互特征
$$\langle I(\eta_1),I(\eta_2)\rangle_t=\int_0^t\eta_1(s)\eta_2(s)d\langle\mu,\mu\rangle_s.$$

推论 3 设 $\mu_i\in\mathscr{M}_2^c(i=1,2)$, $\eta_i\in H_2\{\mathfrak{F}_t,\mu_1\}\cap H_2\{\mathfrak{F}_t,\mu_2\}$ 及 $I_t^{\mu_i}(\eta)=\int_0^t\eta d\mu_i$. 则
$$\langle I^{\mu_1}(\eta_1),\ I^{\mu_2}(\eta_2)\rangle_t=\int_0^t\eta_1(s)\eta_2(s)d\langle\mu_1,\mu_2\rangle_s. \tag{24}$$

关于局部平方可积鞅的积分 再进一步扩充随机积分的概念. 就是假设 μ 是有连续特征的局部平方可积鞅. 此过程类以 $l\mathscr{M}_2^c$ 或 $l\mathscr{M}_2^c\{\mathfrak{F}_t,t\geqslant 0\}$ 记之.联系于过程 $\mu\in l\mathscr{M}_2^c$,更确切地说,联系于它的特征的空间 $H_2\{\mathfrak{F}_t,\mu\}$ 的定义将不需要任何改变. 设 τ_n 是完全导出 μ 的某个随机时间序列,及 $\mu_n(t)=\eta(t\wedge\tau_n)$.

如上所知(§1，定理 19)，$\langle \eta_n, \mu_n\rangle_t = \langle \mu, \mu\rangle_{t\wedge\tau_n}$. 设

$$I_n(t) = \int_0^t \eta(s\wedge\tau_n)\mu_n(ds).$$

由定理 2 之 5)得知，当 $n' > n$ 时

$$I_{n'}(t) - I_n(t) = \int_{t\wedge\tau_n}^{t\wedge\tau_{n'}} \eta(s)\mu(ds) = 0, \quad 当\ t < \tau_n.$$

因此，从某个 $n = n_0 = n_0(\omega)$ 开始，$I_n(t)$ 以概率 1 相等。令

$$I(t) = \int_0^t \eta(s)\mu(ds) \underset{定义}{=} \lim \int_0^t \eta(s\wedge\tau_n)\mu_n(ds). \tag{25}$$

不难相信，$I(t)$ 不依赖于序列 τ_n 的选取.

定义 极限(25)称为随机积分(按局部平方可积鞅 μ).

引理 3 按过程 $\mu(\cdot)\in l\mathscr{M}_2'$ 的随机积分具有在定理 2 中建立的全部性质.

证. 事实上，性质 1)，2)，3)，5)，7) 和 8) 对 $I_n(t)$ 成立，而对每个 ω，$I(t)$ 与 $I_n(t)$ 从某个 $n = n(\omega)$ 开始相等. 因此 $I(t)$ 也有这些性质.

容易得到不等式(18)，如果将该式应用于鞅 $\mu_n(t) = \mu(t\wedge\tau_n)$ 的积分，然后令 $n\to\infty$ 取极限. 为证明 $I(t)$ 是局部平方可积鞅，引进随机时间

$$\sigma_n = \inf\left\{t: \int_0^t \eta^2 d\langle \mu, \mu\rangle \geqslant n\right\},$$

设 τ_n 是 μ 的完全导出随机时间序列. 令 $\tau_n' = \sigma_n\wedge\tau_n$. 由定理 2 得 $I(t\wedge\tau_n')$ 是平方可积鞅，且显然以概率 1 有 $\tau_n'\to\infty$.

定理 3 设 $\mu(\quad)\in l\mathscr{M}_2'$，$\eta(\quad)\in H_2(\mathfrak{F}_t, \mu)$，

$$\lambda(t) = \int_0^t \eta(s)\mu(ds).$$

这时，$\lambda(\cdot)\in l\mathscr{M}_2'$ 且若 $\xi(\cdot)\in H_2(\mathfrak{F}_t, \lambda)$，则

$$\int_0^t \zeta(s)\,\lambda(ds) = \int_0^t \eta(s)\zeta(s)\,\mu(ds). \tag{26}$$

证. 在 $\zeta(\cdot)$ 是分段常数的函数时，式(26)的验证是不足道的. 如果 $\zeta(\cdot)$ 是 $H_2(\mathfrak{F}_t, \lambda)$ 中的任意过程，$\zeta_n(\cdot)\in\mathfrak{L}_0$，且

$$\mathbf{P}\text{-}\lim \int_0^\infty (\zeta - \zeta_n)^2 d\langle \lambda, \lambda \rangle = 0,$$

那末

$$\int_0^t \zeta d\mathbf{P} = \mathbf{P}\text{-}\lim \int_0^t \zeta_n d\lambda = \mathbf{P}\text{-}\lim \int_0^t \eta(s)\zeta_n(s)\mu(ds).$$

另一方面

$$\int_0^\infty (\eta(s)\zeta_n(s) - \eta(s)\zeta(s))^2 d\langle \mu, \mu \rangle_s$$

$$= \int_0^\infty (\zeta_n(s) - \zeta(s))^2 \eta^2(s) d\langle \mu, \mu \rangle_s$$

$$= \int_0^\infty (\zeta_n(s) - \zeta(s))^2 d\langle \lambda, \lambda \rangle_s \to 0$$

依概率收敛. 于是

$$\mathbf{P}\text{-}\lim \int_0^t \eta(s)\zeta_n(s)\ \mu(ds) = \int_0^t \eta(s)\zeta(s)\ \mu(ds).$$

因此证明了等式(26)对每个 t 以概率 1 成立. 由等式两边的过程的右连续性得知对所有 t 它以概率 1 成立.

向量随机积分 我们研究向量过程 $\mu(t) = (\mu^1(t), \mu^2(t), \cdots, \mu^m(t))$, 其中各分量 $\mu^k(t) \in \mathscr{M}_2$ $(l\mathscr{M}_2, \cdots)$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$. 我们约定记为 $\mu(t) \in \mathscr{M}_2(l\mathscr{M}_2, \cdots)$, 且称 $\mu(t)$ 为向量平方可积(局部平方可积)鞅.

设 $\eta(t)$ 是纯量过程和 $\eta(\cdot) \in \sum_{k=1}^m H_2(\mathfrak{F}_t, \mu_k)$. 应当将积分

$$I_t = \int_0^t \eta(s)\mu(ds)$$

理解为有分量 $\int_0^t \eta(t)\mu^k(dt)$ 的向量过程.

引进以 $\langle \mu^k, \mu^j \rangle$ 为元素的矩阵 $\langle \mu, \mu \rangle_t$, 并称它为向量过程 $\mu(t)$ 的特征矩阵.矩阵 $\Delta\langle \mu, \mu \rangle_t = \langle \mu, \mu \rangle_{t+\Delta t} - \langle \mu, \mu \rangle_t$ 是非负定的.

事实上,对任意数 $z_1, \cdots, z_m$

$$\sum_{k,j=1}^{m} z_k z_j \Delta\langle\mu^k, \mu^j\rangle_t = \Delta\left\langle\sum_{k=1}^{m} z_k\mu^k, \sum_{k=1}^{m} z_k\mu^k\right\rangle_t \geqslant 0.$$

特征分量连续的过程类$\mu(t)\in\mathscr{M}_2(l\mathscr{M}_2)$记为 $\mathscr{M}_2'(l\mathscr{M}_2')$. 因为由两个局部鞅的特征的连续性得到它的互特征的连续性（§1 定理 20 的推论），所以如果 $\mu(t)\in l\mathscr{M}_2'$, 则函数 $\langle\mu^k,\mu^j\rangle_t$ 以概率 1 连续.

我们指出，具有独立增量的向量平方可积鞅的特征矩阵形为

$$\langle\mu,\mu\rangle_t = \mathbf{E}\mu(t)\mu^*(t),$$

且是非随机函数. 特别，m-维 Wiener 过程是有独立增量且其样本函数以概率 1 连续，而且分量是独立的向量平方可积鞅. 它的特征矩阵 $\langle w,w\rangle_t = \mathbf{I}t$, 其中 $\mathbf{I}$ 是单位矩阵.

按鞅测度的随机积分 上段所考虑的随机积分是按实变数 t 进行. 今后需要在多维空间按随机测度积分. 这时应当将定义积分时起不同作用的时间和空间两变元区分开. 除此之外，下面所进行的构造和前面类似.

设 $\{\mathfrak{F}_t, t\geqslant 0\}$ 是基本概率空间 $\{\Omega,\mathfrak{S},P\}$ 中固定的 σ-代数流，$\{U,\mathfrak{U}\}$ 是某个可测空间，$\mathfrak{U}_0$ 是生成 σ 代数 $\mathfrak{U}(\mathfrak{U}=\sigma\{\mathfrak{U}_0\})$ 的半环.

定义 具有如下性质的随机函数 $\mu(t,A)$, $t\in[0,\infty)$, $A\in\mathfrak{U}_0$, 称为鞅测度:

1）当固定 $A\in\mathfrak{U}_0$ 时，$\mu(t,A)$ 是样本函数属于 $\mathscr{D}$ 的平方可积 $\mathfrak{F}_t$-鞅，而当固定 t 时，$\mu(t,\cdot)$ 是 $\mathfrak{U}_0$ 上的可加函数:

$$\mu(t,A\cup B) = \mu(t,A)+\mu(t,B), (A\cap B=\varnothing, A,B\in\mathfrak{U}_0);$$

2）如果 $A\cap B=\varnothing$, 那末乘积 $\mu(t,A)\mu(t,B)$ 是鞅，即

$$\mathbf{E}\{\mu(\Delta t,A)\mu(\Delta t,B)|\mathfrak{F}_t\} = 0,$$

其中 $\mu(\Delta t,C) = \mu(t+\Delta t,C) - \mu(t,C)$.

以 $\pi(t,A)$ 表示鞅 $\mu(t,A)$ 的特征，由 2)得知当 $A\cap B=\varnothing$ 时，鞅 $\mu(t,A\cup B) = \mu(t,A)+\mu(t,B)$ 的特征等于 $\pi(t,A)+\pi(t,B)$. 因此，如果 $A\cap B=\varnothing$, 则 $\pi(t,A\cup B) = \pi(t,A)+$

$\pi(t,B)$，即对每个 t，$\pi(t,A)$ 是 $\mathfrak{U}_0$ 上的可加函数。还假定下条件成立：

3) 鞅 $\mu(t,A)$ 的特征 $\pi(t,A)$ 可以这样定义：对每个 t 它以概率 1 是 $\mathfrak{U}$ 上的测度，而当固定 $A\in\mathfrak{U}_0$ 时，是变量 t 的单调不减连续函数。

由 2)得，对 $\mathfrak{U}_0$ 中任意的 A 和 B，鞅 $\mu(t,A)$ 和 $\mu(t,B)$ 的互特征等于 $\pi(t,A\cap B)$。

$$\mathbf{E}\{\mu(\Delta t,A)\mu(\Delta t,B)|\mathfrak{F}_t\}=\mathbf{E}\{\pi(\Delta t,A\cap B)|\mathfrak{F}_t\}.$$

定义 随机函数 $\mu(t,A)$ 称为**局部鞅测度**，如果存在 $\mathscr{F}_t$ 随机时间的单调不减序列 τ_n，使得 $\lim\tau_n=\infty$ 且 $\mu(t\wedge\tau_n,A)$，$n=1,2,\cdots$，是鞅测度(对于流 $\{\mathfrak{F}_t\wedge\tau_n,t\geqslant 0\}$)。

如同 §1 定理 19 一样，不难验证，局部鞅测度有唯一的特征 $\pi(t,A)$，且此特征以概率 1 是变量 t 的单调不减连续函数，和当固定 t 时是 $\mathfrak{U}$ 上的测度。

以 $\mathfrak{L}_0\{\mathfrak{T}_0\times\mathfrak{U}_0\}$ 表示在形如 $\Delta\times A$，$(\Delta=(a,b]，A\in\mathfrak{U}_0)$ 的集合的半环上以概率 1 有界并适应于流 $\{\mathfrak{F}_t,t\geqslant 0\}$ 的所有简单函数类。因此，$\varphi\in\mathfrak{L}_0\{\mathfrak{T}_0\times\mathfrak{U}_0\}$，当且仅当

$$\varphi(t,u)=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\chi_{\Delta_k\times A_k}(t,u),$$

其中 $\Delta_k=(t_{k-1},t_k],0\leqslant t_1<\cdots<t_n,A_k\in\mathfrak{U}_0$ 且 γ_k 是以概率 1 有界的 $\mathfrak{F}_{t_{k-1}}$ 可测随机变量，$|\gamma_k|\leqslant C$，$k=1,\cdots,n(\mathrm{mod}\,\mathbf{P})$，$C$ 是非随机常数。

设

$$I(\varphi)=\int_0^\infty\int_U\varphi(s,u)\mu(ds,du)\underset{\text{定义}}{=}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\mu(\Delta_k,A_k),$$

$$I_t(\varphi)=\int_0^t\int_U\varphi(s,u)\mu(ds,du)\underset{\text{定义}}{=}\int_0^\infty\int_U\chi_{(0,t]}(s)\varphi(s,u)\mu(ds,du),t>0,$$

其中 $\chi_{(0,t]}(s)$ 是半开区间 $(0, t]$ 的示性函数，我们称 $I(\varphi)$ 和 $I_t(\varphi)$ 为**按鞅(局部鞅)测度的随机积分**.

现给出所引进的积分的一系列性质. 设 μ 是鞅测度，φ, φ_1 和 $\varphi_2 \in \mathfrak{L}_0\{\mathfrak{T}_0 \times \mathfrak{U}_0\}$.

1) 如果 γ_i 是 $\mathfrak{F}_0$ 可测且以概率 1 有界的随机变量 $(i = 1, 2)$，那末

$$I(\gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2) = \gamma_1 I(\varphi_1) + \gamma_2 I(\varphi_2),$$

2) $\mathbf{E}\{I(\varphi) | \mathfrak{F}_0\} = 0$,

$$\mathbf{E}\{I(\varphi_1)I(\varphi_2) | \mathfrak{F}_0\} = \mathbf{E}\left\{\int_0^\infty \int_U \varphi_1(s, u)\varphi_2(s, u)\pi(ds, du) | \mathfrak{F}_0\right\}.$$

特别是，

$$\mathbf{E}\{[I(\varphi_1) - I(\varphi_2)]^2 | \mathfrak{F}_0\}$$
$$= \mathbf{E}\left\{\int_0^\infty \int_U [\varphi_1(s, u) - \varphi_2(s, u)]^2 \pi(ds, du) | \mathfrak{F}_0\right\}.$$

3) 对每个 $t > 0$，过程 $I_t(\varphi)$ 的样本函数右连续且有左极限.

4) 过程 $I_t(\varphi)$ 是对 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$ 的平方可积鞅且

$$\mathbf{E}\{(\Delta I_t(\varphi))^2 | \mathfrak{F}_t\} = \mathbf{E}\left\{\int_t^{t+\Delta t} \int_U \varphi^2(s, u)\pi(ds, du) | \mathfrak{F}_t\right\},$$

其中 $\Delta I_t(\varphi) = I_{t+\Delta t}(\varphi) - I_t(\varphi)$. 并且鞅 $I_t(\varphi_1)$ 和 $I_t(\varphi_2)$ 的互特征连续及等于

$$\langle I(\varphi_1), I(\varphi_2)\rangle_t = \int_0^t \int_U \varphi_1(s, u)\varphi_2(s, u)\pi(ds, du). \quad (27)$$

5) 设 $\mu_i(t, A), i = 1, 2$ 是两个鞅测度(对于同一的 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$) 和 $\varphi_i \in \mathfrak{L}_0, i = 1, 2$. 令

$$\pi^*(t, A, B) = \langle \mu_1(\cdot, A), \mu_2(\cdot, B)\rangle_t,$$

$$I_t^i(\varphi_i) = \int_0^t \int_U \varphi_i(s, u)\mu_i(ds, du).$$

这时 $\pi^*(t, A, B)$ 可以表为在 $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}$ 上的两个测度之差(mod $\mathbf{P}$)，而当 $A \in \mathfrak{U}_0$, $B \in \mathfrak{U}_0$ 时是有限的，且

$$\langle I^1(\varphi_1), I^2(\varphi_2)\rangle_t = \int_0^t \int_U \int_U \varphi_1(s,u)\varphi_2(s,u)\pi^*(dt, du, dv).$$

(28)

函数 $\pi^*(t,A,B)$ 称为两个鞅测度的互特征，

6) 对任意 $N>0, \varepsilon>0$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t<\infty}\left|\int_0^t\int_U \varphi(s,u)\mu(ds,du)\right| > N\right\}$$

$$\leqslant \frac{N}{\varepsilon^2} + \mathbf{P}\left\{\int_0^\infty\int_U \varphi^2(s,u)\pi(ds,du) > N\right\}. \quad (29)$$

上述性质的证明和在分段为常数的函数按鞅积分时一样。

我们来推广随机积分的定义至更广泛的随机函数类 $\varphi(t,u)$。

首先，令 $\mathscr{R}^*$ 表示在空间 $(0,\infty)\times U\times\Omega$ 上形为 $(a,b]\times A\times S$，其中 $0\leqslant a<b\leqslant\infty$，$A\in\mathfrak{U}_0$，$S\in\mathfrak{F}_a$ 的集合所成的半环。在此半环 $\mathscr{R}^*$ 上定义测度 $\mathbf{P}^*$

$$\mathbf{P}^*((a,b]\times A\times S) = \mathbf{E}\chi_s[\pi(b,A)-\pi(a,A)],$$

其中 χ_s 是集合 S 的示性函数。以 $\mathfrak{T}^*$ 表示由半环 $\mathscr{R}^*$ 所产生的 σ-代数，于是 $\mathbf{P}^*$ 可唯一地扩张至 $\mathfrak{T}^*$ 上并记 $\tilde{\mathfrak{T}}^*$ 为 $\mathfrak{T}^*$ 关于该测度的完备化。其次，对任一非负 $\tilde{\mathfrak{T}}^*$-可测函数 $\varphi(t,u)=\varphi(t,u,\omega)$ 有

$$\int_0^\infty\int_U\int_\Omega \varphi(t,u,\omega)\mathbf{P}^*(dt,du,d\omega)$$

$$= \mathbf{E}\int_0^\infty\int_U \varphi(t,u)\pi(dt,du).$$

现引入随机函数 $\varphi(t,u)=\varphi(t,u,\omega)$ 的空间 $H_2^\pi = H_2(\mathfrak{F}_t,\mu)$，其定义方式与前面的空间 H_2 类似。即 H_2^π 是由满足

$$\int_0^\infty\int_U |\varphi(t,u)|^2\pi(ds,du) < \infty(\mathrm{mod}\,\mathbf{P}) \quad (30)$$

的全体 $\tilde{\mathfrak{T}}^*$-可测函数 $\varphi(t,u)$ 所组成的。对每一函数 $\varphi(t,u)\in H_2^\pi$ 存在序列 $\varphi_n(t,u)\in\mathfrak{L}_0$ 使得

$$\mathbf{P}\text{-}\lim\int_0^\infty\int_U |\varphi(t,u)-\varphi_n(t,u)|^2\pi(dt,du) = 0. \quad (31)$$

正如以前所做的一样，容易验证适应于流 $\{\mathfrak{F}_t, t\geqslant 0\}$ 且对

所有 t 及 $\mathbf{P}$ 几乎所有 ω 关于 t 左连续的任意函数 $\varphi(t,u)$ 是 $\tilde{\mathfrak{T}}^*$-可测的。而当函数 $\pi(t,A)$ 能表为

$$\pi(t, A) = \int_0^t \int_A \varphi(t,u) ds \ m(ds),$$

其中 $m(\cdot)$ 是 $\mathfrak{U}$ 上的测度时，则适应于流 $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$ 且满足式(30)的函数 $\varphi(t,u)$ 必属于 H_2^π。如果随机函数列 $\varphi_n(t,u) \in H_2^\pi$ 且式(31)成立，则称 $\varphi_n(t,u)$ 在 H_2^π 中收敛于 $\varphi(t,u)$。

我们还引入空间 H_2^π 的子空间 $\mathfrak{L}_2^\pi$，该子空间由满足附加条件

$$\mathbf{E}\int_0^t \int_U |\varphi(s,u)|^2 \pi(ds,du) < \infty, \quad \forall t > 0,$$

的函数 $\varphi(t,u) \in H_2^\pi$ 所组成。我们预先约定，称序列 $\varphi_n, n = 1, 2, \cdots, \varphi_n \in \mathfrak{L}_2^\pi$，在 $\mathfrak{L}_2^\pi$ 中收敛于极限 φ，如果对所有 $t > 0$

$$\mathbf{E}\int_0^t \int_U |\varphi(s,u) - \varphi_n(s,u)|^2 \pi(ds,du) \to 0, \text{ 当 } n \to \infty \text{ 时.}$$

设 $\varphi(t,u) \in H_2^\pi$ 和 $\varphi_n(t,u)$ 在 H_2^π 中收敛于 $\varphi(t,u)$。这时序列 $\varphi_n(t,u)$ 在 H_2^π 中是基本列，即

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{n_1, n_2 \to \infty} \int_0^t \int_U |\varphi_{n_1}(s,u) - \varphi_{n_2}(s,u)|^2 \pi(ds,du) = 0, \ \forall t > 0.$$

由随机积分性质 6)，得知对任意 $t > 0$，随机变量序列 $I_t(\varphi_n)$ 在依概率收敛意义下是基本的。而且由 $\mathscr{M}_2$ 的封闭性，得知可以定义 $\mathbf{P}\text{-}\lim I_t(\varphi_n) = I_t(\varphi)$ 并使过程 $I_t(\varphi)$ 的样本函数以概率 1 属于 $\mathscr{D}[0,\infty)$，而若鞅 $\mu(t,A)$ 对每个 A 以概率 1 连续，则过程 $I_t(\varphi)$ 的现实对所有 $t > 0$ 是连续的 (mod$\mathbf{P}$)。

定义 样本函数以概率 1 属于 $\mathscr{D}(0,\infty)$ 的随机过程

$$I_t(\varphi) \underset{\text{定义}}{=} \int_0^t \int_U \varphi(s,u) \mu(ds,du)$$

$$\underset{\text{定义}}{=} \mathbf{P}\text{-}\lim \int_0^t \int_U \varphi_n(s,u) \mu(ds,du)$$

称为按鞅测度关于函数 $\varphi(t,u) \in H_2^\pi$ 的随机积分。这里 $\varphi_n(t,u)$ 是 $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{T}_0 \times \mathfrak{U}_0)$ 中满足条件(30)的任意函数列。

由以前所论及的事实，得知当 $\mu(t, A) \in \mathscr{M}_2^c$ 时对每个 $A \in \mathfrak{U}_0$，过程 $I_t(\varphi)$ 的样本函数以概率 1 属于 $\mathscr{C}[0,\infty)$。

仿照上段定理的证明，可证明下述定理。

定理 4 如果 $\mu(t,A)$是有特征 $\pi(t,A)$ 的鞅测度，且 $\varphi(t, u) \in H_2^\pi$，那末

1）随机积分 $I_t(\varphi)$ 存在且是特征为

$$\langle I(\varphi),\ I(\varphi)\rangle_t = \int_0^t \int_U \varphi^2(s,u)\pi(ds,du)$$

的局部平方可积鞅；

2）如果 $c_i(i=1,\ 2)$ 是 $\mathfrak{F}_0$-可测随机变量，$\varphi_i \in H_2^\pi$，那末

$$I_t(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 I_t(\varphi_1) + c_2 I_t(\varphi_2);$$

3）如果 $\mu_i(t,A)(i=1,2)$是两个鞅测度（对于同一 σ-代数流），$I_t^i(\varphi)$ 是按测度 μ_i 的积分，$\varphi_i \in H_2^\pi$，那末过程 $I^1(\varphi_1)$ 及 $I^2(\varphi_2)$ 的互特征由公式(28)给出，其中 $\pi^*(t,A,\ B)$ 是鞅 $\mu_1(t, A), \mu_2(t,A)$ 的互特征。

4）对任意函数 $\varphi \in H_2^\pi$，不等式(29)保持有效。

5）对任意 $\mathfrak{F}_t$-随机时间 τ，有

$$\int_0^t \int_U \varphi(s,u)\mu_\tau(ds,du) = \int_0^t \int_U \varphi_\tau(s,u)\mu(ds,du), \quad (32)$$

其中 $\mu_\tau(t,A) = \mu(t\wedge\tau,A)$，$\varphi_\tau(t,u) = \varphi(t,u)$，当 $t<\tau$ 时，和 $\varphi_\tau(t,u)=0$，当 $t \geqslant \tau$ 时。

现设 $\mu(t,\ A)$ 是局部鞅测度，τ_n 是随机时间的单调不减序列，$\lim\tau_n = \infty(\mathrm{mod}\mathbf{P})$ 且测度 $\mu_n(t,\ A) = \mu(t\wedge\tau_n,\ A)$ 是鞅 $(n=1,2,\cdots)$. 以 $\pi(t,A)$ 表示测度 $\mu(t,A)$的特征并令 $\pi_n(t, A) = \pi(t\wedge\tau_n, A)$。

定义 样本函数以概率 1 属于 $\mathscr{D}[0,\infty)$ 且

$$I_t(\varphi) \underset{\text{定义}}{=} \int_0^t \int_U \varphi(s,u)\mu(ds,du)$$

$$\underset{\text{定义}}{=} \mathbf{P}\text{-}\lim \int_0^t \int_U \varphi(s,u)\mu_n(ds,du)$$

的过程 $I_t(\varphi)$ 称为按局部鞅测度 $\mu(t, A)$ 的随机积分.

定理 5 定理 4 的全部结论可推广至按局部鞅的随机积分.

这定理的证明类似于引理 3 的证明,故略去.

§3. 伊 藤 公 式

在本节当把微分理解为随机积分的逆运算时，将考虑类似于复合函数的微分的公式及其推论. 所得到的结果在今后起着重要作用.

如无不同的说法，将假定所考虑的随机过程是定义在固定的概率空间 $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$ 上适应于给定的σ-代数流$\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$, $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{S}$.

连续过程的伊藤公式 用 $\mathscr{V}$ 或 $\mathscr{V}(\mathfrak{F}_t)$ 表示适应于 $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$ 且可表为两个单调不减右连续过程之差的随机过程 $\alpha(t)$, $t \geqslant 0$ 所成的类，而 $\mathscr{V}^c = \mathscr{V}^c(\mathfrak{F}_t)$ 是 $\mathscr{V}$ 的子类，它由可表为两个单调不减过程之差的过程所组成，这两个过程的样本函数以概率 1 对每个 $t \geqslant 0$ 连续.

如果 $\gamma(t), t \geqslant 0$ 是任一关于流 $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$ 的循序可测过程*,且其样本函数以概率 1 在每个有限区间上有界,而 $\alpha(t) \in \mathscr{V}$, 那末积分 $\int_0^t \gamma(s) d\alpha(s)$ 对所有 $t \geqslant 0$ 以概率为 1 定义为关于过程 $\gamma(t)$ 与 $\alpha(t)$ 的样本函数的通常的 Lebesgue-Stieltjes 积分. 此外,过程 $\zeta(t) = \int_0^t \gamma(s) d\alpha(s)$ 适应于 σ-代数流 $\mathfrak{F}_t$, 同时样本函数在函数 $\alpha(t)$ 的每个连续点 t 上以概率 1 连续，而对任意 t 右连续,且在任意区间 $[0, t]$ 上有有界变差. 设

$$\xi(t) = \xi_0 + \alpha(t) + \mu(t),$$

其中 ξ_0 是 $\mathfrak{F}_0$-可测随机变量，$\alpha(t) \in \mathscr{V}$ 和 $\mu(t) \in l\mathscr{M}_2$. 按定

---

* 随机过程 $\gamma(t), t \geqslant 0$ 称为关于流 $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$ 循序可测的,如果对每个 $s \in [0, \infty)$, $\gamma(t, \omega)$ 限于 $[0, s] \times \Omega$ 时为 $\mathfrak{B}([0, s]) \times \mathfrak{F}_s$-可测的，$\mathfrak{B}([0, s])$ 表 $[0, s]$ 上全体 Borel 子集. ——译者注

义，令

$$\int_0^t \gamma(s)\,d\xi(s) \underset{\text{定义}}{=} \int_0^t \gamma(s)\,d\alpha(s) + \int_0^t \gamma(s)d\mu(s),$$

如果在等式右边的两个积分存在。

如果 $\xi(t)$ 是取值于 R^m 的过程，$\xi(t)=\{\xi^1(t),\cdots,\xi^m(t)\}$，$\gamma(t)$ 是纯量随机过程，那末我们将积分 $\int_0^t \gamma(s)d\xi(s)$ 理解为有分量 $\int_0^t \gamma(s)d\xi^k(s), k=1,\cdots,m$ 的向量过程。令 $\xi^k(t)=\alpha^k(t)+\mu^k(t), \alpha(t)=(\alpha^1(t),\cdots,\alpha^m(t)), \mu(t)=(\mu^1(t),\cdots,\mu^m(t))$。用 λ 表示以分点 $t_0=0<t_1<\cdots<t_n=t$ 对固定区间 $[0,t]$ 的分割，且设

$$|\lambda| = \max_{1\leqslant r\leqslant n}(t_r-t_{r-1}),$$

$\Delta\xi_r=\xi(t_r)-\xi(t_{r-1})$，$\Delta\langle\mu^k,\mu^j\rangle_r=\langle\mu^k,\mu^j\rangle_{t_r}-\langle\mu^k,\mu^j\rangle_{t_{r-1}}$。

引理 1 设 $\varphi(t)$ 是连续过程，适应于 $\{\mathfrak{F}_t,\ t\geqslant 0\}$，又 $\mu^k(t)\in l\mathscr{M}^c$。这时

$$\mathbf{P}\text{-}\lim \sum_{r=1}^n \varphi(t_{r-1})\Delta\xi_r = \int_0^t \varphi(s)d\xi(s), \tag{1}$$

$$\mathbf{P}\text{-}\lim \sum_{r=1}^n \varphi(t_{r-1})\Delta\xi_r^k\Delta\xi_r^j = \int_0^t \varphi(s)d<\mu^k,\mu^j>_t. \tag{2}$$

证　只要对一维过程 $\xi(t)=\mu(t)\in l\mathscr{M}^c$ 证明式(1)就够了。记及 $l\mathscr{M}^c=l\mathscr{M}_2^c$。

设 $\varphi_\lambda(t)=\varphi(t_{r-1})$ 当 $t\in(t_{r-1},t_r]$。对任意 $\varepsilon>0$ 可找到 $\delta=\delta(\omega,\varepsilon)$，使得当 $|\lambda|<\delta$ 时，$|\varphi(t)-\varphi_\lambda(t)|<\varepsilon$。但这时

$$\int_0^t[\varphi(s)-\varphi_\lambda(s)]^2d\langle\mu,\mu\rangle_t<\varepsilon^2\langle\mu,\mu\rangle_t,$$

和由 §1 的引理 9 得到(1)。现来证明式 (2)。考虑一维情形

$$\xi^k(t)=\xi^j(t)=\xi(t)=\alpha(t)+\mu(t)$$

就够了，

首先，

$$\sum_{r=1}^{n}\varphi(t_{r-1})(\Delta\xi_r)^2$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\varphi(t_{r-1})(\Delta\alpha_r)^2+2\sum_{r=1}^{n}\varphi(t_{r-1})\Delta\alpha_r\Delta\mu_r$$

$$+\sum_{r=1}^{n}\varphi(t_{r-1})(\Delta\mu_r)^2=S_1+2S_2+S_3,$$

且以概率 1 有

$$|S_1|\leqslant\max_{0\leqslant s\leqslant t}|\varphi(s)|V_t^0(\alpha)\max_r|\Delta\alpha_r|\to 0,$$

其中 $V_t^0(\alpha)$ 是函数 $\alpha(s)$ 在区间 $[0,t]$ 的全变差. 其次

$$|S_2|\leqslant\max_{0\leqslant s\leqslant t}|\varphi(s)|\left\{\sum_{r=1}^{n}(\Delta\alpha_r)^2\sum_{r=1}^{n}(\Delta\mu_r)^2\right\}^{1/2}$$

$$\leqslant\max_{0\leqslant s\leqslant t}|\varphi(s)|(V_0^t(\alpha)\max_r|\Delta\alpha_r|)^{1/2}$$

$$\times\left(\sum_{r=1}^{n}(\Delta\mu_r)^2\right)^{1/2}.$$

因为依概率 $\sum_{r=1}^{n}(\Delta\mu_r)^2\to\langle\mu,\mu\rangle_t$ (§1 定理 22)，所以依概率 $|S_2|\to 0$。

余下要证明

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{|\lambda|\to 0}\sum_{r=1}^{n}\varphi(t_{r-1})(\Delta\mu_r)^2=\int_0^t\varphi(s)d\langle\mu,\mu\rangle_s. \qquad (2')$$

选任意 $\varepsilon>0$ 和区间 $[0,t]$ 的某个分割 λ_0，使得

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^t|\varphi_{\lambda_0}(s)-\varphi(s)|d\langle\mu,\mu\rangle_s>\frac{\varepsilon}{4}\right\}<\frac{\varepsilon}{4}.$$

设 λ' 表示任意分割 λ 和 λ_0 叠加得到的分割，而 S,S' 及 S_0 是对应于分割 λ,λ' 及 λ_0 的等式(2′)左边的和. 显然当 λ_0 固定时，和 S 与 S' 彼此相异不多于有限个数的被加项，其中每项以概率 1 趋

于0。于是当 $|\lambda|$ 足够小时 $\mathbf{P}\left\{|S'-S|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}<\frac{\varepsilon}{4}$。

设 $t_1, t_2, \cdots, t_N$ 是组成分割 λ' 的点（$t_N=t$），t_{i_k}，$k=1,2,\cdots,m$ 是分割 λ_0 的点（$t_{i_m}=t_N$）且

$$S^*=\sum_{k=1}^{m}\varphi(t_{i_{k-1}})\sum_{r=i_{k-1}+1}^{i_k}(\Delta\mu_r)^2.$$

那末

$$\mathbf{P}\left\{\left|S-\int_0^t\varphi(s)d\langle\mu,\mu\rangle_s\right|>\varepsilon\right\}$$

$$\leqslant\mathbf{P}\left\{|S-S'|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}+\mathbf{P}\left\{\left|S^*-\int_0^t\varphi_{\lambda_0}(s)d\langle\mu,\mu\rangle_s\right|\right.$$

$$\left.>\frac{\varepsilon}{4}\right\}+\mathbf{P}\left\{\left|\int_0^T[\varphi_{\lambda_0}(s)-\varphi(s)]d\langle\mu,\mu\rangle_s\right|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}.$$

其次，有

$$|S'-S^*|\leqslant\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=i_{k-1}+1}^{i_k}|\varphi(t_{i_{k-1}})-\varphi(t_{r-1})||\Delta\mu(t_r)|^2$$

$$\leqslant\delta\sum_{r=1}^{N}(\Delta\mu(t_r))^2,$$

其中 $\delta=\max\limits_{|t-s|\leqslant|\lambda_0|}|\varphi(t)-\varphi(s)|$ 且当 $|\lambda_0|\to0$ 时以概率 1 有 $\delta\to0$。

顾及到和 $\sum\limits_{r=1}^{N}(\Delta\mu(t_r))^2$ 依概率收敛，可见对足够小的 $|\lambda_0|$ 且对任意 λ，$\mathbf{P}\left\{|S'-S^*|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}<\frac{\varepsilon}{4}$。最后，由于§1 定理 22，当固定 λ_0 和 $|\lambda|\to0$ 时，依概率

$$S^*-\int_0^t\varphi_{\lambda_0}(s)d\langle\mu,\mu\rangle_s=\sum_{k=1}^{m}\varphi(t_{i_{k-1}})$$

$$\times\left\{\sum_{r=i_{k-1}}^{i_k}[\Delta\mu(t_r)]^2-[\langle\mu,\mu\rangle^{t_{i_k}}\right.$$

$$-\langle \mu, \mu \rangle_{t_{i_{k-1}}}]\Big\} \to 0.$$

因此，首先选定合适的 λ_0，然后找 ε_0，使当 $|\lambda| < \varepsilon_0$ 时

$$\mathrm{P}\left\{\left|S - \int_0^t \varphi(s) d\langle \mu, \mu \rangle_s\right| > \varepsilon\right\} < \varepsilon.$$

定理 1 （伊藤公式） 设 $f(x)$，$x \in \mathscr{R}^m$ 是二次连续可微函数，$\alpha^k(t) \in \mathscr{V}^c$，$\mu^k(t) \in l\mathscr{M}^c$，$k = 1, \cdots, m$，$\xi(t) = \xi_0 + \alpha(t) + \mu(t)$，$\alpha(0) = \mu(0) = 0$。那末

$$f(\xi(t)) = f(\xi_0) + \int_0^t \sum_{k=1}^m \nabla^k f(\xi(s)) d\xi^k(s)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{k,j=1}^m \nabla^k \nabla^j f(\xi(s)) d\langle \mu^k, \mu^j \rangle_s, \tag{3}$$

其中

$$\nabla^k f(x) = \frac{\partial f}{\partial x^k}, \quad \nabla^k \nabla^j f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j}.$$

证. 先假定以概率 1 有 $|\xi(t)| \leqslant c$，其中 c 是常数. 此时不失一般性可认为 $f(x)$ 在某个紧集之外为 0。还假定 $f(x)$ 是三次连续可微的. 这时

$$f(\xi(t)) - f(\xi(0)) = \sum_{r=1}^n [f(\xi(t_r)) - f(\xi(t_{r-1}))]$$

$$= \sum_{r=1}^n \sum_{k=1}^m \nabla^k f(\xi(t_{r-1}))(\xi^k(t_r) - \xi^k(t_{r-1}))$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{k,j=1}^m \nabla^k \nabla^j f(\xi(t_{r-1}))(\xi^k(t_r)$$

$$- \xi^k(t_{r-1}))(\xi^j(t_r) - \xi^j(t_{r-1})) + S,$$

其中

$$S = \frac{1}{3!} \sum_{r=1}^n \sum_{k,j,i=1}^m \nabla^k \nabla^j \nabla^i f(\widetilde{\xi(t_r)})(\xi^k(t_r) - \xi^k(t_{r-1}))$$

$$\times (\xi^j(t_r) - \xi^j(t_{r-1}))(\xi^i(t_r) - \xi^i(t_{r-1})),$$

$\widetilde{\xi(t_r)}$是位于连接 $\xi(t_{r-1})$ 和 $\xi(t_r)$ 的线段上的点. 因为 $f(x)$ 的三阶偏导数一致有界,所以存在常数 $C=C(\omega)$, 使

$$S \leqslant C\max_r |\xi(t_r)-\xi(t_{r-1})| \cdot \sum_{r=1}^{n} |\xi(t_r)-\xi(t_{r-1})|^2,$$

且由于过程 $\xi(t)$ 的连续性与 §1 定理 22, 在 L_1 中 $S\to 0$. 顾及函数 $\nabla^k f(\xi(t))$ 的连续性和引理 1, 对所考虑的情形得公式(3).

现设 $f(x)$ 是任意二次连续可微函数. 这时可构造三次连续可微函数的序列 $f_n(x)$,其中每一个在某个紧集之外等于 0, 且在 $\mathscr{R}^m$ 的任意紧集上, 这序列连同其一、二阶偏导数一致收敛于 $f(x)$ 和对应的导数. 应用公式(3)于 $f_n(x)$, 可是在已得到的公式中,当 $n\to\infty$ 时, 在右边我们能将极限号移入积分号内. 因此在 $|\xi(t)|\leqslant c$ 时得证公式(3).

在一般情形,令

$$\tau_N=\inf\{t: |\xi(t)|\geqslant N\},$$

$$\alpha_N(t)=\alpha(t\wedge\tau_n),\ \mu_N(t)=\mu(t\wedge\tau_N),$$

$$\xi_{N_0}=\xi_0\chi(|\xi_0|\leqslant N), \xi_N(t)=\xi_{N_0}+\alpha_N(t)+\mu_N(t).$$

公式 (3) 适用于过程 $\xi_N(t)$. 余下是令$N\to\infty$ 取极限即可. 首先, 顾及到对所有 $t\geqslant 0$ 以概率 1 有 $\xi_N(t)\to\xi(t)$, $f(\xi_N(t))\to f(\xi(t))$.

其次,对任意连续函数 $g(x)$, $\xi(t)$ 及有界变差函数 $\alpha(t)$,

$$\int_0^t g(\xi_N)\,d\alpha_N=\int_0^{t\wedge\tau_n} g(\xi)d\alpha\to\int_0^t g(\xi)d\alpha,\ N\to\infty.$$

最后,对同样的 $g(x)$ 和 $\xi(t)$, 因为局部鞅 $\int_0^t g(\xi)d\mu$ 连续, 所以,以概率 1 有

$$\int_0^t g(\xi_N)d\mu_N=\int_0^{t\wedge\tau_N} g(\xi)\,d\mu\to\int_0^t g(\xi)d\mu.$$

这就证明对于过程 $\xi_N(t)$ 的公式(3) 当$N\to\infty$ 时可以趋向极限. 定理得证.

推论 1　如果 $f(t,x), t\geq 0, x\in\mathscr{R}^m$，是关于 t 连续可微和关于 x 二次连续可微,那末

$$f(t,\xi(t))-f(t,\xi_0)=\alpha_1(t)+\beta(t), \tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha_1(t)=&\int_0^t\frac{\partial f}{\partial s}(s,\xi(s))ds\\&+\sum_{k=1}^m\int_0^t\nabla^k f(s,\xi(s))d\alpha^k(s)\\&+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^m\int_0^t\nabla^k\nabla^j f(s,\xi(s))d\langle\mu^k,\mu^j\rangle_s,\end{aligned} \tag{5}$$

$$\beta(t)=\int_0^t\sum_{k=1}^m\nabla^k f(s,\xi(s))d\mu^k(s), \tag{6}$$

而且 $\alpha_1(t)\in\mathscr{V}^c, \beta(t)\in l\mathscr{M}^c$。

当 $f(t,x)$ 按 (t,x) 二次连续可微时,上列公式直接由(3)得到，如果考虑最后一分量是 $\eta^{m+1}=t\in\mathscr{V}^c$ 的$(m+1)$-维随机过程 $\eta(t)=(\xi(t),t)$，而 $\mu^{m+1}(t)\equiv 0$。顾及到公式(4)—(6)的结构,和满足推论条件的任意函数 $f(t,x)$ 可用在 $[0,\infty)\times\mathscr{R}^m$ 的任意紧集上一致收敛于 $f(t,x)$ 且按 (t,x) 二次连续可微的函数 $f_n(t,x)$ 逼近这一事实，看出公式(4)—(6) 在推论所陈述的条件下成立。

推论 2　如果 $w(t)=\{w^1(t),\cdots,w^m(t)\}$是$m$-维 Wiener 过程，$f(x)$ 是二次连续可微函数,则

$$\begin{aligned}f(w(t))=f(0)+\frac{1}{2}\int_0^t\Delta f(\xi(s))ds\\+\int_0^t(\nabla f(\xi(s)),dw(s)),\end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$\Delta f=\sum_{k=1}^m\frac{\partial^2 f}{(\partial x^k)^2},\quad \nabla f=(\nabla^1 f,\nabla^2 f,\cdots,\nabla^m f).$$

随机微分　设

$$\alpha(t) = (\alpha^1(t), \cdots, \alpha^m(t)),$$
$$\mu(t) = (\mu^1(t), \cdots, \mu^m(t)),$$
$$\alpha^k(t) \in \mathscr{V}^c, \ \mu^k(t) \in l\mathscr{M}^c, k = 1, \cdots, m.$$

如果对每个 $t \in [0, T]$ 以概率 1,有

$$\eta(t) = \eta(0) + \int_0^t (\varphi, d\alpha) + \int_0^t (\psi, d\mu)$$
$$= \eta(0) + \sum_{k=1}^m \int_0^t \varphi^k(s) d\alpha^k(s)$$
$$+ \sum_{k=1}^m \int_0^t \psi^k(s) d\mu^k(s),$$

其中 $\psi^k(t) \in H_2(\mathfrak{F}_t, \mu^k)$ 及 $\varphi^k(t)$ 是关于 $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$ 的循序可测过程并且其样本函数以概率 1 是有界的，则称过程 $\eta(t)$ 有**随机微分(连续型)**

$$d\eta = (\varphi, d\alpha) + (\psi, d\mu) = \sum_{k=1}^m \varphi^k(t) d\alpha^k(t)$$
$$+ \sum_{k=1}^m \psi^k(t) d\mu^k(t),$$

$t \in [0, T]$.

显然，有连续型随机微分的过程有连续修正. 今后也只考虑过程 $\eta(t)$ 的这样的修正. 应用随机微分的概念,定理 1 可用下述形式陈述:

如果过程 $\xi^k(t), k = 1, 2, \cdots, m$ 有随机微分 $d\xi^k = d\alpha^k + d\mu^k$, 且函数 $f(t, x) = f(t, x^1, \cdots, x^m)$ 按 t 连续可微且按 x 二次连续可微,那末过程 $\eta(t) = f(t, \xi(t))$ 也有随机微分且

$$d\eta = f'_t(t, \xi(t)) dt + \sum_{k=1}^m \nabla^k f(t, \xi(t)) d\alpha^k$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^m \nabla^k \nabla^j f(t, \xi(t)) d\langle \mu^k, \mu^j \rangle_t$$
$$+ \sum_{k=1}^m \nabla^k f(t, \xi(t)) d\mu^k = f'_t(t, \xi(t)) dt$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m}\nabla^k\nabla^j f(t,\xi(t))d\langle\mu^k,\mu^j\rangle_t$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\nabla^k f(t,\xi(t))d\xi^k.$$

由此得

定理 2 如果 $\xi^k(t), k=1,2,\cdots,m$ 有随机微分 $d\xi^k=d\alpha^k+d\mu^k$ 和 $\xi(t)=(\xi^1(t),\cdots,\xi^m(t))$，那末

$$d(\xi^1+\xi^2)=d\xi^1+d\xi^2,$$

$$d(\xi^1\xi^2)=\xi^1 d\xi^2+\xi^2 d\xi^1+d\langle\mu^1,\mu^2\rangle_t,$$

$$d\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)=\frac{\xi_2 d\xi_1-\xi_1 d\xi_2}{\xi_2^2}$$

$$+\frac{\xi_1 d\langle\mu^2,\mu^2\rangle_t-\xi_2 d\langle\mu^1,\mu^2\rangle_t}{\xi_2^3},$$

$$de^{(\xi,u)}=e^{(\xi,u)}\sum_{k=1}^{m}u^k d\xi^k$$

$$+\frac{1}{2}e^{(\xi,u)}\sum_{k,j=1}^{n}u_k u_j d\langle\mu^k,\mu^j\rangle_t,$$

同时对 $d\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)$ 的公式在条件 $\xi_2(t)\geqslant\delta>0$ 下适用。

如果依次地将定理 1 应用于函数 x_1+x_2, x_1x_2, $\frac{x_1}{x_2}$, $e^{(x,u)}$, 就可直接得到所要的公式。

伊藤公式的某些应用

定理 3 (Lévy 定理) 设 $\mu(t)=(\mu^1(t),\cdots,\mu^m(t))$, $\mu(0)=0$, $\mu^k(t)\in l\mathscr{M}^c$ 而 $\langle\mu^k,\mu^j\rangle_t=\delta_{kj}t$. 那末 $\mu(t)$ 是 m-维 Wiener 过程。

证. 应用伊藤公式于函数 $\eta(t)=e^{i(u,\mu(t))}$，我们得

$$\eta(t)=\eta(s)+\int_s^t\eta(\theta)\left[i\sum_{k=1}^{m}u^k d\mu^k(\theta)-\frac{1}{2}|u|^2 d\theta\right].$$

设 τ_n 是导出 $\mu(t)$ 的随机时间序列，$\mu_n(t)=\mu(t\wedge\tau_n)$，$\mathfrak{F}_t^n=\mathfrak{F}_{t\wedge\tau_n}$。那末

$$\eta_n(t)=\eta_n(s)+\xi_n(t)-\xi_n(s)-\frac{|u|^2}{2}\int_{s\wedge\tau_n}^{t\wedge\tau_n}\eta(\theta)d\theta,$$

其中 $\xi_n(t)=i\int_0^{t\wedge\tau_n}\eta(\theta)(u,d\mu)=i\int_0^t\eta(\theta)(u,d\mu_n)$ 是平方可积鞅(关于流 $\{\mathfrak{F}_t^n,t\geqslant 0\}$)。于是

$$J_n(t)\underset{\text{定义}}{=}\mathbf{E}\{\eta_n(t)|\mathfrak{F}_s^n\}=\eta_n(s)-\frac{|u|^2}{2}$$

$$\times\mathbf{E}\left\{\int_{s\wedge\tau_n}^{t\wedge\tau_n}\eta(\theta)d\theta|\mathfrak{F}_s^n\right\}. \tag{8}$$

设 $J(t)=\mathbf{E}\{\eta(t)|\mathfrak{F}_s\}$。我们来证明在 L_1 中 $J_n(t)\to J(t)$。我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}|J_n(t)-J(t)|&\leqslant\mathbf{E}|\mathbf{E}\{\eta_n(t)-\eta(t)|\mathfrak{F}_s^n\}|\\&\quad+\mathbf{E}|\mathbf{E}\{\eta|\mathfrak{F}_s^n\}-\mathbf{E}\{\eta|\mathfrak{F}_s\}|\\&\leqslant\mathbf{E}|\eta_n(t)-\eta(t)|+\mathbf{E}|\mathbf{E}\{\eta|\mathfrak{F}_s^n\}\\&\quad-\mathbf{E}\{\eta|\mathfrak{F}_s\}|.\end{aligned}$$

因为 $|\eta(t)|\leqslant 1$，$|\eta_n(t)|\leqslant 1$ 和 $\eta_n(t)\to\eta(t)$ 以概率 1 成立，所以当 $n\to\infty$ 时 $\mathbf{E}|\eta_n(t)-\eta(t)|\to 0$。现证明 $\mathfrak{F}_s=\sigma\{\mathfrak{F}_s^n,n=1,2,\cdots\}$。取任意集合 $A\in\mathfrak{F}_s$。显然，$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap\{\tau_n>s\})$。此外，对任意 $t\geqslant 0$，$(A\cap\{\tau_n>s\})\cap\{\tau_n\wedge s\leqslant t\}\in\mathfrak{F}_t$，因此，$A\cap\{\tau_n>s\}\in\mathfrak{F}_{\tau_n\wedge s}=\mathfrak{F}_s^n$。由此得 $A\in\sigma\{\mathfrak{F}_s^n,n=1,2,\cdots\}$，从而 $\mathfrak{F}_s=\sigma\{\mathfrak{F}_s^n,n=1,2,\cdots\}$。由已知的定理(第一卷第二章§2,定理 4)，以概率 1 有 $\mathbf{E}\{\eta|\mathfrak{F}_s^n\}\to\mathbf{E}\{\eta|\mathfrak{F}_s\}$。于是，$\mathbf{E}|\mathbf{E}\{\eta|\mathfrak{F}_s^n\}-\mathbf{E}\{\eta|\mathfrak{F}_s\}|\to 0$。因此，当 $n\to\infty$ 时 $\mathbf{E}|J_n(t)-J(t)|\to 0$。

类似可证，在 L_1 中

$$\mathbf{E}\left\{\int_{s\wedge\tau_n}^{t\wedge\tau_n}\eta(\theta)d\theta|\mathfrak{F}_s^n\right\}\to\mathbf{E}\left\{\int_s^t\eta(\theta)d\theta|\mathfrak{F}_s\right\}$$

$$= \int_s^t J(\theta) d\theta.$$

当 $n \to \infty$ 时，式(8)取极限，我们得方程

$$J(t) = \eta(s) - \frac{|u|^2}{2} \int_s^t J(\theta) d\theta. \tag{9}$$

它等价于微分方程 $J'(t) = -\frac{|u|^2}{2} J(t)$, $J(s) = \eta(s)$，由这方程得

$$J(t) = J(s) \exp\left\{-\frac{|u|^2}{2}(t-s)\right\}.$$

因此

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\{\exp\{i(u, \mu(t) - \mu(s))\} | \mathfrak{F}_s\} \\ &\quad = \exp\left\{-\frac{|u|^2}{2}(t-s)\right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

(10)式表明，差 $\mu(t) - \mu(s)$ 是独立于σ-代数 $\mathfrak{F}_s$ 且有均值为 0，方差矩阵为 $\delta_{kj}(t-s)$ 的正态分布。

定理得证。

设 $\mu(t)$ 是一维过程。

定理 4 设 $\mu(t) \in l\mathscr{M}^c$, $\mu(0) = 0$ 且当 $t \to \infty$ 时以概率 1 有 $\alpha(t) = \langle \mu, \mu \rangle_t \to \infty$。令

$$\tau_t = \inf\{s: \alpha(s) \geqslant t\}, \eta(t) = \mu(\tau_t). \tag{11}$$

这时过程 $\{\eta(t), \mathfrak{F}_{\tau_t}, t \geqslant 0\}$ 是 Wiener 过程.

证。首先指出，随机时间 τ_t 导出局部鞅 $\mu(t)$。

事实上，设 $\{\sigma_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 是完全导出 $\mu(t)$ 的随机时间序列. 过程 $\mu(\sigma_n \wedge \tau_t \wedge s), s \geqslant 0$ 是平方可积鞅. 当 $n \to \infty$ 时，

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}|\mu(\sigma_n \wedge \tau_t) - \mu(\sigma_{n+m} \wedge \tau_t)|^2 \\ &\quad = \mathbf{E}[\alpha(\sigma_{n+m} \wedge \tau_t) - \alpha(\sigma_n \wedge \tau_t)] \to 0, \end{aligned}$$

这因为以概率 1 有 $\alpha(\sigma_n \wedge \tau_t) \to \alpha(\tau_t)$ 及 $\alpha(s \wedge \tau_t) \leqslant t$. 于是

$\mu(\sigma_n \wedge \tau_t \wedge s)$在 $\mathscr{M}_2^c$ 中收敛于某个极限。

另一方面，以概率 1，有 $\mu(\sigma_n \wedge \tau_t \wedge s) \to \mu(\tau_t \wedge s)$，因此 $\mu(\tau_t \wedge s) \in \mathscr{M}_2^c$，设 s 和 t 是满足 $s < t < N$的任意值。这时（§1 定理 6 的推论 3）

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\{[\mu(\tau_t) - \mu(\tau_s)]^2 | \mathfrak{F}_{\tau_s}\}
&= E\{[\mu(\tau_N \wedge \tau_t) - \mu(\tau_N \wedge \tau_s)]^2 | \mathfrak{F}_{\tau_s}\} \\
&= \mathbf{E}\{\alpha(\tau_t) - \alpha(\tau_s) | \mathfrak{F}_{\tau_s}\} = t - s.
\end{aligned}
$$

由于 Lévy 定理，$\mu(\tau_t)$ 是 Wiener 过程。

连续鞅的矩的估计 设 $\mu(t) \in l\mathscr{M}^c$，$\mu(0) = 0$。又设局部鞅 $\mu(t)$ 的特征 $\alpha(t)$ 关于 Lebesgue 测度绝对连续，且

$$
\langle \mu, \mu \rangle_t = \int_0^t \varphi(s) ds, \quad \varphi(t) \geqslant 0. \tag{12}
$$

引理 2 如果函数 $\varphi(t), t \in [0, T]$，以概率 1 有界，且

$$
|\varphi(t)| \leqslant \sigma^2, t \in [0, T],
$$

其中 σ^2 是非随机的，那末 $\mu(t)$ 有任意阶矩。

证. 如果 $\sup\{|\mu(t)|, t \leqslant T\} \leqslant n$，设 $\tau = T$，如在相反情形，$\tau = \inf\{t: |\mu(t)| \geqslant n, t \in [0, T]\}$。又设 $\mu_n(t) = \mu(t \wedge \tau)$。因为 $|\mu_n(t)| \leqslant n$，所以 $\mu_n(t)$ 有各阶矩。此外，$\mu_n(t)$ 是鞅. 应用伊藤公式于 $\mu_n(t)$ 与函数 $f(x) = e^{ax}, a > 0$，我们得

$$
e^{a\mu_n(t)} = 1 + \frac{a^2}{2} \int_0^t e^{a\mu_n(s)} \varphi(s) ds + a \int_0^t e^{a\mu_n(s)} d\mu_n(s).
$$

因为函数 $e^{a\mu_n(s)}$ 以概率 1 有界，所以得到的等式的右边最后一项是鞅。于是，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} e^{a\mu_n(t)} &= 1 + \frac{a^2}{2} \int_0^t \mathbf{E} e^{a\mu_n(s)} \varphi(s) ds \\
&\leqslant 1 + \frac{a^2 \sigma^2}{2} \int_0^t \mathbf{E} e^{a\mu_n(s)} ds.
\end{aligned}
$$

令 $z_n(t) = 1 + \dfrac{a^2\sigma^2}{2} \displaystyle\int_0^t \mathbf{E} e^{a\mu_n(s)} ds$，由后一关系式得

$$\frac{z_n'(t)}{z_n(t)} \leqslant \frac{a^2\sigma^2}{2}, \quad z_n(0) = 1,$$

由此，$z_n(t) \leqslant e^{\frac{a^2\sigma^2}{2}t}$．当 $n \to \infty$ 时取极限并利用 Fatou 引理，可得不等式

$$\mathbf{E}e^{a\mu(t)} \leqslant e^{\frac{a^2\sigma^2}{2}t}, \tag{13}$$

由此得证引理。

定理 5 如果 $\mu(t) \in l\mathscr{M}^c, \mu(0) = 0$，条件(12)成立和对某个 $p > 1$，

$$\int_0^T \mathbf{E}\varphi^p(s)ds < \infty,$$

那末 $\mathbf{E}|\mu(t)|^{2p} < \infty$，当 $t \in [0,T]$，且满足

$$E|\mu(t)|^{2p} \leqslant p(2p-1)^p t^{p-1} \int_0^t E\varphi^p(s)ds, \quad t \leqslant T. \tag{14}$$

证．开始假定 $\varphi(t) \leqslant \sigma^2$，其中 σ^2 是常数。这时 $\mu(t)$ 有任意阶矩．

应用伊藤公式于 $\mu(t)$ 与函数 $f(x) = |x|^{2p}$．
我们得

$$|\mu(t)|^{2p} = p(2p-1)\int_0^t |\mu(s)|^{2p-2}\varphi(s)ds + 2p\int_0^t |\mu(s)|^{2p-2}\mu(s)d\mu(s)$$

及

$$\begin{aligned}\mathbf{E}|\mu(t)|^{2p} &= p(2p-1)\int_0^t \mathbf{E}|\mu(s)|^{2p-2}\varphi(s)ds \\ &\leqslant p(2p-1)\left(\int_0^t \mathbf{E}|\mu(s)|^{2p}ds\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\quad \times \left(\int_0^t E\varphi^p(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{15}$$

令 $z(t) = \int_0^t E|\mu(s)|^{2p}ds$，我们可重写所得的不等式为

$$\frac{dz}{z^{\frac{p-1}{p}}} \leqslant p(2p-1)\left(\int_0^t \mathbf{E}\varphi^p(s)ds\right)^{\frac{1}{p}},$$

由此得

$$z(t) \leqslant (2p-1)^p \left[\int_0^t \left(\int_0^u \mathbf{E}\varphi^p(s)ds\right)^{\frac{1}{p}} du\right]^p$$

$$\leqslant [t(2p-1)]^p \int_0^t \mathbf{E}\varphi^p(s)ds.$$

由所得的不等式连同不等式(15)可推导出不等式(14).

现转至一般情形. 令

$$\varphi_n(t) = (\varphi(t) \wedge n),\ \mu_n(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{\varphi_n(s)}{\varphi(s)}}\, d\mu(s);$$

而且,若 $\varphi(s) = 0$, 那末认为 $\frac{\varphi_n(s)}{\varphi(s)} = 0$. 这时, $\mu_n(t) - \mu(t)$ 是特征为

$$\int_0^t \left(\sqrt{\frac{\varphi_n(s)}{\varphi(s)}} - 1\right)^2 \varphi(s)ds = \int_0^t (\sqrt{\varphi_n(s)} - \sqrt{\varphi(s)})^2 ds$$

的局部平方可积鞅, 当 $n \to \infty$ 时, 以概率 1 此特征趋于 0. 将 Fatou 引理应用于不等式

$$\mathbf{E}|\mu_{n_k}(t)|^{2p} \leqslant p(2p-1)^p t^{p-1} \int_0^t \mathbf{E}\varphi^p(s)ds,$$

得一般情形时的不等式(14).

利用按 Wiener 测度的随机积分表示鞅 如果 $\{w(t), \mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$ 是 Wiener 过程, 又 $\varphi(t)$ 是适应于 $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$ 的过程,且使得对所有 $t \geqslant 0$ 以概率 1 有

$$\alpha(t) = \int_0^t \varphi^2(s)ds < \infty,$$

那末随机积分

$$\mu(t) = \int_0^t \varphi(s)dw(s) \tag{16}$$

存在且是特征为 $\alpha(t)$ 的连续局部鞅. 现在我们所关心的是什么时候局部鞅允许表示为(16).

定理 6 如果 $\mu(t)\in l\mathscr{M}^c$ 且过程 $\mu(t)$ 的特征 $\alpha(t)$ 关于 Lebesgue 测度绝对连续，那末存在 Wiener 过程 $\{w(t), \mathfrak{F}_t^*, t\geqslant 0\}$，其中 $\mathfrak{F}_t\subset\mathfrak{F}_t^*$，使得过程 $\mu(t)$ 能按公式(16)表示. 如果对每个 $t\geqslant 0$，$\alpha(t)>0$，那末可认为对每个 $t\geqslant 0$，$\mathfrak{F}_t=\mathfrak{F}_t^*$.

证. 暂且假定当 $t\geqslant 0$ 时 $\varphi(t)>0$. 令

$$\zeta(t)=\int_0^t \frac{d\mu(s)}{\varphi(s)}.$$

因为 $\int_0^t \frac{1}{\varphi^2(s)}d\alpha(s)=t<\infty$，所以这积分存在，且过程 $\zeta(t)\in l\mathscr{M}^c$，$\zeta(t)$ 的特征等于 t. 由于 Lévy 定理，$\zeta(t)$ 是 Wiener 过程. 这时 $\zeta(t)$ 适应于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t\geqslant 0\}$ 且

$$\mu(t)=\int_0^t \varphi(s)d\zeta(s).$$

因此，如再假定对每个 $t\geqslant 0$ 有 $\varphi(t)>0$，则定理得证.

我们转至一般情形. 定义独立于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t>0\}$ 的 Wiener 过程 $w^*(t), t>0$，为此，必要时扩张基本概率空间 $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$. 设 $\eta_\varepsilon(t)=\mu(t)+\varepsilon w^*(t)$ 并设 $\mathfrak{F}_t^*$ 是包含 $\mathfrak{F}_t$ 和 $\sigma\{w^*(s), s\leqslant t\}$ 的最小 σ-代数. 不难验证，过程 $\eta_\varepsilon(t)$，$\mu(t)$ 和 $w^*(t)$ 是 $\mathfrak{F}_t^*$-鞅. 因此(§1 定理 17)过程 $\eta_\varepsilon(t)$ 的特征等于

$$\langle\eta_\varepsilon, \eta_\varepsilon\rangle_t=\int_0^t(\varphi^2(s)+\varepsilon^2)ds.$$

由前述得过程

$$\zeta_\varepsilon(t)=\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\varphi^2(s)+\varepsilon^2}}\,d\eta_\varepsilon(s)$$

是 Wiener 过程.

现来证明，当 $\varepsilon\to 0$ 时 $\zeta_\varepsilon(t)$ 在均方意义收敛于某极限. 事实上，差

$$\zeta_\varepsilon(t)-\zeta_{\varepsilon'}(t)=\int_0^t\Bigg(\frac{1}{\sqrt{\varphi^2(s)+\varepsilon^2}}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\varphi^2(s) + \varepsilon'^2}} \Big) d\mu + \int_0^t \Big(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varphi^2(s) + \varepsilon^2}}$$

$$- \frac{\varepsilon'}{\sqrt{\varphi^2(s) + \varepsilon'^2}} \Big) dw^*$$

是局部鞅并有特征

$$\int_0^t \Big[\frac{(\varepsilon'^2 - \varepsilon^2)\varphi^2(s)}{(\varphi^2(s)+\varepsilon^2)(\varphi^2(s)+\varepsilon'^2)(\sqrt{\varphi^2(s) + \varepsilon^2} + \sqrt{\varphi^2(s) + \varepsilon'^2})^2}$$

$$+ \Big(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varphi^2(s) + \varepsilon^2}} - \frac{\varepsilon'}{\sqrt{\varphi^2(s) + \varepsilon'^2}} \Big)^2 \Big] ds. \qquad (17)$$

积分号内的表达式不超过 2，且当 $\varepsilon,\varepsilon' \to 0$ 时趋于 0. 于是，过程 $\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_{\varepsilon'}(t)$ 的特征以概率 1 收敛于 0，因此对每个 t，极限 $\lim\zeta_\varepsilon(t) = \zeta(t)$ 存在.显然,对过程 $\zeta(t)$ 来说,存在标准 Wiener 过程的修正,而我们保持该修正有同样的记号. 另一方面,

$$\eta_\varepsilon(t) = \mu(t) + \varepsilon w^*(t) = \int_0^t \sqrt{\varphi^2(s) + \varepsilon^2}\, d\zeta_\varepsilon(s)$$

$$= \int_0^t \sqrt{\varphi^2(s) + \varepsilon^2}\, d\zeta(s)$$

$$+ \int_0^t \sqrt{\varphi^2(s) + \varepsilon^2}\, d(\zeta_\varepsilon(s) - \zeta(s)).$$

设 $I_1(\varepsilon)$ 和 $I_2(\varepsilon)$ 表示上等式右边部分的随机积分. 由 §2 不等式(18)得

$$\mathbf{P} - \lim I_1(\varepsilon) = \int_0^t \varphi(s) d\zeta(s).$$

其次,顾及(17),不难验证局部鞅 $I_2(\varepsilon)$ 的特征是绝对连续,它的导数有可积控制函数,且当 $\varepsilon \to 0$ 时以概率 1 趋于 0. 因此,当 $\varepsilon \to 0$ 时 $I_2 \to 0$, 所以,我们得

$$\mu(t) = \int_0^t \varphi(s) d\varphi(s).$$

类似的结果在多维情形也成立.

定理 7 设 $\mu^k(t) \in l\mathscr{M}^c\{\mathfrak{F}_t,\ t \geqslant 0\}$ 及过程 $\mu^k(t)$ 的特征 $\alpha^k(t)$ 关于 Lebesgue 测度绝对连续, $k = 1,\cdots,m$. 这时可找到 m-维 Wiener 过程 $w(t) = \{w^1(t),\ \cdots,w^m(t)\}$ 及适应于 $\{\mathfrak{F}_t^*$,

$t \geqslant 0\}$ 的矩阵过程 $\phi(t)$，其中 $\mathfrak{F}_t^* \supset \mathfrak{F}_t$，$t \geqslant 0$，使得

$$\mu(t) = \int_0^t \phi(s) dw(s).$$

证. 令 $\alpha^{kj}(t) = \langle \mu^k, \mu^j \rangle_t$，和设

$$\alpha^k(t) = \alpha^{kk}(t) = \int_0^t \varphi^{kk}(s) ds,$$

其中 $\varphi^{kk}(s) \geqslant 0$. 由不等式 $|\Delta\alpha^{kj}|^2 \leqslant \Delta\alpha^k \Delta\alpha^j$，得知函数 $\alpha^{kj}(t)$ 在任意有限区间上以概率 1 有有界变差且关于 Lebesgue 测度绝对连续. 因此，存在函数 $\varphi^{kj}(t)$，使

$$\alpha^{kj}(t) = \int_0^t \varphi^{kj}(s) ds.$$

设 $z_k, k = 1, \cdots, m$，是任意实数. 这时过程

$$\sum_{k,j=1}^m \alpha^{kj}(t) z_k z_j = \int_0^t \left(\sum_{k,j=1}^m \phi^{kj}(s) z_k z_j \right) ds$$

是鞅 $\sum_{k=1}^m \mu^k(t) z_k$ 的特征，并因此单调不减. 于是对任意 z_k 及几乎所有 s，

$$\sum_{k,j=1}^m \varphi^{kj}(s) z_k z_j \geqslant 0,$$

即是矩阵 $\Phi(s) = \{\varphi^{kj}(s)\}$ 对几乎所有 s 是非负定.

首先假定矩阵 $\Phi(s)$ 是一致满秩的，即

$$\sum_{k,j=1}^m \varphi^{kj}(s) z_k z_j \geqslant \varepsilon \sum_{j=1}^m z_j^2, \varepsilon > 0, \forall s > 0.$$

如所周知，正定矩阵 $\Phi(s)$ 可表为 $U^*(s) D(s) U(s)$，其中 $U(s)$ 是正交矩阵，$U^*(s)$ 是 $U(s)$ 的共轭矩阵，$D(s)$ 是有对角线元素 $\lambda_j(s)$ 的对角形矩阵，其中 $\lambda_j(s)$ 是矩阵 $\Phi(s)$ 的特征数，$\lambda_j(s) \geqslant \varepsilon$.

设 $\Phi^{-1/2}(s) = U^*(s) D^{-1/2}(s) U(s)$，其中 $D^{-1/2}$ 是有元素 $\delta_{kj} \lambda_j^{-1/2}(s)$ 的对角形矩阵. 矩阵 $\Phi^{-1/2}(s)$ 的元素 $\gamma_{kj}(s)$ 有界(关于 s 和 w 一致)，即

$$|\gamma_{kj}(s)| = \left|\sum_{r=1}^{m} u_{rk}(s)\lambda_r^{-1/2}(s)u_{kr}(s)\right| \leqslant \frac{m}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

此外,矩阵 $\Phi^{-1/2}(s)$ 是对称的且

$$\Phi^{-1/2}(s)\Phi(s)\Phi^{-1/2}(s) = \mathbf{I},$$

其中 $\mathbf{I}$ 是单位矩阵.

考虑过程

$$\zeta(t) = \int_0^t \Phi^{-1/2}(s)d\mu(s).$$

正如由前面的讨论可指出的,所定义的随机积分是存在的(不难发现,$\gamma_{kj}(s)$ 是关于矩阵 $\Phi(s)$ 的元素 $\varphi_{kj}(s)$ 的 Borel 函数).这时

$$\begin{aligned}
\langle\zeta^k,\zeta^j\rangle_t &= \left\langle\sum_i \int_0^t \gamma_{ki}(s)d\mu^i(s),\right.\\
&\qquad \left.\sum_r \int_0^t \gamma_{jr}(s)d\mu^r(s)\right\rangle_t\\
&= \sum_{i,r} \int_0^t \gamma_{ki}(s)d\langle\mu^i,\mu^r\rangle_s\gamma_{jr}(s)\\
&= \sum_{i,r} \int_0^t \gamma_{ki}(s)\varphi^{ir}(s)\gamma_{rj}(s)ds = t\delta_{kj}.
\end{aligned}$$

由 Lévy 定理(定理 3),得 $\zeta(t)$ 是m-维 Wiener 过程. 另一方面,由于 §2 定理 3,有

$$\int_0^t \Phi^{1/2}(s)d\zeta(s) = \int_0^t \Phi^{1/2}(s)\Phi^{-1/2}(s)d\mu(s) = \mu(t).$$

因此,在附加的假设下定理得证.

转至一般情形,证明类似于定理 6.设 $w^*(t)$是 m-维 Wiener 过程,它独立于 $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$ 而 $\mathfrak{F}_t^*$ 是由 $\mathfrak{F}_t$ 及随机变量族 $\{w^*(s), s \leqslant t\}$ 所生成的σ-代数. 令 $\eta_\varepsilon(t) = \mu(t) + \varepsilon w^*(t)$. 显然,$\eta_\varepsilon^k(t) \in l\mathscr{M}^c\{\mathfrak{F}_t^*, t \geqslant 0\}$ 而

$$\langle\eta_\varepsilon^k,\eta_\varepsilon^j\rangle_t = \langle\mu^k, \mu^j\rangle_t + t\varepsilon^2\delta_{kj} = \int_0^t \varphi_\varepsilon^{kj}(s)ds.$$

矩阵 $\Phi_\varepsilon(s) = \{\varphi_\varepsilon^{kj}(s)\}$ 也是一致满秩的,即

$$\sum_{k,j=1}^{m} \varphi_\varepsilon^{kj}(s) z_k z_j \geqslant \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{m} z_k^2,$$

且由于前面的证明,

$$\eta_\varepsilon(t) = \int_0^t \Phi_\varepsilon^{1/2}(s) d\zeta_\varepsilon(s),$$

其中 $\zeta_\varepsilon(t)$ 是 m-维 Wiener 过程,此时

$$\zeta_\varepsilon(t) = \int_0^t \Phi_\varepsilon^{-1/2}(s) d\eta_\varepsilon(s) = \int_0^t \Phi_\varepsilon^{-1/2}(s) d\mu(s)$$

$$+ \varepsilon \int_0^t \Phi_\varepsilon^{-1/2}(s) dw^*(s).$$

我们来验证过程 $\zeta_\varepsilon(t)$ 对每个 t 在均方意义下收敛于某极限 $\zeta(t)$. 显然,过程 $\zeta(t)$ 也是 Wiener 过程. 只要验证当 $\varepsilon \to 0$ 时 $\zeta_\varepsilon(t)$ 满足 Cauchy 条件就够了. 设

$$\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_{\varepsilon'}(t) = I_1(t) - I_2(t),$$

其中

$$I_1(t) = \int_0^t (\Phi_\varepsilon^{-1/2}(s) - \Phi_{\varepsilon'}^{-1/2}(s)) d\mu(s),$$

$$I_2(t) = \int_0^t (\varepsilon\Phi_\varepsilon^{-1/2}(s) - \varepsilon'\Phi_{\varepsilon'}^{-1/2}(s)) dw^*(s).$$

仍然设 $\Phi(s) = U^*(s)D(s)U(s)$, 其中 $U(s)$ 是正交矩阵, $D(s)$ 是对角形矩阵,其元素是 $\delta_{kj}\lambda_j(s), \lambda_j(s) \geqslant 0$.

这时 $\Phi_\varepsilon^{-1/2}(s) = U^*(s)D_1^\varepsilon(s)U(s)$ 及 $D_1^\varepsilon(s)$ 是元素为 $\delta_{kj}(\varepsilon^2 + \lambda_j(s))^{-1/2}$ 的对角形矩阵. 局部鞅 $I_1(t)$ 的特征矩阵有如下形式:

$$\langle I_1, I_1\rangle_t = \int_0^t (\Phi_\varepsilon^{-1/2}(s) - \Phi_{\varepsilon'}^{-1/2}(s))\Phi(s)(\Phi_\varepsilon^{-1/2}(s)$$

$$- \Phi_{\varepsilon'}^{-1/2}(s)) ds.$$

因为 $\Phi_\varepsilon^{-1/2}(s)\Phi^{1/2}(s) = U^*(s)D_1^\varepsilon(s)D^{1/2}(s)U(s)$, 所以

$$\langle I_1, I_1\rangle_t = \int_0^t U^*(s)(D_1^\varepsilon(s)D^{1/2}(s)$$

$$- D_1^{\varepsilon'}(s)D^{1/2}(s))^2 U(s) ds$$

$$= \int_0^t U^*(s)D_2(s)U(s) ds,$$

其中 $D_2(s)$ 是对角形矩阵，它有元素

$$\delta_{kj}\left(\frac{\lambda_j^{1/2}(s)}{\sqrt{\varepsilon^2+\lambda_j(s)}}-\frac{\lambda_j^{1/2}(s)}{\sqrt{\varepsilon'^2+\lambda_j(s)}}\right)^2=$$

$$\delta_{kj}\frac{\lambda_j(s)(\varepsilon^2-\varepsilon'^2)^2}{(\varepsilon^2+\lambda_j(s))(\varepsilon'^2+\lambda_j(s))(\sqrt{\varepsilon^2+\lambda_j(s)}+(\sqrt{\varepsilon'^2+\lambda_j(s)})^2}.$$

由所求出的表达式直接见到，局部鞅 $I_1(t)$ 的特征矩阵的导数一致有界且当 ε，$\varepsilon'\to 0$ 时趋于 0，因此对所有 $t>0$ 以概率 1，$\langle I_1,I_1\rangle_t\to 0$。

其次，局部鞅 $I_2(t)$ 的特征矩阵有下形式：

$$\langle I_2,I_2\rangle_t=\int_0^t[\varepsilon\Phi_\varepsilon^{-1/2}(s)-\varepsilon'\Phi_{\varepsilon'}^{-1/2}(s)]^2ds,$$

而且 $\varepsilon\Phi_\varepsilon^{-1/2}(s)=U^*(s)D_3(s)U(s)$，而矩阵 $D_3(s)$ 的元素等于 $\delta_{kj}\varepsilon(\varepsilon^2+\lambda_j(s))^{-1/2}$，因此是一致有界的且当 $\varepsilon\to 0$ 时趋于 0。

因而证明了：对每个 $t>0$ 当 ε'，$\varepsilon\to 0$ 时，$\mathbf{E}|\zeta_\varepsilon(t)-\zeta_{\varepsilon'}(t)|^2\to 0$ 和极限 $\lim\zeta_\varepsilon(t)=\zeta(t)$ 存在。

下面 $\zeta(t)$ 将表示对应过程的连续修正。

余下要证明

$$\mathbf{P}-\lim\eta_\varepsilon(t)=\int_0^t\Phi^{1/2}(s)d\zeta(s).$$

我们有

$$\eta_\varepsilon(t)=\int_0^t\Phi_\varepsilon^{1/2}(s)d\zeta(s)+\int_0^t\Phi_\varepsilon^{1/2}d(\zeta_\varepsilon(s)-\zeta(s))$$
$$=I_3(t)+I_4(t).$$

显然当 $\varepsilon\to 0$ 时依概率 $I_3(t)\to\int_0^t\Phi^{1/2}(s)d\zeta(s)$。另一方面，由前面已得到 $\zeta_\varepsilon(t)-\zeta_{\varepsilon'}(t)$ 的特征的表达式不难见到，局部鞅 $I_4(t)$ 的特征矩阵形为

$$\int_0^t U^*(s)(\varepsilon^2\mathbf{I}+D_4(s))U(s)ds,$$

其中 $\mathbf{I}$ 是单位矩阵，而 $D_4(s)$ 是元素为

$$\delta_{kj}\frac{\varepsilon^4\chi_j(s)}{(\sqrt{\lambda_j(s)}+\sqrt{\varepsilon^2+\lambda_j(s)})^2}$$

的对角形矩阵，$\chi_j(s)$ 是集合 $\{s:\lambda_j(s)=0\}$ 的示性函数. 因此，

$$\mathbf{P}-\lim_{\delta\to 0} I_4(t)=0,\forall t>0.$$

定理得证.

注. 当函数 $\varphi(s)>0, s>0$ 或对应地矩阵 $\Phi(s)$ 一致满秩时，在定理 6 和 7 中构造的 Wiener 过程适应于流 $\{\mathfrak{F}_t, t>0\}$. 特别，如果 $\mathfrak{F}_t^\mu=\sigma\{\mu(s), s\leqslant t\}$, $\mathfrak{F}_t^\zeta=\sigma\{\zeta(s), s\leqslant t\}$，那末在上面提到的条件下

$$\mathfrak{F}_t^\mu=\mathfrak{F}_t^\zeta. \tag{18}$$

如果这条件不成立，那末在定理 6 和 7 中仅仅下述结论得到证明：可构造新的概率空间 $\{\Omega^*, \mathfrak{S}^*, \mathbf{P}^*\}$ 及定义在其上的适应于 $\{\mathfrak{F}_t, t\geqslant 0\}$ 的过程 $\mu'(t),\zeta(t),\phi(t), t\geqslant 0$，其中 $\zeta(t)$ 是 Wiener 过程，$\mu'(t)$ 是随机等价于（在广义下）过程 $\mu(t)$ 的局部鞅，使得

$$\mu'(t)=\int_0^t \phi(s)d\zeta(s).$$

推论 如果向量局部鞅 $\mu(t)\in l.\mathscr{M}^c, t\geqslant 0$ 有元素是

$$\langle \mu^k, \mu^j\rangle_t=\int_0^t \sigma_{kj}(\xi(s))ds$$

的特征矩阵，其中 $\sigma(x)=\{\sigma_{kj}(x)\}$ 是非随机非负定 Borel 函数矩阵，$\xi(t)$ 是适应于 $\{\mathfrak{F}_t, t\geqslant 0\}$ 的随机过程，那末过程 $\mu(t)$ 能表为

$$\mu^k(t)=\int_0^t \sum_{j=1}^m b_{kj}(\xi(s))dw^j(s),$$

其中 $w(t)=\{w^1(t),\cdots, w^m(t)\}$ 是 Wiener 过程，而 $b(x)=\{b_{kj}(x)\}$ 是非负定对称矩阵，$b^2(x)=\sigma(x)$.

局部平方可积鞅分解为连续与间断分量 设 $\xi(t)=\{\xi^1(t),\cdots,\xi^m(t)\}$, $t\geqslant 0$，是适应于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t\geqslant 0\}$ 的 m-维局部平方可积鞅，而且 σ-代数 $\mathfrak{F}_t$ 包含 Ω 的概率为 0 的子集. 在本段将建立过程 $\xi(t)$ 的分解式

$$\xi(t)=\xi_c(t)+\xi_d(t),$$

其中 $\xi_c(t)\in l\mathscr{M}_2^c$ 且对任意连续局部鞅 $\eta(t)$，乘积 $\eta(t)\xi_d^j(t)(j=1,\cdots,m)$ 是局部平方可积鞅. 按前述的方法，我们限于考虑有连续特征的平方可积（局部平方可积）鞅. 首先研究过程 $\xi(t)\in\mathscr{M}_2^r$，然后将所得到的结果推广至过程 $\xi(t)\in l\mathscr{M}_2^r$.

于是，设 $\xi(t)\in\mathscr{M}_2^c(\mathfrak{F}_t, t\geqslant 0)$. 以 $\mathfrak{B}_0^m$ 表示在 $\mathscr{R}^m$ 中其闭包不包含点 0 的 Borel 集合类，且设 $\nu(t,A)$ 是函数 $\xi(s)$ 在区间 $(0,t]$ 上其跳跃值落在集合 A 中的跳跃数目，其中 $A\in\mathfrak{B}_0^m$. 因为过程 $\xi(t)$ 的样本函数以概率 1 属于 $\mathscr{D}^m[0,\infty)$，所以过程 $\nu(t,A)$ 以概率 1 对所有 $t\geqslant 0, A\in\mathfrak{B}_0^m$ 有定义. 我们来完成它在整个 Ω 上的定义，如果 $\xi(t,\omega)\notin\mathscr{D}^m[0,\infty)$，令 $\nu(t,A)=0$. 显然，过程 $\nu(t,A)$，$A\in\mathfrak{B}_0^m$ 是适应于 σ 代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t\geqslant 0\}$，它的样本函数是非负的，单调不减的，取整数值及右连续的.

考虑随机时间序列 $\sigma=\tau_0\leqslant\tau_1\leqslant\cdots\leqslant\tau_n=\tau\leqslant T$ 并令

$$\lambda=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\tau_k-\tau_{k-1}|.$$

因为

$$\sum_{\substack{|\delta\xi(s)|>\varepsilon\\ \sigma<s\leqslant\tau}}|\delta\xi(s)|^2\leqslant\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}|\xi(\tau_k)-\xi(\tau_{k-1})|^2(\mathrm{mod}\,\mathbf{P}),$$

其中

$$\delta\xi(s)=\xi(s)-\xi(s-1),$$

所以

$$\mathbf{E}\left\{\sum_{\substack{|\delta\xi(s)|>\varepsilon\\ \sigma<s\leqslant\tau}}|\delta\xi(s)|^2|\,\mathfrak{F}_\sigma\right\}\leqslant\mathbf{E}\{|\xi(\tau)-\xi(\sigma)|^2|\mathfrak{F}_\sigma\},\qquad(19)$$

且若 $A\subset\{|x|:|x|\geqslant\varepsilon\}$，那末以概率 1，有

$$\mathbf{E}\{\nu(\tau,A)-\nu(\sigma,A)|\mathfrak{F}_\sigma\}\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{E}\{|\xi(\tau)$$

$$-\xi(\sigma)|^2|\mathfrak{F}_\sigma\}=\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{E}\{\alpha(\tau)-\alpha(\sigma)|\mathfrak{F}_\sigma\}<\infty,$$

其中

$$\alpha(t)=\sum_{k=1}^{m}\langle\mu^k,\mu^k\rangle_t.$$

特别是,过程 $\nu(t, A)$ 当 $A\in\mathfrak{B}_0^m$ 时是可积的，且因为函数 $\alpha(t)$ 连续,过程 $\nu(t,A)$ 是正则的,即是，对任意单调不减随机时间序列 $\tau_n, n=1,2,\cdots(\tau_n\leqslant T,\lim\tau_m=\tau)$,

$$\lim \mathbf{E}\nu(\tau_n,A)=\mathbf{E}\nu(\tau,A).$$

用通常的方法按函数 $\nu(t, A)$ 可构造测度. 为此目的，令 $\nu(\Delta\times A)=\nu(\Delta,A)=\nu(t+\Delta t,A)-\nu(t, A)$. 函数 $\nu(\Delta\times A)$ 在半环 $\mathfrak{T}_0\times\mathfrak{B}_0^m$ 的集合上是可加的， 其中 $\mathfrak{T}_0$ 是形为 $\Delta=(t,t+\Delta t]$ 的区间所成的半环. 它可以开拓为空间$[0,\infty)\times\mathscr{R}^m$ 上的 Borel 集合的 σ-代数上的测度.

对任意 Borel 非负函数 $f(s,u)$，积分

$$\int_0^t\int_{\mathscr{R}^m}f(s,u)\nu(ds,du)$$

有定义,而且

$$\int_0^t\int_{\mathscr{R}^m}f(s,u)\nu(ds,du)=\sum_{\substack{s\leqslant t\\ \delta\xi(s)\neq 0}}f(s,\delta\xi(s)),\qquad(20)$$

及等式(20)右边的和包含不超过可列个被加项.

令 $f(s,u)=\chi_\Delta(t)|u|^2$，我们得

$$\int_{\mathscr{R}^m}|u|^2\nu(\Delta,du)=\sum_{s\in(t,t+\Delta t]}|\delta\xi(s)|^2.$$

因为不等式(19),所以得

$$\mathbf{E}\left\{\int_{\mathscr{R}^m}|u|^2\nu(\Delta,du)|\mathfrak{F}_t\right\}$$
$$\leqslant\mathbf{E}\{|\xi(t+\Delta t)-\xi(t)|^2|\mathfrak{F}_t\},$$

$$\mathbf{E}\int_{\mathscr{R}^m}|u|^2\nu(\Delta,du)\leqslant\mathbf{E}|\xi(t+\Delta t)$$
$$-\xi(t)|^2<\infty.$$

除联系于过程 $\xi(t)$ 外,我们考虑有如下性质的任意随机测度:

1) 函数 $\nu(t,A)$ 定义在$[0,\infty)\times\mathfrak{B}_0^m$ 上,取非负整数值且对

任意 $\varepsilon > 0, T > 0, \mathbf{E}\nu(T, \mathscr{R}^m \backslash S_\varepsilon) < \infty$，其中 S_ε 是 $\mathscr{R}^m$ 中半径为 ε 中心在 0 点的球;

2) 在固定 t 时，$\nu(t, A)$ 是 $\mathfrak{F}_t$-可测的，而当固定 A 时作为变量 t 的函数时它是单调不减的;

3) 对任意单调不减随机时间序列 $\tau_n(\lim \tau_n = \tau \leqslant T)$

$$\lim \mathbf{E}\nu(\tau_n, A) = \mathbf{E}\nu(\tau, A).$$

今后，有性质 1)—3) 的函数将称为整值随机测度。对在空间 $[0,\infty) \times \mathscr{R}^m$ 的 Borel 集的 σ-代数上，由等式 $\nu(\Delta \times A) = \nu(t + \Delta t, A) - \nu(t, A)$，其中 $\Delta = (t, t + \Delta t]$，所定义的测度 $\nu(\cdot)$ 仍保持这名称。当固定 A 时函数 $\nu(t, A)$，$t \geqslant 0$ 是正则 $\mathfrak{F}_t$-下鞅。由于 Meyer 定理(§1 定理 13)，$\nu(t, A)$ 有而且是唯一的表达式

$$\nu(t, A) = \mu(t, A) + \pi(t, A),$$

其中 $\pi(t, A)$ 是连续单调不减可积过程，而 $\mu(t, A)$ 是鞅。

我们指出 $\mu(t, A) \in l\mathscr{M}_2$。事实上，令

$$\tau_n = \inf\{t: (\nu(t, A) \geqslant n) \cup (\pi(t, A) \geqslant n) \cup (t = T)\},$$

$$\nu_n(t, A) = \nu(t \wedge \tau_n, A), \pi_n(t, A) = \pi(t \wedge \tau_n, A),$$

$$\mu_n(t, A) = \mu(t \wedge \tau_n, A).$$

这时 $\nu_n(t, A) \leqslant n$，$\pi_n(t, A) \leqslant n$ 及 $|\mu_n(t, A)| \leqslant n$。因此，$\mu(t, A) \in l\mathscr{M}_2$。

现来验证过程 $\mu(t, A)$ 的特征是 $\pi(t, A)$。我们从验证 $\mu_n^2(t, A)$ 是正则下鞅开始。

事实上，设 τ'_n 是单调不减随机时间序列，$\lim \tau'_n = \tau' \leqslant T$，

$$\mu_*(t) = \mu_m(t, A), \nu_*(t) = \nu_m(t, A),$$

$$\pi_*(t) = \pi_m(t, A).$$

那末

$$\mathbf{E}(\mu_*^2(\tau') - \mu_*(\tau'_n)) \leqslant 2n\mathbf{E}[(\nu_*(\tau') - \nu_*(\tau'_n)) + \mathbf{E}(\pi_*(\tau') - \pi_*(\tau'_n))].$$

由于函数 $\pi_*(t)$ 的连续性和一致可积性，当 $n \to \infty$ 时，$\mathbf{E}(\pi_*(\tau')$

$-\pi_*(\tau'_n)) \to 0$. 正如前面所指出的，$\mathbf{E}(\nu_*(\tau') - \nu_*(\tau'_n)) \to 0$. 因此，$\mathbf{E}\mu_*^2(\tau'_n) \to \mathbf{E}\mu_*^2(\tau')$. 即 $\mu_*^2(t)$ 是正则下鞅.

由 §1 定理 13 重新推得鞅 $\mu_*(t)$ 的特征是连续的. 以 $\alpha_*(t)$ 表示它. 为证明等式 $\alpha_*(t) = \pi_*(t)$, 我们利用 §1 定理 21,据此

$$\alpha_*(t) = \lim_{|\delta| \to 0} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}\{\Delta\mu^2(t_k) | \mathfrak{F}_{t_k}\}$$

在 L_1 中收敛，其中 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t$, $\Delta\mu_*^2(t_k) = \mu_*^2(t_{k+1}) - \mu_*^2(t_k)$, $|\delta| = \max(t_{k+1} - t_k)$. 我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left|\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}\{\Delta\mu_*^2(t_k) | \mathfrak{F}_{t_k}\} - \pi_*(t)\right| \\
&\leqslant \mathbf{E}\left|\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}\{\Delta\mu_*^2(t_k) - \Delta\nu_*(t_k) | \mathfrak{F}_{t_k}\}\right| \\
&\quad + \mathbf{E}\left|\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}\{\Delta\nu_*(t_k) | \mathfrak{F}_{t_k}\} - \pi_*(t)\right|.
\end{aligned}$$

由于 $\pi_*(t)$ 的定义及 §1 定理 21 所得到的不等式右边的第二个被加项趋于 0. 至于第一个被加项可估计如下:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left|\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}\{\Delta\mu_*^2(t_k) - \Delta\nu_*(t_k) | \mathfrak{F}_{t_k}\}\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}|[\Delta\mu_*(t_k)]^2 - \Delta\nu_*(t_k)| \\
&\leqslant \mathbf{E}\sum_{k=0}^{N-1} |(\Delta\nu_*(t_k))^2 - \Delta\nu_*(t_k) \\
&\qquad - 2\Delta\nu_*(t_k)\Delta\pi_*(t_k) + (\Delta\pi_*(t_k))^2| \\
&\leqslant \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{N-1} (\Delta\nu_*(t_k))^2 - \Delta\nu_*(t_k)\right. \\
&\qquad \left. + 2\max_k \Delta\pi_*(t_k)(\nu_*(t) + \pi_*(t))\right].
\end{aligned}$$

位于方括弧中的表达式一致地（按 N）有界（它不超过 $\nu_*^2(t) + 2\pi_*(t)(\nu_*(t) + \pi_*(t)) \leqslant 5n^2$）且以概率 1 趋于 0. 所以

$$\mathbf{E}\left|\sum_{k=0}^{N-1}\mathbf{E}\{\Delta\mu_*^2(t_k)-\Delta\nu_*(t_k)\middle|\mathfrak{F}_{t_k}\}\right.\to 0$$

当 $|\delta|\to 0$ 时。

因此，$\alpha_*(t)=\pi_*(t)$。由此得 $\mu(t,A)$ 的特征等于 $\pi(t,A)$。

设 $A_i\in\mathfrak{B}_0^m$, $i=1,2,A_1\cap A_2=\varnothing$。因为 $\nu(t,A_1\cup A_2)=\nu(t,A_1)+\nu(t,A_2)$，所以由于分解(21)的唯一性，$\pi(t,A_1\cup A_2)=\pi(t,A_1)+\pi(t,A_2)$。由此得局部平方可积鞅之和 $\mu(t,A_1)+\mu(t,A_2)$ 的特征等于 $\pi(t,A_1)+\pi(t,A_2)$ 当且仅当乘积 $\mu(t,A_1)\mu(t,A_2)$ 是局部鞅。

定义 过程 $\mu_1(t)$ 与 $\mu_2(t)$, $\mu_i(t)\in l\mathscr{M}_2(\mu_1(0)=\mu_2(0)\equiv 0)$ 称为正交的，如果 $\mu_1(t)\mu_2(t)$ 是局部鞅。

由定义得，如果 $\mu_1(t)$ 和 $\mu_2(t)$ 正交，τ 是导出 $\mu_1(t)$ 和 $\mu_2(t)$ 的随机时间，且 $\mu_i^*(t)=\mu_i(t\wedge\tau)$，那末 $(\mathfrak{F}_t^*=\mathfrak{F}_{t\wedge\tau})$

$$\mathbf{E}\{\Delta\mu_1^*\Delta\mu_2^*|\mathfrak{F}_t^*\}=\mathbf{E}\{\Delta(\mu_1^*\mu_2^*)|\mathfrak{F}_t^*\}=0.$$

特别是，

$$\mathbf{E}\mu_1^*(t)\mu_2^*(t)=0,\forall t>0.$$

因此，如果 $A_1\cap A_2=\varnothing$，$A_i\in\mathfrak{B}_0^m$，那末 $\mu(t,A_1)$ 与 $\mu(t,A_2)$ 是正交局部平方可积鞅。现研究函数 $\pi(t,A)$。上面已经提到作为 A 的函数它是可加的。而且，如果 $B_n,n=1,2,\cdots$ 是 $\mathscr{R}^m$ 中单调不减 Borel 集的序列，$B_0=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$ 和 $B_0\in\mathfrak{B}_0^m$，那末由等式 $\nu(t,B_0)=\lim\nu(t,B_n)$ 得

$$\mathbf{E}\pi(t,B_n)=\mathbf{E}\nu(t,B_n)\to\mathbf{E}\nu(t,B_0)=\mathbf{E}\pi(t,B_0).$$

但这时既在 L_1 中又以概率 1 有 $\pi(t,B_n)\to\pi(t,B_0)$。

注意，如果令 $\pi(t,\{0\})=0$，其中$\{0\}$是由单点 0 组成的集合，那末存在随机函数 $\pi(t,A)$ 的修正，使得其现实定义在$[0,\infty)\times\mathfrak{B}^m$ 上（可以取值$+\infty$）且以概率 1 对任意 $t\in[0,\infty)$ 是 $\mathfrak{B}^m$ 上的测度，而对任意固定 $A\in\mathfrak{B}^m$，它是变量 t 的单调不减连续函数。

这个结论的证明可类似于第一卷第一章 §1 定理 3 关于随机元的正则条件分布的存在性的证明。

下面如无特别声明，我们将 $\pi(t, A)$ 理解为就是该随机函数的这样的修正。

定义 适应于流 $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ 的鞅(局部平方可积鞅)族 $\mu(t, A), A \in \mathfrak{B}_0^m, t \geq 0, \mu(0, A) = 0$，被称为正交鞅测度(正交局部鞅测度)，如果满足如下条件：

1) $\mu(t, A_1) + \mu(t, A_2) = \mu(t, A_1 \cup A_2)$，当 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ 时，

2) $\mu(t, A_1)\mu(t, A_2) \in l\mathscr{M}$，当 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$，

3) $\langle \mu(\cdot, A), \mu(\cdot, A) \rangle_t = \pi(t, A)$，其中 $\pi(t, A)$ 是随机函数，当固定 t 时以概率 1 是 $\mathfrak{B}_0^m$ 上的测度，而固定 A 时是变元 t 的单调不减连续函数。

函数 $\pi(t, A)$ 称为鞅测度 $\mu(t, A)$ 的特征。"正交"一词有时将略去，因为非正交的鞅测度今后不考虑。

上面的论述证明了下定理。

定理 8 任意满足条件 1)—3) 的整数随机测度 $\nu(t, A), (t, A) \in [0, \infty) \times \mathfrak{B}_0^m$，可表为

$$\nu(t, A) = \mu(t, A) + \pi(t, A), \tag{21}$$

其中 $\mu(t, A)$ 是有特征 $\pi(t, A)$ 的正交局部鞅测度。

在已得到的测度 $\nu(t, A)$ 的分解式中，函数 $\pi(t, A)$ 起两重作用。一方面，差 $\nu(t, A) - \pi(t, A)$ 是鞅(局部鞅)。按此，我们称测度 $\pi(t, A)$ 与 $\nu(t, A)$ 相联系。另一方面，函数 $\pi(t, A)$ 是 $\mu(t, A) = \nu(t, A) - \pi(t, A)$ 的特征。以上事实是如下一个初等结果的十分重要的推广：Poisson 分布的数学期望与方差相等。

因为 $\pi(\Delta, A)$ 以概率 1 是测度，所以对任意非负 Borel 函数 $f(t, u), (t, u) \in [0, \infty) \times \mathscr{R}^m$，积分

$$\int_0^\infty \int_{\mathscr{R}^m} f(t, u) \pi(dt, du)$$

有定义。

我们来建立这个积分与按测度 $\nu(\Delta, A)$ 的积分之间的联系。

我们记得，$\mathfrak{L}_0$ 或 $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{T}_0 \times \mathfrak{B}_0^m)$ 表示以概率 1 有界、适应于σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$ 且关于半环 $\mathfrak{T}_0 \times \mathfrak{B}_0^m$ 的集合的随机简单函数类，即是形如

$$\varphi(t,u) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \chi_{\Delta_k \times A_k}(t,u)$$

的函数类，其中 $\Delta_k = (t_{k-1}, t_k]$，$0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n, A_k \in \mathfrak{B}_0^m$ 和 γ_k 是以概率 1 有界的 $\mathfrak{F}_{t_{k-1}}$-可测随机变量（$|\gamma_k| \leqslant c, k = 1, \cdots, n, c$ 是非随机常数）。由公式(21)得，如果 $\varphi \in \mathfrak{L}_0$，那末

$$\mathbf{E}\int_0^\infty \int_{\mathscr{R}^m} \varphi(t,u)\nu(dt,du) = \mathbf{E}\int_0^\infty \int_{\mathscr{R}^m} \varphi(t,u)\pi(dt,du). \quad (22)$$

后一关系式也适用于按变量 (t,u,ω) 可测，适应于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$，且当 (u, ω) 固定时对所有 $t > 0$ 有左极限与右连续的任意非负函数 $\varphi(t,u)$。为证明这点，我们先考虑满足补充条件的函数 $\varphi(t,u)$：它是以概率 1 有界且当 $t \geqslant T$ 或 $u \in S_\varepsilon$ 时等于 0。这时易见等式 (22) 对形如 $\varphi_\varepsilon(t, u) = \varphi(t_{k-1}, u)$，其中 $t \in (t_{k-1}, t_k]$，的函数 $\varphi_\varepsilon(t,\omega)$ 成立。当 $\max\limits_k(t_k - t_{k-1}) \to 0$ 时，取极限得

$$\mathbf{E}\int_0^\infty \int_{\mathscr{R}^m} \varphi(t-,u)\nu(dt,du) = \mathbf{E}\int_0^\infty \int_{\mathscr{R}^m} \varphi(t-,u)\pi(dt,du).$$

但函数 $\varphi(t-,u) = \varphi(t-,u,\omega)$ 和 $\varphi(t,u) = \varphi(t,u,\omega)$ 既按测度 $\nu(dt,du,\omega)\mathbf{P}(d\omega)$，也按测度 $\pi(dt,du,\omega)\mathbf{P}(d\omega)$ 几乎处处相等。由此对所考虑的函数类得等式(22)。按单调不减函数序列通常使用的极限转换使得式(22)对满足以前指出条件的任意非负函数也成立。

特别是，如果整值随机测度 $\nu(t,A)$ 满足条件

$$\mathbf{E}\int_{\mathscr{R}^m} |u|^2 \nu(t,du) < \infty,$$

则对结合于它的测度 $\pi(t,A)$

$$\mathbf{E}\int_{\mathscr{R}^m}|u|^2\pi(t,du)<\infty. \tag{23}$$

定理 9 设 $\xi(t)\in\mathscr{M}_2',t\in[0,\infty)$. 这时

$$\xi(t)=\xi_c(t)+\int_{\mathscr{R}^m}u\mu(t,du)\ \forall t>0, \tag{24}$$

其中 $\xi_c(t)\in\mathscr{M}_2^c$, 而 $\mu(t,A)$ 是有特征 $\pi(t,A)$ 的正交测度,而且

$$\mu(t,A)+\pi(t,A)=\nu(t,A),$$

$\nu(t,A)$ 是过程 $\xi(s),0\leqslant s\leqslant t$ 的跳跃值落在集合 $A(A\in\mathfrak{B}_0^m)$中的跳跃数目,而

$$\mathbf{E}\int_{\mathscr{R}^m}|u|^2\pi(t,du)<\infty,\forall t>0.$$

过程

$$\xi_d(t)=\int_{\mathscr{R}^m}u\mu(t,du)$$

的每个分量和适应于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t,t\in[0,T]\}$ 的任意连续鞅正交.

证. 设 $\mu(t,A)$ 和 $\pi(t,A)$ 如上所定义. 因为 $\pi(t,A)$ 是鞅测度的特征和由(23)得, $u^k\in H_2^\pi(u=(u^1,u^2,\cdots,u^m),\ k=1,\cdots,m)$, 那末所定义的积分

$$\xi_d(t)=\int_{\mathscr{R}^m}u\mu(t,du)$$

作为 t 的函数是平方可积鞅,而且

$$\alpha_d(t)\underset{\text{定义}}{=}\sum_{k=1}^m\langle\xi_d^k,\xi_d^k\rangle_t=\int_{\mathscr{R}^m}|u|^2\pi(t,du).$$

设 S_ε 是在 $\mathscr{R}^m$ 中的中心在 0 半径为 $\varepsilon>0$ 的球, $\bar{S}_\varepsilon=\mathscr{R}^m\backslash S_\varepsilon$. 令

$$\xi_d^\varepsilon(t)=\int_{\bar{S}_\varepsilon}u\mu(t,du).$$

这时, 我们将 $\xi_d(t)$ 和 $\xi_d^\varepsilon(t)$ 理解为样本函数属于 $\mathscr{D}^m[0,T]$ 的过程. 因为

$$\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_d(t)-\xi_d^\varepsilon(t)|^2\leqslant 4\mathbf{E}|\xi_d(T)-\xi_d^\varepsilon(T)|^2$$

$$=4\mathbf{E}\int_{S_\varepsilon}|u|^2\pi(T,du)\to 0,\text{当 } \varepsilon\to 0 \text{ 时},$$

所以可选取序列 ε_n，使得 $\xi_d^{(n)}(t)=\xi_d^{\varepsilon_n}(t)$ 按 t 以概率 1 收敛于 $\xi_d(t)$。另一方面，由 $\pi(t,A)$是 t 的连续函数及积分 $\int_{\mathscr{R}^m}|u|^2\pi(T,du)$ 的有限性(以概率 1)得，积分

$$\int_{S_\varepsilon}u\pi(t,du)$$

以概率 1 是变量 t 的连续函数。因为

$$\xi_d^\varepsilon(t)=\int_{S_\varepsilon}u\nu(t,du)-\int_{S_\varepsilon}u\pi(t,du),$$

所以对所有 $t\in[0,T]$，函数 $\xi_d^\varepsilon(t)$ 的跳跃与 $\int_{S_\varepsilon}u\nu(t,du)$ 相等(modP)。于是差 $\xi(t)-\xi_d(t)$ 不具有取值于 $\bar{S}_\varepsilon$ 的跳跃。

令 $\xi_c(t)=\xi(t)-\xi_d(t)$。我们有

$$\begin{aligned}
&\sup_t|\xi_c(t)-\xi_c(t-)|\\
&\quad\leqslant\sup_t\{|(\xi(t)-\xi_d^{(n)}(t))-(\xi(t-)-\xi_d^{(n)}(t-))|\\
&\qquad+|\xi_d(t)-\xi_d^{(n)}(t)|+|\xi_d(t-)-\xi_d^{(n)}(t-)|\}\\
&\quad\leqslant\varepsilon_n+2\sup_t|\xi_d(t)-\xi_d^{(n)}(t)|\to 0(\mathrm{mod}\mathbf{P}).
\end{aligned}$$

就是说，对所有 $t\in[0,T]$，以概率 1 有 $\xi_c(t)=\xi_c(t-)$。过程 $\xi_c(t)$ 的连续性得证。

现来证明过程 $\xi_d(T)$ 的每个分量正交于任意连续鞅(对于 σ-代数流 $\mathfrak{F}_t$)。如此，我们先建立 $\mathscr{M}_1^c$ 中的任意鞅 $\eta(t)$ 与 $\mu(t,A)$ $(A\in\mathfrak{B}_0^m)$ 的正交性。为了计算过程 $\eta(t)$ 和 $\mu(t,A)$ 的互特征，我们利用 §1 定理 21 的推论 2。

在 L_1 收敛意义下，有

$$\langle\eta,\mu(\cdot,A)\rangle_t=\lim_{|\delta|\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\{\Delta\eta(t_k)\Delta\mu(t_k,A)|\mathfrak{F}_{t_k}\},$$

$$\delta=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|t_k-t_{k-1}|$$

另一方面，

$$\mathbf{E}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\{\Delta\eta(t_k)\Delta\mu(t_k,A)|\mathfrak{F}_{t_k}\}\right|$$

$$\leqslant \mathbf{E}\max_k|\Delta\eta(t_k)|(\nu(T,A)+\pi(t,A)).$$

因为当 $|\delta|\to 0$ 时 $\max_k|\Delta\eta(t_k)|\to 0$ 且

$$\max_k\Delta\eta(t_k)(\nu(t,A)+\pi(t,A))$$

$$\leqslant 2\max_{0\leqslant t\leqslant T}\eta(t)(\nu(t,A)+\pi(t,A)),$$

而且后一不等式的右边是可积函数，所以

$$\mathbf{E}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\{\Delta\eta(t_k)\Delta\mu(t_k,A)|\mathfrak{F}_{t_k}\}\right|,\ 当\ |\delta|\to 0\ 时,$$

和 $\langle\eta,\mu(\cdot,A)\rangle_t\equiv 0$。现令

$$\zeta_n(t)=\int_{\mathscr{R}^m}g_n(u)\mu(t,du),$$

其中 $g_n(u)=\sum c_k\chi_{A_k}(u),A_k\in\mathfrak{B}_0^m$。由上述事实得 $\langle\eta,\zeta_n\rangle_t=0$. 利用不等式 $|\langle\eta,\zeta\rangle_t|^2\leqslant\langle\eta,\eta\rangle_t\langle\zeta,\zeta\rangle_t$(§1(51)) 及取极限，不难得到对任意形为

$$\zeta(t)=\int_{\mathscr{R}^m}g(u)\mu(t,du)$$

的鞅有 $\langle\eta,\zeta\rangle_t\equiv 0$，其中 $g(u)$ 是满足条件

$$\mathbf{E}\int_{\mathscr{R}^m}|g(u)|^2\pi(T,du)=\int_{\mathscr{R}^m}|g(u)|^2m(T,du)<\infty,$$

的非随机函数，而 $m(t,A)=\mathbf{E}\pi(t,A)$ 是 $\mathfrak{B}_0^m$ 上的测度。令 $\varphi(u)=u^k$，我们得

$$\langle\eta,\zeta_d^k\rangle_t\equiv 0,\quad k=1,2,\cdots,m.$$

定理得证。

注。形为

$$\xi(t)=\xi_c(t)+\zeta(t)$$

的展式是唯一的，其中 $\xi_c(t)\in\mathscr{M}_2^c$，而 $\zeta(t)$ 是鞅，它的分量正交于所有连续鞅。

为了证明，只要考虑一维情形就够了. 如果还存在一个这样类型的分解 $\xi(t)=\xi_c'(t)+\zeta'(t)$ 那末 $\xi_c(t)-\xi_c'(t)=\zeta'(t)-\zeta(t)$. 因为 $\zeta'(t)$ 和 $\zeta(t)$ 既正交于过程 $\xi_c(t)$, 又正交于 $\xi_c'(t)$, 所以

$$\langle \xi_c-\xi_c',\zeta'-\zeta\rangle_t=\langle \xi_c-\xi_c',\xi_c-\xi_c'\rangle_t\equiv 0$$

由此,对每个 $t\in[0,T]$, $\xi_c(t)=\xi_c'(t)(\mathrm{mod}\mathbf{P})$, 由 $\xi_c(t)$ 和 $\xi_c'(t)$ 的连续性得知对所有 $t\in[0,T]$ 以概率 1 有 $\xi_c(t)=\xi_c'(t)$.

推论. 设 $\xi(t)\in l\mathscr{M}_2, t\in[0,T]$. 这时存在局部鞅$\xi_c(t)\in l\mathscr{M}$ 及定义在 $\mathfrak{B}_0^m$ 上有特征 $\pi(t,A)$ 的正交局部鞅测度 $\mu(t,A)$, 使得

$$\xi(t)=\xi_c(t)+\xi_d(t),\quad \xi_d(t)=\int_{\mathfrak{R}^m}u\mu(t,du),$$

$$\mu(t,A)+\pi(t,A)=\nu(t,A),$$

其中 $\nu(t,A)$ 如定理 9 中所定义. 这时对任意 $\eta(t)\in l\mathscr{M}_2^c$

$$\langle\eta,\xi_d^k\rangle_t\equiv 0,\quad k=1,\cdots,m.$$

证. 设 τ 是 $\xi(t)$ 的任意导出随机时间. 根据前面的定理,

$$\xi(t\wedge\tau)=\xi_\tau^{(\tau)}(t)+\xi_d^{(\tau)}(t);\ \xi_d^{(\tau)}(t)=\int_{\mathfrak{R}^m}u\mu_\tau(t,du),$$

而且 $\mu_\tau(t,A)+\pi_\tau(t,A)=\nu(t\wedge\tau,A)$ 及 $\pi_\tau(t,A)$ 是联系于下鞅 $\nu(t\wedge\tau,A)$ 的增过程. 因此, $\pi_\tau(t,A)=\pi(t\wedge\tau,A)$ 及 $\mu_\tau(t,A)=\mu(t\wedge\tau,A)$. 在作出这些说明后，得出推论的结果是显然的.

间断鞅的函数的随机微分 设 $\nu(t,A), t\in[0,T]$, 是整值随机测度(假定它满足上段所列举的条件), $\mu(t,A)$ 是联系于它的鞅测度, $\pi(t,A)$ 是它的特征且

$$\mathbf{E}\int_{\mathfrak{R}^m}u^2\pi(T,du)<\infty.$$

以 δ 表示区间 $(0,T]$ 上用 $\Delta_k, k=1,\cdots,n$ 作出的某个分割. 显然,对任意 $A\in\mathfrak{B}_0^m$ 以概率 1 有

$$\lim_{|\delta|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\nu^2(\Delta_k,A)=\nu(T,A).$$

由连续性与函数 $\pi(t,A)$ 按 t 的单调性得到以概率 1 有

$$\lim_{|\delta|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\pi^2(\Delta_k,A)=0,$$

$$\lim_{|\delta|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\nu(\Delta_k,A)\pi(\Delta_k,A)=0.$$

如果 $A_1\cap A_2=\varnothing$，$A_i\in\mathfrak{B}_0^m$，那末

$$\lim_{|\delta|\to 0}\sum_{k=0}^{n}\nu(\Delta_k,A_1)\nu(\Delta_k,A_2)=0(\mathrm{mod}\mathbf{P}).$$

由上述等式得

$$\sum_{k=0}^{n}\mu^2(\Delta_k,A)\to\nu(T,A)\ (\mathrm{mod}\mathbf{P}),\tag{25}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\mu(\Delta_k,A_1)\mu(\Delta_k,A_2)\to 0(\mathrm{mod}\mathbf{P}).\tag{26}$$

设 $\gamma(t,u)\in\mathfrak{L}_0(\mathfrak{T}_0\times\mathfrak{B}_0^m)$ 且

$$\zeta(t)=\zeta(t,\gamma)=\int_0^t\int_{\mathfrak{R}^m}\gamma(s,u)\mu(ds,du).$$

利用上述关系式，不难求得过程 $\zeta(t)$ 的平方变差 $[\zeta,\zeta]$：

$$[\zeta,\zeta]_T\underset{\text{定义}}{=\!=}\mathbf{P}\text{-}\lim_{|\delta|\to 0}\sum_{r=1}^{n}(\zeta(t_r)-\zeta(t_{r-1}))^2.\tag{27}$$

因为当 $|\delta|\to 0$ 时，依概率差 $\zeta(t_r)-\zeta(t_{r-1})\to 0$，所以在计算极限(27)时可认为点 s_k 包含在分割 δ 中．应用式（25）于区间 $(s_{k-1},s_k]$（代替区间 $(0,T]$）并令 $A=B_k$。我们得

$$\mathbf{P}\text{-}\lim\sum_{s_{k-1}<t_k\leqslant s_k}(\zeta(t_r)-\zeta(t_{r-1}))^2=\gamma_k^2\nu(\Delta_k,B_k),$$

由此按 k 求和后得

$$[\zeta,\zeta]_T=\int_0^T\int_{\mathfrak{R}^m}\gamma^2(s,u)\nu(ds,du).\tag{28}$$

令

$$\zeta_i(t)=\zeta(t,\gamma_i),i=1,2(\gamma_i\in\mathfrak{B}_0(\mathfrak{T}_0\times\mathfrak{B}_0^m))$$

和

$$[\zeta_1,\zeta_2]_T \underset{\text{定义}}{=\!=} \mathbf{P}\text{-}\lim_{|\delta|\to 0}\sum_{r=1}^{n}(\zeta_1(t_r)-\zeta_1(t_{r-1}))(\zeta_2(t_r) - \zeta_2(t_{r-1})).$$

由式(28)得

$$[\zeta_1,\ \zeta_2]_T = \int_0^T\int_{\mathscr{R}^m}\gamma_1(s,u)\gamma_2(s,u)\nu(ds,du). \tag{29}$$

现对过程 $\zeta_i(t)$ 建立分部积分公式.

首先,我们作关于积分的一些注记,它们将在下面遇到.

设 $\{\eta(t),\mathfrak{F}_t,t\in[0,T]\}$ 是样本函数属于 $\mathscr{D}[0,\ T]$ 的随机过程,$\zeta(t)$ 是上面引入的过程.积分

$$\int_0^T\eta(t)\zeta(dt).$$

了解为按局部平方可积鞅的随机积分,它是存在的.事实上,如果对区间 $[0,T]$ 的某个分割 δ,当 $t\in(t_{k-1},t_k]$ 时,令 $\eta^{(\delta)}(t)=\eta(t_{k-1})$,如果 $|\eta(t_{k-1})|<\frac{1}{|\delta|}$,及在相反情形 $\eta^{(\delta)}(t)=0$,所以以概率 1 有 $\eta^{(\delta)}(t)\to\eta(t-)$,而且 $\eta(t)-\eta(t-)\neq 0$ 不多于可列个点,因此 $\eta(t)-\eta(t-)=0$ 按测度 $\pi(\cdot,\cdot)$ 对几乎所有 (t,u) 以概率 1 成立.

因为 $\sup\limits_{0\leq t\leq T}|\eta^{(\delta)}(t)|\leq\sup\limits_{0\leq t\leq T}|\eta(t)|\leq\gamma<\infty$,所以

$$\int_0^T(\eta(t)-\eta^{(\delta)}(t))^2\int\gamma^2(t,u)\pi(dt,du)\to 0\ (\text{mod}\mathbf{P})$$

及 $\eta(t)\in H_2(\mathfrak{F}_t,\ \zeta(\cdot))$ (见 §2).这证明了所考虑的积分的存在性和等式

$$\int_0^T\eta(t)d\zeta(t) = \mathbf{P}\text{-}\lim_{|\delta|\to 0}\int_0^T\eta^{(\delta)}(t)d\zeta(t)$$

$$= \mathbf{P}\text{-}\lim_{|\delta|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\eta^{(\delta)}(t_{k-1})\Delta\zeta(t_k),$$

其中 $\Delta\zeta(t_k)=\zeta(t_k)-\zeta(t_{k-1})$.

另一方面,函数 $\eta^{(\delta)}(t)\gamma(t,\ u)$ 是 $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{T}_0\times\mathfrak{B}_0^m)$ 中的简单函

数，且如上述所证，

$$\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m}(\eta^{(\delta)}(t)\gamma(t,u)-\eta(t)\gamma(t,u))^2\pi(dt,du)\to 0.$$

因此 $\eta(t)\gamma(t,u)\in H_2^\pi$ 和

$$\int_0^T\eta(t)\zeta(dt)=\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m}\eta(t)\gamma(t,u)\mu(dt,du), \tag{30}$$

其中等式右边是按局部鞅测度的积分。

还要指出，由于上述讨论如下积分是存在的：

$$\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m}\eta(t)\gamma(t,u)\nu(dt,du),$$

$$\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m}\eta(t)\gamma(t,u)\pi(dt,du),$$

而且

$$\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m}\eta(t)\gamma(t,u)\mu(dt,du)$$
$$=\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m}\eta(t)\gamma(t,u)\nu(dt,du)$$
$$-\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m}\eta(t)\gamma(t,u)\pi(dt,du). \tag{31}$$

现在回到上面引入的过程 $\zeta_i(t)$. 由前面的说明得：

$$\int_0^T\zeta_1(t)\zeta_2(dt)=\mathbf{P}\text{-}\lim\sum_{k=1}^n\zeta_1(t_{k-1})\Delta\zeta_2(t_k).$$

在此等式中标号 1 和 2 的位置重排且相加所得的等式，我们得

$$\int_0^T\zeta_1(t)\zeta_2(dt)+\int_0^T\zeta_2(t)\zeta_1(dt)$$
$$=\mathbf{P}\text{-}\lim\Big(\sum_{k=1}^n\zeta_1(t_k)\zeta_2(t_k)-\zeta_1(t_{k-1})\zeta_2(t_{k-1})$$
$$-\Delta\zeta_1(t_k)\Delta\zeta_2(t_k)\Big)$$
$$=\zeta_1(T)\zeta_2(T)-[\zeta_1,\zeta_2]_T(\mathrm{mod}\mathbf{P}).$$

如果以任意 $t,t\in[0,T]$ 代替 T，所得的等式显然仍成立。在此情况下，因为在等式两边出现的函数是右连续的，所以它对所有

$t\in[0,T]$ 以概率 1 成立。于是以概率 1 对所有 $t\in[0,T]$ 有

$$\zeta_1(t)\zeta_2(t)=\int_0^t\zeta_1(s)\zeta_2(ds)+\int_0^t\zeta_2(s)\zeta_1(ds)$$
$$+\int_0^t\int_{\mathscr{R}^m}\gamma_1(s,u)\gamma_2(s,u)\nu(ds,du), \tag{32}$$

也可写成微分形式:

$$d(\zeta_1(t)\zeta_2(t))=\zeta_1(t)d\zeta_2(t)+\zeta_2(t)d\zeta_1(t)$$
$$+\int_{\mathscr{R}^m}\gamma_1(t,u)\gamma_2(t,u)\nu(dt,du).$$

另一方面，如果 $\alpha(t)$ 以概率 1 是 $[0,T]$ 上有界变差的连续函数并适应于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t,t\in[0,T]\}$，那末对任意 $t\in[0,T]$，有

$$\alpha(t)\zeta(t)=\int_0^t\zeta(s)d\alpha(s)+\int_0^t\alpha(s)d\zeta(s)$$

或

$$d(\alpha(t)\zeta(t))=\zeta(t)d\alpha(t)+\alpha(t)d\zeta(t). \tag{33}$$

事实上，设 $\Delta\alpha(t_k)=\alpha(t_k)-\alpha(t_{k-1})$，$\Delta\zeta(t_k)=\zeta(t_k)-\zeta(t_{k-1})$，那末

$$\sum_{k=1}^n\zeta(t_{k-1})\Delta\alpha(t_k)+\alpha(t_{k-1})\Delta\zeta(t_k)$$
$$=\alpha(T)\zeta(T)-\sum_{k=1}^n\Delta\alpha(t_k)\Delta\zeta(t_k). \tag{34}$$

因为

$$\left|\sum_{k=1}^n\Delta\alpha(t_k)\Delta\zeta(t_k)\right|$$
$$\leqslant\max_k|\Delta\alpha(t_k)|\left(\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m}|\gamma(s,u)|\nu(ds,du)\right.$$
$$\left.+\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m}|\gamma(s,u)|\pi(ds,du)\right)\to 0,\text{当 }|\delta|\to 0\text{ 时},$$

所以由等式(34)，当 $|\delta|\to 0$ 时得式(33)。

式(33)能改写为另一形式:

$$\zeta_1(t)\zeta_2(t) = \int_0^t \zeta_1(s)\zeta_2(ds) + \int_0^t \zeta_2(s)\zeta_1(ds)$$
$$+ \int_0^t \int_{\mathscr{R}^m} \gamma_1(s,u)\gamma_2(s,u)\mu(ds,du)$$
$$+ \int_0^t \int_{\mathscr{R}^m} \gamma_1(s,u)\gamma_2(s,u)\pi(ds,du), \qquad (34^*)$$

容易将此公式延拓至对样本函数以概率 1 在区间 $t \in [0,T]$ 上有界的任意 $\gamma_i(t,u) \in H_2^\pi(\mathfrak{F}_t, \mu)$ 成立。事实上，设 $\gamma_1(t,u) \in H_2^\pi$ 及 $\gamma_2 \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{T} \times \mathfrak{B}_0^m)$。则有序列 $\gamma_1^{(n)}(t,u) \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{T} \times \mathfrak{B}_0^m)$ 使得当 $n \to \infty$ 时

$$\int_0^T \int_{\mathscr{R}^m} |\gamma_1(s,u) - \gamma_1^{(n)}(s,u)|^2 \pi(ds,du) \to 0$$

以概率 1 成立。然而此时以概率 1 有

$$\int_0^t \int_{\mathscr{R}^m} \gamma_1^{(n)}\gamma_2\pi(ds,du) \to \int_0^t \int_{\mathscr{R}^m} \gamma_1\gamma_2\pi(ds,du),$$
$$\int_0^t \int_{\mathscr{R}^m} \gamma_1^{(n)}\gamma_2\mu(ds,du) \to \int_0^t \int_{\mathscr{R}^m} \gamma_1\gamma_2\mu(ds,du).$$

第一式从 Cauchy-Schwarz 不等式得到，而第二式之所以成立是该式两边之差是一局部鞅，其特征

$$\int_0^t \int_{\mathscr{R}^m} (\gamma_1^{(n)} - \gamma_1)^2\gamma_2^2\pi(ds,du)$$

以概率 1 趋于 0。类似地，应用 §2 公式(27)及(29)，容易验证

$$\int_0^t \zeta_1^{(n)}(s)\zeta_2(ds) \to \int_0^1 \zeta_1(s)\zeta_2(ds),$$
$$\int_0^t \zeta_2(s)\zeta_1^{(n)}(ds) \to \int_0^t \zeta_2(s)\zeta_1(ds)$$

依概率收敛。同样地，利用 $\gamma_1(t, u)$ 的样本函数的有界性能在(34*)中 $\gamma_2(t, u)$ 用属于 H_2^π 代替属于 $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{T} \times \mathfrak{B}_0^m)$。容易验证(30)及(31)对所考虑的条件下的函数 $\gamma(t,u)$ 也成立。

公式(34*)也适用于形如

$$\eta_i(t) = \int_0^t \xi_i(s)d\zeta_i$$

的过程 $\eta_i(t)$，其中 $\zeta_i(t)$ 如上所定义，而 $\xi_i(t)$ 是右连续过程.

如上所述，这些积分有定义且在其中以 $\xi_i(t-)$ 代替 $\xi_i(t)$ 时所得的积分是一样的。

设

$$\zeta_i^*(t)=\eta_i(t)+\alpha_i(t),$$

$$\alpha_i(t)=\int_0^t\int_{\mathscr{R}^m}\xi_i(s)\gamma_i(s,u)\pi(ds,du).$$

从公式(32)可得

$$d(\zeta_1^*(t)\zeta_2^*(t)=\zeta_1^*(t)d\zeta_2^*(t)+\zeta_2^*(t)d\zeta_1^*(t)$$
$$+\int_0^t\int_{\mathscr{R}^m}\prod_{i=1}^2\xi_i(s)\gamma_i(s,u)\mu(ds,du)$$
$$+\int_0^t\int_{\mathscr{R}^m}\prod_{i=1}^2\xi_i(s)\gamma_i(s,u)\pi(ds,du). \quad (35)$$

由于(31)，有

$$\zeta_i^*(t)=\int_0^t\int_{\mathscr{R}^m}\xi_i(s-)\gamma(s,u)\nu(ds,du),$$

因此

$$d(\zeta_1^*(t)\zeta_2^*(t))=\int_{\mathscr{R}^m}\Big[\zeta_1^*(s-)\xi_2^*(s-)\gamma_2(s,u)$$
$$+\zeta_2^*(s-)\xi_1^*(s-)\gamma_1(s,u)$$
$$+\prod_{i=1}^{i}\xi_i(s-)\gamma_i(s,u)\Big]\gamma(ds,du). \quad (36)$$

特别是，如果令

$$\xi_i(t)=1,\zeta_1(t)=\zeta_2(t)=\zeta(t,\gamma),$$

$$\phi(t)=\int_0^t\int_{\mathscr{R}^m}\gamma(s,u)\nu(ds,du) \quad (36^*)$$

及为了简单起见假定 $\gamma(t,u)\in\mathfrak{L}_0(\mathfrak{T}\times\mathfrak{B}_0^m)$，则

$$d\phi^2(t)=2\phi(t-)d\phi(t)+\int_{\mathscr{R}^m}\gamma^2(t,u)\nu(dt,du)$$
$$=\int_{\mathscr{R}^m}(2\phi(t-)+\gamma(t,u))\gamma(t,u)\nu(dt,du)$$

$$= \int_{\mathscr{R}^m} [(\phi(t-) + \gamma(t,u))^2 - \phi^2(t-)]\nu(dt,du).$$

利用归纳法及公式(35)不难验证，对任意整数 n

$$d\phi^n(t) = \int_{\mathscr{R}^m} ([\phi(t) + \gamma(t,u)]^n - \varphi^n(t))\nu(dt,du). \quad (37)$$

事实上，如假定公式(37)对某个 n 成立(上面已证明当 $n = 2$ 时成立)则由(35)得

$$\begin{aligned} d\phi^{n+1}(t) &= \phi^n(t-)d\phi(t) + \phi(t-)d\phi^n(t) \\ &\quad + \int_{\mathscr{R}^m} ([\phi(t-) + \gamma(t,u)]^n \\ &\quad - \phi^n(t-))\gamma(t,u)\nu(dt,du) \\ &= \int_{\mathscr{R}^m} \{\phi^n(t-)\gamma(t,u) + [\phi(t-) \\ &\quad + \gamma(t,u)]^n - \phi^n(t-) + (\phi(t-) \\ &\quad + \gamma(t,u)\}\nu(dt,du) \\ &= \int_{\mathscr{R}^m} ([\phi(t-) + \gamma(t,u)]^{n+1} \\ &\quad - \phi^{n+1}(t-))\nu(dt,du). \end{aligned}$$

这就证明了公式(37)。由该公式得对任意多项式 $P(x)$

$$dP(\phi(t)) = \int_{\mathscr{R}^m} [P(\phi(t-) + \gamma(t,u)) - P(\phi(t-))]\nu(dt,du). \quad (38)$$

现设 $P(x_1,\cdots,x_q)$ 是 q 个独立变量 $\phi_j(t,u) \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{T}_0 \times \mathfrak{B}_0^m)$, $j = 1,\cdots,q$ 的多项式，$\phi_j(t)$ 是式(36*)在假定 $\gamma(t,u) = \gamma_j(t,u)$ 时所定义的过程。序列 $\phi_j(t)$ 和 $\gamma_j(t,u)$, $j = 1,\cdots,q$ 将解释为取值于 $\mathscr{R}^q$ 的向量随机函数，而 $P(x_1, \cdots, x_q) = P(x)$, $x \in \mathscr{R}^q$ 是作为定义在 $\mathscr{R}^q$ 的函数。如果设 $\phi(t) = (\phi_1(t),\cdots,\phi_q(t))$, $\gamma(t,u) = \{\gamma_1(t,u),\cdots,\gamma_q(t,u)\}$，那末这时公式(38)保持成立。为此只要对多项式 $P(x_1,\cdots,x_q) = \prod_{j=1}^{q} P_j(x_j)$ 证明就够了。我们对独立变量的个数应用归纳法。

设公式(38)对多项式 $Q(x_1,\cdots,x_j)=\prod_{k=1}^{j}P_k(x_k)$ 正确。那末由于公式(36)，

$$
\begin{aligned}
d(QP_{j+1}(\phi_{j+1}))=&P_{j+1}(\phi_{j+1})dQ+QdP_{j+1}(\phi_{j+1})\\
&+\int_{\mathscr{R}^m}\Big[\prod_{k=1}^{j}P_k(\phi_k(t-)+\gamma_k(t,u))\\
&-\prod_{k=1}^{j}P_k(\phi_k(t-))\Big]\\
&\times[P_{j+1}(\phi_{j+1}(t-)+\gamma_{j+1}(t,u))\\
&-P_{j+1}(\phi_{j+1}(t-))]\nu(dt,du)\\
=&\int_{\mathscr{R}^m}\Big[\prod_{k=1}^{j+1}P_k(\phi_k(t-)+\gamma_k(t,u))\\
&-\prod_{k=1}^{j+1}P_k(\phi(t-))\Big]\nu(dt,du),
\end{aligned}
$$

也就在所考虑的情形证明了公式(38)。

我们还给出此公式的一个推广。设 $f(t,x_1,\cdots,x_q)$ 是关于变量 $x_1,\cdots,x_q$ 的多项式，它的系数以概率 1 按时间 t 是连续有界变差和适应于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t,t\in[0,T]\}$ 的随机函数。那末由公式(38)得：

$$
\begin{aligned}
df(t,\phi(t))=&d_tf(t,\phi(t))\\
&+\int_{\mathscr{R}^q}[f(t,\phi(t-)+\gamma(t,u))\\
&-f(t,\phi(t-))]\nu(dt,du),
\end{aligned}
$$

其中记号 $d_tf(t,x)$ 表示多项式 $P(t,x)$ 的系数 $\alpha(t)$ 应用 $d\alpha$ 置换。

将公式(38)中测度 ν 及积分 $\phi_k(t)$ 换为测度 μ 及积分 $\zeta_k(t)=\phi_k(t)-\beta_k(t),\beta_k(t)=\int_0^t\int_{\mathscr{R}^m}\gamma(s,u)\pi(ds,du)$。这时它有如下形式：

$$df(t,\zeta(t)) = d_t f(t,\zeta(t)) + \int_{\mathscr{R}^m} L_d(f,\zeta)\pi(dt,du)$$
$$+ \int_{\mathscr{R}^m} [f(t,\zeta(t)+\gamma(t,u))$$
$$- f(t,\zeta(t))]\mu(dt,du), \tag{39}$$
$$L_d(f,\zeta) = L_d(f) = f(t,\zeta(t)+\gamma(t,u)) - f(t,\zeta(t))$$
$$- (\nabla f(t,\zeta(t)),\gamma(t,u)). \tag{40}$$

在所得的关系式中，通过取极限我们完成两个转换。首先将 x 的多项式转换为任意可微函数 $f(t,x)$，第二，将函数 $\gamma(t,u)\in\mathfrak{L}_0$ 转换为 H_2^π 中的任意函数 $\gamma(t,u)$。

第一个趋进极限。设 $\gamma(t,u)\in\mathfrak{L}_0$。将式(39)写为积分形式和假定 $P(t,x)=P_n(t,x)\to f(t,x)$。在得到的关系式中可用 $f(t,x)$ 代换 $P(t,x)$，例如，如果下列条件成立：

1) 多项式 $P_n(t,x)$ 和函数 $f(t,x)$ 按 t 可微且以概率 1，$f(t,x)$ 与 $f'_t(t,x)$ 在 $[0,T]\times\mathscr{R}^m$ 上连续以及对所有 x 来说 $\frac{\partial}{\partial t}P_n(t,x)\to f'_t(t,x)$；

2) 函数 $f(t,x)$ 按 x 连续可微且对所有 x 以概率 1 有 $\nabla P_n(t,x)\to\nabla f(t,x)$。

其中 ∇f 是向量函数 $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_q}\right)$。

显然，如果函数 $f(t,x)$ 满足上面指出的要求，即如果 $f(t,x)$ 按 t 及按 x 可微，且它的导数 $f'_t(t,x),\nabla f(t,x)$ 在 $[0,T]\times\mathscr{R}^q$ 以概率 1 连续，那末存在满足条件 1) 及 2) 的多项式序列 $P_n(t,x)$。

第二个趋进极限。设函数 $f(t,x)$ 按 t 可微且按 $x_k(k=1,\cdots,q)$ 有有界连续一阶和二阶偏导数 ($(t,x)\in[0,T]\times\mathscr{R}^m$)并设 $\gamma(t,u)\in H_2^\pi$。考虑序列 $\gamma_n(t,u)\in\mathfrak{L}_0(n=1,2,\cdots)$ 并假定
$$\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m}|\gamma(t,u)-\gamma_n(t,u)|^2\pi(dt,du)\to 0.$$
由此关系得(见 §2(29))

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\zeta(t)-\zeta_n(t)|>\varepsilon\}\to 0 \text{ 当 } n\to\infty, \forall\varepsilon>0,$$

其中 $\zeta_n(t)=\zeta(t,\gamma_n)$。因此可认为以概率 1 $\zeta_n(t)$ 按 $t\in[0,T]$ 一致收敛于 $\zeta(t)$。

设 S_ε 是中心在 0 点半径为 $\varepsilon>0$ 的球，那末

$$\int_0^T\int_{S_\varepsilon} L_d(f,\xi_n)\pi(dt,du)$$
$$\leqslant C\int_0^T\int_{S_\varepsilon}|\gamma_n|^2\pi(dt,du),$$

且当 $\varepsilon\to 0$ 时该量以概率 1 对 n 一致地趋于 0。此外（见 §2，(29)），

$$\mathbf{P}\left\{\left|\int_0^T\int_{S_\varepsilon}[f(t,\zeta_n+\gamma_n)-f(t,\zeta_n)]\mu(dt,du)\right|>\delta\right\}$$
$$\leqslant\frac{N}{\delta^2}+\mathbf{P}\left\{\int_0^T\int_{S_\varepsilon}[f(t,\zeta_n+\gamma_n)-f(t,\zeta_n)]\right.$$
$$\left.\times\pi(dt,du)>N\right\}$$
$$\leqslant\frac{N}{\delta^2}+\mathbf{P}\left\{\int_0^T\int_{S_\varepsilon}C^2|\gamma_n|^2\pi(dt,du)>N\right\},$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时对任意 $\delta>0$，对 n 一致地趋于 0。

现不难证明

$$\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m}L_d(f,\zeta_n)\pi(dt,du)$$
$$\to\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m}L_d(f,\zeta)\pi(dt,du) \tag{41}$$

和

$$\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m}[f(t,\zeta_n+\gamma_n)-f(t,\zeta_n)]\mu(dt,du)$$
$$\to\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m}[f(t,\zeta+\gamma)-f(t,\zeta)]\mu(dt,du). \tag{42}$$

事实上，由于上面的注解，为证明式(41)及(42)，可在积分时以 $\mathscr{R}^m\backslash S_\varepsilon$ 代换 $\mathscr{R}^m$。这时有以下估计：

$$\left|\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m\backslash S_\varepsilon}(L_d(f,\zeta)-L_d(f,\zeta_n)\pi(dt,du)\right|$$

$$\leqslant C\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m\setminus S_\varepsilon}(|\zeta(t)-\zeta_n(t)|+|\gamma(t,u)-\gamma_n(t,u)|$$

$$+|\gamma||\nabla f(t,\zeta)-\nabla f(t,\zeta_n)|)\pi(dt,du)$$

$$\leqslant C\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\zeta(t)-\zeta_n(t)|\pi(T,\mathscr{R}^m\setminus S_\varepsilon)$$

$$+C\left[\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m}|\gamma(t,u)-\gamma_n(t,u)|^2\pi(dt,du)\right.$$

$$\left.\times\pi(T,\ \mathscr{R}^m\setminus S_\varepsilon)\right]^{1/2}$$

$$+C\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\nabla f(t,\zeta(t))-\nabla f(t,\ \zeta_n(t))|$$

$$\times\left[\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m}|\gamma|^2\pi(dt,du)\cdot\pi(T,\ \mathscr{R}^m\setminus S_\varepsilon)\right]^{1/2},$$

当 $n\to\infty$ 时此式右边以概率 1 趋于 0.

这证明了式(41),类似的见解适用于证明式(42).

为对所考虑的函数 $f(t,x)$ 和 $\gamma(t,u)\in H_2^\pi$ 证明等式(39),只要验证

$$\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m\setminus S_\varepsilon}[f(t,\zeta_n+\gamma_n)-f(t,\zeta_n)$$

$$-f(t,\zeta+\gamma)+f(t,\zeta)]^2\pi(dt,du)\to 0$$

就够了. 这可由与类似上述的见解得到. 因此, 对有有界连续一阶二阶偏导数的函数 $f(t,x)$ 和 $\gamma(t,u)\in H_2^\pi$,公式(39)正确.

现可重新利用已在第一段所进行的证明, 得知式(39)对如下函数 $f(t,x)$ 仍保持成立: 函数 $f(t,x)$ 按 t 连续可微且按 x 二次连续可微,并以概率 1 有

$$\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m}L_d(f,\zeta)\pi(dt,du)<\infty,$$

$$\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m}|f(t,\zeta+\gamma)-f(t,\zeta)|^2\pi(dt,du)<\infty.$$

这些函数类记为 E_ζ.

定理 10 如果 $f(t,x)\in E_\zeta$, $\gamma(t,u)\in H_2^\pi$, 那末函数 $f(t,\zeta(t))$ 有随机微分(39).

广义伊藤公式 设$\xi(t)$是q-维向量过程,$\xi(t)=(\xi^1(t),\cdots,\xi^q(t))$，其分量有下列形式:

$$\xi^k(t)=\alpha^k(t)+\beta^k(t)+\zeta^k(t),\tag{43}$$

其中 $\alpha^k(t)\in\mathscr{V}^c$, $\beta^k(t)\in l\mathscr{M}_2^c$,

$$\zeta^k(t)=\int_0^t\int_{\mathscr{R}^m}\gamma(s,u)\mu(ds,du),\ \gamma\in H_2^\pi,\ (k=1,\cdots,q),$$

$\mu(\cdot,\cdot)$ 是联系于特征为 $\pi(t,A)$ 的整值测度 $\nu(t,A)$ 的局部鞅测度. 首先将认为给定某个 σ 代数流 $\{\mathfrak{F}_t,t\in[0,T]\}$，下面所考虑的全部过程,鞅与测度均适应于 $\{\mathfrak{F}_t\}$.

设 $f(x)=f(x^1,\cdots,x^q)$ 是二次连续可微函数. 考虑过程

$$\eta(t)=f(\xi(t)).$$

我们来证明过程 $\eta(t)$ 也有形式(43)的分解,并求出此分解的相应分量的表示式.

先假定函数 $f(x)$ 三次连续可微且在某个紧集外等于 0，而函数 $\gamma(t,u)$ 还满足条件:

$$\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m}|\gamma(s,u)|\pi(ds,du)<\infty$$

以概率 1 成立,那末

$$\zeta^k(t)=\int_0^t\int_{\mathscr{R}^m}\gamma^k(s,u)\nu(ds,du)$$
$$-\int_0^t\int_{\mathscr{R}^m}\gamma^k(s,u)\pi(ds,du),$$

而且此等式右边第一个积分以概率 1 有限及函数 $\zeta^k(t)$ 以概率 1 有有界变差:

$$V_T^0(\zeta^k)=\sup_\delta\sum_{r=1}^n|\Delta\zeta^k(t_r)|$$
$$\leqslant\int_0^T\int_{\mathscr{R}^m}|\gamma(s,u)|(\nu(ds,du)+\pi(ds,du)).$$

以区间 $\Delta_k=(t_{k-1},t_k]$, $k=1,2,\cdots,n$ 对区间 $[0,T]$ 进行的分割记为 δ.

设

$$f(\xi(T))-f(\xi(0))=S_1+S_2+S_3,$$

其中

$$S_1=\sum_{k=1}^{n} f[\xi_c(t_k)+\zeta(t_{k-1})]-f(\xi(t_{k-1})),$$

$$S_2=\sum_{k=1}^{n} f[\xi_c(t_{k-1})+\zeta(t_k)]-f(\xi(t_{k-1})),$$

$$S_3=\sum_{k=1}^{n} f(\xi(t_k))-f[\xi_c(t_{k-1})+\zeta(t_k)]$$

$$-f[\xi_c(t_k)+\zeta(t_{k-1})]+f(\xi(t_{k-1}))$$

及 $\xi_c(t)=\alpha(t)+\beta(t)$。我们来证明，当 $|\delta|\to 0$ 时

$$\mathbf{P}\text{-}\lim S_3=0.$$

和数 S_3 可表为

$$S_3=\sum_{k=1}^{n}(\nabla^2 f[\bar{\xi}_k+\bar{\zeta}_k]\Delta\xi_k,\Delta\zeta_k),$$

其中

$$\bar{\xi}_k=\xi_c(t_{k-1})+\theta_1\Delta\xi_{ck},\ \bar{\zeta}_k=\zeta(t_{k-1})+\theta_2\Delta\zeta_k,$$
$$\Delta\xi_{ck}=\xi_c(t_k)-\xi_c(t_{k-1}),\ \Delta\zeta_k=\zeta(t_k)-\zeta(t_{k-1}),$$
$$0\leqslant\theta_i\leqslant 1,\ i=1,2.$$

于是，

$$|S_3|\leqslant C\max_k|\Delta\xi_{ck}|\cdot|V_T^0(\zeta)|,$$

其中 C 是某个常数。后一不等式表明，当 $|\delta|\to 0$ 时以概率 1 有 $|S_3|\to 0$。

考虑和数 S_1，由(3)得：

$$S_1=\int_0^T\sum_{i=1}^{q}\nabla^i f(\zeta^{(\delta)}(t)+\xi_c(s))d\xi_c^i(s)$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\sum_{i,j=1}^{q}\nabla^i\nabla^j f(\xi_c(s)+\zeta^{(\delta)}(s))d\langle\beta^i,\beta^j\rangle_s,$$

其中 $\zeta^{(\delta)}(t)=\zeta(t_{k-1})$，当 $t\in(t_{k-1},t_k]$ 时。当 $|\delta|\to 0$ 时以概率 1 有 $\zeta^{(\delta)}(t)\to\zeta(t-)$，且除去一可列点集外 $\zeta(t)=\zeta(t-)$ 处

处成立。因为导数 $\nabla^i f(x)$，$\nabla^i\nabla^j f(x)$ 有界，测度 $d\alpha^k$ 和 $d\langle\beta^i,\beta^j\rangle_t$ 是缺原子的，所以以概率 1 有

$$\lim S_1 = \int_0^T \sum_{i=1}^q \nabla^i f(\xi(s)) d\xi_c^i(s) + \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{i,j=1}^q \nabla^i\nabla^j f(\xi(s)) d\langle\beta^i,\beta^j\rangle_s.$$

类似地考虑和数 S_2。首先，

$$\begin{aligned} S_2 = \int_0^T\int_{\mathscr{R}^m} & [f(\xi_c^{(\delta)}(s)+\zeta(s)+\gamma(s,u)) \\ & - f(\xi_c^{(\delta)}(s)+\zeta(s)) - (\nabla f(\xi_c^{(\delta)}(s) \\ & + \zeta(s)),\gamma(s,u))]\pi(ds,du) \\ & + \int_0^T\int_{\mathscr{R}^m} [f(\xi_c^{(\delta)}(s)+\zeta(s)+\gamma(s,u)) \\ & - f(\xi_c^{(\delta)}(s)+\zeta(s)]\mu(ds,du), \end{aligned}$$

其中 $\xi_c^{(\delta)}(t)=\xi_c(t_{k-1})$ 当 $t\in(t_{k-1},t_k]$。因为在积分号内的表达式以概率 1 分别有按 (t,u) 可积的形为 $\kappa|\gamma(t,u)|^2$ 及 $\kappa|\gamma(t,u)|$ 的控制函数(当固定 ω)，所以当 $|\delta|\to 0$ 时趋进极限是可能的，且我们得

$$\lim S_2 = \int_0^T\int_{\mathscr{R}^m} L_d(f,\xi)\pi(ds,du) + \int_0^T\int_{\mathscr{R}^m}[f(\xi(t)+\gamma(s,u))-f(\xi(t))]\mu(ds,du).$$

在所得到的关系式中，自然可用任意 $t\in[0,T]$ 代替 T. 因此，对所有 $t\in[0,T]$

$$\begin{aligned} f(\xi(t)) = f(\xi(0)) & \\ & + \int_0^t(\nabla f(\xi),d\alpha) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^q \nabla^i\nabla^j f(\xi)d\langle\beta^i,\beta^j\rangle_s \\ & + \int_0^t\int_{\mathscr{R}^m} L_d f(\xi)\pi(ds,du) + \int_0^t(\nabla f(\xi),d\beta) \end{aligned}$$

$$+\int_0^t\int_{\mathscr{R}^m}[f(\xi+\gamma)-f(\xi)]\mu(ds,du). \qquad (44)$$

不难发现,在所得的公式中可进行两种极限转换.

首先令 $\gamma=\gamma_n$, $\xi=\xi_n$ 并设在 H_2^π 中 $\gamma_n\to\gamma$. 正如上面所建立的, 可选取序列 γ_n 使得以概率 1 按 $t\in[0, T]$ 一致地 $\xi_n(t)\to\xi(t)$. 还顾及到不等式 $|L_d f(\xi_n)|\leqslant\kappa|\gamma_n|^2$, $|f(\xi_n+\gamma_n)-f(\xi_n)|\leqslant\kappa|\gamma_n|$, 其中 κ 不依赖于 s, u 和 n, 可见在公式(44)中当 $n\to\infty$ 时可趋向极限情形,因此对任意 $\gamma\in H_2^\pi$ 仍然是正确的.

其次, 正如上段在类似情形那样讨论, 我们相信关于函数 $f(x)$ 在其紧集之外为 0 的假设可减弱,代替为要求 $f\in E_\xi$,其中 E_ξ 是有如下性质的二次连续可微函数 $f(x)$ 组成的类: 以概率 1,有

$$f(\xi(t)+\gamma(t,u))-f(\xi(t))-(\nabla f(\xi(t)),\gamma(t,u))$$

及

$$|f(\xi(t)+\gamma(t,u)-f(\xi(t))|^2,$$

按测度 $\pi(dt,du)$ 可积.

因此证明了如下定理:

定理 11 设 $\alpha\in\mathscr{V}^c$, $\beta\in l\mathscr{M}^c$, μ 是局部鞅测度, $\gamma\in H_2^\pi$,函数 $f(x)$ 是二次连续可微的且 $f\in E_\xi$. 那末过程 $\eta(t)=f(\xi(t))$, $\xi(t)=\alpha(t)+\beta(t)+\zeta(\gamma,t)$,有随机微分

$$d\eta=d\eta_c+d\eta_d,$$

其中

$$\left.\begin{aligned}d\eta_c&=(\nabla f(\xi),d\alpha)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}\nabla^i\nabla^j f(\xi)d\langle\beta^i,\beta^j\rangle_t\\&\quad+(\nabla f(\xi),d\beta)\\d\eta_d&=\int_{\mathscr{R}^m}L_d(f,\gamma)\pi(dt,du)\\&\quad+\int_{\mathscr{R}^m}[f(\xi+\gamma)-f(\xi)]\mu(dt,du).\end{aligned}\right\}\qquad(45)$$

我们称这公式为广义伊藤公式,

推论 1 如果 $f(t,x)$, $x\in\mathscr{R}^q$, $t\in[0,T]$ 是按 x 二次连续

可微、按 t 连续可微的函数，且 $f(t,x)\in E_\xi$，那末

$$df(t,\xi(t)) = d\eta_c + d\eta_d,$$

$$d\eta_c = f'_t(t,\xi(t))dt + (\nabla f(\xi(t)), d\xi_c)$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{q} \nabla^i\nabla^j f(t,\xi(t))\, d\langle\beta^i,\beta^j\rangle_t$$

$$d\eta_d = \int_{\mathscr{R}^m} L_d(f,\gamma)\pi(ds,du)$$

$$+ \int_{\mathscr{R}^m}[f(t,\xi(t)+\gamma(t,u))$$

$$- f(t,\xi(t))]\,\mu(dt,du).$$

推广公式(45)至依赖于时间的函数 $f(t,\ x)$，是依据与连续过程 $\xi(t)$ 情形同样的理由。

推论 2 （乘积的微分法则） 设

$$\xi^i(t) = \alpha^i(t) + \beta^i(t) + \int_0^t\int_{\mathscr{R}^m}\gamma^i(s,u)\,\mu(ds,du), i = 1,2.$$

应用公式(45)于二元函数 $f(x,y) = xy$，经不复杂的变换后得

$$d(\xi^1(t)\xi^2(t)) = \xi^2 d\xi^1 + \xi^1 d\xi^2 + d\langle\beta^1,\beta^2\rangle_t$$

$$+ \int_{\mathscr{R}^m}\gamma^1(t,u)\gamma^2(t,u)\nu(dt,du) \tag{46}$$

广义伊藤公式的某些推论．Lévy 定理的推广

定理 12 设 $\xi(t)$ 是正则局部平方可积鞅且 $\xi(t) = \xi_c(t) + \xi_d(t)$ 是过程 $\xi(t)$ 分解为连续与间断部分的分解式。 假定函数 $\langle\xi_c^k,\xi_c^j\rangle_t$，$\pi(\cdot,\cdot)$ 是非随机的，那末 $\xi(t)$ 是独立增量过程。

证。先假定 $\xi(t)\in\mathscr{M}_2^r$. 令 $f(x) = e^{i(z,x)}, z\in\mathscr{R}^m, x\in\mathscr{R}^m$，应用广义伊藤公式于函数 $f(\xi(t))$，得

$$f(\xi(t)) - f(\xi(t_0)) = \int_{t_0}^t e^{i(z,\xi(s))}$$

$$\times\Big[-\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m} z^k z^j d\langle\xi_c^k,\xi_c^j\rangle_s$$

$$+ \int_{\mathscr{R}^m}[e^{i(z,u)} - 1 - i(z,u)]\pi(dt,du)$$

$$+ i(z, d\xi_c) + (e^{i(z,u)} - 1)\mu(ds, du)\Big],$$

而且最后两个被加项有有限二阶矩。

令 $J(t) = \mathbf{E}\{e^{i(z,\xi(t))} | \mathfrak{F}_{t_0}\}$，我们由上述等式得

$$J(t) = \eta(t_0) + \int_{t_0}^{t} J(s) d\mathfrak{G}(s), \tag{47}$$

其中 $\mathfrak{G}(s)$ 是由下式给出的非随机有界变差函数：

$$\mathfrak{G}(s) = -\frac{1}{2}\sum_{k,j=1} z^k z^j \langle \xi_c^k, \xi_c^j \rangle_s$$

$$+ \int_{\mathscr{R}^m} (e^{i(z,u)} - 1 - i(z,u))\pi(s, du),$$

及 $\eta(t_0) = e^{i(z,\xi(t_0))}$. 方程(47)有唯一解，该解易由迭代法得到：

$$J(t) = \eta(t_0) e^{\mathfrak{G}(t)},$$

或

$$J(t) = e^{i(z,\xi(t_0))} \exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m} \sigma^{kj}(t) z^k z^j$$

$$+ \int_{\mathscr{R}^m} (e^{i(z,u)} - 1 - i(z,u))\pi(t, du)\Big\},$$

其中 $\sigma^{kj}(t) = \langle \xi_c^k, \xi_c^j \rangle_t$.

这等式特别表明了向量 $\xi(t) - \xi(t_0)$ 的分布不依赖于 σ-代数 $\mathfrak{F}_{t_0}$，即过程 $\xi(t)$ 是独立增量过程。此外，它给出了独立增量并有有限二阶矩的正则过程的特征函数的一般表达式。

将证明 Lévy 定理时所采取的步骤(见本节相应的段落)类似地实施于局部鞅 $\xi(t)$ 的停止，可以把对属于 $l\mathscr{M}_2^c$ 的过程已获得的结果推广。

考虑取值于 $\mathscr{R}^1$、其轨道除去可能在有限个点有单位值的跳跃外，以概率 1 处处是常数的任意过程 $\xi(t)$, $t \in [0, T]$.

设 $\xi(0) = 0$ 和 $\mathfrak{F}_t = \sigma\{\xi(s), s \in [0, t]\}$. 那末 $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$ 是局部下鞅。

我们取序列 $\tau_N = \inf\{t: \xi(t) \geqslant N\}$ (认为 $\inf\phi = T$) 作为

完全导出 $\xi(t)$ 的随机时间序列. 还假定过程 $\xi(t)$ 是正则的,即对任意不减随机时间序列 σ_n 和 $\sigma = \lim\sigma_n$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\xi(\sigma_n\wedge\tau_N) = \mathbf{E}\xi(\sigma\wedge\tau_N) \quad (N=1,2,\cdots).$$

这样的过程可以看作是集中在点 $u=1(\nu(t,A)\equiv 0$,如果 $1\notin A)$ 的随机整值测度. 如前所述,存在单调不减连续函数 $\alpha(t)$, 使得 $\xi(t)=\alpha(t)+\mu(t)$, 其中 $\mu(t)\in l\mathscr{M}_2^c$ 及 $\langle\mu,\mu\rangle_t=\alpha(t)$. 特别是,如果 $\xi(t)$ 是随机连续 Poisson 过程,那末 $\alpha(t)=\mathbf{E}\xi(t)$ 是非随机函数及 $\xi(t)$ 是正则下鞅. 另一方面, 由于定理 12, 此条件也是 $\xi(t)$ 为 Poisson 过程的充分条件. 于是由定理 12 得

推论 为使得样本函数除在有限个点有等于 1 的跳跃外其余所有点是常数的过程 $\xi(t)$ 是随机连续 Poisson 过程的充分必要条件是: $\xi(t)$ 是正则的及联系于它的连续过程是非随机的.

后一论断可以加强.

定理 13 设 $\nu(t,A)$ 是满足前面所引入的条件的整数测度, 而联系于它的测度是非随机的. 那末 $\nu(t,A)$ 是 Poisson 测度, 即是,

1) 当固定 A 时, $\nu(t,A)$ 是 Poisson 过程;

2) 对任意 n, $A_1,\cdots,A_n(A_k\in\mathfrak{B}_0^m)$, 过程 $\nu(t,A_1),\cdots,\nu(t,A_n)$ 相互独立.

证. 为证明起见, 我们考虑 $\zeta(t)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\mu(t,A_k)$, 其中 λ_k 是任意常数, 应用伊藤公式于函数 $\exp\{iz\zeta(t)\}$, 如在证明定理 12 时那样,我们得到关于函数 $J(t)=\mathbf{E}\{\exp[iz\zeta(t)]|\mathfrak{F}_s\}$ 的方程

$$J(t)=e^{iz\zeta(s)}+\int_s^t J(s)\Pi(ds),\ t\leqslant s,$$

其中 $\Pi(t)=\sum_{k=1}^{n}(e^{iz\lambda_k}-1-iz\lambda_k)\pi(t,A_k)$. 容易得到这方程的解

$$J(t)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}(e^{iz\lambda_k}-1-iz\lambda_k)(\pi(t,A_k)\right.$$

$$-\pi(s, A_k)) + iz\zeta(s)\Big\}.$$

由所得的公式，变量 $\mu(t,A_k)-\mu(s, A_k)$，$k=1,\cdots,n$ 相互独立和不依赖于 σ-代数 $\mathfrak{F}_s$，即它们是独立增量过程。此外，变量 $\mu(t,A)$ 有与变量 $\zeta-\pi(t,A)$ 相同的分布，其中 ζ 是取均值 $\pi(t, A)$ 的 Poisson 变量。

按鞅测度积分的矩的估计 设

$$\zeta(t)=\int_0^t\int_{\mathfrak{R}}\gamma(s,u)\mu(ds,du), \tag{48}$$

其中 $\mu(\cdot,\cdot)$ 是鞅测度。

我们考虑变量 $\zeta(t)$ 的偶数阶矩的存在与估计问题。设特征 $\pi(t,A)$ 以概率 1 按 t 绝对连续，且对所有 $t\in[0,T]$ 以概率 1 有

$$\pi(t,A)=\int_0^t\Pi(s,A)ds,$$

$$v_k(t)=\int_{\mathfrak{R}^m}|\gamma(t,u)|^k\Pi(t,du)<\infty,\ k=2,\cdots,2m. \tag{49}$$

我们见到，如果当 $k=2$ 和 $k=2m$ 时量 $v_k(t)$ 是有限的这一条件成立，那末，对所有 $k=2,3,\cdots,2m$ 也成立。事实上，如果 $2<k<2m$，设 $|\gamma|^k=|\gamma|^\alpha|\gamma|^\beta$，其中 $\alpha=\frac{2m-k}{m-1}$，$\beta=\frac{(k-2)m}{m-1}$ 和应用 Hölder 不等式于对应的积分，得

$$v_k(t)=\left(\int_{\mathfrak{R}^m}\gamma^2(t,u)\Pi(t,du)\right)^{1/p}\times\left(\int_{\mathfrak{R}^m}\gamma^{2m}(t,u)\Pi(t,du)\right)^{1/q},$$

其中 $p=\frac{2}{\alpha}=\frac{2m-2}{2m-k}$，$q=\frac{p}{p-1}=\frac{2m-2}{k-2}$。因此

$$v_k(t)\leqslant(v_2(t))^{\frac{2m-k}{2m-2}}\ (v_{2m}(t))^{\frac{k-2}{2m-2}}. \tag{50}$$

回到随机积分(48)的矩的估计。

利用公式(45)得

$$\zeta^m(t) = \int_0^t \int_{\mathscr{R}} [(\zeta(s) + \gamma(s,u))^m - \zeta^m(s)]\mu(ds,du)$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathscr{R}} [\zeta(s) + \gamma(s,u))^m - \zeta^m(s)$$

$$- m\gamma(s,u)\zeta^{m-1}(s)]\Pi(s,du)ds.$$

设

$$\tau = \tau_N = \inf\{t: |\xi(t)| \geqslant N\},$$

而且 $\inf\phi = T$。显然，由于条件(49)，随机时间 τ 导出局部平方可积鞅 $\zeta(t)$，即 $\zeta(t\wedge\tau)$ 是平方可积鞅。

其次，

$$\mathbf{E}\zeta^{2m}(t\wedge\tau) \leqslant 2(I_1 + I_2),$$

其中

$$I_1 = \mathbf{E}\left(\int_0^t \int_{\mathscr{R}} \chi_\tau(s)[(\zeta(s) + \gamma(s, u))^m - \zeta^m(s)]\mu(ds,du)\right)^2$$

$$= \mathbf{E}\int_0^t \int_{\mathscr{R}} \chi_\tau(s)[(\zeta(s) + \gamma(s,u))^m - \zeta^m(s)]^2\Pi(s, du)ds$$

$$\leqslant m\mathbf{E} \int_0^t \int_{\mathscr{R}} \chi_\tau(s) \left(\sum_{k=1}^m (C_m^k)^2\zeta^{2m-2k}(s)\gamma^{2k}(s,u)\right) \Pi(s,du)ds,$$

$$I_2 = \mathbf{E}\left(\int_0^t \int_{\mathscr{R}} \chi_\tau(s) \left(\sum_{k=2}^m C_m^k\zeta^{m-k}(s)\gamma^k(s,u)\right)\Pi(s,du)ds\right)^2$$

和当 $s \leqslant \tau$ 时 $\chi_\tau(s) = 1$，当 $s < \tau$ 时 $\chi_\tau(s) = 0$。设

$$v_k(s) = \int_{\mathscr{R}} |\gamma^k(s,u)|\Pi(s,du).$$

那末

$$I_1 \leqslant m\mathbf{E}\int_0^t \chi_\tau(s) \sum_{k=1}^m (C_m^k)^2\left(\frac{(m-k)\zeta^{2m}(s)}{m} + \frac{kv_{2k}^{\frac{m}{k}}(s)}{m}\right)ds$$

$$\leqslant K_m\int_0^t b_m(s)ds + A_m,$$

其中

$$b_m(t) = \mathbf{E}\zeta^{2m}(t\wedge\tau),$$

$$K_m = \sum_{k=1}^{m} (m-k)(C_m^k)^2,$$

$$A_m = \mathbf{E}\int_0^T \sum_{k=1}^{m} (C_m^k)^2 k v_{2k}^{\frac{m}{k}}(s)ds.$$

类似地可估计 I_2。我们得

$$I_2 \leqslant 2K_m \int_0^t b_m(s)ds + B_m,$$

$$B_m = 2\mathbf{E}\int_0^T \sum_{k=2}^{m} (C_m^k)^2 k v_k^{\frac{2m}{k}}(s)ds.$$

因此，

$$b_m(t) \leqslant 3K_m \int_0^t b_m(s)ds + (A_m + B_m)$$

和

$$b_m(t) \leqslant (A_m + B_m)e^{3K_m t}.$$

利用 Fatou 引理，我们得到如下结果：

定理 14 如果

$$\mathbf{E}\int_0^T \left[\left(\int_{\mathscr{R}^q} |\gamma(s,u)|^2 \Pi(s,du)\right)^m + \int_{\mathscr{R}^q} |\gamma(s,u)|^{2m} \Pi(s,du)\right] ds < \infty$$

那末随机积分(48)有到 $2m$ 阶的有限矩且

$$\mathbf{E}|\zeta(t)|^{2m} \leqslant (A_m + B_m)e^{3K_m T}.$$

为证明这定理应当指出，由(50)和 Hölder 不等式得

$$\int_0^T v_k(t)^{\frac{2m}{k}} dt \leqslant \int_0^T v_2(t)^{\frac{2m-2}{2m-2}\cdot\frac{2m}{k}} v_{2m}(t)^{\frac{k}{2m-2}\cdot\frac{2m}{k}} dt$$

$$\leqslant \left(\int_0^T v_2^m(t)dt\right)^{\frac{2}{k}\cdot\frac{2m-k}{2m-2}} \left(\int_0^T v_{2m}(t)dt\right)^{\frac{2m}{k}\cdot\frac{k-2}{2m-2}} < \infty.$$

简单随机微分方程的解 考虑随机微分方程

$$d\eta = \eta d\xi, \tag{51}$$

其中 $\xi(t)$ 是形为 $\xi(t) = \alpha(t) + \beta(t) + \int_{\mathscr{R}} u\mu(t, du)$ 的过程，

$\alpha(t)\in\mathscr{V}^c$，$\beta(t)$ 是连续局部鞅，μ 是联系于过程 $\xi(t)$ 的跳跃的局部鞅测度．为简便起见，假定 $\nu(t,(-\infty,-1])=0$．对方程(51)来说，这意味着它的解如果存在的话，不可能以跳跃的方式改变自身的符号．

我们来求方程(51)形为

$$\eta(t)=\eta_0\exp\left\{\gamma(t)+\int_0^t bd\beta+\int_0^t\int_{\mathscr{R}}\varphi(s,u)\mu(ds,du)\right\}$$
$$=\eta_0\exp\{\zeta(t)\}$$

的解．由广义伊藤公式得方程(51)等价于：

$$d\gamma+\frac{1}{2}b^2d\langle\beta,\beta\rangle_t+bd\beta+\int_{\mathscr{R}}(e^{\varphi}-1-\varphi)\pi(dt,du)$$
$$+\int_{\mathscr{R}}(e^{\varphi}-1)\mu(dt,du)=d\alpha+d\beta$$
$$+\int_{\mathscr{R}}u\mu(dt,du),$$

由此得

$$b=1,\ e^{\varphi}-1=u,$$
$$d\gamma=d\alpha-\frac{1}{2}d\langle\beta,\beta\rangle_t-\int_{\mathscr{R}}(e^{\varphi}-1-\varphi)\pi(dt,du).$$

因此，

$$\eta(t)=\eta_0\exp\left\{\xi(t)-\frac{1}{2}\langle\beta,\beta\rangle_t\right.$$
$$-\int_{\mathscr{R}}(u-\ln(1+u))\pi(t,du)$$
$$\left.-\int_{\mathscr{R}}(u-\ln(1+u))\mu(t,du)\right\},$$

或

$$\eta(t)=\eta_0\exp\left\{\xi(t)-\frac{1}{2}\langle\beta,\beta\rangle_t\right.$$

$$-\int_{\mathscr{R}}(u-\ln(1+u))\nu(t,du)\Big\}. \tag{52}$$

后一等式也可写为

$$\eta(t)=\eta_0\exp\left\{\xi(t)-\frac{1}{2}\langle\beta,\beta\rangle_t\right\}$$
$$\times\prod_{s\leqslant t}(1+\delta\xi(s))e^{-\delta\xi(s)}, \tag{53}$$

其中 $\delta\xi(s)$ 是函数 $\xi(t)$ 在点 $t=s$ 的跳跃, $\delta\xi(s)=\xi(s)-\xi(s-)$.

所得的表达式表明,如果过程 $\xi(t)$ 的跳跃的谱占住点-1左边的区域,那末方程(51)形为 $\eta=e^{-\zeta(t)}$ 的解不存在. 但是,对公式(53)的简单分析表明,在一般情形它仍然是正确的.

今后由随机微分方程的一般理论将得到,我们已经得到的方程(51)的解是唯一的.

由(53)得:

1) 方程

$$\eta(t)=1+\int_0^t\eta(s)\beta(ds),$$

其中 $\beta(t)\in l\mathscr{M}^c$. 它的解有形式

$$\eta(t)=\exp\left\{\beta(t)-\frac{1}{2}\langle\beta,\beta\rangle_t\right\},$$

和 $\eta(t)\in l\mathscr{M}^c$;

2) 方程

$$\eta(t)=1+\int_0^t\eta(s)d\zeta(s),$$

其中 $\zeta(t)=\int_{\mathscr{R}}u\mu(t, du)$, μ 是联系于某过程的跳测度的鞅测度. 它的解可表为

$$\eta(t)=\exp\{\zeta(t)\}\prod_{s\leqslant t}(1+\delta\zeta(s))e^{-\delta\zeta(s)},$$

和 $\eta(t)\in l\mathscr{M}_2'$.

例. 正上鞅的乘法分解 设 $\xi(t)$, $t\geqslant 0$, 是不为0的非负平方可积正则上鞅. 对所有 t, $\xi(t-)>0$, 因此在每个区间$[0, T]$上, $\inf\xi(t)>0$, 考虑过程 $\xi(t)$ 的 Doob 分解, $\xi(t)=\beta(t)-\alpha(t)$, 其中 $\beta(t)$ 是局部鞅, $\alpha(t)$ 是联系自然增过程 (§1. 定理 11). 在所考虑的情形里过程 $\alpha(t)$ 是连续的, 且不难相信 $\beta(t)$ 是局部平方可积鞅.

令

$$\zeta_1(t)=\int_0^t\frac{d\beta(s)}{\xi(s)},\zeta_2(t)=\int_0^t\frac{d\alpha(s)}{\xi(s)},$$

$$\zeta(t)=\zeta_1(t)-\zeta_2(t).$$

此处 $\zeta_1(t)\in l.\mathscr{M}_2$, $\zeta_2(t)$ 是连续增过程且 $d\xi=\xi d\zeta$. 由上鞅 $\xi(t)$ 是正的推得过程 $\zeta_1(t)$ 的跳跃(也就是 $\zeta(t)$)大于 -1. 于是,

$$\xi(t)=\xi_0\exp\Big\{\zeta(t)-\frac{1}{2}\langle\zeta_c,\zeta_c\rangle_t$$

$$+\int_{\mathscr{R}}[\ln(1+u)-u]\nu_\zeta(t,du)\Big\},$$

其中 ζ_c 是 $\zeta_1(t)$ 分解为连续与间断部分时的连续分量, ν_ζ 是过程 $\zeta(t)$ 的跳测度.

所得的表达式也可写为

$$\xi(t)=\eta_0(t)\eta_c(t)\eta_d(t),\tag{54}$$

其中 $\eta_0(t)$ 是连续的, 非增过程

$$\eta_0(t)=\xi(0)\exp\Big\{-\int_0^t\frac{d\alpha(s)}{\xi(s)}\Big\},\ \eta_c(t)\in l.\mathscr{M}_2^c,$$

$$\eta_c(t)=\exp\Big\{\int_0^t\frac{d\beta_c(s)}{\xi(s)}-\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d\langle\beta_c,\beta_c\rangle}{\xi^2(s)}\Big\},$$

$\beta_c(t)$ 表示局部鞅 $\beta(t)$ 分解为连续与间断部分中的连续分量, 且

$$\eta_d(t)=\exp\Big\{\int_0^t\int_{\mathscr{R}}\frac{u\mu(ds,du)}{\xi(s)}\Big\}$$

$$\times\prod_{s\leqslant t}\Big(1+\frac{\delta\xi(s)}{\xi(s-)}\Big)e^{-\frac{\delta\xi(s)}{\xi(s-)}},$$

而且 $\eta_d(t)\in l\mathscr{M}_2^r$. 此时应注意到 $\delta\zeta_1(t)=\dfrac{\delta\beta_1(t)}{\xi(t-)}=\dfrac{\delta\xi(t)}{\xi(t-)}$.

定理 15 正平方可积正则上鞅可以有乘法分解 (54), 其中 $\eta_0(t)$ 是连续增过程, $\eta_c(t)$ 是正连续局部鞅, 及 $\eta_d(t)\in l\mathscr{M}_2^r$.

第二章 随机微分方程

§1. 随机微分方程理论的一般问题

在本节引入随机微分方程的概念和证明所考虑的方程的解的存在与唯一性的某些一般定理．这时需要对以前引入的随机积分的概念在某些方面加以推广．我们处理随机微分方程的办法大体上根据于如下见解．

假设我们考虑某系统 S 在相空间 $\mathscr{R}^m$ 中运动且 $\xi(t)$ 表示系统 S 在时刻 t 在 $\mathscr{R}^m$ 中的位置 $(\xi(t)=(\xi^1(t),\cdots,\xi^m(t))$. 假定在瞬时 t 位于 x 的系统 S 在时间区间$(t,t+\Delta t)$内的位移可表为

$$\xi(t+\Delta t)-\xi(t)=A(x,t+\Delta t)-A(x,t)+\delta. \tag{1}$$

一般来说，此处 $A(x,t)$ 是随机函数；$A(x,t+\Delta t)-A(x,t)$ 描述于时间区间 $(t,t+\Delta t)$ 内在点 x 处加在 S 上的“外力场”的作用，而 δ 是在某种意义下比差 $A(x,t+\Delta t)-A(x,t)$ 更高阶的小量．如果 $A(x,t)$ 作为 t 的函数绝对连续，那末关系式(1)可用常微分方程

$$\frac{d\xi}{dt}=A_t'(\xi(t),t) \tag{2}$$

代替． 方程(2)连同初始条件 $\xi(t_0)=\xi_0$ 确定了当 $t>t_0$ 时 S 在 $\mathscr{R}^m$ 中的运动，而且 $A_t'(x,t)$ 给出相空间在瞬时 t 的速度场．

自然，方程(2)不可能描写这一类 Brown 运动，即在相空间没有有限速度，或在相空间不连续的运动．为得到描述这类型的系统的运动方程，用积分型方程代替式(1)是适当的．为此，设想将时间区间 $[t_0,t]$ 用点 $t_1,t_2,\cdots,t_n=t$ 划分为子区间．那末，由(1)得

$$\xi(t)-\xi(t_0)=\sum_{i=0}^{n-1}[A(\xi(t_i),t_{i+1})$$

$$-A(\xi(t_i),t_i)]+\sum_{i=1}^{n-1}\delta_i.$$

由于量 δ_i 那么小，自然认为当 $n\to\infty$ 时，$\sum_{i=0}\delta_i\to 0$，因此后一等式在形式上变为关系式

$$\xi(t)-\xi(t_0)=\int_{t_0}^{t}A(\xi(s),ds), \tag{3}$$

其中表达式

$$\int_{t_0}^{t}A(\xi(s),ds)$$

可称为在随机场沿随机曲线 $\xi(s),s\in[t_0,t]$ 的随机积分，且此表达式应当理解为形如

$$\sum_{i=0}^{n-1}[A(\xi(t_i),t_{i+1})-A(\xi(t_i),t_i)],\ \xi(t_0)=\xi_0,t\geqslant t_0.$$

之和的极限，在今后将明确这极限的意义．式(3)称为随机微分方程并记为

$$d\xi=A(\xi(t),dt),\quad \xi(t_0)=\xi_0,\quad t\geqslant t_0.$$

在十分一般的假设下，例如，如果对每个固定的 $x\in\mathscr{R}^n$，$A(x,t)$ 是拟鞅，那末可认为

$$A(x,t)=\alpha(x,t)+\beta(x,t), \tag{4}$$

其中 $\beta(x,t)$ 作为 t 的函数是局部鞅，而过程 $\alpha(x,t)$ 能表示为两个单调不减自然过程之差．由此，按公式(4)和按不同情况对函数 $\alpha(x,t)$ 和 $\beta(x,t)$ 作进一步的限制后，公式(3)的右边是有意义的． 例如约定表达式(4)中 $\alpha(x,t)$ 是 t 的绝对连续函数，而 $\beta(x,t)$作为 t 的函数是局部平方可积鞅．(关于 $\beta(x,t)$ 的更一般的假设也将考虑．)

今后方程(3)写为

$$\xi(t)=\xi_0+\int_{t_0}^{t}\alpha(\xi(s),s)ds+\int_{t_0}^{t}\beta(\xi(s),ds) \tag{5}$$

或

$$d\xi=\alpha(\xi(t),t)dt+\beta(\xi(t),dt),\xi(t_0)=\xi_0.$$

当 $\beta(x,t)\equiv 0$ 时，我们称方程(5)为常微分方程（有随机的右边部分）.

常常考虑场 $\beta(x,t)=\{\beta^1(x,t),\cdots,\beta^m(x,t)\}$ 它具有如下形式的分量

$$\beta^k(x,t)=\int_0^t\sum_{j=1}^{r}\gamma_j^k(x,s)d\mu^j(s),\quad k=1,\cdots,m, \tag{6}$$

其中 $\mu^j(s)$ 是相互正交的局部平方可积鞅，$j=1,\cdots,r,\gamma_j^k(x,s)$ 是满足使相应的积分存在的条件的随机函数. 此时等式(5)中的积分的第二项可定义为有分量

$$\int_{t_0}^{t}\beta^k(\xi(s),ds)=\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{r}\gamma_j^k(\xi(s),s)d\mu^j(s),k=1,\cdots,m,$$

的向量积分，且可利用第一第 §2 所叙述的随机积分理论. 但是一般来说，限于形为(6)的函数 $\beta(x,t)$ 会大大减少了一般性. 这从如下事实就可见到：由公式(6)定义的过程 $\beta^k(x,t)$ 和 $\beta^k(y,t)$ 的互特征有形式

$$\langle\beta^k(x,\cdot),\beta^k(y,\cdot)\rangle_t=\int_0^t\sum_{j=1}^{m}\gamma_j^k(x,s)\gamma_j^k(y,s)d\langle\mu^j,\mu^j\rangle_s,$$

但在一般情形，这个互特征由函数 $\Gamma^k(x,y,t)$ 给出，这函数当固定 t 时是变量 x, y 的任意非负定核

$$\sum_{i,j=1}^{N}\Gamma^k(x_i,y_i,t)z_iz_j\geqslant 0,$$

它对所有 $z_j\in\mathscr{R}^1$, $j=1,\cdots,n,n=1,2,\cdots$ 成立.

例如(为简单起见，限于一维情形)，设函数

$$\gamma_j(x,t)=c_j(x,t),\quad j=1,\cdots,m$$

是非随机的，$\mu_j(t)=w_j(t)$ 是独立的 Wiener 过程，那末场

$$\beta(x,t)=\int_0^t\sum_{j=1}^m c_j(x,s)dw_j(s)$$

的相关函数等于

$$R(x,y,t)=\mathbf{E}\beta(x,t)\beta(y,t)$$

$$=\int_0^t\sum_{j=1}^m c_j(x,s)c_j(y,s)ds.$$

另一方面，如令 $\beta(x,t)=w(x,t)$，其中 $w(x,t)$ 是按 t 有独立增量的 Gauss 场，那末对固定的 t 其相关函数

$$R_w(x,y,t)=\mathbf{E}w(x,t)w(y,t)$$

是任意非负定核。

因此，在考虑沿着过程$\xi(t)$的随机积分时对形如(6)的场的限制导致所研究的问题类型的本质上的缩小。因此，最简单地，将随机积分

$$\int_0^T\beta(\xi(s),ds)$$

理解为和数

$$\sigma=\sigma(\xi)=\sum_{k=1}^n[\beta(\xi(s_{k-1}),s_k)-\beta(\xi(s_{k-1}),s_{k-1}))]$$

依概率收敛的极限，这样直接引入定义并考虑这随机积分的性质是合理的。我们称 σ 为积分和。

注意到下面的事实是合适的，即当在所考察的随机微分方程(5)中 $\alpha(x,t)=a(x,t)$ 是非随机函数，而 $\beta(x,t)$ 是按 t 的独立增量函数时，说由式(6)给出的随机场不够一般性的意见是不完全正确的。事实上，方程(5)的解的增量 $\Delta\xi(t)$ 在每个时刻 t 依赖于 $\xi(t)$ 和场 $\beta(x,t)$ 在点 $x=\xi(t)$ 的值，而不依赖于 $\beta(x,t)$和 $\beta(y,t)$ 在点 $y\neq\xi(t)$ 相互关系的特性(当场的概率特性 $\beta(x,t)$ 作为 x 的函数足够光滑时)。因此可以期待对任意两个场

$$\beta(x,t)=\beta_1(x,t)\ 及\ \beta(x,t)=\beta_2(x,t),$$

只要在 $i=1$和 $i=2$ 时向量序列

$$\{\beta_i(x,t_1),\beta_i(x,t_2),\cdots,\beta_i(x,t_N)\},\ \forall x\in\mathscr{R}^m,$$

$$\forall N = 1,2,\cdots,$$

的所有联合分布互相重合和场 $\beta_i(x,t)$ 按 t 是独立增量的条件下，方程(5)的解将是随机等价的。

例如，设 $w(x,t)$ 是按 t 有独立增量的任意 Gauss 场，

$$B(x,t) = \mathbf{E}w^k(x,t)w^j(x,t) = \{B_{jk}(x,t)\},$$

而且函数 $B_{jk}(x,t)$ 对 t 可微，$b_{jk}(x,t) = \frac{d}{dt}\beta_{kj}(x,t)$。我们以 $\sigma(x,t)$ 表示满足 $\sigma^2(x,t) = b(x,t)$ 的对称矩阵并引入相互独立的 Wiener 过程 $w_j(t), j = 1,\cdots,n$。设

$$\beta_1(x,t) = \int_0^t \sigma(x,s)dw(s),$$

$$w(t) = (w_1(t),\cdots,w_n(t)),$$

那末

$$\mathbf{E}\beta_1(x,t)\beta_1(x,t) = \int_0^t \sigma(x,s)\sigma(x,s)ds$$

$$= \int_0^t b(x,s)ds,$$

且可期待随机微分方程

$$d\xi = \alpha(\xi,t)dt + w(\xi,dt),$$

$$d\xi = \alpha(\xi,t)dt + \sigma(\xi,t)dw(t),$$

的解随机等价，尽管一般来说，$w(x,t)$ 和 $\beta_1(x,t)$ 不是随机等价的。

当 $\beta(x,t)$ 为按 t 有独立增量和有有限二阶矩的任意场时，也可作出类似的论述。假定增量 $\beta(x,t+\Delta t) - \beta(x,t)$ 具有特征函数

$$\mathbf{E}\exp\{i(z,\beta(x,t+\Delta t) - \beta(x,t))\}$$

$$= \exp\Big\{-\frac{1}{2}\int_t^{t+\Delta t}(b(x,s)z,z)ds$$

$$+ \int_t^{t+\Delta t} ds\int_{R^m}[e^{i(z,c(x,s,u))} - 1 - i(z,c(x,s,u))]\pi(s,du)\Big\}.$$

(可以把任意独立增量过程的特征函数归结为这样的形式，如果 $\beta(x,t)$ 有有限二阶矩且按 t 是绝对连续.) 那末对足够光滑的函数 $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t,u)$，自然希望随机微分方程

$$d\xi = a(\xi,t)d + \beta(\xi,dt)$$

和

$$d\xi = a(\xi,t)dt + \sigma(\xi,t)dt + \int_{\mathscr{R}^m} c(\xi,t,u)\tilde{\nu}(dt,du)$$

的解是随机等价的. 此处 $\sigma(x,t)$ 是对称矩阵，$\sigma^2(x, t) = b(x, t)$, $\tilde{\nu}(t,A)$是中心化的 Poisson 测度，$\mathrm{Var}\tilde{\nu}(t,A) = \int_0^t \Pi(s,A)ds$.

不言而喻，当场 $\beta(x,t)$ 按 t 的增量不独立时，上面所讲关于方程 (5) 中均 $\beta(x,t)$ 可能进行更简单的代换而不致限制解的类别的意见未必正确.

定义随机微分方程的上述图式还可沿另外的方向适当地推广. 现时，有“反馈”的系统在一系列科技领域中起着重要作用. 对于这种系统，在已知时刻作用于系统的“外力场”不仅依赖于系统在相空间的瞬时位置，而且依赖于系统在“过去”的相轨道:

$$\xi(t+\Delta t) - \xi(t) = \alpha(\xi|_{t_0}^t, t+\Delta t) - \alpha(\xi|_{t_0}^t, t) + \delta_{t_0}, \qquad (7)$$

其中 $\alpha(\varphi|_{t_0}^t, s), s \geqslant t > t_0$ 是定义在某些函数 $\varphi(u)$, $u \in [t_0, t]$, 所成的空间上而取值于 $\mathscr{R}^m$ 的随机函数族，$\varphi(u)$ 取值于 $\mathscr{R}^m$.

在今后作进一步讨论时记号 $\alpha(\varphi|_{t_0}^t, s)$ 是不方便的，主要是因为泛函 $\alpha(\cdot, s)$ 的变元不存在固定的变化范围. 为避免此困难，可采用如下方法.

我们引进空间 $\mathscr{D}_T^m(\mathscr{D}^m[a,b])$, 它是由定义在 $(-\infty, T]$ ($[a,b]$)上取值于 $\mathscr{R}^m$ 且在定义域的每个点上有左右极限 (在空间 $\mathscr{D}_T^m$ 情形当 $s \to -\infty$ 时也有极限)和右连续的函数 $\varphi(s)$ 所组成. 设 $\mathscr{D}^m = \mathscr{D}_0^m$. 以 $\theta_t(t \leqslant T)$ 表示由关系式

$$(\theta_t\varphi)(s) = \varphi(t+s), s \leqslant 0$$

定义的由 $\mathscr{D}_t^m$ 到 $\mathscr{D}^m$ 的映象. 其次设 $\alpha(\varphi, A) = \alpha(\varphi, t, \omega)$ 是

定义在 $\mathscr{D}^m \times [0,T] \times \Omega$ 上的随机函数。式(7)可重写为下列形式:

$$\xi(t+\Delta t)-\xi(t)=\alpha(\theta_t\xi,t+\Delta t)-\alpha(\theta_t\xi,t)+\delta_t,$$

而方程(5)变为方程

$$\xi(t)=\xi_0+\int_{t_0}^t \alpha(\theta_s\xi,s)ds+\int_{t_0}^t \beta(\theta_s\xi,ds),\quad t>t_0. \tag{8}$$

这时,有必要给定过程 $\xi(t)$ 的全部"过去",即是直到时刻 t_0 的值。据此应把关系式

$$\xi(t)=\varphi(t),t\leqslant t_0, \tag{9}$$

拼入方程(8),今后称(9)为随机微分方程(8)的初始条件。

随机线积分 设 $\{\mathfrak{F}_t,t\in[0,T]\}$ 是在固定概率空间 $\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$ 上的某个 σ-代数流,$(\mathfrak{F}_t\subset\mathfrak{S})$,$\beta(\varphi,t)$ 是取值于 $\mathscr{R}^m$ 适应于 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的随机函数。

今后考虑两个不同版本的定理。一种是其样本函数以概率 1 连续的随机过程,而另一种是样本函数没有第二类间断点(mod$\mathbf{P}$)的过程。与此相应,引入两组假设。

设 $\mathscr{C}_T^m(\mathscr{C}^m,\mathscr{C}^m[a,b])$ 是空间 $\mathscr{D}_T^m(\mathscr{D}^m,\mathscr{D}^m[a,b])$ 中由连续函数组成的子空间。空间 $\mathscr{C}^m$ 赋予一致范数

$$\|\varphi\|=\sup_{s\leqslant 0}|\varphi(s)|.$$

将认为空间 $\mathscr{D}^m$ 是没有第二类间断点的函数以 $\rho_{\mathscr{D}^m}$ 为距离的距离空间(第一卷第六章§5)。为使研究间断过程情形简化,在 $\mathscr{D}^m$ 中将使用更简单的距离对研究的方程建立进一步的假设。这距离由关系式

$$\|\varphi\|_*=\left\{\int_{-\infty}^0 |\varphi(s)|^2K(ds)\right\}^{1/2} \tag{10}$$

定义的半范数$\|\varphi\|_*$所产生,其中 $K(\cdot)$ 是定义在半直线$(-\infty,0]$的 Borel 集合上的某个有限测度,$K(-\infty,0]=K<\infty$。

例如,若考虑有滞后的随机微分方程,即形如

$$\begin{aligned}d\xi(t)=&\alpha(\xi(t-h_1),\cdots,\xi(t-h_r),t)dt\\&+\beta(\xi(t-h_1),\cdots,\xi(t-h_r),dt),\end{aligned}$$

的方程那末 $\beta(\varphi,t)$ 应看作是依赖于 $\varphi(s)$ 在有限个点的值的函数,即形如 $\beta(\varphi(0),\varphi(-h_1),\cdots,\varphi(-h_r),t)$ 的函数。在此情形自然应把在点 θ, $-h_1,\cdots$, $-h_r$ 取同样值的函数 $\varphi(s)$ 看成是同一的,并用距离

$\|\varphi-\psi\|_*=$

$$\sqrt{(\varphi(0)-\psi(0))^2+(\varphi(-h_1)-\psi(-h_1))^2+\cdots+(\varphi(-h_r)-\psi(-h_r))^2}$$

对 $\mathscr{D}^m$ 距离化,即用半范数(10)来距离化,其中相应的测度 K 是集中在点 $0=h_0,-h_1,\cdots,h_r$ 并在这些点取值 $K(\{-h_k\})=1$.

回到函数 $\beta(\varphi,t)$, 首先假设它满足下述两组条件中的一组:

$\beta.1$): a) 函数 $\beta(\varphi,s)=\beta(\varphi,s,\omega)$ 定义在 $\mathscr{D}^m\times[0,T]\times\Omega$ 上,且对每个 $t\leqslant T$, 它在区间 $s\in[0,t]$ 上的限制是 $\mathfrak{B}_{\mathscr{D}^m}\times\mathfrak{T}_t\times\mathfrak{F}_t$-可测的。

b) 当固定 φ 时,$\beta(\varphi,t)$ 是平方可积 $\mathfrak{F}_t$-鞅,其样本函数以概率 1 属于 $\mathscr{D}^m[0,T]$, 且其分量的特征以概率 1 连续。

这里 $\mathfrak{B}_{\mathscr{D}^m}$ 是包含 $\mathscr{D}^m$ 中的柱集的 $\mathscr{D}^m$ 中子集的最小 σ-代数,$\mathfrak{T}_t$ 是区间 $[0,t]$ 的 Borel 集的 σ-代数。

$\beta.2$):如果分别以 $\mathscr{C}^m,\mathfrak{B}_{\mathscr{C}^m},\mathscr{C}^m[0,T]$ 代替 $\mathscr{D}^m,\mathfrak{B}_{\mathscr{D}^m},\mathscr{D}^m[0,T]$,则函数 $\beta(\varphi,t)$ 满足 $\beta.1$) 的条件。

满足条件 $\beta.1$), $\beta.2$) 的随机函数 $\beta(\varphi,t)$ 称为 $\mathscr{D}^m(\mathscr{C}^m)$ 中的鞅场,或简称场。

如果 $\beta(\varphi,t)$ 是 $\mathscr{D}^m$ 中的鞅场,那末存在随机函数 $\Lambda(\varphi,t)$, 当固定 φ 时是自然可积单调不减过程, $\Lambda(\varphi,0)=0$, 且对任意 $\Delta=(t,t+\Delta t]$, 有

$$\mathbf{E}\{|\beta(\varphi,\Delta)|^2|\mathfrak{F}_t\}=\mathbf{E}\{\Lambda(\varphi,\Delta)|\mathfrak{F}_t\},$$

其中 $\Lambda(\varphi,\Delta)=\Lambda(\varphi,t+\Delta t)-\Lambda(\varphi,t)$.

我们说场 $\beta(\varphi,t)$ 按半范数或范数线性有界,如果

$$\Lambda(\varphi,\Delta)\leqslant(1+\|\varphi\|_*^2)\Lambda_0(\Delta) \tag{11}$$

或

$$\Lambda(\varphi,\Delta) \leqslant (1 + \|\varphi\|^2)\Lambda_0(\Delta),$$

其中 $\Lambda_0(t)$ 是适应于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0,T]\}$ 的连续单调不减可积过程. 如果对每个 $\varphi, \Lambda(\varphi,t)$ 是 t 的连续函数, 那末按半范数线性有界的条件等价于要求:

能找到满足上述条件的过程 $\Lambda_0(t)$, 使得对任意 $\Delta \subset [0,T]$

$$\mathbf{E}\{|\beta(\varphi,\Delta)|^2|\mathfrak{F}_t\} \leqslant (1 + \|\varphi\|_*^2)\mathbf{E}\{\Lambda_0(\Delta)|\mathfrak{F}_t\}. \tag{12}$$

由(11)可得(12)是显而易见的. 其逆易由第一章§1定理21得到. 类似的关系对按范数线性有界场也正确.

还可对鞅 $\beta(\varphi,t) - \beta(\psi,t)$ 得到同样的关系. 如果对任意 $N > 0$ 存在适应于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0,T]\}$ 和不依赖于 φ 和 ψ 的单调不减连续可积过程 $\Lambda_N(t), t \in [0,T]$, 使得对满足条件

$$\|\varphi\|_* \leqslant N, \ \|\psi\|_* \leqslant N$$

的所有 $\varphi, \psi \in \mathscr{D}^m$,

$$\mathbf{E}\{|\beta(\varphi,\Delta) - \beta(\psi,\Delta)|^2|\mathfrak{F}_t\} \leqslant \|\varphi - \psi\|_*^2\mathbf{E}\{\Lambda_N(\Delta)|\mathfrak{F}_t\} \tag{13}$$

成立,那末称 $\beta(\varphi,t)$ 满足局部 Lipschitz 条件(对于半范数). 如果存在过程 $\Lambda(t)$ 使对所有 $N > 0$ 可认为 $\Lambda_N(t) = \Lambda(t)$, 那末将称 $\beta(\varphi,t)$ 满足一致 Lipschitz 条件(对于半范数). 类似的术语适用于等式(13)中用范数 $\|\varphi - \psi\|$ 代换半范数 $\|\varphi - \psi\|_*$ 的情形.

现来给出随机线积分

$$\int_0^T \beta(\theta_t\xi, dt)$$

的定义. (下面还将对这定义稍作推广.)

对随机过程 $\xi(t), t \in (-\infty, T]$ 作如下假设:

$\xi.1$) 过程 $\xi(t), t \in [0,T]$, 适应于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0,T]\}$, 对 $s < 0$, $\xi(s)$ 是 $\mathfrak{F}_0$-可测的且过程 $\xi(t)$ 的样本函数以概率 1 属于 $\mathscr{D}_T^m$; 或

$\xi.2$) 过程 $\xi(t)$, $t \leqslant T$ 满足条件 $\xi.1$), 且其样本函数以概率 1 属于 $\mathscr{C}_T^m$.

设 δ 是用点

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T$$

对区间 $[0,T]$ 所作的一个分割，

$$|\delta| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta t_k, \quad \Delta_k = t_k - t_{k-1}.$$

今后 Δ 或 Δ_k 将表示半开区间 $(t, t+\Delta t]$ 或 $(t_k, t_{k+1}]$.

定理1 设 $\xi(t)$, $t \in (-\infty, T]$ 满足条件 $\xi.1$)，随机函数 $\beta(\varphi, t)$ 满足条件 $\beta.1$) 和局部 Lipschitz 条件(13)。那末极限

$$\int_0^T \beta(\theta_t \xi, dt)$$

$$\underset{\text{定义}}{=} \mathbf{P} - \lim_{|\delta| \to 0} \sum_{k=1}^{n} [\beta(\theta_{t_{k-1}} \xi, t_k) - \beta(\theta_{t_{k-1}} \xi, t_{k-1})] \quad (14)$$

存在.

定义 关系式(14)右边的极限如果存在，称它为随机线积分，或在场 $\beta(\varphi, t)$ 中沿曲线 $\xi(t)$ 的随机积分.

定理 1 的证明. 设

$$\tau_N = (\inf\{t : |\xi(t)| > N\}) \vee 0,$$

且令 $\inf\{\phi\} = T$, $\tau'_L = \inf\{t : \Lambda_N(t) > L\}$, 和当 $t < \tau_N$ 时 $\xi_N(t) = \xi(t)$, 当 $t \geqslant \tau_N$ 时 $\xi_N(t) = 0$,

$$\tilde{\beta}(\varphi, t) = \tilde{\beta}_{LN}(\varphi, t) = \beta(\varphi, t \wedge \tau'_L).$$

利用停止鞅的定理，不难验证，当 $\|\varphi\|_* \leqslant N$, $\|\phi\|_* \leqslant N$ 时

$$\mathbf{E}\{|\tilde{\beta}(\varphi, \Delta) - \tilde{\beta}(\phi, \Delta)|^2 | \mathfrak{F}_t\} \leqslant \|\varphi - \phi\|_*^2 \mathbf{E}\{\tilde{\Lambda}_N(\Delta) | \mathfrak{F}_t\}, \quad (15)$$

其中

$$\tilde{\Lambda}_N(\Delta) = \Lambda_N[(t + \Delta t) \wedge \tau'_L] - \Lambda_N(t \wedge \tau'_L).$$

考虑区间 $[0,T]$ 的两个分割 δ_1 和 δ_2, 其中 δ_2 是 δ_1 的子分割 $(\delta_2 < \delta_1)$. 构成分割 δ_1 的点以 $t_k (k = 0, 1, \cdots, n)$ 表示，而分割 δ_2 的点用 t_{kj} $(t_k = t_{k0} < t_{k1} < \cdots < t_{ks_k} = t_{k+1})$ 表示. 设

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \quad \Delta t_{kj} = t_{kj} - t_{kj-1},$$

$$\Delta_k = (t_{k-1}, t_k], \quad \Delta_{kj} = (t_{kj-1}, t_{kj}],$$

$$\sigma_1(\xi)=\sum_{k=1}^{n}\beta(\theta_{t_{k-1}}\xi,\Delta_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[\beta(\theta_{t_{k-1}}\xi,t_k)-\beta(\theta_{t_{k-1}}\xi,t_{k-1})],$$

且设 $\sigma_2(\xi)$ 是类似于 $\sigma_1(\xi)$ 的积分和，但按分割 δ_2 构造，$\tilde{\sigma}_i(\xi)$ 是对场 $\tilde{\beta}(\varphi,t)$ 按分割 $\delta_i(i=1,2)$ 构造的积分和。那末

$$\mathbf{P}\{|\sigma_1(\xi)-\sigma_2(\xi)|>\varepsilon\}\leqslant\mathbf{P}\{\tau_N\vee\tau'_L<T\}$$
$$+\mathbf{P}\{|\tilde{\sigma}_1(\xi_N)-\tilde{\sigma}_2(\xi_N)|>\varepsilon\}.$$

因为过程 $\xi(t)$ $(t\in(-\infty,T])$ 和 $\Lambda_N(t)$ $(t\in[0,T])$ 的样本函数有界，所以当 N 和 $L=L(N)$ 足够大时，概率 $\mathbf{P}\{\tau_N\vee\tau'_L<T\}$ 可任意小。

现来估计后一不等式右边第二个被加项。注意

$$\tilde{\sigma}_1(\xi_N)-\tilde{\sigma}_2(\xi_N)$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=1}^{s_k}[\tilde{\beta}(\theta_{t_{k-1}}\xi_N,\Delta_{kr})-\tilde{\beta}(\theta_{t_{kr-1}}\xi_N,\Delta_{kr})].$$

利用不等式(15)，得

$$\mathbf{E}|\tilde{\sigma}_1(\xi_N)-\tilde{\sigma}_2(\xi_N)|^2$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=1}^{s_k}\mathbf{E}|\tilde{\beta}(\theta_{t_{k-1}}\xi_N,\Delta_{kr})-\tilde{\beta}(\theta_{t_{kr-1}}\xi_N,\Delta_{kr})|^2$$

$$\leqslant\mathbf{E}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=1}^{s_k}\|\theta_{t_{k-1}}\xi_N-\theta_{t_{kr-1}}\xi_N\|_*^2\tilde{\Lambda}_N(\Delta_{kr}).\tag{16}$$

这时我们利用

$$\mathbf{E}|\tilde{\beta}(\theta_{t_{k-1}}\xi_N,\Delta_{kr})-\tilde{\beta}(\theta_{t_{kr-1}}\xi_N,\Delta_{kr})|^2=\mathbf{E}\mathbf{E}\{\cdots|\mathfrak{F}_{t_{kr-1}}\}$$
$$=\mathbf{E}[\mathbf{E}\{|\tilde{\beta}(\varphi,\Delta_{kr})-\tilde{\beta}(\psi,\Delta_{kr})|^2|\mathfrak{F}_{t_{kr-1}}\}]_{\varphi=\theta_{t_{k-1}}\xi_N,\psi=\theta_{t_{kr-1}}\xi_N}.$$

注意到不等式(16)右边位于数学期望下的和一致有界。它不超过 $4N^2K\tilde{\Lambda}_N(T)\leqslant 4N^2KL$，其中 $K=K(-\infty,0]$。其次，

$$\|\theta_{t_{k-1}}\xi_N-\theta_{t_{kr-1}}\xi_N\|_*^2$$
$$=\int_{-\infty}^{0}|\xi_N(t_{k0}+s)-\xi_N(t_{kr-1}+s)|^2K(ds),$$

因此

$$\mathbf{E}|\tilde{\sigma}_1(\xi_N) - \tilde{\sigma}_2(\xi_N)|^2 = \mathbf{E}\int_{-\infty}^{0}\Big(\sum_{k,r}|\xi_N(t_{k-1}+s) - \xi_N(t_{kr-1}+s)|^2\Lambda_N(\tilde{\Delta}_{kr})\Big)K(ds). \tag{17}$$

利用积分学中通常采用的方法，不难验证对所有 $s \leqslant 0$，在积分号下的和当 $|\delta| \to 0$ 时趋于 0。

事实上，设 $\varepsilon_1 > 0$ 是任意给定的。在区间 $[s, s+T]$ 上函数 $\xi_N(u)$ 仅在有限个点有不小于$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{L}}$的跳跃。设就在点 $s_1, \cdots, s_m$ 有这样的跳跃。用长度为 h_0 的区间 i_r 包围它们，其中 $h_0 m < \varepsilon_1$。在区间 $[s, s+T]$ 中除去区间 i_r，我们得闭集 S。可找到这样的 ε_2 使当 $|s' - s''| \leqslant \varepsilon_2$，$s', s'' \in S$ 时，

$$|\xi_N(s') - \xi_N(s'')|^2 < \frac{2\varepsilon_1}{L}.$$

易见这样的 ε_2 存在。事实上，如果相反，我们构造点 s'_n, s''_n，$n = 1, 2, \cdots$ 的序列，使得 $|s'_n - s''_n| < \frac{1}{n}$，$\lim s'_n = \lim s''_n = s_0 \in S$，$|\xi_N(s'_n) - \xi_N(s''_n)| \geqslant \frac{2\varepsilon_1}{L}$，由于函数 $\xi_N(s)$ 的单方极限存在，所以 $|\xi_N(s_0-) - \xi_N(s_0)| \geqslant \frac{2\varepsilon_1}{L}$。但此不等式与 $s_0 \in S$ 相矛盾。如果 $|\delta_1| < \frac{h_0}{2}$，那末每个区间 $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$ 位于 S 的内部，或包含区间 i_r 的一个端点作为它的内点，或位于 i_r 的内部。我们以 I_1, I_2, I_3 分别表示这三种类型的区间 Δ_k 的集合。设

$$|\delta_1| < \left(\frac{h_0}{2} \wedge \varepsilon_2\right),$$

则

$$z = \sum_{k,r}|\xi_N(t_{k0}+s) - \xi_N(t_{kr-1}+s)|^2\tilde{\Lambda}_N(\Delta_{kr})$$

$$\leqslant \sum_{I_1} + \sum_{I_2} + \sum_{I_3} \leqslant \frac{2\varepsilon_1}{L}\sum_{I_1}\tilde{\Lambda}_N(\Delta_{kr})$$

$$+ 2m \cdot 4N^2 \cdot \max_{\Delta_k \in I_2} \tilde{\Lambda}_N(\Delta_k) + 4N^2 \sum_{\Delta_k \in I_1} \tilde{\Lambda}_N(\Delta_k)$$

$$\leqslant 2\varepsilon_1 + 8mN^2 \max_{\Delta_k \in I_2} \tilde{\Lambda}_N(\Delta_k) + 4N^2 \sum_{r=1}^{m} \tilde{\Lambda}_N(i_r).$$

顾及到函数 $\tilde{\Lambda}_N(t)$ 的连续性，可见对任意给定 ε_0，可先选取 ε_1，然后找到 h_0 和 ε_2 使得对满足 $|\delta_1| < \left(\frac{h_0}{2} \wedge \varepsilon_2\right)$的所有 δ_1，$z \leqslant \varepsilon_0$（当给定$\omega$时）。因此当 $|\delta_1| \to 0$，以概率 1 有 $z \to 0$。

因为在不等式(17)中可以将极限移至积分号下，我们得

$$\mathbf{E}|\tilde{\sigma}_1(\xi_N) - \tilde{\sigma}_2(\xi_N)|^2 \to 0, \text{ 当 } |\delta_1| \to 0 \text{ 时}.$$

因此当 $|\delta_1| \to 0$ 时，$\mathbf{P}\{|\sigma_1(\xi) - \sigma_2(\xi)| > \varepsilon\} \to 0$。由此易得对区间 $[0, T]$ 的任意分割 δ_1 和 δ_2（即当 δ_2 已经不必是 δ_1 的子分割时）均有

$$\mathbf{P}\{|\sigma_1(\xi) - \sigma_2(\xi)| > \varepsilon\} \to 0, \text{当 } |\delta_1|, |\delta_2| \to 0 \text{时}.$$

定理得证。

当对连续过程考虑积分时，上定理可稍作加强。

定理2 假设过程 $\xi(t), t \in (-\infty, T]$，满足条件 $\xi.2)$，而场 $\beta(\varphi, t)$ 是满足条件 $\beta.2)$ 及局部 Lipschitz 条件（对一致范数），即当 $\|\varphi\| \leqslant N$，$\|\psi\| \leqslant N$ 和 $t \in [0, T]$ 时，

$$\mathbf{E}\{|\beta(\varphi, \Delta) - \beta(\psi, \Delta)|^2 | \mathfrak{F}_t\} \leqslant \|\varphi - \psi\|^2 \mathbf{E}\{\Lambda_N(\Delta) | \mathfrak{F}_t\}, \tag{18}$$

其中 $\Lambda_N(t)$ 是适应于 $\{\mathfrak{F}_t, \ t \in [0, T]\}$ 的连续单调不减可积过程。那末随机线积分(14)存在。

证。如在证明定理 1 时那样论证，我们得

$$\mathbf{E}|\tilde{\sigma}_1(\xi_N) - \tilde{\sigma}_2(\xi_N)|^2 \leqslant \mathbf{E} \sum_{k,r} \|\theta_{t_{k-1}} \xi_N - \theta_{t_{kr-1}} \xi_N\|^2 \tilde{\Lambda}_N(\Delta_{kr}),$$

且不等式右边的和一致(对 ω)有界。由关于函数 $\xi(t)$ 的结构的假设，得知当 $|\delta_1| \to 0$ 时，以概率 1 对 k, r 一致地有

$$\|\theta_{t_{k-1}} \xi_N - \theta_{t_{kr-1}} \xi_N\|^2 = \sup_{s \leqslant 0} |\xi(t_k + s)$$

$$- \xi(t_{k_{r-1}} + s)|^2 \to 0.$$

因此，当 $|\delta_1| \to 0$ 时，

$$\mathbf{E}|\tilde{\sigma}_1(\xi_N) - \tilde{\sigma}_2(\xi_N)|^2 \to 0,$$

由此，如同定理 1 那样，得所需的结论.

注. 如果定理 1 或定理 2 的条件成立且 $\sup\limits_{-\infty<t<T} |\xi(t)| \leqslant C$，其中常数 C 是非随机的，那末式(14)不仅依概率收敛，而且在均方意义下也收敛，同时随机积分有有限二阶矩.

现来建立所导出的积分的某些估计.

引理 1 设场 $\beta(\varphi, t)$ 满足条件 $\beta.1)$ 和局部 Lipschitz 条件，而 $\xi_k(t)$, $k=1,2$, 满足条件 $\xi.1)$ 且

$$\|\theta_T\xi_k\| = \sup\{|\xi_k(t)|, t \leqslant T\} \leqslant N, \ k = 1,2,$$

那末

$$\mathbf{E}\left\{\left|\int_0^T \beta(\theta_t\xi_1, dt) - \int_0^T \beta(\theta_t\xi_2, dt)\right|^2 \middle| \mathfrak{F}_0\right\}$$
$$\leqslant \mathbf{E}\left\{\int_0^T \|\theta_t\xi_1 - \theta_t\xi_2\|_*^2 \Lambda_N(dt) | \mathfrak{F}_0\right\}, \qquad (19)$$

证. 如在证明定理 1 时那样，我们得到不等式

$$\mathbf{E}\{|\sigma(\xi_1) - \sigma(\xi_2)|^2 | \mathfrak{F}_0\} \leqslant \mathbf{E}\left\{\int_{-\infty}^0 \left(\sum_{k=1}^n |\xi_1(t_k + s)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \xi_2(t_k + s)|^2 \times \Lambda_N(\Delta_k)\right) K(ds) | \mathfrak{F}_0\right\}.$$

位于积分号内的和一致(对 ω) 有界，且当 $|\delta| \to 0$ 时收敛于极限

$$\int_0^T |\xi_1(t+s) - \xi_2(t+s)|^2 \Lambda_N(dt).$$

由此易得不等式(19).

注. 如果 $\beta(\varphi, t)$ 和 $\xi_k(t)$, $k=1,2$, 满足定理 2 的条件且 $\|\theta_T\xi_k(t)\| \leqslant N$, 那末

$$\mathbf{E}\left\{\left|\int_0^T \beta(\theta_t\xi_1, dt) - \int_0^T \beta(\theta_t\xi_2, dt)\right|^2 \middle| \mathfrak{F}_0\right\}$$
$$\leqslant \mathbf{E}\left\{\int_0^T \|\theta_t\xi_1 - \theta_t\xi_2\|^2 \Lambda_N(dt) | \mathfrak{F}_0\right\}. \qquad (20)$$

证明与上述类似。

类似地可证明下引理。

引理2. 1. 如果定理 1 的条件成立，此外，

a) $\|\theta_T\xi\| \leqslant N$，其中$N$是非随机常数，

b) 存在适应于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t\in[0, T]\}$ 的连续单调不减可积过程 $\Lambda_0(t)$，使得

$$\mathbf{E}\{|\beta(\phi,\Delta)|^2|\mathfrak{F}_t\} \leqslant (1+\|\varphi\|_*^2)\mathbf{E}\{\Lambda_0(\Delta t)|\mathfrak{F}_t\}, \tag{21}$$

那末

$$\mathbf{E}\left\{\left|\int_0^T \beta(\theta_t\xi, dt)\right|^2\middle|\mathfrak{F}_0\right\} \leqslant \mathbf{E}\left\{\Lambda_0(T) + \int_0^T \|\theta_t\xi\|_*^2\Lambda_0(dt)|\mathfrak{F}_0\right\}. \tag{22}$$

2. 如果定理 2 的条件 a) 和

c) $\mathbf{E}\{|\beta(\varphi,\Delta)|^2|\mathfrak{F}_t\} \leqslant (1+\|\varphi\|^2)\mathbf{E}\{\Lambda_0(\Delta)|\mathfrak{F}_t\}$ (23)

均成立，那末

$$\mathbf{E}\left\{\left|\int_0^T \beta(\theta_t\xi, dt)\right|^2\middle|\mathfrak{F}_0\right\} \leqslant \mathbf{E}\left\{\Lambda_0(T) + \int_0^t \|\theta_t\xi\|^2\Lambda_0(dt)|\mathfrak{F}_0\right\}. \tag{24}$$

引理3 设 $\beta(\varphi,t)$ 和 $\xi(t)$ 满足定理 1 或 2 的条件. 又设 τ 是 $[0,T]$ 上的随机时间，$\beta_\tau(\varphi,t)=\beta(\varphi,t\wedge\tau)$，$\xi_\tau(t)=\xi(t)$ 当 $t<\tau$ 时，和 $\xi_\tau(t)=\xi(\tau-)$ 当 $t\geqslant\tau$ 时. 那末以概率 1 在集合 $t\leqslant\tau$ 上，有

$$\int_0^t \beta(\theta_s\xi, ds) = \int_0^t \beta_\tau(\theta_s\xi_\tau, ds) = \int_0^t \beta_\tau(\theta_s\xi, ds). \tag{25}$$

首先注意到如果定理 1 或 2 的条件对时间区间 $[0,T]$ 成立，那末它们限制在区间$[0,t]$，$t<T$ 时也成立，且按定理 1 或 2 可唯一地 (mod $\mathbf{P}$) 定义积分

$$\int_0^t \beta(\theta_s\xi, ds).$$

此外，函数 $\beta_\tau(\varphi,t)$ 和 $\xi_\tau(t)$ 也满足这些定理的条件. 因此包含在式(25)中的量有定义. 为确定等式 (25)中的积分而取的和

在集合 $t\leqslant\tau$ 上相等，由此可得等式(25)。

注。我们着重指出，当 $t=\tau$ 时(25)也成立 (mod **P**)。

引理 4 设 $\beta(\varphi,t)$ 满足条件 $\beta.1)$ 和一致 Lipschitz 条件成立，而 $\xi_k(t)$, $k=1,2$，满足条件 $\xi.1)$ 及

$$\mathbf{E}\int_0^T\|\theta_t\xi\|_*^2\Lambda(dt)<\infty.$$

那末取 $\Lambda_N=\Lambda$ 时不等式(19)成立。

证。设 $\tau_N=\inf\{t:\bigvee_{k=1}^{2}|\xi_k(t)|\geqslant N\}$ 和 $\xi_k^N(t)=\xi_k(t)$，当 $t<\tau_N$ 时；$\xi_k^N(t)=\xi_k(\tau_N-)$，当 $t\geqslant\tau_N$ 时。由引理 3 得知对所有足够大的 N，有

$$\int_0^T\beta(\theta_s\xi_k^N,ds)=\int_0^T\beta(\theta_s\xi_k,ds).$$

由于 Fatou 引理，有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left\{\left|\int_0^T\beta(\theta_s\xi_1,ds)-\int_0^T\beta(\theta_s\xi_2,ds)\right|^2\right.\\ \leqslant\underline{\lim}\,\mathbf{E}\left|\int_0^T\beta(\theta_s\xi_1^N,ds)-\int_0^T\beta(\theta_s\xi_2^N,ds)\right|^2\\ \leqslant\underline{\lim}\,\mathbf{E}\int_0^T\|\theta_t\xi_1^N-\theta_t\xi_2^N\|_*^2\Lambda(dt).\end{aligned}$$

顾及到以概率 1 对 t 一致地 $\xi_k^N(t)\to\xi_k(t)$，得

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left\{\left|\int_0^T\beta(\theta_s\xi_1,ds)-\int_0^T\beta(\theta_s\xi_2,ds)\right|^2\right\}\\ \leqslant\mathbf{E}\int_0^T\|\theta_t\xi_1-\theta_t\xi_2\|_*^2\Lambda dt,\end{aligned}\tag{26}$$

引理 5 如果场 $\beta(\varphi,t)$ 线性有界且满足局部 Lipschitz 条件，$\xi(t)$ 满足条件 $\xi.1)$ 及

$$\mathbf{E}\int_0^T\|\theta_t\xi\|_*^2\Lambda_0(dt)<\infty,$$

那末不等式(22)成立且无须假设 $\|\theta_T\xi\|\leqslant N$。

其证明类似于引理 4 的证明。

注。类似于 (22) 及 (26) 的不等式在如下情形也成立：

$\beta(\varphi,t)$，$\xi_k(t)$，$k=1,2$，除满足定理 2 条件外，场 $\beta(\varphi,t)$ 还是线性有界的（相应地满足一致 Lipschitz 条件），且

$$\mathbf{E}\int_0^T \|\theta_t\xi_k\|^2\Lambda_0(dt)<\infty \quad \left(\mathbf{E}\int_0^T \|\theta_t\xi_k\|^2\Lambda(dt)<\infty\right).$$

引理 6 设随机场 $\beta(\varphi,t)$满足定理 1 的条件，而过程 $\xi_k(t)$，$k=1,2$ 满足引理 1 的条件。那末对任意 $\varepsilon>0$ 和 $N>0$，有

$$\mathbf{P}\left\{\left|\int_0^T\beta(\theta_t\xi_1,dt)-\int_0^T\beta(\theta_t\xi_2,dt)\right|>\varepsilon\right\}$$
$$\leqslant\frac{N}{\varepsilon^2}+\mathbf{P}\left\{\int_0^T\|\theta_t\xi_1-\theta_t\xi_2\|_*^2\Lambda_N(dt)>N\right\}.$$

证. 设 δ 是由点 t_k，$k=1,2,\cdots,n$ 对区间 $[0,T]$ 作出的某个分割. 和的序列

$$\sum_{j=1}^k[\beta(\theta_{t_{j-1}}\xi_1,\Delta_j)-\beta(\theta_{t_{j-1}}\xi_2,\Delta_j)];k=0,1,\cdots,n,$$

构成平方可积鞅且由于§1 引理 10，

$$\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{j=1}^n\beta(\theta_{t_{j-1}}\xi_1,\Delta_j)-\sum_{j=1}^n\beta(\theta_{t_{j-1}}\xi_2\Delta_j)\right|\geqslant\varepsilon\right\}$$
$$\leqslant\frac{N}{\varepsilon^2}+\mathbf{P}\left\{\sum_{j=1}^m\|\theta_{t_{j-1}}\xi_1-\theta_{t_{j-1}}\xi_2\|_*^2\Lambda_N(\Delta_j)\geqslant N\right\}. \quad (27)$$

当 $|\delta|\to 0$ 时取极限并利用证明定理 1 时所得的结果，我们得不等式(27).

注。如果引理 1 注的条件成立且 $\|\theta_T\xi_1\|\leqslant N$，$\|\theta_T\xi_2\|\leqslant N$，那末

$$\mathbf{P}\left\{\left|\int_0^T\beta(\theta_t\xi_1,dt)-\int_0^T\beta(\theta_t\xi_2,dt)\right|>\varepsilon\right\}$$
$$\leqslant\frac{N}{\varepsilon^2}+\mathbf{P}\left\{\int_0^T\|\theta_t\xi_1-\theta_t\xi_2\|\Lambda_N(dt)>N\right\}. \quad (28)$$

不等式(27)使随机线积分的定义能推广至比定理 1 更广泛的过程类 $\xi(t)$. 但由于今后随机积分仅应用于其解的样本函数属于 $\mathscr{D}^m$ 或 $\mathscr{C}_T^m$ 的过程的随机微分方程的理论，所以可限于考虑从前给出的随机积分的定义以及使这些积分存在的上面导出的随机过

程 $\xi(t)$ 的类.

作为积分上限的函数的随机线积分 设 $\beta(\varphi,t)$ 和 $\xi(t)$ 满足定理 1 或 2 的条件. 如果 $0 \leqslant a < b \leqslant T$, 那末当代替区间 $[0,T]$ 而考虑区间 $[a,b]$ 时,对应的条件成立.

因此可定义随机积分

$$\int_a^b \beta(\theta_s\xi, ds).$$

显然,它是 $\mathscr{F}_b$-可测随机变量,且当 $0 \leqslant a < b < c \leqslant T$ 时,

$$\int_a^b \beta(\theta_s\xi, ds) + \int_b^c \beta(\theta_s\xi, ds) \pmod{\mathbf{P}}. \tag{29}$$

令

$$\eta(t) = \int_0^t \beta(\theta_s\xi, ds).$$

过程 $\eta(t)$ 适应于 σ-代数流 $\{\mathscr{F}_t, t \in [0,T]\}$ 和对每个 t 以概率 1 唯一地被定义.

可利用过程 $\eta(t)$ 的不完全唯一性,在今后总将 $\eta(t)$ 理解为它的可分修正.

引理 7 设定理 1 条件成立. 那末

1) 过程 $\eta(t)$, $t \in [0,T]$ 是局部平方可积鞅且有样本函数以概率 1 属于 $\mathscr{D}[0,T]$ 的修正.

2) 如果 $\sup\limits_{-\infty < t \leqslant T} |\xi(t)| \leqslant N, N > 0$ 且引理 2 的条件 b) 成立,那末 $\eta(t)$ 是平方可积鞅且

$$\mathbf{E}\left\{\left|\int_{t_1}^{t_2} \beta(\theta_s\xi, ds)\right|^2 \middle| \mathfrak{F}_{t_1}\right\}$$
$$\leqslant \mathbf{E}\left\{\int_{t_1}^{t_2} (1 + \|\theta_s\xi\|_*^2) \Lambda_0(dt) \middle| \mathfrak{F}_{t_1}\right\}; \tag{30}$$

3) 如果取 $\Lambda_0(\Delta) = C_0\Delta t$ 时引理 2 的条件 b) 成立,其中 C_0 是非随机常数,且

$$\int_0^T \mathbf{E}\|\theta_s\xi\|_*^2 ds < \infty,$$

那末 $\eta(t)$ 是平方可积鞅,而且

$$\mathbf{E}\left\{\left|\int_{t_1}^{t_2}\beta(\theta_s\xi,ds)\right|^2\Big|\mathfrak{F}_{t_1}\right\}$$

$$\leqslant C_0\int_{t_1}^{t_2}(1+\mathbf{E}\{\|\theta_s\xi\|_*^2\,|\,\mathfrak{F}_{t_1}\})ds; \tag{31}$$

4) 设

$$\int_0^\tau\beta(\theta_s\xi,ds)\underset{\text{定义}}{=}\eta(\tau),$$

$\beta_\tau(\varphi,t)=\beta(\varphi,t\wedge\tau)$，其中 τ 是关于 $\{\mathfrak{F}_t,t\in[0,T]\}$ 的某个随机时间;那末

$$\int_0^\tau\beta(\theta_s\xi,ds)=\int_0^\tau\beta_\tau(\theta_s\xi,ds)(\bmod\,\mathbf{P}); \tag{32}$$

5) 对任意 $\varepsilon>0,N>0$，有

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t\beta(\theta_s\xi,ds)\right|>\varepsilon\right\}$$

$$\leqslant\frac{N}{\varepsilon^2}+\mathbf{P}\left\{\int_0^T(1+\|\theta_s\xi\|_*^2)\Lambda_0(ds)>N\right\}. \tag{33}$$

证. 首先验证命题 2). 不等式(30)由引理 2 直接得出. 因为在所考虑的情形,和 $\sum\limits_{a\leqslant t_k\leqslant b}\beta(\theta_{t_k}\xi,\Delta_k)$一致可积,所以在等式

$$\mathbf{E}\left\{\sum_{0\leqslant t_k\leqslant b}\beta(\theta_{t_k}\xi,\Delta_k)\,|\,\mathfrak{F}_a\right\}=0$$

中,当 $|\lambda|\to 0$ 时可取极限得

$$\mathbf{E}\left\{\int_a^b\beta(\theta_s\xi,ds)\,|\,\mathfrak{F}_a\right\}=0.$$

因此，$\eta(t)$ 是平方可积鞅. 可类似地证明命题 3).

为证明命题 4),先假定 $\sup\limits_t|\xi(t)|\leqslant N$. 令

$$\sigma(t)=\sum_{k=1}^{j}\beta(\theta_{t_{k-1}}\xi,\Delta_k)+\beta(\theta_{t_j}\xi,t)$$

$$-\beta(\theta_{t_j}\xi,t_j),t\in(t_j,t_{j+1}].$$

那末,按定义

$$\mathbf{P}-\lim\sigma(\tau)=\int_0^T\beta_\tau(\theta_s\xi,ds).$$

另一方面，$|\eta(\tau)-\eta(\sigma)|\leqslant\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta(t)-\sigma(t)|$，且因为 $\eta(t)-\sigma(t)$是可分的平方可积鞅，所以由于定理 2 的注

$$\mathbf{E}\sup|\eta(t)-\sigma(t)|^2\leqslant 4\mathbf{E}|\eta(T)-\sigma(T)|^2\to 0.$$

因此，

$$\eta(\tau)=\mathbf{P}-\lim_{\lambda\to 0}\sigma(\tau)=\int_0^T\beta_\tau(\theta_s\xi,ds),$$

也就在所考虑的特殊情形证明了等式(32)。

为考虑一般情形，引入随机时间 τ_N——过程 $\xi(t)$ 首先走出半径N的球的时刻(如果对所有 $t\leqslant T,|\xi(t)|\leqslant N$，那末 $\tau_N=T$)，且令 $\xi_N(t)=\xi(t)$，当 $t<\tau$ 时；和 $\xi_N(t)=\xi(\tau_N-)$，当 $t\geqslant\tau$ 时；又令 $\beta_{\tau_N}(\varphi,t)=\beta(\varphi,t\wedge\tau_N)$。

利用引理 3 和公式(32)，我们有

$$\eta(t\wedge\tau_N)=\int_0^{t\wedge\tau_N}\beta(\theta_s\xi,ds)=\int_0^{t\wedge\tau_N}\beta_{\tau_N}(\theta_s\xi_N,ds)$$
$$=\int_0^t\beta_{\tau_N}(\theta_s\xi_N,ds),$$

因此由于 2)，$\eta(t\wedge\tau_N)$ 是平方可积鞅。因为 $\lim\limits_{N\to\infty}\tau_N=T$，所以 $\eta(t)$ 是局部平方可积鞅，由局部鞅的一般性质得知存在样本函数以概率 1 属于 $\mathscr{D}[0,T]$ 的修正。

其次，因为当N足够大时以概率 1 有 $\tau_N=T$，所以对任意随机时间 $\tau,\eta(\tau)=\mathbf{P}-\lim\eta(\tau\wedge\tau_N)$。于是

$$\eta(\tau)=\mathbf{P}-\lim\eta(\tau\wedge\tau_N)=\mathbf{P}-\lim\int_0^{\tau\wedge\tau_N}\beta_{\tau\wedge\tau_N}(\theta_s\xi_{\tau\wedge\tau_N},ds)$$
$$=P-\lim\int_0^T\beta_{\tau\wedge\tau_N}(\theta_s\xi,ds).$$

另一方面由于引理 3

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^T\beta_{\tau\wedge\tau_N}(\theta_s\xi,ds)-\int_0^T\beta_\tau(\theta_s\xi,ds)\neq 0\right\}\leqslant\mathbf{P}\{\tau_N<\tau\},$$

且因为当 $N\to\infty$时 $\mathbf{P}\{\tau_N<\tau\}\to 0$，所以得公式(32)。

最后，由 $\eta(t)=\int_0^t\beta(\theta_s\xi,ds)$ 是局部平方可积鞅和§1 引理 10

的注得不等式(33)。

注. 如果定理 2 的条件成立，那末过程 $\eta(t)$ 的可分修正是连续过程且在不等式(30)，(31)及(33)中以 $\|\theta_s\xi\|$ 代换 $\|\theta_s\xi\|_*$ 时，它们仍成立。

现在来计算随机积分 $\eta(t)$ 的特征。

引理8 设定理 1 的条件成立，且

$$\langle\beta(\varphi,\cdot),\beta(\psi,\cdot)\rangle_t=\int_0^t b(\varphi,\psi,s)ds,$$

当 $\|\varphi\|_*\leqslant N,\|\psi\|_*\leqslant N$ 时，

$$|b(\varphi,\varphi,t)-2b(\varphi,\psi,t)+b(\psi,\psi,t)|$$
$$\leqslant\lambda_N(t)\|\varphi-\psi\|_*^2,$$

其中 $\lambda_N(t)$ 是适应于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t,t\in[0,T]\}$ 的非负随机过程，它在区间 $[0,T]$ 上以概率 1 可积。令

$$\eta_i(t)=\int_0^t\beta(\theta_s\xi_i,ds),$$

其中 $\xi_i(t)(i=1,2)$ 也满足定理 1 的条件。那末

$$\langle\eta_1(\cdot),\eta_2(\cdot)\rangle_t=\int_0^t b(\theta_s\xi_1,\theta_s\xi_2,s)ds. \tag{34}$$

证. 我们引入"有可变的求和界限的积分和"，当 $t\in(t_j,t_{j+1}]$ 时，

$$\sigma_i(t)=\sum_{k=1}^{j}\beta(\theta_{t_{k-1}}\xi_i,\Delta_k)+\beta(\theta_{t_j}\xi_i,t)-\beta(\theta_{t_j}\xi_i,t_j),$$

其中 $\Delta_k=(t_{k-1},t_k]$。 容易验证

$$\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle_t=\sum_{k=1}^{j}\int_{t_{k-1}}^{t_k}b(\theta_{t_{k-1}}\xi_1,\theta_{t_{k-1}}\xi_2,s)ds$$
$$+\int_{t_j}^{t}b(\theta_{t_j}\xi_1,\theta_{t_j}\xi_2,s)ds.$$

现注意到

$$\Delta\langle(\beta(\varphi,\cdot)-\beta(\psi,\cdot)),(\beta(\varphi,\cdot)-\beta(\psi,\cdot))\rangle_t$$
$$=\int_t^{t+\Delta t}[b(\varphi,\varphi,s)-2b(\varphi,\psi,s)-b(\psi,\psi,s)]ds$$

$$\leqslant \|\varphi - \psi\|_* \int_t^{t+\Delta t} \lambda_N(s) ds$$

及

$$\Delta\langle \beta(\varphi, \cdot), \beta(\psi_1, \cdot) - \beta(\psi_2, \cdot)\rangle_t$$
$$= \int_t^{t+\Delta t} [b(\varphi, \psi_1, s) - b(\varphi, \psi_2, s)] ds,$$

由此得(对几乎所有 s):

$$|b(\varphi, \psi_1, s) - b(\varphi, \psi_2, s)|$$
$$\leqslant \sqrt{b(\varphi, \varphi, s)[b(\psi_1, \psi_1, s) - 2b(\psi_1, \psi_2, s) + b(\psi_2, \psi_2, s)]}$$
$$\leqslant \sqrt{b(\varphi, \varphi, s)\lambda_N(s)} \|\psi_1 - \psi_2\|_*,$$

及

$$|b(\varphi_1, \psi_1, s) - b(\varphi_2, \psi_2, s)|$$
$$\leqslant \sqrt{\lambda_N(s)}(\|\varphi_1 - \varphi_2\|_* \sqrt{b(\psi_1, \psi_2, s)}$$
$$+ \|\psi_1 - \psi_2\|_* \sqrt{b(\varphi_2, \varphi_2, s)}).$$

因此,函数 $b(\varphi, \psi, s)$ 是(对几乎所有 s)变元 φ 及 ψ 的连续函数(关于半范数 $\|\cdot\|_*$). 不难利用与证明定理 1 时同样的推断，证明当 $|\delta| \to 0$ 时以概率 1 有

$$\langle \sigma_1, \sigma_2\rangle_t \to \int_0^t b(\theta_s\xi_1, \theta_s\xi_2, s) ds.$$

因此由 $\sigma_i(t)$ 收敛于 $\eta_i(t)$ 得等式(34).

注. 如果假设中以 $\|\varphi - \psi\|$ 代换 $\|\varphi - \psi\|_*$ 后,定理 2 的条件与引理 8 的条件成立,那末等式(34)也成立.

随机微分方程解的存在与唯一性定理

设给定某个 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$ 和取值于 $\mathscr{R}^m$ 适应于 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的随机函数 $\alpha(\varphi, t), \beta(\varphi, t)$, $\varphi \in \mathscr{D}^m$, $t \in [0, T]$. 满足"初始条件"

$$\xi(s) = \varphi(s), s \leqslant 0$$

的随机微分方程

$$d\xi = \alpha(\theta_t\xi, t)dt + \beta(\theta_t\xi, dt), t \geqslant 0, \tag{35}$$

的解是指: 对关于 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的随机时间 τ, $0 < \tau \leqslant T$, 及当

$t\in[0,\tau)$ 时有定义的随机过程 $\xi(t)$ 是 $\mathfrak{F}_t\times\mathfrak{T}_t$-循序可测并对每个 $t<\tau$ 以概率 1 满足关系式

$$\xi(t)=\varphi(t),\text{ 当 } t<0 \text{ 时},$$

$$\xi(t)=\xi(0)+\int_0^t\alpha(\theta_s\xi,s)ds+\int_0^t\beta(\theta_s\xi,ds),t\geqslant 0. \tag{36}$$

此时等式 (36) 右边的积分是有意义的，其中第一个看作 Lebesgue 积分，而第二个看作随机积分.

随机变量 τ 被称为过程 $\xi(t)$（随机微分方程的解）的生命时间.

方程 (35) 被称为在 $[0,T]$ 上正则，如果在整个时间区间 $[0,T]$ 上它具有唯一的解(即取 $\tau=T$ 时方程(35)的解存在且唯一).

现引进函数 $\alpha(\varphi,t)$ 和 $\beta(\varphi,t)$ 的一般假设，使当这些假设成立时，等式(36)右边对足够广泛的过程 $\xi(t)$ 类有定义. 但要指出，考虑十分广泛的过程 $\xi(t)$ 的类毕竟是没有意义的，因为等式(36)右边是有连续修正或有样本函数属于 $\mathscr{D}_T^m$ 的修正的过程，于是过程 $\xi(t)$ 本身也应当是这样.

先讨论函数 $\alpha(\varphi,t)$. 引入两组假设:

$\alpha.1$)a) 函数 $\alpha(\varphi,s)=\alpha(\varphi,s,\omega)$ 定义在 $\mathscr{D}^m\times[0,T]\times\Omega$ 上且 $\mathfrak{B}_{\mathscr{D}^m}\times\mathfrak{T}_t\times\mathfrak{F}_t$-可测,

b) 当固定 φ 时，以概率 1, $\alpha(\varphi,\cdot)\in\mathscr{D}^m[0,T]$,

c) 当固定 ω 时，变元 φ 的函数族 $\{\alpha(\cdot,t),t\in[0,T]\}$ 在 $\mathscr{D}^m$ 上关于距离 $\rho_{\mathscr{D}^m}$ 一致连续.

$\alpha.2$) 函数 $\alpha(\varphi,s)$ 满足 $\alpha.1$) 的假设，如果在其中以 $\mathscr{C}^m$, $\mathfrak{B}_{\mathscr{C}^m}$ 和 $\mathscr{C}^m[0,T]$ 分别代换 $\mathscr{D}^m$, $\mathfrak{B}_{\mathscr{D}^m}$ 和 $\mathscr{D}^m[0,T]$.

如果存在适应于 $\{\mathfrak{F}_t,t\in[0,T]\}$ 的连续单调不减过程 $\lambda_0(t)$, 使得以概率 1, $\lambda_0(T)<\infty$ 及

$$\left|\int_a^b\alpha(\varphi,t)dt\right|\leqslant(1+\|\varphi\|)\int_a^b\lambda_0(t)dt, \tag{37}$$

那末称函数 $\alpha(\varphi,t)$ 是线性有界的（对于一致范数或半范数，若在不等式(37)中可以用半范数 $\|\cdot\|_*$ 代替范数 $\|\cdot\|$ 的话).

如果对任意$N>0$能找到单调不减适应于$\{\mathfrak{F}_t, t\in[0,T]\}$的过程 $\lambda_N(t)$，使得

$$\left|\int_a^b[\alpha(\varphi,t)-\alpha(\psi,t)]dt\right|\leqslant\|\varphi-\psi\|\int_a^b\lambda_N(t)dt \qquad (38)$$

对所有满足 $\|\varphi\|\leqslant N,\|\psi\|\leqslant N$ 的φ和ψ成立，那末称 $\alpha(\varphi,t)$ 满足局部的 Lipschitz 条件(在一致范数或半范数下)。如果过程 $\lambda_N(t)$ 可选为不依赖于N的过程 $\lambda(t)$，那末称过程 $\alpha(\varphi,t)$ 满足一致的 Lipschitz 条件。

满足条件 $\alpha.2$), (37) 和(38)的过程 $\alpha(\varphi,t)$ 的类以 $S_a^c(\lambda_0,\lambda_N)$ 表示，而满足条件 $\alpha.1$) 和在(37),(38)的右边分别以半范数$\|\cdot\|_*$代换范数$\|\cdot\|$时得到的条件，则以 $S_a(\lambda_0,\lambda_N)$ 表示。当所谈及的是仅满足不等式(37)或(38)中的一个，例如满足(37)的随机函数 $\alpha(\varphi,t)$，记为 $\alpha(\varphi,t)\in S_a^c(\lambda_0,\cdot)$，在另一情形亦类似。

我们见到，$\varphi_t=\theta_t\psi(\psi\in\mathscr{D}_T^m, t\in[0,T])$ 是取值于 $\mathscr{R}^m$ 的 Borel 函数。

事实上，如果B是 $\mathscr{D}^m$ 中在坐标 $(s_1,\cdots,s_n)(s_k\leqslant 0)$ 上取基为 $B=\prod_{i=1}^n B_i$ 的柱集，那末

$$\{t:\varphi_t\in B\}=\bigcap_{i=1}^n\{t:\varphi(t+s_i)\in B_i\}.$$

因为对 Borel 集 B_i 来说，$\mathscr{R}^m$ 中的集合 $\{x:\varphi(x)\in B_i\}=Z_i$ 也是 Borel 集，所以集合

$$\{t:\varphi_t\in B\}=\bigcap_{i=1}^n\{Z_i-s_i\}$$

也是，其中 $Z-s$ 表示集合 $\{z:z+s\in Z\}$。因此如果 $g(\varphi,t)$ 是变元 (φ,t) 的 $\mathfrak{B}_{\mathscr{D}^m}\times\mathfrak{T}$-可测函数，其中 $\mathfrak{B}_{\mathscr{D}^m}$ 是由 $\mathscr{D}^m$ 中柱集所生成的最小 σ-代数，而 $\mathfrak{T}$ 是$[0,T]$ 上的 Borel 集合的 σ-代数，那末 $g(\theta_t\varphi,t)$ 是变元 t 的 Borel 函数。

于是，如果场 $\alpha(\varphi,t)$ 满足条件 $\alpha.1$) 或 $\alpha.2$)，那末积分

$$\int_0^T \alpha(\theta_t\psi, t)dt$$

以概率 1 存在。

其次，如果 $\alpha(\varphi,t)\in S_\alpha(\lambda_0,\cdot)$，那末 $(0\leqslant a<b\leqslant T)$

$$\left|\int_a^b \alpha(\theta_t\psi,t)dt\right| \leqslant \int_a^b (1+\|\theta_t\psi\|_*)\lambda_0(t)dt(\text{mod}\,\mathbf{P}). \quad (39)$$

由 $\theta_t\psi, t\in[0,T]$ 是取值于$\mathscr{D}^m$关于距离$\rho_{\mathscr{D}^m}$的连续函数，而 $\alpha(\varphi,t)$ 是变元 φ 的连续函数（对 t 一致），容易得到所需的证明。

类似地，如果 $\alpha(\varphi,t)\in S_\alpha^c(\lambda_0,\cdot)$，那末

$$\left|\int_a^b \alpha(\theta_t\psi,t)dt\right| \leqslant \int_a^b (1+\|\theta_t\psi\|)\lambda_0(t)dt. \quad (40)$$

如果 $\alpha(\varphi,t)\in S_\alpha(\cdot,\lambda_N)$ 和 $\|\psi_1\|_*\vee\|\psi_2\|_*\leqslant N$，那末

$$\left|\int_a^b \alpha(\theta_t\psi_1,t)dt-\int_a^b \alpha(\theta_t\psi_2,t)dt\right|$$
$$\leqslant \int_a^b \|\theta_t(\psi_1-\psi_2)\|_*\lambda_N(t)dt, \quad (41)$$

而对 $\alpha(\varphi,t)\in S_\alpha^c(\cdot,\lambda_N)$，类似的不等式成立。

至于积分$\int_0^t\beta(\theta_s\xi,ds)$存在的条件及性质在上段已研究过。

类似于函数 $\alpha(\varphi,t)$，我们引进关于场 $\beta(\psi,t)$ 的类的记号。就是，如果场 $\beta(\varphi,t)$ 满足条件 $(\beta.1)$ $(\beta.2)$)，线性有界和满足关于半范数（范数）的局部 Lipschitz 条件，控制过程 $\Lambda_0(t)$ 和 $\Lambda_N(t)$ 绝对连续且 $\lambda_0(t)=\Lambda_0'(t), \lambda_N(t)=\Lambda_N'(t)$，那末记为

$$\beta(\varphi,t)\in S_\beta(\lambda_0,\lambda_N)\ (\text{或}\ \beta(\varphi,t)\in S_\beta^c(\lambda_0,\lambda_N)).$$

令

$$A(\varphi,t)=\int_0^t\alpha(\varphi,s)ds+\beta(\varphi,t),$$

并记 $A(\varphi,t)\in S(\lambda_0,\lambda_N)(S^c(\lambda_0,\lambda_N))$，倘若

$$\alpha(\varphi,t)\in S_\alpha(\lambda_0,\lambda_N)\ \text{和}\ \beta(\varphi,t)\in S_\beta(\lambda_0,\lambda_N)$$
$$(\alpha(\varphi,t)\in S_\alpha^c(\lambda_0,\lambda_N)\ \text{和}\ \beta(\varphi,t)\in S_\beta^c(\lambda_0,\lambda_N)).$$

设过程 $\xi(t), t\in[0,T]$，适应于 σ 代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t\in[0,T]\}$，且以概率 1 样本函数属于 $\mathscr{D}^m[0,T]$。当 $t\leqslant 0$ 时补充定义 $\xi(t)$：

$\xi(t)=\varphi(t)$，其中 $\varphi(t)$ 为属于 $\mathscr{D}^m$ 的给定的函数。设 $\alpha(\varphi,t)$ 满足条件 $\alpha.1),a)$ 及 $\beta(\varphi,t)\in S_\beta(\cdot,\lambda_N)$。今后如无特别声明，这些条件始终假定成立。

我们来定义新的过程 $\eta(t),t\in(-\infty,T]$，令

$$\eta(t)=\varphi(t),t\leqslant 0,$$

$$\eta(t)=\varphi(0)+\int_0^t A(\theta_s\xi,ds),t\geqslant 0,$$

其中

$$\int_0^t A(\theta_s\xi,ds)\underset{\text{定义}}{=}\int_0^t \alpha(\theta_s\xi,s)ds$$

$$+\int_0^t \beta(\theta_s\xi,ds),t\in[0,T]. \tag{42}$$

这时，我们将等式(42)中右边的随机线积分理解为样本函数属于 $\mathscr{D}^m[0,T]$ 的修正。对应 $\xi\to\eta$ 以 I 表示，即 $\eta(t)=I(t,\xi)$。

引理 9 如果 $A(\varphi,t)\in S(C,\lambda_N)$，其中 C 是非随机常数。且 $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\mathbf{E}|\xi(t)|^2<\infty$，那末

$$\mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant h\leqslant a}|I(t+h,\xi)-I(t,\xi)|^2|\mathfrak{F}_t\}$$

$$\leqslant C'\left[a(1+\|\varphi\|^2)+\int_t^{t+a}z(s)ds\right], \tag{43}$$

其中 C' 仅依赖于 C,K 和 T，且

$$z(s)=\sup_{t\leqslant u\leqslant s}\mathbf{E}\{|\xi(u)|^2|\mathfrak{F}_t\}.$$

证。因为

$$\sup_{0\leqslant h\leqslant a}|I(t+h,\xi)-I(t,\xi)|^2$$

$$\leqslant 2\sup_{0\leqslant h\leqslant a}\left\{\left|\int_t^{t+h}\alpha(\theta_s\xi,s)ds\right|^2+\left|\int_t^{t+h}\beta(\theta_s\xi,ds)\right|^2\right\},$$

所以，注意到对可分平方可积鞅 $\eta(t)$ 有

$$\mathbf{E}\{\sup_{t\leqslant s\leqslant t+a}|\eta(s)|^2|\mathfrak{F}_t\}\leqslant 4\mathbf{E}\{|\eta(t+a)|^2|\mathfrak{F}_t\},$$

并顾及到不等式(22)和(39)，我们得

$$\mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant h\leqslant a}|I(t+h,\xi)-I(t,\xi)|^2|\mathfrak{F}_t\}$$

$$\leqslant 2(2C^2a^2+4C^2a+2C^2\mathbf{E}\left\{\left(\left(\int_t^{t+a}\|\theta_s\xi\|_*ds\right)^2\middle|\mathfrak{F}_t\right\}\right.$$

$$+4C^2\int_t^{t+a}\mathbf{E}\{\|\theta_s\xi\|_*^2|\mathfrak{F}_t\}ds$$

$$\leqslant C'(a+\int_t^{t+a}\mathbf{E}\{\|\theta_s\xi\|_*^2|\mathfrak{F}_t\}ds).$$

其中 $C'=4C^2(T+2)$. 另一方面,

$$\mathbf{E}\{\|\theta_s\xi\|_*^2|\mathfrak{F}_t\}=\int_{-\infty}^0\mathbf{E}\{|\xi(s+u)|^2|\mathfrak{F}_t\}K(du)$$

$$\leqslant K(\|\varphi\|^2+z(s)),$$

与上不等式合在一起就证明了引理。

注。如果 $A(\varphi,t)\in S^c(C,\lambda_N)$, 那末

$$\mathbf{E}\sup_{0\leqslant h\leqslant a}|I(t+h,\xi)-I(t,\xi)|^2\leqslant C'[(1+\|\varphi\|)^2a$$

$$+\int_t^{t+a}Z(s)ds], \tag{44}$$

其中 $Z(s)=\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant s}|\xi(t)|^2$.

不等式(44)的证明类似于上引理的证明。

类似于引理9可证明下引理。

引理10 如果 $\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathbf{E}|\xi_k(t)|^2<\infty$, $k=1,2$, $A(\varphi,t)\in S(\cdot,C)$,那末

$$\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|I(t,\xi_1)-I(t,\xi_2)|^2\leqslant C''\int_0^a v(t)dt,$$

其中 C'' 是仅依赖于 C 及 T 的常数,而

$$v(t)=\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\mathbf{E}|\xi_1(s)-\xi_2(s)|^2.$$

如果 $A(\varphi,t)\in S^c(\cdot,C)$, 那末

$$\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|I(t,\xi_1)-I(t,\xi_2)|^2\leqslant C'''\int_0^a v(t)dt,$$

其中$v(t)=\mathbf{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\xi_1(s)-\xi_2(s)|^2$.

为书写方便我们引进如下记号。

以 $H^*(H^c)$ 表示满足条件 (ξ.1)(ξ.2) 的随机过程的空间,

而 $H_2^*(H_2^c)$ 表示 $H^*(H^c)$ 中由满足补充条件

$$\|\xi(\cdot)\|_2 = \{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathbf{E}|\xi(t)|^2\}^{1/2} < \infty$$

$$(\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)|^2 < \infty)$$

的过程所组成的子空间。

还应给出今后多次用到的如下初等引理。

引理11 如果 $z(t)$ 是区间 $[0,T]$ 上的有界函数且

$$z(t) \leqslant A + B\int_0^t z(s)ds, B > 0,$$

那末

$$z(t) \leqslant Ae^{Bt}.$$

事实上，显然有

$$z(t) \leqslant A + B\int_0^t (A + B\int_0^{t_1} z(s)ds)dt_1$$

$$\leqslant A + ABt + AB^2\frac{t^2}{2} + \cdots + AB^n\frac{t^n}{n!}$$

$$+ B^{n+1}\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_n} z(s)dsdt_n\cdots dt_1.$$

当 $n\to\infty$ 时取极限就得所需的证明。

定理3 设 $A(\varphi,t)\in S(C,C)$。随机微分方程 (36) 在任意初始条件 $\varphi\in\mathscr{D}_0^m$ 下，在 H_2^* 中正则，即在 H_2^* 中有对所有 $t\in[0,T]$ 被确定的唯一解。这解有性质：

$$\mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(s)|^2|\mathfrak{F}_0\} \leqslant A(1 + \|\varphi\|^2), \tag{45}$$

$$\mathbf{E}\{\sup_{t\leqslant s\leqslant t+h}|\xi(s) - \xi(t)|^2|\mathfrak{F}_t\} \leqslant B(1 + \|\varphi\|^2 + \sup_{0\leqslant u\leqslant t}|\xi(u)|^2)h, \tag{46}$$

其中 A 和 B 是仅依赖于 C,T 和 K 的常数。

证。在空间 H_2^* 中引进范数

$$\|\xi(\cdot)\|_2 = \{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathbf{E}|\xi(t)|^2\}^{1/2},$$

设 H_2 是取值于 $\mathscr{R}^m$ 适应于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t\geqslant 0\}$ 的随机函数 $\xi(t), t\in[0,T], \|\xi(\cdot)\|_2 < \infty$ 所成的空间，其中范数由上面的关系

式定义.H_2^* 可视为空间 H_2 的子集。空间 H_2 是完备的(不同于 H_2^*)。 由不等式(43)得知算子 I 将 H_2^* 映回到自身,而引理 9 表明算子 I 的某一阶是压缩算子。从任意过程 $\xi_0(t)\in H_2^*(\xi_0(0)=\varphi(0))$ 出发,构造逼近序列

$$\xi_{n+1}(t)=I(t,\xi_n),t\in[0,T],$$

令

$$v_n(t)=\mathbf{E}\sup_{s\leqslant t}|\xi_{n+1}(s)-\xi_n(s)|,n=1,2,\cdots,$$

$$v_0(t)=\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\mathbf{E}|\xi_1(s)-\xi_0(s)|^2,V_0=v_0(T).$$

由引理 9 得

$$v_1(t)\leqslant C''V_0t,\cdots,v_n(t)\leqslant(C'')V_0\frac{t^n}{n!}.$$

如果令 $\varepsilon_n=\left[V_0\frac{(C''T)^n}{n!}\right]^{1/3}$, 那末由 Чебышев 不等式得

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_{n+1}(t)-\xi_n(t)|>\varepsilon_n\}\leqslant\varepsilon_n,$$

而因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n$ 收敛,所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_{n+1}(t)-\xi_n(t)|$$

以概率 1 收敛。因此, $\lim\xi_n(t)=\xi(t)$ 以概率 1 存在而且关于 $t\in[0,T]$ 一致成立。当 $t<0$ 时,定义 $\xi(t):\xi(t)=\varphi(t)$。这时 $\xi(t)$ 满足条件 ξ.1)及 $\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)|^2\leqslant\infty$。 此外,

$$\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)-\xi_n(t)|^2\to 0.$$

事实上,

$$\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)-\xi_n(t)|^2\leqslant\mathbf{E}\lim_{m\to\infty}\sup_t|\xi_{n+m}(t)-\xi_n(t)|^2$$

$$\leqslant\lim_{m\to\infty}\mathbf{E}\left(\sum_{k=n}^{n+m-2}\sup_t|\xi_{k+1}(t)-\xi_k(t)|\cdot\sqrt{k(k-1)}\right.$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{k(k-1)}}\Big)^2 \leqslant \sum_{n}^{\infty} k(k-1)v_k(T)$$

$$\cdot \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} \leqslant \frac{V_0 C''^2 T^2}{n-1} \cdot \sum_{n}^{\infty} \frac{T^{k-2}}{(k-2)!} \to 0,$$

当 $n\to\infty$ 时，

现不难说明式

$$\xi_{n+1}(t) = \varphi(0) + \int_0^t \alpha(\theta_s \xi_n, s) ds + \int_0^t \beta(\theta_s \xi_n, ds)$$

可以取极限的理由.

事实上，由 $\xi_n(t)$ 一致收敛于 $\xi(t)$ 得 $\theta_t\xi_n(u)$ 对 u 一致收敛于 $\theta_t\xi(u)$. 因此，对所有 $s\in[0,T]$ 以概率 1 有 $\alpha(\theta_s\xi_n,s)\to \alpha(\theta_s\xi,s)$. 于是以概率 1 有

$$\int_0^t \alpha(\theta_s\xi_n, s)ds \to \int_0^t \alpha(\theta_s \xi, s) ds.$$

其次，根据前述事实

$$\mathbf{E}\left|\int_0^t \beta(\theta_s\xi_n, ds) - \int_0^t \beta(\theta_s\xi, ds)\right|^2$$

$$\leqslant C^2 \int_0^t \mathbf{E}|\xi_n(s) - \xi(s)|^2 ds \to 0.$$

因此，对每个 t $\xi(t)$ 以概率 1 是方程

$$\xi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \alpha(\theta_s\xi, s)ds + \int_0^t \beta(\theta_s\xi, ds)$$

的解. 因为等式两边的函数右连续，所以得出的等式对所有 $t\in[0,T]$ 以概率 1 成立，

现证明不等式(45)和(46). 设 $z(t) = \mathbf{E}\{\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|\xi(s)|^2|\mathfrak{F}_0\}$.

顾及到引理 9 得

$$z(t) \leqslant 2|\varphi(0)|^2 + 2\mathbf{E}\sup|I(s,\xi)|^2$$

$$\leqslant 2|\varphi(0)|^2 + 2C_1^*[t(1+\|\varphi\|^2) + K\int_0^t z(s)ds]$$

$$\leqslant C_2(\|\varphi\|^2 + t + \int_0^t z(s)ds),$$

其中 C_2 是仅依赖于 C,K 及 T 的某一新常数. 由后一不等式得

$$\frac{z(t)+1}{\|\varphi\|^2+t+\int_0^t z(s)ds+\frac{1}{C^2}}\leqslant C_2$$

或

$$z(t)\leqslant A(\|\varphi\|^2+1)e^{C_2t}.$$

类似地，对

$$z_1(t)=\mathbf{E}\{\sup_{a\leqslant s\leqslant t}|\xi(s)-\xi(a)|^2|\mathfrak{F}_a\}$$

得不等式

$$z_1(t)\leqslant C_3(t(1+\|\varphi\|^2)+\int_0^t z_1(s)ds),$$

由此得

$$z_1(t)\leqslant(1+\|\varphi\|^2+2a\sup_{0\leqslant u\leqslant a}|\xi(u)|^2)(e^{C_3(t-a)}-1).$$

现在来证明方程(36)的解在 H_2^* 中的唯一性。 如果它有两个解 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$，那末由于引理 9，有

$$V(t)\leqslant C''\int_0^t V(s)ds,$$

其中

$$V(t)=\mathbf{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\xi(s)-\eta(s)|^2,$$

$$V(t)\leqslant C''T\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\mathbf{E}\ \xi(s)-\eta(s)|^2=C'''.$$

对所得的不等式求积分，得

$$V(t)\leqslant C''^2\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}V(t_2)dt_2\leqslant\cdots$$

$$\leqslant C''^n\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}}V(t_n)dt_n dt_{n-1}\cdots dt_1$$

$$\leqslant C'''C''^n\frac{t^n}{n!}$$

因此，$V(t)=0$.

定理得证。

注1. 设函数 $\alpha(\varphi,t)$ 及 $\beta(\varphi,t)$ 满足定理 3 的条件。 考虑方程

$$\xi(t)=\varphi(t)+\int_0^t\alpha(\theta_s\xi,s)ds+\int_0^t\beta(\theta_s\xi,ds),\tag{47}$$

其中函数 $\varphi(t)$ 有下述性质：它收缩在半区间$(-\infty,0]$上是 $\mathscr{D}_0^m$ 中的确定性函数，而收缩在区间 $(0,T]$ 上属于 H_2^*.

显然，定理 3 关于方程(36)在 H_2^* 中的解的存在与唯一性的证明部分无须改变就适用于方程(47). 因此以下结果成立：

在上述条件下方程(47)在 H_2^* 中有唯一解.

注 2. 如果 $A(\varphi,t)\in S^c(C,C)$ 和 $\varphi(t)\in H_2^C$, 那末方程(47)在 H_2^c 中存在对所有 $t\in[0,T]$ 有定义且满足不等式(45), (46)的唯一解.

其证明与定理 3 的证明相差很少，仅需要由满足

$$\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_0(t)|^2<\infty$$

的初始逼近 $\xi_0(t)$ 出发.

为推广方程 (36) 的解的存在与唯一性定理，我们需如下结果：

定理 4 设 $A_i(\varphi,t)\in S(\cdot,\lambda_N)$ 或 $A_i(\varphi,t)\in S^c(\cdot,\lambda_N)$ 和 $\|\varphi\|\leqslant N,\|\psi\|\leqslant N,t<\tau$, 其中 τ 是某一 $\mathfrak{F}_t$-随机时间，则关系式

$$\alpha_1(\varphi,t)=\alpha_2(\varphi,t)=\alpha(\varphi,t),$$
$$\beta_1(\varphi,t)=\beta_2(\varphi,t)=\beta(\varphi,t)$$

成立. 那末，如果 $\xi_i(t),i=1,2$ 是方程

$$d\xi_i(t)=\alpha_i(\theta_t\xi_i,t)dt+\beta_i(\theta_t\xi_i,dt),t>0,$$
$$\xi_i(s)=\varphi(s),\ s\leqslant 0$$

的解，且以概率 1 有 $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_i(t)|<\infty$, 那末当

$$\sup_{s\leqslant t}|\xi_i(s)|\leqslant N(i=1,2)$$

时，对所有 $t<\tau$ 以概率 1, 有

$$\xi_1(t)=\xi_2(t).$$

证. 对 $A(\varphi,t)\in S(\cdot,\lambda_N)$ 情形的证明. 第二种情形类似. 设 $\sigma=\inf\{t:t\geqslant\tau,|\xi_1(t)|>N,|\xi_2(t)|\geqslant N,\lambda_N(t)\geqslant L\}$, 如果

在大括号中所指出的集合不空;而 $\sigma = T$，在相反情形. 又设

$\alpha_\sigma(\varphi,t) = \alpha(\varphi,t)$ 当 $t < \sigma$ 时，$\alpha_\sigma(\varphi,t) = 0$ 当 $t \geqslant \sigma$ 时，$\beta_\sigma(\varphi,t) = \beta(\varphi,t\wedge\sigma)$.

那末，当 $\|\varphi\| \leqslant N, \|\psi\| \leqslant N$ 时

$$\left|\int_t^{t+\Delta t}\alpha_{i\sigma}(\varphi,s)ds - \int_t^{t+\Delta t}\alpha_{i\sigma}(\psi,s)ds\right|$$
$$= \left|\int_{t\wedge\sigma}^{(t+\Delta t)\wedge\sigma}[\alpha_i(\varphi,s) - \alpha_i(\psi,s)]ds\right|$$
$$\leqslant \|\varphi - \psi\|_*\int_{t\wedge\sigma}^{(t+\Delta t)\wedge\sigma}\lambda_N(s)ds \leqslant L\|\varphi - \psi\|_*\Delta t,$$

且利用关于停止鞅的特征的定理，类似地得

$$\mathbf{E}\{|\beta_{i\sigma}(\varphi,\Delta) - \beta_{i\sigma}(\psi,\Delta)|^2|\mathfrak{F}_t\}$$
$$\leqslant \mathbf{E}\left\{\int_{t\wedge\sigma}^{(t+\Delta t)\wedge\sigma}\lambda_N(s)ds\|\varphi - \psi\|_*^2\Big|\mathfrak{F}_t\right\}$$
$$\leqslant L\|\varphi - \psi\|_*^2\Delta t.$$

设 $\xi(t) = \xi_1(t) - \xi_2(t)$，$\chi(t) = 1$ 当 $t < \sigma$ 时，和 $\chi(t) = 0$ 当 $t \geqslant \sigma$ 时. 那末

$$\mathbf{E}\chi(t)|\xi(t)|^2 \leqslant 2\mathbf{E}\chi(t)\left|\int_0^t[\alpha_1(\theta_s\xi_1,s) - \alpha_2(\theta_s\xi_2,s)]ds\right|^2$$
$$+ 2\mathbf{E}\chi(t)\left|\int_0^t[\beta_1(\theta_s\xi_1,ds) - \beta_2(\theta_s\xi_2,ds)]\right|^2$$
$$= 2\mathbf{E}\chi(t)\left|\int_0^{t\wedge\sigma}[\alpha_{1\sigma}(\theta_s\xi_1,s) - \alpha_{1\sigma}(\theta_s\xi_2,s)]ds\right|^2$$
$$+ 2\mathbf{E}\chi(t)\left|\int_0^{t\wedge\sigma}[\beta_{1\sigma}(\theta_s\xi_1,ds) - \beta_{1\sigma}(\theta_s\xi_2,ds)]\right|^2$$
$$\leqslant 2\mathbf{E}\chi(t)L^2T\int_0^{t\wedge\sigma}\|\theta_s\xi_1 - \theta_s\xi_2\|_*^2ds + 2\mathbf{E}L\int_0^{t\wedge\sigma}\|\theta_s\xi_1$$
$$- \theta_s\xi_2\|_*^2ds \leqslant L'\mathbf{E}\int_0^t\chi(s)\|\theta_s\xi\|_*^2ds. \tag{48}$$

令 $z(t) = \sup\{\mathbf{E}\chi(s)|\xi(s)|^2, s \leqslant t\}$. 因为

$$\mathbf{E}\chi(s)\|\theta_s\xi\|_*^2 = \mathbf{E}\chi(s)\int_{-\infty}^0|\xi(s+u)|^2K(du)$$
$$\leqslant \mathbf{E}\int_\infty^0\chi(s+u)|\xi(s+u)|^2K(du) \leqslant Kz(s),$$

所以由不等式(48)得:

$$z(t) \leqslant L'K\int_0^t z(s)ds, 0 \leqslant t \leqslant T,$$

由此得知,对所有 $t \in [0,T]$ $z(t) = 0$ 或对每个 t 以概率 1 有

$$\chi(t)|\xi_1(t) - \xi_2(t)| = 0.$$

顾及到 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 右连续,可见以概率 1 对所有 t 有

$$\chi(t)|\xi_1(t) - \xi_2(t)| = 0$$

或以概率 1 对所有 $t < \sigma$ 有 $\xi_1(t) = \xi_0(t)$. 令 L 趋向∞, 由于 $\lambda_N(t)$ 的有界性,我们得: $\xi_1(t) = \xi_2(t)$ 对所有 $t < \inf\{t: t \geqslant \tau, |\xi_1(t)| \geqslant N, |\xi_2(t)| \geqslant N\}$ 成立.

定理得证.

定理 5 设 $A(\varphi,t) \in S(\lambda_0,\lambda_N)$(或 $A(\varphi,t) \in S^c(\lambda_0,\lambda_N)$). 随机微分方程(36)在 $H^*(H^c)$ 中存在对所有 $t \in [0,T]$ 有定义的唯一解.

证. 正如在证明定理 4 时一样,限于考虑 $A(\varphi,t) \in S(\lambda_0,\lambda_N)$ 情况,先从确定方程(36)的解的存在性开始.

设 $p > 0$. 引进函数 $\alpha'_p(\varphi,t), \beta'_p(\varphi,t)$, $\alpha'_p(\varphi,t) \in S_\alpha(\lambda_0,\lambda')$ 及 $\beta'_p(\varphi,t) \in S_\beta(\lambda_0,\lambda')$ 满足 $\alpha'_p(\varphi,t) = \alpha(\varphi,t)$ 及 $\beta'_p(\varphi,t) = \beta(\varphi,t)$ 当 $\|\varphi\| \leqslant r(p)$ 时, 其中 $\lambda' = \lambda'(t)$ 不依赖于 N, 量 $r(p)$ 的值将在下面确定. 令 $\tau_p = \inf\{t: \lambda_0(t) \geqslant p, \lambda'(t) \geqslant l_p\}$, 如果在大括号中指定的 t 的集合不空; 和 $\tau_p = T$, 在相反情形. 且设

$$\begin{aligned}
&\alpha_p(\varphi,t) = \alpha'_p(\varphi,t) && \text{当 } t < \tau_p \text{ 时},\\
&\alpha_p(\varphi,t) = 0 && \text{当 } t \geqslant \tau_p \text{ 时},\\
&\beta_p(\varphi,t) = \beta'_p(\varphi,t\wedge\tau_p) && \text{当 } t < \tau_p \text{ 时},\\
&\beta_p(\varphi,t) = 0 && \text{当 } t \geqslant \tau_p \text{ 时}.
\end{aligned}$$

常数 l_p 的意义也将在下面确定. 那末

$$\alpha_p(\varphi,t) = \alpha(\varphi,t),\ \beta_p(\varphi,t) = \beta(\varphi,t),$$

当 $\|\varphi\| \leqslant r(p), t < \tau_p$ 时,且

$$A_p(\varphi,t)=\int_0^t \alpha_p(\varphi,s)ds+\beta_p(\varphi,t)\in S(p,l_p)$$

（类似于证明上定理时所确立的事实）．此外，$\alpha_p(\varphi,t)$和$\beta_p(\varphi,t)$是 $\mathfrak{F}_{\tau_p\wedge t}$ 可测的，且对固定的 φ，$\beta_p(\varphi,t)$是关于 $\{\mathfrak{F}_{\tau_p\wedge t}\}$ 的鞅．由定理 3 得知方程

$$d\xi_p=A_p(\theta_t\xi_p,dt),t\in[0,T],\xi_p(s)=\varphi(s),s<0, \quad (49)$$

在区间 $[0,T]$ 上有解 $\xi_p(t)\in H_2^*$．由于定理 4，当 $r(p')>r(p)$ 时对所有 t 在集合 $\Omega_p=\{\omega:\tau_p=T,\ \|\theta_T\xi\|\leqslant r(p)\}$上 $\xi_p(t)=\xi_{p'}(t)$．这时 $p(\bar{\Omega}_p)\leqslant \mathbf{P}(\tau_p<T)+\mathbf{P}(\|\theta_T\xi\|>r(p))$．由定理 3 和 Чебышев 不等式得

$$\mathbf{P}(\|\theta_T\xi\|\geqslant r(p))\leqslant\frac{K(p)}{r^2(p)},$$

其中 $K(p)$ 是仅依赖于 $p,\|\varphi\|$ 和 T（而不依赖于 l_p）的函数．

设 $K(p)/r^2(p)\to 0$，当 $p\to\infty$时．那末当 p 足够大时，

$$\mathbf{P}(\|\theta_T\xi\|\geqslant r(p))\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

现在取值 p 和 l_p 使

$$\mathbf{P}(\tau_p<T)=\mathbf{P}(\{\lambda_0(T)\geqslant p\}\cup\{\lambda'(T)\geqslant l_p\})<\frac{\varepsilon}{2}.$$

这时 $\mathbf{P}(\bar{\Omega}_p)<\varepsilon$． 由此得知过程 $\xi_p(t)$ 以概率 1 收敛于某极限 $\xi(t)$，而且以概率 1 对所有 $t\in[0,T]$ 从某个 $p=p_0(\omega)$ 开始 $\xi(t)=\xi_p(t)$．特别可以认为过程 $\xi(t)$ 的样本函数以概率 1 对所有 $t\in[0,T]$ 有左极限和右连续．因为 $\xi_p(t)$ 是 $\mathfrak{F}_{\tau_p\wedge t}$-可测的，所以$\xi(t)$对 σ-代数 $\mathfrak{F}_t$ 是可测的．最后，如果 $\omega\in\Omega_p$，那末

$$\alpha_p(\varphi,t)=\alpha(\varphi,t),\beta_p(\varphi,t)=\beta(\varphi,t),$$

且由于定理 4，在 Ω_p 上以概率 1 有

$$\xi(t)=\varphi(0)+\int_0^t A(\theta_s\xi,s)ds.$$

于是后一等式以概率 1 在整个 Ω 上成立．方程的解的存在性得证．这个解的唯一性易由定理 3 和 4 得到．定理证毕．

现假定 $A(\varphi,t)\in S(\cdot,\lambda_N)$（或 $A(\varphi,t)\in S'(\cdot,\lambda_N)$）．构造

场 $\alpha_p(\varphi,t)$ 及 $\beta_p(\varphi,t)$，使当 $\|\varphi\| \leqslant p$ 时分别等于 $\alpha(\varphi,t)$ 和 $\beta(\varphi,t)$，并满足以 $\lambda_p(t)$ 为控制函数的一致 Lipschitz 条件，而当 $\|\varphi\| \geqslant p+1$ 时等于 0。设 $\xi_p(t)$ 是方程

$$d\xi_p = A_p(\theta_t\xi_p, dt),$$
$$\xi_p(t) = \varphi(t), t \leqslant 0$$

的解，及 $\tau_p = \inf\{t: \|\theta_t\xi_p\| \geqslant p,\ t \in [0,T]\}$ 或 $\tau_p = T$，如果大括号中 t 的集合是空集。随机时间序列 τ_p 单调不减。设 $\tau_\infty = \lim\tau_p$。如前述一样，当 $p' > p$ 和 $t < \tau_p$ 时 $\xi_p(t) = \xi_{p'}(t)$。因此以概率 1 对所有 $t < \tau_\infty$ 存在极限 $\lim\xi_p(t) = \xi(t)$ 并以概率 1 重合于某个函数 $\xi_p(t)$。因此 $\xi(t)$ 以概率 1 对所有 $t < \tau_\infty$ 有左极限且右连续。

与证明上述定理一样，可以认为当 $t < \tau_\infty$ 时 $\xi(t)$ 满足方程(36)。

定理 6 如果 $A(\varphi,t) \in S(\cdot,\lambda_N)$（或 $A(\varphi,t) \in S^c(\cdot,\lambda_N)$），那末存在 $\{\mathscr{F}_t, t \in [0,T]\}$ 上的随机时间 τ_∞ 和适应于 $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0,T]\}$，对 $t < \tau_\infty$ 被确定的随机过程 $\xi(t)$，使对所有 $t < \tau_\infty$，$\xi(t)$ 满足方程(36)且过程 $\xi(t)$ 的样本函数以概率 1 对所有 $t < \tau_\infty$ 有左极限及右连续。此外 $\mathbf{P}(\tau_\infty > 0) = 1$。

定理 7 如果在定理 5 的条件中可令 $\lambda_0 = C$，那末方程(36)的解属于 $H_2^*(H_2^c)$ 和

$$\mathbf{E} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\xi(t)|^2 \leqslant B(1 + \|\varphi\|^2), \tag{50}$$

$$\mathbf{E} \sup_{t \leqslant s \leqslant t+h} |\xi(s) - \xi(t)|^2 \leqslant B(1 + \|\varphi\|^2)h, \tag{51}$$

其中 B 是仅依赖于 C, K 和 T 的常数。

证。设 τ_p 是在证明定理 5 时所引进的随机时间，$\xi_p(t)$ 是方程(49)的解。那末 $\xi_p(t) \in H_2^*$ 及 $\mathbf{E} \sup_{0 \leqslant h \leqslant T} |\xi_p(t)|^2 < \infty$。由引理 8 得

$$\mathbf{E}\{ \sup_{0 \leqslant h \leqslant a} |\xi_p(t+h) - \xi_p(t)|^2 | \mathfrak{F}_t\}$$
$$\leqslant C'\left[a(1 + \|\varphi\|^2 + \int_t^{t+a} \sup \mathbf{E}\{|\xi(s)|^2 | \mathfrak{F}_t\} ds\right], \tag{52}$$

其中 C' 仅依赖于 C,K 与 T。

令 $z(t)=\mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\xi_p(s)|^2\}$. 由以上不等式得

$$z(t)\leqslant 2|\varphi(0)|^2+2C'[T(1+\|\varphi\|^2)+\int_0^t z(s)ds],$$

因此,由于引理 11 有

$$z(t)\leqslant C''(1+\|\varphi\|^2),$$

其中 C'' 仍依赖于 C,K 和 T。类似可得不等式

$$\mathbf{E}\{\sup_{t\leqslant s\leqslant t+h}|\xi_p(s)|^2|\mathfrak{F}_t\}\leqslant C''(1+\|\theta_t\xi_p\|^2),$$

这与(52)一起,给出了

$$\mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant h\leqslant a}|\xi_p(t+h)-\xi_p(t)|^2|\mathfrak{F}_t\}$$
$$\leqslant C'''(1+\|\varphi\|^2+\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\xi(s)|^2)a. \tag{54}$$

特别是,

$$\mathbf{E}\sup_{0\leqslant h\leqslant a}|\xi_p(t+h)-\xi_p(t)|^2\leqslant C^{\mathrm{IV}}(1+\|\varphi\|^2)a. \tag{55}$$

顾及到当 $p\to\infty$ 时 $\xi_p(t)$ 以概率 1 收敛于方程(36)的解 $\xi(t)$,且利用 Fatou 引理,由不等式(53)和(55)得所求。

注。对方程(47)可得类似结果。为此应当考虑辅助方程

$$\xi_p(t)=\varphi(t)+\int_0^t\alpha_p(\theta_s\xi,s)ds+\int_0^t\beta_p(\theta_s\xi,ds).$$

如果设

$$\mathbf{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|\varphi(s)|^2=v<\infty, \tag{56}$$

那末如同定理 7 那样,可得如下论断:

如果定理 7 的假设和条件(56)成立,那末对方程(47)的解来说下估计式成立:

$$\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)|^2\leqslant B(1+\|\varphi\|^2+v),$$

其中 B 仅依赖于 C,K,T。

随机微分方程解的矩的估计 考虑满足定理 5 的条件的方程(35)。先假定对固定 $\varphi,\beta(\varphi,t)\in l\mathscr{M}_2^c$,此外,假设过程 $\beta^k(\varphi,t)$ 的特征 $\langle\beta^k,\beta^k\rangle_t$ 关于 Lebesgue 测度绝对连续:

$$\langle\beta^k,\beta^k\rangle_t=\int_0^t\beta^{kk}(\varphi,s)ds,k=1,\cdots,m, \tag{57}$$

及

$$|\beta^{kk}(\varphi,s)|\leqslant\lambda^2(s)(1+\|\varphi\|^2). \tag{58}$$

由此得知函数 $\langle\beta^k,\beta^j\rangle_t$ 也关于 Lebesgue 测度绝对连续，因此

$$\langle\beta^k,\beta^j\rangle_t=\int_0^t\beta^{kj}(\varphi,s)ds,$$

而且由第一章§1 不等式(51)得：

$$|\beta^{kj}(\varphi,s)|\leqslant\lambda^2(s)(1+\|\varphi\|^2).$$

这里 $\lambda(t)$ 是在 $[0,T]$ 上非负有界且适应于 σ-代数流$\{\mathfrak{F}_t,t\in[0,T]\}$ 的某一随机过程，还设

$$|\alpha(\varphi,s)|\leqslant\lambda(s)(1+\|\varphi\|). \tag{59}$$

将伊藤公式应用于函数 $f(x)=|x|^r$ 与满足方程

$$\begin{aligned}d\xi(t)&=\alpha(\theta_t\xi,t)dt+\beta(\theta_t\xi,dt),t\in(0,T]\\ \xi(t)&=\varphi(t),t\leqslant 0,\end{aligned} \tag{60}$$

的过程 $\xi(t)$。因为

$$\nabla f(x)=r|x|^{r-2}x,$$

$$\nabla^2 f(x)=r(r-2)|x|^{r-4}(x\times x)+r|x|^{r-2}E,$$

其中 E 是单位矩阵，$x\times x$ 是有元素 $x_{jk}=x^jx^k$ $(j,k=1,2,\cdots,m)$ 的矩阵，所以

$$|\xi(t)|^r=|\varphi(0)|^r+\int_0^t L_c(\xi,s)ds+\xi_r(t),$$

其中

$$L_c(\xi,s)=r|\xi(s)|^{r-2}\left[(\xi(s),\alpha(\theta_s\xi,s))+\sum_{k=1}^m\beta^{kk}(\theta_s\xi,s)\right]$$

$$+r(r-2)|\xi(s)|^{r-4}\sum_{j,k=1}^m\beta^{jk}(\theta_s\xi,s)\xi^j(s)\xi^k(s)$$

及

$$\xi_r(t)=r\int_0^t|\xi(s)|^{r-2}(\xi(s),\beta(\theta_s\xi,ds)).$$

令

$$\rho(t) = \sup_{0\le s\le t} |\xi(s)|,$$

$$\tau = \inf\{t: \varphi(t) > N_1, \lambda(t) > N\},$$

其中 N_1 和N是某两个常数。这时设 $\inf\varnothing = T$。

过程 $\xi_r(t)$ 是局部平方可积鞅，特征是

$$\langle \xi_r, \xi_r\rangle_t = r^2\int_0^t |\xi(s)|^{2r-4} \sum_{j,k=1}^m \xi^j(s)\xi^k(s)\beta^{jk}(\theta_s\xi, s)ds,$$

且由于第一章 §3 引理 2，$\xi_r(t\wedge\tau)$ 有任意阶矩。于是

$$\mathbf{E}\rho^{2r}(t\wedge\tau) \le 3[|\varphi(0)|^{2r} + \mathbf{E}\sup_{0\le u\le t}\left(\int_0^{u\wedge\tau} L_c(\xi, s)ds\right)^2$$

$$+ \mathbf{E}\sup_{0\le u\le t} |\xi_r(u\wedge t)|^2].$$

我们来估计所得的不等式右边的被加项。有

$$\sup_{0\le u\le t}\left(\int_0^{u\wedge t} L_c(\xi, s)ds\right)^2 \le T\int_0^{t\wedge\tau} c_1\lambda^2(s)[c_2$$

$$+ \|\varphi\|^{2r} + \rho^{2r}(s)]ds,$$

其中 c_1 和 c_2 是某两个仅依赖于 r 及 m 的常数。 此处我们利用了显然的不等式 $\|\theta_s\varphi\| \le \|\varphi\| + \rho(s)$。 其次由鞅的不等式（第一章 §1(4)）得：

$$\mathbf{E}\sup_{0\le u\le t} |\xi_r(u\wedge t)|^2 \le 4\mathbf{E}|\xi_r(t\wedge\tau)|^2$$

$$\le 4mr^2\mathbf{E}\int_0^{t\wedge\tau} \lambda^2(s)|\xi(s)|^{2r-2}(1 + \|\theta_s\xi\|^2)ds$$

$$\le c_3\mathbf{E}\int_0^{t\wedge\tau} \lambda^2(s)(c_4 + \|\varphi\|^{2r} + \rho^{2r}(s))ds,$$

其中常数 c_3 和 c_4 仅依赖于 r 及 m。因此

$$\mathbf{E}\rho^{2r}(t\wedge\tau) \le 3\Big[|\varphi(0)|^{2r} + c'N^2(1 + \|\varphi\|^{2r})t$$

$$+ c''N^2\int_0^{t\wedge\tau} \mathbf{E}\rho^{2r}(s)ds\Big],$$

而且常数 c' 和 c'' 仅依赖于 r, m 及 T。 由所得不等式及引理 11,

$$\mathbf{E}\rho^{2r}(t\wedge\tau)\leqslant 3[|\varphi(0)|^{2r}+c'N^2(1+\|\varphi\|^{2r})]e^{3c''N^2t}. \quad (61)$$

在所得的不等式中 $\tau=\tau(N_1,N)$. 设 $N_1\to\infty$. 因为过程 $\xi(t)$ 的样本函数以概率 1 有界,所以不难发现,

$$\rho(t\wedge\tau)=\sup_{0\leqslant s\leqslant T\wedge\tau}|\xi(s)|\to\sup_{s<T\wedge\tau_N}|\xi(s)|,$$

其中 $\tau_N=\inf\{t:\ \lambda(t)>N\}$. 这时, 由于 Fatou 引理及不等式(61),

$$\mathbf{E}\rho^{2r}(t\wedge\tau_N)\leqslant\mathbf{E}\lim_{N_1\to\infty}\rho^{2r}(t\wedge\tau)\leqslant C'(\|\varphi\|^{2r},N^2)e^{3c''N^2t},$$

其中 $C'(\|\varphi\|^{2r},N^2)$ 是线性依赖于 $\|\varphi\|^{2r},N^2$ 和 T 的常数。

因此证明了下述定理:

定理 8 满足方程(60)及条件(57)—(59)的过程 $\xi(t)$ 当 $t\leqslant\tau_N=\inf\{t:\ \lambda(t)>N\}$ 时有任意高阶的矩。

推论 如果

$$|\alpha(\varphi,t)|\leqslant C(1+\|\varphi\|),$$

$$\mathbf{E}\{|\beta(\varphi,\Delta)|^2|\mathfrak{F}_t\}\leqslant C(1+\|\varphi\|^2)\Delta t,$$

其中 C 是非随机的, 那末方程(60)的解对所有 $t\in[0,T]$ 有任意阶有限矩。

考虑形为

$$d\xi=\alpha(\theta_t\xi,t)dt+\beta(\theta_t\xi,dt)+\zeta(\theta_t\xi,dt), \quad (62)$$

的随机方程解的矩的存在问题, 其中 $\alpha(\varphi,t)$ 和 $\beta(\varphi,t)$ 满足条件(57)—(59),

$$\zeta(\varphi,t)=\int_0^t\int_{\mathscr{R}^q}\gamma(\varphi,s,u)\mu(ds,du),$$

$\mu(\cdot,\cdot)$ 是联系于 $\mathscr{R}^q$ 中某整值测度 $\nu(t,A)$ 的局部鞅测度,其特征 $\pi(t,A)$ 关于 Lebesgue 测度绝对连续。

还设

$$\int_{\mathscr{R}^q}\gamma^2(\varphi,t,a)\pi(t,du)\leqslant\lambda^2(t)(1+\|\varphi\|^2) \quad (63)$$

和对任意 $N>0$, 当 $\|\varphi_i\|\leqslant N,\ i=1,2$ 时,

$$\mathbf{E}\left\{\int_t^{t+\Delta t}\int|\gamma(\varphi,s,u)-\gamma(\varphi_2,s,u)|^2\pi(ds,du)|\mathfrak{F}_t\right\}$$

$$\leqslant \|\varphi_1 - \varphi_2\|^2 \mathbf{E}\left\{\int_t^{t+\Delta t} \lambda_N^2(s)ds \mid \mathfrak{F}_t\right\}, \tag{64}$$

而且以概率 1 有

$$\int_0^T \lambda^2(s)ds < \infty, \quad \int_0^T \lambda_N^2(s)ds < \infty. \tag{65}$$

这时定理 5 的假设条件成立，和方程(62)在区间 $t \in [0,T]$ 上有唯一解。

设 $\tau = \tau(N_1, N) = \inf\{t: |\xi(t)| > N_1, \lambda(t) > N\}$. 那末

$$\alpha_\tau(\varphi, t) = \alpha(\varphi, t\wedge\tau), \beta_\tau(\varphi, t) = \beta(\varphi, t\wedge\tau),$$
$$\zeta_\tau(\varphi, t) = \zeta(\varphi, t\wedge\tau)$$

是以非随机常数线性有界的,且满足方程

$$d\xi_\tau = \alpha_\tau(\theta_t\xi_\tau, t)dt + \beta_\tau(\theta_t\xi_\tau, dt) + \zeta_\tau(\theta_t\xi_\tau, dt), t > 0,$$
$$\xi_\tau(t) = \varphi(t), t \leqslant 0,$$

的过程 $\xi_\tau(t)$ 有有限二阶矩,而且当 $t \leqslant \tau$ 时 $\xi_\tau(t) = \xi(t)$. 与此相应,我们首先假设函数 α, β, ζ 对应的控制函数 $\lambda(\tau) = N$(虽然在上面的叙述中有可能 $\lambda(\tau) > N$, 但这是非本质的，因为当 $t < \tau$ 时 $\lambda(t) < N$ 和在今后的不等式中函数在单个点的值不起作用),在此情形下考虑方程(62).

利用广义伊藤公式(第一章§3(45)),在其中令 $f(x) = |x|^r$. 我们得

$$|\xi(t)|^r = |\varphi(0)|^r + \int_0^t [L_c(\xi, s) + L_d(\xi, s)]ds$$
$$+ \xi_r(t) + \eta_r(t), \tag{66}$$

其中 $L_c(\xi, t)$ 和 $\xi_r(t)$ 的意义如前所述,而

$$L_d(\xi, t) = \int_{\mathscr{R}^q} \{|\xi(t) + \gamma(\theta_t\xi, t, u)|^r - |\xi(t)|^r$$
$$- r(\gamma(\theta_t\xi, t, u), \xi(t))|\xi(t)|^{r-2}\}\pi(t, du),$$

$$\eta_r(t) = \int_0^t\int_{\mathscr{R}^q} (|\xi(s) + \gamma(\theta_s\xi, s, u)|^r$$
$$- |\xi(s)|^r)\mu(ds, du).$$

作为上述条件的补充,我们还假设

$$\int_{\mathscr{R}^q} |\gamma(\varphi, t, u)|^{2r} \pi(t, du) \leqslant \lambda^2(t)(1 + \|\varphi\|)^{2r} \tag{67}$$

顾及到第一章§2关于随机积分的矩的有限性的结果，易见等式(66)右边的被加项有有限二阶矩. 与前类似，我们得不等式

$$\mathbf{E}\rho^2(t) \leqslant 4(|\varphi(0)|^{2r} + \tilde{C}N^2(1 + \|\varphi\|^{2r})t$$
$$+ \tilde{\tilde{C}}N^2\int_t^0 \mathbf{E}\rho^{2r}(s)ds),$$

其中

$$\rho(t) = \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |\xi(s)|,$$

及有估计式

$$\mathbf{E}\rho^{2r}(t) \leqslant \tilde{C}(\|\varphi\|^{2r})e^{\tilde{\tilde{C}}N^2 t}.$$

因此证明了以下定理.

定理 9 如果随机微分方程(62)满足条件(57)—(59), (67)及(69), 那末它的解当 $t < \tau$ 时有到第 $2r$ 阶的有限矩. 如果这时可假定 $\lambda(t) = N, N$ 是非随机的，那末

$$\mathbf{E} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\xi(t)|^{2r} \leqslant C_1(1 + \|\varphi\|^{2r}), \tag{68}$$

而且 C_1 是仅依赖于 N, T 及过程维数的常数.

推论 在定理 9 的条件及 $\lambda(t) = N$ 下

$$\mathbf{E} \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |\xi(s) - \varphi(0)|^{2r} \leqslant C_2(1 + \|\varphi\|^{2r})t, \tag{69}$$

其中 C_2 是常数.

事实上，上述考虑推导出不等式

$$\mathbf{E}\rho_1^{2r}(t) \leqslant \tilde{C}N^2(1 + \|\varphi\|^2)t + \tilde{\tilde{C}}N^2\int_0^t \mathbf{E}\rho^{2r}(s)ds,$$

其中 $\rho_1(t) = \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |\xi(s) - \varphi(0)|^2$. 由此不等式和(66)即得(69).

随机方程的解对参数的连续依赖关系 考虑形为

$$\left.\begin{aligned} \eta_u(t) &= \varphi_u(t) + \int_0^t A_u(\theta_s\eta_u, ds), & t \geqslant 0 \\ \eta_u(s) &= \varphi(s) & s < 0 \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

的方程，其中 u 是纯量参数，$u \in [0, u_0]$，场

$$A_u(\psi, t) = \int_0^t \alpha_u(\psi, s)ds + \beta_u(\psi, t)$$

与函数 $\varphi_u(t)$ 均依赖于参数 u，而初始条件（$\varphi(s)$ 当 $s<0$ 时)不依赖于 u。

定理10 假定 $A_u(\varphi,t)\in S(C,C)$，此外

1) $\sup\limits_{0\le t\le T}\mathbf{E}|\varphi_u(t)|^2\le c$,

2) $\lim\limits_{u\to 0}\sup\limits_{0\le t\le T}\mathbf{E}|\varphi_u(t)-\varphi_0(t)|^2=0\quad\forall t\in[0,T]$,

3) $$\mathbf{E}\{|\Delta\beta_u(\phi,t)-\Delta\beta_0(\phi,t)|^2|\mathfrak{F}_t\}\le\mathbf{E}\left\{\int_t^{t+\Delta t}\gamma_u(\phi,s)ds\,|\,\mathfrak{F}_t\right\}\tag{71}$$

及对任意 $N>0,t\in[0,T]$ 有

$$\lim_{u\to 0}\mathbf{P}\{\sup_{\|\phi\|\le N}(|\alpha_u(\phi,t)-\alpha_0(\phi,t)|+\gamma_u(\phi,t))>\varepsilon\}=0.$$

那末

$$\lim_{u\to 0}\sup_{0\le t\le T}\mathbf{E}|\eta_u(t)-\eta_0(t)|^2=0.$$

证。因为方程（70）满足定理 7 的条件，$\xi_u(t)$ 有有限二阶矩，差 $\eta_u(t)-\eta_0(t)$ 可表为

$$\eta_u(t)-\eta_0(t)=\sigma_u(t)+\int_0^t A_u(\theta_s\eta_u,ds)-\int_0^t A_u(\theta_s\eta_0,ds),$$

其中

$$\sigma_u(t)=\varphi_u(t)-\varphi_0(t)+\int_0^t A_u(\theta_s\eta_0,ds)-\int_0^t A_0(\theta_s\eta_0,ds).$$

易见，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}|\eta_u(t)-\eta_0(t)|^2&\le 3\mathbf{E}|\sigma_u(t)|^2+3C^2(T+1)\mathbf{E}\int_0^t\|\theta_s(\eta_u-\eta_0)\|_*^2ds\\&=3\mathbf{E}|\sigma_u(t)|^2+C'\int_0^t\int_{-s}^0\mathbf{E}|\eta_u(s+u)-\eta_0(s+u)|^2K(du)ds.\end{aligned}$$

令 $v_u(t)=\sup\limits_{0\le s\le t}\mathbf{E}|\eta_u(s)-\eta_0(s)|^2$。由后一不等式得：

$$v_u(t) \leqslant 3 \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \mathbf{E}|\sigma_u(s)|^2 + C'K\int_0^t v_u(s)ds.$$

由于引理 11

$$v_u(t) \leqslant C'' \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \mathbf{E}|\sigma_u(s)|^2,$$

C'' 不依赖于 u。其次，

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathbf{E}|\sigma_u(t)|^2 \leqslant 3\Big\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathbf{E}|\varphi_u(t) - \varphi_0(t)|^2$$

$$+ \mathbf{E}\Big(\int_0^T |\alpha_u(\theta_s\eta_0, s) - \alpha_0(\theta_s\eta_0, s)|ds\Big)^2$$

$$+ \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathbf{E}\Big|\int_0^t \beta_u(\theta_s\eta_0, ds) - \int_0^t \beta_0(\theta_s\eta_0, ds)\Big|^2\Big\}$$

$$= 3(I_1 + I_2 + I_3).$$

按定理的条件 $I_1 \to 0$。其次，

$$I_2 \leqslant T\mathbf{E}\int_0^T |\alpha_u(\theta_s\eta_0, s) - \alpha_0(\theta_s\eta_0, s)|^2 ds,$$

而且积分号下的表达式有不依赖于 u 及依测度 $d\mathbf{P} \times ds$ 可积的控制函数

$$4C^2\Big(1 + \int_{-\infty}^0 |\eta_0(s+u)|^2 K(du)\Big).$$

另一方面，对每个 s 依概率，于是也依测度 $d\mathbf{P} \times ds$

$$|\alpha_u(\theta_s\eta_0, s) - \alpha_0(\theta_s\eta_0, s)| \to 0.$$

因此，$I_2 \to 0$ 当 $u \to 0$ 时。最后，

$$I_3 \leqslant 4\mathbf{E}\Big|\int_0^T \beta_u(\theta_s\eta_0, ds) - \int_0^T \beta_0(\theta_s\eta_0, ds)\Big|^2$$

$$= 4\mathbf{E}\int_0^T \gamma_u(\theta_s\eta_0, s)ds,$$

且和 I_2 情形一样，不难见到当 $u \to 0$ 时 $I_3 \to 0$。

注。加强定理 10 的假设，假定

$$\lim_{u \to 0} \mathbf{E} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\varphi_u(t) - \varphi_0(t)| = 0,$$

而其余条件仍成立。那末

$$\lim_{u \to 0} \mathbf{E} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\eta_u(t) - \eta_0(t)|^2 = 0. \tag{72}$$

这结论的证明类似于定理 10 的证明。

定理11 考虑随机微分方程

$$d\xi_u = A_u(\theta_s\xi_u, dt), \xi_u(s) = \varphi(s), s \leqslant 0 \quad (u \in [0, u_0]),$$

它满足定理 5 的条件，且设对所有 $N > 0$，有

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \sup_u [\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \lambda_0^u(t) \geqslant p\} + \mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \lambda_N^u(t) \geqslant p\}] = 0,$$

及定理 10 的条件 3)成立。那末当 $u \to 0$ 时对所有 $\varepsilon > 0$ 有

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi_u(t) - \xi_0(t)| > \varepsilon\} \to 0.$$

证。设

$$\tau_p = \inf\{t: \lambda_0^u(t) \geqslant p, \lambda_N^u(t) \geqslant p, |\xi_u(t)| \geqslant N\}$$
$$(\inf\varnothing = T),$$

$$\alpha_u^p(\varphi, t) = \alpha_u(\varphi, t) \text{ 当 } t < \tau_p \text{ 时},$$

$$\alpha_u^p(\varphi, t) = 0 \text{ 当 } \tau \geqslant \tau_p \text{ 时}, \ \beta_u^p(\varphi, t) = \beta_u(\varphi, t \wedge \tau_p),$$

$$A_u^p(\varphi, t) = \int_0^t \alpha_u^p(\varphi, s)ds + \beta_u^p(\varphi, t).$$

应用定理10(或定理 10 的注)于方程

$$d\xi_u^p = A_u^p(\theta_t\xi_u^p, dt), \xi_u^p(s) = \varphi(s), s \leqslant 0.$$

另一方面，由于定理 4，对所有 $t < \tau_p$ 以概率 1 有 $\xi_u^p(t) = \xi_u(t)$. 因此，对任意 $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi_u(t) - \xi_u^p(t)| > \varepsilon\right\} \leqslant \mathbf{P}\{\tau_p < T\}.$$

其次，

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi_u(t) - \xi_0(t)| > \varepsilon\right\} \leqslant \mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi_0(t) - \xi_0^p(t)| < \frac{\varepsilon}{3}\right\}$$
$$+ \mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi_0^p(t) - \xi_u^p(t)| > \frac{\varepsilon}{3}\right\}$$
$$+ \mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi_u^p(t) - \xi_u(t)| > \frac{\varepsilon}{3}\right\}$$
$$\leqslant 2\mathbf{P}\{\tau_p < T\} + \mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi_0^p(t) - \xi_u^p(t)| > \frac{\varepsilon}{3}\right\}.$$

由过程 $\lambda_0^u(t)$，$\lambda_N^u(t)$ 的一致随机有界性及定理 10，可首先

选取足够大的 p 及 N,使 $\mathbf{P}\{\tau_p < T\} < \frac{\varepsilon}{3}$, 然后求 $\delta > 0$ 使对 $u \in [0,\delta]$ $\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_0^p(t) - \xi_u^p(t)| > \frac{\varepsilon}{3}\right\} < \frac{\varepsilon}{3}$. 于是当 $u < \delta$ 时

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_u(t) - \xi_0(t)| > \varepsilon\} < \varepsilon.$$

随机方程的有限-差分近似解 考虑方程

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= A(\theta_t\xi, dt), t \in [0,T], \\ \xi(t) &= \varphi(t), t \leqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

其中 $A(\varphi,t) \in S(\lambda_0,\lambda_N)$. 我们引入区间 $[0,T]$ 的任意分割 $\delta = (0,t_1,t_2,\cdots t_n = T)$ 并利用递推关系

$$\xi_\delta(t) = \zeta_\delta(t) = \varphi(t) \quad \text{当 } t \leqslant 0 \text{ 时},$$

$$\zeta_\delta(t) = \xi_\delta(t_k), \text{当 } t \in [t_k,t_{k+1}), k = 0,\cdots,n-1 \text{时},$$

$$\xi_\delta(t) = \xi_\delta(t_k) + \int_{t_k}^t A(\theta_s\zeta_\delta, ds), \text{ 当 } t \in (t_k,t_{k+1}] \text{ 时},$$

引入随机过程 $\xi_\delta(t), \zeta_\delta(t), t \in [0,T]$. 通过关系式

$$\xi_\delta(t) = \varphi(0) + \int_0^t A(\theta_s\zeta_\delta, ds) \ \forall t \in [0,T],$$

过程 ξ_δ 由 ζ_δ 表示出。

过程 $\xi_\delta(t)$ 称为方程(73)的有限-差分近似解. 我们将证明当 $|\delta| \to 0$ 时 $\xi_\delta(t)$ 收敛于过程 $\xi(t)$.

先假定 $A(\varphi,t) \in S(C_0,C)$. 由随机线积分的一般性质及定义 $\xi_\delta(t)$ 与 $\zeta_\delta(t)$ 的递推关系式直接得 $\xi_\delta(t)$ 与 $\zeta_\delta(t)$ 的二阶矩的有限性. 并且,

$$\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_\delta(t)|^2 < \infty.$$

令

$$z_\delta(t) = \mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant t'\leqslant t}|\xi(t') - \xi_\delta(t')|^2|\mathfrak{F}_0\}.$$

显然,

$$z_\delta(t) \leqslant 2\mathbf{E}\left\{\sup_{0\leqslant t'\leqslant t}\left|\int_0^{t'}[\alpha(\theta_s\xi,s) - \alpha(\theta_s\zeta_\delta,s)]ds\right|^2\right.$$

$$+\sup_{0\leqslant t'\leqslant t}\left|\int_0^t \beta(\theta_s\xi,ds)-\beta(\theta_s\zeta_\delta,ds)\right|^2\Big|\mathfrak{F}_0\Big\}$$

利用前面反复采用的方法来估计所得的不等式右边的被加项。我们得

$$z_\delta(t)\leqslant C^2(8+2T)\mathbf{E}\left\{\int_0^t\|\theta_s(\xi-\xi_\delta)\|_*^2 ds\,|\,\mathfrak{F}_0\right\},$$

由此求得

$$z_\delta(t)\leqslant C'E\left\{\int_0^t\int_{-\infty}^0(|\xi(s+u)-\xi_\delta(s+u)|^2\right.$$
$$\left.+|\xi_\delta(s+u)-\zeta_\delta(s+u)|^2)K(du)ds\,|\,\mathfrak{F}_0\right\}$$
$$=C'(z'(t)+z''(t)],$$

其中 $C'=C'(C,T)$，易得不等式

$$z'(t)\leqslant K\int_0^t z_\delta(s)ds.$$

另一方面，

$$z''(t)\leqslant K\int_0^t\sup_{0\leqslant t'\leqslant s}\mathbf{E}\{|\xi_\delta(t')-\zeta_\delta(t')|^2|\mathfrak{F}_0\}ds.$$

设

$$w(t)=\mathbf{E}\{|\xi_\delta(t)-\zeta_\delta(t)|^2|\mathfrak{F}_0\}.$$

如果 $t\in(t_k,t_{k+1}]$，那末

$$w(t)=\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{|\xi_\delta(t)-\zeta_\delta(t)|^2|\mathfrak{F}_{t_k}\}|\mathfrak{F}_0\}$$
$$=\mathbf{E}\left\{\left|\int_{t_k}^t A(\theta_s\zeta_\delta,ds)\right|^2\Big|\mathfrak{F}_0\right\}$$
$$\leqslant C_0\mathbf{E}\left\{\int_{t_k}^t(1+\|\theta_s\zeta_\delta\|^2)ds\,|\,\mathfrak{F}_0\right\},$$

由此得不等式

$$w(t)\leqslant C_0K\int_{t_k}^t(1+\sup_{-\infty<t'\leqslant s}\mathbf{E}\{|\xi_\delta(t')|^2|\mathfrak{F}_0\})ds.$$

量 $\mathbf{E}\{|\xi_\delta(t)|^2|\mathfrak{F}_0\}$ 的估计可类似于 $\mathbf{E}\{|\xi(t)|^2|\mathfrak{F}_0\}$. 那样得到(见定理 7;也见引理 10,由此得出不等式(74)):

$$\mathbf{E}\{|\xi_\delta(t)|^2|\mathfrak{F}_0\}\leqslant C_0'(1+\|\varphi\|^2),\tag{74}$$

其中 C_0' 依赖于 C_0,K 和 T. 因此,我们得估计

$$z''(t)\leqslant C_0''(1+\|\varphi\|^2)|\delta|,$$

其中 $|\delta| = \max\Delta t_k$，于是

$$z_\delta(t) \leqslant C'K\int_0^t z_\delta(s)ds + C_0''(1+\|\varphi\|^2)|\delta|,$$

由此得

$$z_\delta(t) \leqslant C_0''(1+\|\varphi\|^2)e^{C''t}|\delta|.$$

因此得证下定理：

定理12 如果 $A(\varphi,t)\in S(C_0,C)$，那末

$$\mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)-\xi_\delta(t)|^2|\mathfrak{F}_0\}\leqslant C_1(1+\|\varphi\|^2)|\delta|, \quad (75)$$

其中 C_1 仅依赖于 C_0, C, K 和 T.

注。当 $A(\varphi,t)\in S^c(C_0,C)$ 时不等式(75)也成立。证明与定理 12 一样.

定理 13 如果 $A(\varphi,t)\in S(\lambda_0,\lambda_N)$ 或 $A(\varphi,t)\in S^c(\lambda,\lambda_N)$，那末

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)-\xi_\delta(t)|>\varepsilon|\mathfrak{F}_0\}\to 0,\ \text{当}\ |\delta|\to 0\ \text{时}\ (\text{mod}\mathbf{P}),$$

而且在固定函数 $\lambda_0(t)$ 及 $\lambda_N(t)$ 时的所有函数 $A(\varphi,t)$ 的类中，此收敛是一致的.

证。令

$$\tau = \inf\{t:\lambda_0(t)>N\}\ (\inf\varnothing = T),$$
$$A^\tau(\varphi,t) = A(\varphi,t\wedge\tau),$$

且设 $\xi_\delta^\tau(t)$ 是方程

$$d\xi^\tau = A^\tau(\theta_t\xi^\tau,dt),\ t\in[0,T]$$
$$\xi^\tau(t) = \varphi(t),\ \text{当}\ t\leqslant 0\ \text{时},$$

的有限-差分近似解。那末，$\xi_\delta^\tau(t) = \xi_\delta(t)$，当 $t<\tau$ 时。由不等式(74)得：

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_\delta(t)|>N_1|\mathfrak{F}_0\}\leqslant \mathbf{P}\{\tau<T|\mathfrak{F}_0\} + \frac{C(N)(1+\|\varphi\|^2)|\delta|}{N_1^2}.$$

因此，当$N_1\to\infty$时按 δ 一致地(以概率 1)有

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_\delta(t)|>N_1|\mathfrak{F}_0\}\to 0.$$

先选取 N_1，使得(给定 ω)对所有 δ，有

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}(|\xi_\delta(t)|\vee|\xi(t)|>N_1|\mathfrak{F}_0\}<\frac{\varepsilon}{4},$$

其中 ε 是任意正数。 我们引进新的随机时间，并仍保持先前的记号 τ：

$$\tau=\inf\{t:(\lambda_0(t)>N)\wedge(|\xi_\delta(t)|>N_1)\wedge(\lambda_{N_1}(t)>N_2)\}.$$

那末当 $t<\tau$ 时 $\xi(t)=\xi^\tau(t)$ 和 $\xi_\delta^\tau(t)=\xi_\delta(t)$。

于是，如果 $\|\varphi\|<N_1$，则

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)-\xi_\delta(t)|>\varepsilon|\mathfrak{F}_0\}\leqslant\mathbf{P}(\tau<T)+\frac{C(N_1,N_2)(1+\|\varphi\|^2)|\delta|}{\varepsilon^2},$$

且 N,N_2 足够大时

$$\mathbf{P}\{\tau<T|\mathfrak{F}_0\}\leqslant\mathbf{P}\{\lambda_0(t)>N|\mathfrak{F}_0\}+\mathbf{P}\{\lambda_{N_1}(t)>N_2|\mathfrak{F}_0\}+\frac{\varepsilon}{4}<\frac{3\varepsilon}{4}.$$

因此，当 $|\delta|<\varepsilon_0$ 时，以概率 1 有

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t<T}|\xi(t)-\xi_\delta(t)|>\varepsilon|\mathfrak{F}_0\}<\varepsilon,$$

而且 ε_0 的选取仅依赖于函数 $\lambda_0(t)$，$\lambda_N(t)$ 和 ε。 定理得证。

注。在证明定理 13 时得到稍强的论断。

即关系式。

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)-\xi_\delta(t)|>\varepsilon\}\to 0$$

在满足

$$\lim_{C\to\infty}\sup_{A\in H}\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\lambda_0(t)>C\}=0,$$

$$\lim_{C\to\infty}\sup_{A\in H}\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\lambda_N(t)>C\}=0\quad\forall N>0$$

的函数 $A(\varphi,t)$ 的类 H 中一致成立。

§2. 无后效随机微分方程

作为 Марков 过程的无后效随机微分方程的解 如果 §1 中形为(36)的方程中 $A(\varphi,t+h)-A(\varphi,t)$ 独立于 σ-代数 $\mathfrak{F}_t$ 和初值 $\varphi(s), s<0$，我们称此方程为无后效随机微分方程。因此，可令 $A(\varphi,t)=A(x,t)$，其中 $x=\varphi(0)$，且当固定 x 时过程 $A(x,t)$ 是独立增量过程。

设 $A(x,t)$ 有有限二阶矩，且设

$$A(x,t)=\alpha(x,t)+\beta(x,t)$$

其中 $\beta(x,t)$ 是独立增量的平方可积鞅，$\alpha(x,t)$ 是非随机向量值函数。在所考虑的情形中，条件 $\alpha\in S_\alpha(\lambda_0,\lambda_N)$ 意味着函数 $\alpha(x,t)$ 是变元(x,t)的 Borel 函数，对几乎所有 t 可微及导数 $\alpha_t'(x,t)=a(x,t)$ 满足条件

$$|a(x,t)|\leqslant K(1+|x|)\ \forall x\in\mathscr{R}^m, \tag{1}$$

$$|a(x,t)-a(y,t)|\leqslant C_N|x-y|$$

$$\forall(x,y),\quad |x|\leqslant N,\quad |y|\leqslant N, \tag{2}$$

其中K和 C_N 是某两个常数。在所考虑情况，区别类 $S_\alpha(\lambda_0,\lambda_N)$ 和 $S_\alpha(K,C_N)$ 是没有意义的。 在条件 $\beta(x,t)\in S_\beta(\lambda_0,\lambda_N)$ 的情形也类似。现在它等价于：

1) 函数 $\beta(x,t)$ 在每个区间 $t\in[0,s]$ 上以概率为 1 是变元 (x,t) 的 Borel 函数，作为ω的函数是 $\mathfrak{F}_t$- 可测，且当固定 x 时以概率为 1 它的样本函数属于 $\mathscr{D}^m[0,T]$；

2) $\mathbf{E}|\beta(x,\Delta)|^2\leqslant K(1+|x|^2)\Delta t$, $x\in\mathscr{R}^m$, $\Delta=(t,t+\Delta t]$；

3) 对任意N能找到这样的常数 C_N，使

$$\mathbf{E}|\beta(x,\Delta)-\beta(y,\Delta)|^2\leqslant C_N|x-y|^2\Delta t,$$

$$\forall(x,y),|x|\leqslant N,|y|\leqslant N;$$

且类 $S_\beta(\lambda_0,\lambda_N)$ 和 $S_\beta(K,C_N)$ 相重合。如果 $\beta(x,t)\in S_\beta^c(\lambda_0,\lambda_N)$，那末 $\beta(x,t)$ 满足条件1)—3)，此外，当固定 x 时 $\beta(x,t)$ 的样本

函数是连续函数.因此在所考虑的情形 $\beta(x,t)$是独立增量 Gauss 过程(当固定 x 时).

约定记 $A(x,t)\in\bar{S}(K,C_N)$, 如果 $A(x,t)$ 是独立增量过程,

$$A(x,t)=\int_0^t a(x,s)ds+\beta(x,t),$$

$a(x,t)$ 满足条件(1)和(2), 而 $\beta(x,t)$ 是独立增量的平方可积鞅(在 $[0,T]$ 上)且仅满足条件1)—3). 此外,如果 x 固定时 $\beta(x,t)$ 是 Gauss 过程,那末将记为 $A(x,t)\in\bar{S}^C(K,C_N)$.

令 $\tilde{B}(x,t)=\mathbf{E}\beta(x,t)\beta^*(x,t)$. 函数 $\tilde{B}(x,t)$ 是场 $\beta(x,t)$ 的特征矩阵. 因为

$$\tilde{B}(x,\Delta)=\tilde{B}(x,t+\Delta t)-\tilde{B}(x,t)=\mathbf{E}\beta(x,\Delta)\beta^*(x,\Delta),$$

所以不难发现,条件2)等价于要求函数 $\tilde{B}(x,t)$ 是按 t 绝对连续,

$$\tilde{B}(x,t)=\int_0^t\tilde{b}(x,s)ds, \tag{3}$$

及导数 $\tilde{b}(x,t)$ 满足不等式

$$|\tilde{b}(x,t)|\leqslant K(1+|x|^2).$$

我们还引入过程 $\beta(x,t)$ 及 $\beta(y,t)$ 的互特征 $\tilde{B}(x,y,t)$,

$$\tilde{B}(x,y,t)=\mathbf{E}\beta(x,t)\beta^*(y,t).$$

由等式(3)得

$$\tilde{B}(x,y,t)=\int_0^t\tilde{b}(x,y,s)ds,$$

而且 $\tilde{b}(x,x,t)=\tilde{b}(x,t)$, $\tilde{b}(x,y,t)=\tilde{b}(y,x,t)$. 条件 3) 相当于:

$$|\tilde{b}(x,x,t)-2\tilde{b}(x,y,t)+\tilde{b}(y,y,t)|\leqslant C_N|x-y|^2$$
$$\forall(x,y),|x|\leqslant N,|y|\leqslant N. \tag{4}$$

我们来简单叙述前面关于随机微分方程得到的适用于现时情形的某些结果.

考虑随机微分方程

$$d\xi(t)=A(\xi(t),dt)=a(\xi(t),t)dt+\beta(\xi(t),dt), \tag{5}$$
$$\xi(s)=x,s\leqslant t,$$

其中 $a(x,t)$，$(x,t)\in\mathscr{R}^m\times[0,T]$ 是取值于 $\mathscr{R}^m$ 的非随机函数，$\beta(x,t)$ 是取值于 $\mathscr{R}^m$ 且有有限二阶矩的独立增量过程族。

定理 1 设 $A(x,t)\in\bar{S}(\cdot,C_N)$且函数矩阵 $\tilde{B}(x,y,t)$ 按 t 可微，那末

1) 存在随机时间 τ 且对 $s\leqslant t<\tau$ 定义的随机过程 $\xi(t)$，使得 $\mathbf{P}(\tau>s)=1$，过程 $\xi(t)$，$s\leqslant t<\tau$，满足方程(5)且它的样本函数对所有 $t,s\leqslant t<\tau$ 有左极限和右连续。如果 $\xi'(t)$ 是方程(5)的另外的解，它的样本轨道有同样的性质且当 $t<\tau'$ 时有定义，那末

$$\mathbf{P}\{\exists t:\xi(t)\neq\xi'(t),s\leqslant t\leqslant\tau\wedge\tau'\}=0;$$

2) 如果 $A(x,t)\in\bar{S}(K,C_N)$，那末方程(5)在 $t\in[S,T]$ 上有解，这解有有限二阶矩，样本函数属于 $\mathscr{D}^m[s,T](\text{mod}\mathbf{P})$;

3) 如果 $A(x,t)\in\bar{S}^C(K,C_N)$，那末方程(5)在区间 $[s,T]$ 上有解，此解的样本函数属于 $\mathscr{C}^m(\text{mod}\mathbf{P})$ 并有任意高阶的矩.

考虑方程(5)和假设对每个 $s\in[0,T]$，它在区间$[0,T]$ 上有满足初始条件 $\xi(s)=x$ 和样本函数属于 $\mathscr{D}^m[s,T]$的唯一解.记这个解为 $\xi_{xs}(t)$。

我们将 $\mathfrak{F}_s^t$ 了解为由随机向量 $\beta(x,u)-\beta(x,s)$，$x\in\mathscr{R}^m$，$u\in(s,t]$ 所生成的 σ-代数的完备化，且设 $\mathfrak{F}_t=\mathfrak{F}_0^t$。显然，当 $t_1<t_2<t_3$ 时 σ-代数 $\mathfrak{F}_{t_1}^{t_2}$ 与 $\mathfrak{F}_{t_2}^{t_3}$ 独立且 $\xi_{xs}(t)$ 是 $\mathfrak{F}_s^t$-可测.

现来导出一系列今后要用到的估计. 因为它不仅对无后效的方程成立，所以我们在更一般情形证明它们.

用 $\tilde{S}(\lambda_0,\lambda_N)(\tilde{S}^c(\lambda_0,\lambda_N))$ 表示类 $S(\lambda_0,\lambda_N)$ $(S^c(\lambda_0,\lambda_N))$ 中由形为

$$A(x,t)=\int_0^t\alpha(x,s)ds+\beta(x,t),$$

$(x,t)\in\mathscr{R}^m\times[0,T]$ 的随机函数所组成的子类. 我们将在 $A(x,t)\in\tilde{S}(\lambda_0,\lambda_N)$ 情形考虑方程 (5)，§1 的结果，特别是解的存在性与唯一性定理完全适用于此场合.

引理 1 设 $A(x,t)\in\tilde{S}(K,C)$。那末当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 时

$$\mathbf{E}\{|\xi_{xs}(t)-\xi_{ys}(t)|^2|\mathfrak{F}_s^0\}\leqslant\bar{C}|x-y|^2,$$

其中常数 $\bar{C}$ 仅依赖于C及 T。

证. 因为

$$\xi_{xs}(t)-\xi_{ys}(t)=x-y+\int_s^t[\alpha(\xi_{xs}(u),u)$$
$$-\alpha(\xi_{ys}(u),u)]du+\int_s^t[\beta(\xi_{xs}(u),du)-\beta(\xi_{ys}(u),du)],$$

所以由于 §1 引理 10 函数

$$v(t)=\mathbf{E}\{|\xi_{xs}(t)-\xi_{ys}(t)|^2|\mathfrak{F}_s^0\}$$

满足不等式

$$v(t)\leqslant 3\left(|x-y|^2+C^2(T+1)\int_s^t v(s)du\right).$$

由 §1 引理 11 得，$v(t)\leqslant\bar{C}|x-y|^2$，其中常数 $\bar{C}$ 仅依赖于C及T.

引理 2 设 $A(x,t)\in\tilde{S}(K,C)$. 那末

$$\mathbf{E}|\xi_{x_1s_1}(t)-\xi_{x_2s_2}(t)|^2\leqslant C'(|x_1-x_2|^2$$
$$+(1+|x_2|^2)(s_2-s_1)),\tag{6}$$

其中 C' 是仅依赖于 K,C 及T的常数.

证. 我们有

$$\mathbf{E}|\xi_{x_1s_1}(t)-\xi_{x_2s_2}(t)|^2\leqslant 2\mathbf{E}|\xi_{x_1s_1}(t)$$
$$-\xi_{x_2s_1}(t)|^2+2\mathbf{E}|\xi_{x_2s_1}(t)-\xi_{x_2s_2}(t)|^2.$$

其次

$$\mathbf{E}|\xi_{x_2s_1}(t)-\xi_{x_2s_2}(t)|^2=\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{|\xi_{x_2s_2}(t)$$
$$-\xi_{\xi_{x_2s_1}(s_2)s_2}(t)|^2|\mathfrak{F}_{s_2}^0\}\}=\mathbf{E}\{(\mathbf{E}|\xi_{x_2s_2}(t)$$
$$-\xi_{ys_2}(t)|^2)_{y=\xi_{x_2s_1}(s_2)}|\mathfrak{F}_s\},$$

由于引理 1，它将不超过量 $A\mathbf{E}|x_2-\xi_{x_2s_1}(s_2)|^2$. 由§1定理 3 得

$$\mathbf{E}|x_2-\xi_{x_2s_1}(s_2)|^2\leqslant B(1+|x_2|^2)(s_2-s_1).$$

为估计量 $\mathbf{E}|\xi_{x_1s_1}(t)-\xi_{x_2s_1}(t)|^2$ 再次利用引理1，我们得不等式(6).

推论 如果 $f(x),x\in\mathfrak{R}^m$，是有界连续函数，且上引理的条件成立，那末函数

$$v(t,x)=\mathbf{E}f(\xi_{xt}(T))$$
按变元 (x,t) 有界连续. 并且，如果 $f(x)$ 连续，$|f(x)|\leqslant C(1+|x|^{\rho})$，而 $\mathbf{E}|\xi_{xt}(T)|^{p}$ 在 (x,t) 的任意紧集上一致有界,而且 $p>\rho$，那末函数 $v(t,x)$ 也按 (x,t) 连续.

事实上,如果 $f(x)$ 连续,那末由于引理 2，$f(\xi_{xt}(T))$ 是关于 (x,t) 依概率连续的函数. 引理中所规定的假设保证有可能将极限搬至数学期望号内.

如下公式将在下面用到:

设 $f(x,\omega)$ 是—$\mathfrak{B}\times\mathfrak{D}$-有界可测函数,$(x,\omega)\in\mathscr{H}\times\Omega$，$\mathfrak{B}$ 是距离空间$\mathscr{H}$中的 Borel 集的 σ-代数，$(\Omega,\mathfrak{Y},\mathbf{P})$ 是一概率空间. 设 $\zeta=\zeta(\omega)$ 是由Ω到$\mathscr{H}$的 $\mathfrak{F}$-可测映象,其中 $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{Y}$,则

$$\mathbf{E}\{f(\zeta,\omega)|\mathfrak{F}\}=g(\zeta)，\text{其中 } g(x)=E\{f(x,\omega)|\mathfrak{F}\}.$$

为证明这一结论,我们以K表示使上公式成立的函数 $f(x,\omega)$ 的类. 显然这函数类是线性、单调的(即收敛于有限极限的属于K的任一单调不减非负函数列的极限函数也属于 K). 此外,K包含形为 $f(x,\omega)=\sum_{k=1}^{n}h_k(x)l_k(x)$ 的函数,其中 $h_k(x)$ 是有界 $\mathfrak{B}$-可测，$l_k(x)$ 是有界 $\mathfrak{Y}$-可测函数. 事实上，

$$\mathbf{E}\left\{\sum_{k=1}^{n}h_k(\zeta)l_k(\omega)|\mathfrak{F}\right\}=\sum_{k=1}^{n}h_k(\zeta)\alpha_k(\omega),$$

其中 $\alpha_k(\omega)=\mathbf{E}\{l_k(\omega)|\mathfrak{F}\}$ 及

$$\mathbf{E}\left\{\sum_{k=1}^{n}h_k(x)l_k(\omega)|\mathfrak{F}\right\}=\sum_{k=1}^{n}h_k(x)\alpha_k(\omega).$$

由类K所具有的上述性质得知它包含任意 $\mathfrak{B}\times\mathfrak{Y}$-可测函数.

现回到过程 $\xi_{xs}(t)$. 设

$$P(s,x,t,A)=\mathbf{P}(\xi_{xs}(t)\in A),$$

其中A是 $\mathscr{R}^m$ 中任一 Borel 集.函数 $P(s,x,t,A)$ 是一随机核. 等式

$$\mathbf{E}f(\xi_{xs}(t))=\int_{\mathscr{R}^m}f(y)P(s,x,t,dy)$$

对任意非负 Borel 函数 $f(x)$ 成立. (这可从积分计算中变量替换的一般法则得到.)

定理 2 随机核族 $P(s,x,t,A)$, $0\leqslant s<t\leqslant T$ 是一 Марков 族

证. 为证明定理成立需要验证核 $P(s,x,t,A)$满足 Chapman-Колмогоров 方程(卷 II 第一章§1). 设 $s<u<t$. 则

$$\begin{aligned}\mathbf{E}f(\xi_{xs}(t)) &= \mathbf{E}(\mathbf{E}\{f(\xi_{xs}(t))|\mathfrak{F}_u^t\})\xi_{\xi_{xs}(u)u}(t)\\ &= \mathbf{E}(\mathbf{E}\{f(\xi_{\xi_{xs}(u)u}(t))|\mathfrak{F}_u^t\})\\ &= \mathbf{E}(\mathbf{E}f(\xi_{yu}(t)))|_{y=\xi_{xs}(u)}\end{aligned}$$

或

$$\int_{\mathscr{R}^m} f(z)P(s,x,t,dz)$$

$$= \int_{\mathscr{R}^m} P(s,x,u,dy)\int_{\mathscr{R}^m} f(z)P(u,y,t,dz).$$

由此推得对任意 Borel 集A有

$$P(s,x,t,A) = \int_{\mathscr{R}^m} P(u,y,t,A)P(s,x,u,dy),$$

即核 $P(s,x,t,A)$ 事实上满足 Chapman-Колмогоров 方程. 定理得证.

定理的证明表明核 $P(s,x,t,A)$ 是某一 Марков 过程的转移概率(卷 II 第一章§3).

我们说所考虑的随机微分方程生成一 Марков 过程. 在本章我们通常对随机过程族 $\xi_{xs}(t)$ 与这一 Марков 过程不加区别.

我们来计算由无后效随机微分方程产生的 Марков 过程 $\xi_{xs}(t)$ 的生成算子. 设

$$\xi'_{xs}(t) = x + \int_s^t a(x,u)du + \beta(x,t).$$

引理 3 如果 $A(x,t)\in\bar{S}(K,C)$, 那末

$$|\mathbf{E}[\xi_{xs}(t)-\xi'_{xs}(t)]| \leqslant C''(1+|x|)(t-s)^{3/2}, \tag{7}$$

$$\mathbf{E}|\xi_{xs}(t)-\xi'_{xs}(t)|^2 \leqslant C'(1+|x|^2)(t-s)^2. \tag{8}$$

证. 记

$$v(t) = |\mathbf{E}[\xi_{xs}(t) - \xi'_{xs}(t)]|,$$
$$z(t) = \mathbf{E}|\xi_{xs}(u) - \xi'_{xs}(t)|^2,$$

那末

$$v(t) = \left|\mathbf{E}\int_s^t [\alpha(\xi_{xs}(u),u) - \alpha(x,u)]du\right|$$
$$\leqslant C\int_s^t \mathbf{E}|\xi_{xs}(u) - x|\,du.$$

顾及到 §1 定理 9 的推论,得不等式

$$v(t) \leqslant C(C')^{1/2}\int_s^t \sqrt{u-s}\,du = C''(t-s)^{3/2}.$$

其次,

$$z(t) \leqslant 2\Big(\mathbf{E}\left|\int_s^t [a(\xi_{xs}(u),u) - a(x,u)]du\right|^2$$
$$+ \mathbf{E}\left|\int_s^t [\beta(\xi_{xs}(u),du) - \beta(x,du)]\right|^2\Big).$$

利用§1 引理 9,我们得

$$z(t) \leqslant 2(TC^2 + C')\int_s^t \mathbf{E}|\xi_{xs}(u) - x|^2 du,$$

这与 §1(69) 的估计一起导出不等式(8).

引理得证.

设 $f(x), x\in\mathscr{R}^m$,是任意三次连续可微函数,且有一阶、二阶及三阶有界偏导数. 现来证关系式

$$z(s,t) = \frac{1}{t-s}\mathbf{E}[f(\xi_{xs}(t)) - f(\xi'_{xs}(t))]$$

在每个形为 $0\leqslant s\leqslant t<T$, $|x|\leqslant N$, $N>0$ 的紧集上一致趋于0. 事实上,利用 Taylor 公式,容易得不等式

$$(t-s)z(s,t) \leqslant K_1(|\mathbf{E}[\xi_{xs}(t) - \xi'_{xs}(t)]|$$
$$+ \mathbf{E}|\xi_{xs}(t) - \xi'_{xs}(t)|\,|\xi'_{xs}(t) - x|$$
$$+ \mathbf{E}|\xi_{xs}(t) - \xi'_{xs}(t)|^2),$$

其中常数 K_1 仅依赖于值 K, C 及函数 $f(x)$ 的一、二阶导数的上界. 显然, $\mathbf{E}|\xi'_{xs}(t) - x|^2 \leqslant C'(1+|x|^2)(t-s)$. 由引理 3 得:

$$(t-s)z(s,t) \leqslant K'(1+|x|^2)(t-s)^{3/2}. \tag{9}$$

现利用广义伊藤公式。设

$$\beta(x,t)=\beta_c(x,t)+\zeta(x,t),$$

其中 $\beta_c(x,t)$ 是随机函数 $\beta(x,t)$ 的连续分量，而 $\zeta(x,t)$ 是它的间断鞅部分，且设 $\nu(x,t,A)$ 是按过程 $\beta(x,t)$ 的跳跃构造的整值测度，$\mu(x,t,A)$ 是结合于它的鞅测度，$\pi(x,t,A)$ 是它的特征。那末

$$\zeta(x,t)=\int_{\mathscr{R}^m} u\mu(x,t,du).$$

以 $B(x,t)$ 表示过程 $\beta_c(x,t)$ 的特征的矩阵。由 $\beta_c(x,t)$ 与 $\zeta(x,t)$ 的正交性得

$$\widetilde{B}(x,t)=B(x,t)+\int_{\mathscr{R}^m} uu^*\pi(x,t,du).$$

显然，测度 $\pi(x,t,x)$ 是非随机的。由条件 $\beta(x,t)\in S_\beta(K,C_N)$ 得 $B(x,t)$ 和函数矩阵 $\int_{\mathscr{R}^m} uu^*\pi(x,t,du)$ 关于 Lebesgue 测度绝对连续。令

$$B(x,t)=\int_0^t b(x,s)ds,\quad \pi(x,t,A)=\int_0^t \Pi(x,s,A)ds,$$

其中 $\Pi(x,t,A)$ 是非随机函数，当固定 (x,t) 时它是 $\mathfrak{B}^m$ 上的测度。这时

$$\int_{\mathscr{R}^m} |u|^2\Pi(x,t,du)<\infty.\qquad \forall (x,t)\in\mathscr{R}^m\times[0,T].$$

由广义伊藤公式(第一章 §3(45))得

$$f(\xi'_{xs}(t))=f(x)+\int_s^t (L_c f(\xi'_{xs}(\theta))+L_d f(\xi'_{xs}(\theta))d\theta$$
$$+\int_s^t (\nabla f(\xi'_{xs}(\theta)),\beta_c(x,d\theta))$$
$$+\int_s^t\int_{\mathscr{R}^m}[f(\xi'_{xs}(\theta)+u)-f(\xi'_{xs}(\theta))]\mu(x,d\theta,du),$$

而且适用此公式的所有条件成立。其中

$$L_c f(\xi'_{xs}(\theta))=(\nabla f(\xi'_{xs}(\theta)),a(x,\theta))$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m}\nabla^k\nabla^j f(\xi'_{xs}(\theta))b^{kj}(x,\theta),$$

$$L_d f(\xi'_{xs}(\theta))=\int_{\mathscr{R}^m}[f(\xi'_{xs}(\theta)+u)-f(\xi'_{xs}(\theta))$$
$$-(\nabla f(\xi'_{xs}(\theta)),u)]\Pi(x,\theta,du),$$

$b^{kj}(x,t)$ 是矩阵 $b(x,t)$ 的元素. 由对函数 $f(x)$ 的假设及上述估计,易得当 $t'\downarrow t, s\uparrow t$ 时

$$\lim_{\substack{t'\downarrow t\\ s\uparrow t}}\frac{\mathbf{E}f(\xi'_{xs}(t'))-f(x)}{t'-s}=(L_c+L_d)f(x)$$

对任意$N>0$ 按 $(x,t)\in S_N\times[0,T]$ 一致地成立.

最后,因为

$$\lim_{\substack{t'\downarrow t\\ s\uparrow t}}\frac{\mathbf{E}f(\xi_{xs}(t'))-f(x)}{t'-s}=\lim_{\substack{t'\downarrow t\\ s\uparrow t}}\frac{z(s,t')}{t'-s}$$
$$+\lim_{\substack{t'\downarrow t\\ s\uparrow t}}\frac{\mathbf{E}f(\xi_{xs}(t'))-f(x)}{t'-s},$$

所以得

$$\lim_{\substack{t'\downarrow t\\ s\uparrow t}}\frac{\mathbf{E}f(\xi_{xs}(t'))-f(x)}{t'-s}=(L_c+L_d)f(x)$$
$$=(\nabla f(x),a(x,t))+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m}\nabla^k\nabla^j f(x)b^{kj}(x,t)$$
$$+\int_{\mathscr{R}^m}[f(x+u)-f(x)-(\nabla f(x),u)]\Pi(x,t,du).\tag{10}$$

使式(10)得以成立的假设条件可以稍微减弱些. 首先仅要求

$$A(x,t)\in S(K,C_N)$$

就够了.

事实上, 构造函数 $a_N(x,t)$ 及 $\beta_N(x,t)$ 使得它们是线性有界,满足一致 Lipschitz 条件且在以 x 为中心半径是N的球 $S_N(x)$ 中,分别相等于 $a(x,t)$ 及 $\beta(x,t)$, 且设 $\xi_N(t)$ 是方程

$$d\xi_N(t)=A_N(\xi_N(t),dt),$$

$$A_N(x,t) = \int_0^t a_N(x,s)ds + \beta_N(x,t)$$

的解.

以 τ_N 表示函数 $\xi(t)$ 首次由球 $S_N(x)$ 走出的时间，那末当 $t < \tau_N$ 时，$\xi_{xs}(t) = \xi_{N_{xs}}(t)$. 对任意有界函数 $f(x)$，

$$\frac{1}{t'-s}\left|\mathbf{E}[f(\xi_{xs}(t')) - f(\xi_{N_{xs}}(t))]\right| \leqslant \frac{\mathbf{P}(\tau_N < t)}{t'-s}$$

$$\leqslant \frac{\mathbf{E}|\xi_{xs}(t') - x|^2}{(t'-s)N^2} \leqslant \frac{C}{N^2}.$$

因此，如果把式(10)应用于过程 $\xi_{N_{xs}}(t)$ 且当$N \to \infty$时取极限，那末我们可知对所考虑的方程类式(10)仍成立.

类似地，可推广等式 (10) 至任意二次连续可微且具有有界的二阶偏导数的有界函数 $f(x)$.

为证明这点，我们构造函数序列 $f_N(x)$，它们有如下性质：每个函数是三次连续可微，自身及到三阶导数是有界的，$f_N(x)$ 及其一、二阶偏导数分别与 $f(x)$ 及其一、二阶偏导数对应的差异在球 $S_N(x)$ 中不超过 $1/N$. 那末

$$\frac{1}{t'-s}\left|\mathbf{E}f(\xi_{xs}(t')) - f(x) - [\mathbf{E}f_N(\xi_{xs}(t')) - f(x)]\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{t'-s}\left|\mathbf{E}(f-f_N)(\xi_{xs}(t')) - (f-f_N)(x)\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{t'-s}\left[\frac{C'}{N}\mathbf{E}|\xi_{xs}(t') - x| + C'\mathbf{P}(\tau_N < t)\right],$$

其中 C' 是某个不依赖于N的常数，而 τ_N 和前面一样表示首次走出球 $S_N(x)$ 的时刻. 因为 $\mathbf{P}(\tau_N < t) = N^{-2}\mathbf{E}|\xi_{xs}(t') - x|^2$，所以被考虑的量不超过

$$\frac{1}{t'-s}\frac{C''}{N^2}\mathbf{E}|\xi_{xs}(t') - x|^2 \leqslant \frac{C^*}{N^2}.$$

还容易证明 $L_c f - L_c f_N \to 0$ 和 $L_d f - L_d f_N \to 0$. 注意到函数 f 的二阶偏导数的有界性的要求仅在证明 $L_d f - L_d f_N \to 0$ 时才利用到.

定理 3 对任意二次连续可微，有有界二阶偏导数的有界函数 $f(x)$，及对于方程

$$d\xi_{xs}(t) = A(\xi_{xs}(t), dt), \xi_{xs}(s) = x,$$

的解 $\xi_{xs}(t)$ 来说，等式(10)成立，其中 $A(x,t) \in S(K, C_N)$。

如果 $A(x,t)$ 是连续过程，那末对 $|x| \to \infty$ 时增长不快于 $|x|$ 的某一幂次的任意二次连续可微函数 $f(x)$，

$$\lim_{\substack{t' \downarrow s \\ s \uparrow t}} \frac{1}{t'-s}[\mathbf{E}f(\xi_{xs}(t')) - f(x)]$$

$$= (\nabla f(x), a(x,t)) + \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m} b^{kj}(x,t)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^k \partial x^j}$$

成立。

证. 仅需证明定理的第二个结论。设函数 $f_N(x)$ 和函数 $f(x)$ 在 $S_N(x)$ 中相等并且它自身及其二阶偏导数在 $\mathscr{R}^m$ 中有界. 应用关系式(10)，我们见到

$$\frac{1}{t'-s}|\mathbf{E}[f(\xi_{xs}(t')) - f(x) - (f_N(\xi_{xs}(t')) - f_N(x))]|$$

$$\leqslant \frac{1}{t'-s}C\mathbf{E}\chi(\tau_N < t)(1 + |\xi_{xs}(t')|^p)$$

$$\leqslant \frac{C}{(t'-s)N^2}\mathbf{E}|\xi_{xs}(t') - x|^2(1 + |\xi_{xs}(t')|^p).$$

如对随机微分方程解的矩的估计一样，利用伊藤公式不难证明，对任意 $p > 0$

$$\mathbf{E}|\xi_{xs}(t) - x|^2(1 + |\xi_{xs}(t)|^p) \leqslant C(t-s),$$

其中 C 是某一常数. 因此当 $N \to \infty$ 时

$$\frac{1}{t'-s}|\mathbf{E}f(\xi_{xs}(t')) - f_N(\xi_{xs}(t'))| \to 0.$$

定理要证明的最后部分是显然的。

注 1. 在类 $S(K, C_N)$ 的一般方程里，式(10)也可以推广到增函数. 仅需要求过程 $\xi_{xs}(t)$ 存在足够高阶的矩。

注 2. 设函数 $f(t,x)$ 及其关于 x 的一、二阶偏导数一致有界

且按 (t,x) 连续. 那末

$$\lim_{\substack{t'\downarrow s\\ s\uparrow s}} \frac{1}{t'-s}[\mathbf{E}f(t',\xi_{xs}(t'))-f(t',x)]$$
$$=(L_c+L_d)f(t,x).$$

如果 $A(x,t)\in\bar{S}^c(K,C_N)$, 那末代替 $f(t,x)$ 及其按变量 x 的一、二阶偏导数的有界性, 而要求当 $x\to\infty$ 时序列的增长速度不快于 $|x|$ 的某一幂次就够了.

事实上此结论包含在定理 3 的证明中.

随机微分方程的解按初始条件的可微性 我们来研究方程

$$\left.\begin{aligned} d\xi_{xs}(t)=A(\xi_{xs}(t),dt),t>s,\\ \xi_{xs}(s)=x,\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

的解 $\xi_{xs}(t)$ 按 x 的可微性问题,其中 $A(x,t)\in\tilde{S}(C,\lambda_N)$.

今后, 随机函数按 x 的导数有两种不同意义的理解: 以概率为 1 存在通常意义下的导数,及均方意义下的导数.

至于鞅场 $\beta(x,t)$ 按 x 的导数则理解为按均方意义下的收敛性.

设 δ_k 是向量 $(\delta_{1k},\delta_{2k},\cdots,\delta_{mk})$. 那末

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\beta(x,t)\underset{\text{定义}}{=\!=}\text{l.i.m.}\frac{\beta(x+h\delta_k,t)-\beta(x,t)}{h}.$$

我们作出联系于平方可积鞅场的可微性的一些注释. 由上述得知当 $t=T$ 时

$$\underset{h\to 0}{\text{l.i.m.}}\frac{\beta(x+hy,t)-\beta(x,t)}{h}$$

存在,那末这极限对任意 $t\in[0,T]$ 存在,且是平方可积鞅.

我们以 $B(x,y,t)$ 表示鞅 $\beta(x,t)$ 和 $\beta(y,t)$ 的互特征矩阵, 和假设它是关于 Lebesgue 测度绝对连续:

$$B(x,y,t)=\int_0^t b(x,y,s)ds.$$

均方导数 $\frac{\partial}{\partial x^k}\beta^i(x,t)$ 存在的充分必要条件 (卷 I 第四章 §3) 是存在极限

$$\lim_{h_1\to0,h_2\to0}\mathrm{E}\frac{\beta^i(x+h_1\delta_k,t)-\beta^i(x,t)}{h_1}\ \frac{\beta^i(x+h_2\delta_k,t)-\beta^i(x,t)}{h_2}$$

$$=\lim_{h_1\to0,h_2\to0}\mathrm{E}\frac{1}{h_1h_2}[B^{jj}(x+h_1\delta_k,x+h_2\delta_k,t)$$
$$-B^{jj}(x+h_1\delta_k,x,t)-B^{jj}(x,x+h_2\delta_k,t)$$
$$+B^{jj}(x,x,t)]. \tag{12}$$

我们再假定以概率为 1 对每个 s 存在按 x 连续的广义混合偏导数

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial y^k}b^{jj}(x,x,s)=\lim_{h_1\to0,h_2\to0}\frac{1}{h_1h_2}[b^{jj}(x+h_1\delta_k,x+h_2\delta_k,s)$$
$$-b^{jj}(x+h_1\delta_k,x,s)-b^{jj}(x,x+h_2\delta_k,s)+b^{jj}(x,x,s)],$$
$$j=1,\cdots,m.$$

而且

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial y^k}b^{jj}(x,x,s)\leqslant C,k,j=1,\cdots,m(\mathrm{mod}\ d\mathrm{P}\times ds),$$

其中 C 是某一非随机常数。

因为 $b^{ij}(x,y,s)$ 是非负定核，所以由导数 $\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial y^k}b^{jj}(x,x,s)$ 的存在得导数 $\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial y^k}b^{jj}(x,y,s)$ 存在。不等式

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial y^k}b^{jj}(x,y,s)\right|\leqslant C(\mathrm{mod}\ d\mathrm{P}\times ds),$$

和等式(12)的右边的数学期望记号内的表达式是一致有界的，由此得均方导数 $\frac{\partial}{\partial x^k}\beta^j(x,t)$ 的存在所需的条件成立。

不难验证，$\frac{\partial}{\partial x^k}\beta^j(x,t)$，$\frac{\partial}{\partial y^r}\beta^j(y,t)$ 的互特征矩阵有等式

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial x^k}\beta^j(x,\cdot),\ \frac{\partial}{\partial y^r}\beta^j(y,\ \cdot)\right\rangle_t$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial y^r}\int_0^t b^{jj}(x,y,s)ds,$$

而且由上述假设得相应的导数存在并按 x 及 y 是连续的 (mod dP

$\times ds$)．此外，

$$\left\langle \beta^i(x,\cdot),\frac{\partial}{\partial y^r}\beta^k(y,\cdot)_t\right\rangle_t = \int_0^t \frac{\partial}{\partial y^r} b^{ik}(x,y,s)ds,$$

而对鞅

$$\tilde{\beta}_h^i(t) = \frac{\beta^i(x+hy,t)-\beta^i(x,t)}{h} - \nabla\beta^i(x,t)\cdot y$$

的特征有如下表达式：

$$\langle \tilde{\beta}_h^i,\tilde{\beta}_h^i\rangle_t = \int_0^t \left\{\frac{1}{h^2}\left[[b^{ii}(x+hy,x+hy,t) - 2b^{ii}(x+hy,x,t)+b^{ii}(x,x,s)\right] - \frac{2}{h}[\nabla_y b^{ii}(x+hy,x,s)\cdot y - \nabla_y b^{ii}(x,x,s)y] + \sum_{h,r=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial y^r} b^{ii}(x,x,s)y^k y^r\right\} ds.$$

我们留意所使用的记号．如果 $\alpha=\alpha(x)$ 是向量(或纯量)函数，$x\in\mathscr{R}^m$，那末 $\nabla\alpha$ 表示按公式 $\nabla\alpha\cdot y=\sum_{r=1}^m y^r\frac{\partial\alpha}{\partial y^r}$ 作用在任意向量 $y\in\mathscr{R}^m$ 上的算子(向量)函数，而 $\nabla^2\alpha$ 是双线性函数，

$$\nabla^2\alpha\cdot x\cdot y=\sum_{r,j=1}^m y^r x^j\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^r\partial x^j}.$$

利用 Taylor 公式和引进的记号，我们将上式表为

$$\langle \tilde{\beta}_n^i,\tilde{\beta}_h^i\rangle_t = \int_0^t [\nabla^2 b^{ii}(x,x,s)-\nabla^2 b^{ii}(x+\tilde{h}y; x+\tilde{h}y,s)]\cdot y\cdot y\cdot ds, \tag{13}$$

其中 $\tilde{h}$ 是包含在 0 和 h 之间的数．

定理 4　设

1) 对固定 t 函数 $\alpha(x,t)$ 以概率为 1 按 x 连续可微且

$$|\nabla\alpha(x,t)|\leqslant C;$$

2) 场 $\beta(x,t)$ 的互特征矩阵 $B(x,y,t)$ 按 t 可微，

$$B(x,y,t)=\int_0^t b(x,y,s)ds,$$

且对固定 t 函数 $b(x, y, t)$ 以概率为 1 有连续且一致有界导数

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial y^k} b(x,y,t),$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial y^k} b(x,y,t)\right| \leqslant C,\ k=1,\cdots,m;$$

3) 场 $A(x,t)=\int_0^t \alpha(x,s)ds+\beta(x,t)\in \tilde{S}(C,C)$.

那末 $\xi_{xs}(t)$ 按 $x^k(k=1,\cdots,m)$ 在均方意义下可微且

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\xi_{xs}(t)=\eta_k(t)$$

满足线性随机微分方程

$$\eta_k(t)=\delta_k+\int_s^t \nabla A(\xi_{xs}(v),dv)\cdot\eta_k(v). \tag{14}$$

证. 为简化记号令 $s=0, \xi_{xs}(t)=\xi_x(t)$, 且设

$$\eta_{h_k}(t)=\frac{1}{h}\left[\xi_{x+h_k}(t)-\xi_x(t)\right],$$

其中 $h_k=h\delta_k$ 是分量为 $h\delta_{kj}, j=1,\cdots,m$ 的向量, 过程 $\eta_{h_k}(t)$ 满足方程

$$\eta_{h_k}(t)=\delta_k+\int_0^t A_h(\eta_{h_k}(s),ds),$$

此处

$$A_h(y,t)=\int_0^t \frac{\alpha(\xi_x(s)+hy,s)-\alpha(\xi_x(s),s)}{h}ds$$

$$+\int_0^t \frac{\beta(\xi_x(s)+hy,ds)-\beta(\xi_x(s),ds)}{h}$$

$$=\int_0^t \alpha_h(y,s)ds+\beta_h(y,t).$$

记

$$A_0(y,t)=\int_0^t \nabla\alpha(\xi_x(s),s)\cdot y ds+\int_0^t \nabla\beta(\xi_x(s),ds)\cdot y$$

$$-\int_0^t \alpha_0(y,s)ds+\beta_0(y,t).$$

我们来证明对于场 $A_h(y,t)$, $A_0(y,t)$, §1 定理 11 的条件成立. 由定理 4 的假设得,

$$|\alpha_h(y,t)|\leqslant C|y|,\mathbf{E}\{|\Delta\beta_h(y,t)|^2|\mathfrak{F}_t\}\leqslant C^2|y|^2\Delta t.$$

此外由于 Lagrange 公式

$$|\alpha_h(y,t)-\alpha_0(y,t)|=|\nabla\alpha(\xi_x(t)+\tilde{h}y,t)-\nabla\alpha(\xi_x(t),t)\cdot y|,$$

其中 $|\tilde{h}|\leqslant|h|$. 因为对任意 $t\in[0,T]$ 函数 $\nabla\alpha(y,t)$ 以概率为 1 按 y 连续,所以

$$\mathbf{P}\{\sup_{|y|\leqslant N}|\alpha_h(y,t)-\alpha_0(y,t)|>\varepsilon\}\to 0 \text{ 当 } h\to 0\ \forall\varepsilon>0.$$

其次,

$$\mathbf{E}\{|\Delta\beta_h-\Delta\beta_0|^2|\mathfrak{F}_t\}=\mathbf{E}\left\{\int_t^{t+\Delta t}\gamma_k(y,s)ds|\mathfrak{F}_t\right\},$$

此处由于公式(13)

$$\gamma_k(y,t)=\sum_{j=1}^m(\nabla^2b^{ij}[\xi(t)+\tilde{h}y,\xi(t+\tilde{h}y),t]-\nabla^2b^{ij}[\xi(t),\xi(t),t]\cdot y\cdot y,$$

和 $|\tilde{h}|\leqslant|h|$. 因为函数$\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial y^r}b(x,y,t)$ 以概率为 1 按变元 (x,y,t) 连续,且以概率为 1 有 $\sup|\xi(t)|<\infty$, 所以不难看到, $\mathbf{P}\{\sup_{|y|<N}|\gamma_k(y,t)|>\varepsilon\}\to 0$ 当 $h\to 0$. 因此 §1 定理 11 的条件成立. 顾及到 §1 定理 10 的注,得

$$\mathbf{E}\sup_{0<t<T}|\eta_{hk}(t)-\eta_{0k}(t)|^2\to 0 \text{ 当 } h\to 0,$$

其中 $\eta_{0k}(t)$ 是方程(14)的解.

定理得证.

加强对场 $A(x,t)$ 的假设,可以得到函数 $\xi_{x_t}(t)$ 按初始条件的二阶偏导数存在的定理.

方程(14)的形式微分法导至关系式

$$\eta_{kr}(t)=\int_s^t \nabla^2 A(\xi_{xs}(v),dv)\cdot\eta_k(v)\cdot\eta_r(v)$$

$$+\int_s^t \nabla A(\xi_{xs}(v),dv)\cdot\eta_{kr}(v), \tag{15}$$

其中

$$\eta_{kr}(t)=\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^r}\xi_{xs}(t).$$

为使导数 $\eta_{kr}(t)$ 有有限二阶矩，自然要求量 $\eta_k(t)$ 存在四阶矩和场 $\nabla^2 A(x,t)$ 在某种意义下按 x 一致有界。

我们从说明方程(14)的解的四阶矩存在的条件开始。

利用广义伊藤公式。为此分解场 $\beta(x,t)$ 为连续和间断部分，即

$$\beta(x,t)=\beta_c(x,t)+\zeta(x,t),$$

且设

$$\langle\beta_c(x,\cdot),\beta_c(y,\cdot)\rangle_t=\int_s^t b_c(x,y,s)ds,$$

$$\langle\zeta(x,\cdot),\zeta(y,\cdot)\rangle_t=\int_s^t b_d(x,y,s)ds.$$

设矩阵 $b_c(x,y,t)$，$b_d(x,y,t)$ 以概率为 1 有连续混合导数 $\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial y^r}$。那末场 $\beta_c(x,t),\zeta(x,t)$ 在均方意义下按 $x^k(k=1,\cdots,m)$ 可微。令

$$A^\nabla(y,t)=\int_s^t \nabla A(\xi_{xs}(\theta),d\theta)\cdot y,$$

或更详细地，

$$A^\nabla(y,t)=\int_s^t \nabla\alpha(\xi_{xs}(\theta),\theta)\cdot y\ d\theta+\int_s^t \nabla\beta_c(\xi_{xs}(\theta),d\theta)\cdot y$$

$$+\int_s^t \nabla\zeta(\xi_{xs}(\theta),d\theta)\cdot y$$

$$=\int_s^t \alpha^\nabla(y,\theta)d\theta+\beta_c^\nabla(y,t)+\zeta^\nabla(y,t).$$

过程 $\beta_c^\nabla(y,t)$ 的特征的矩阵

$$\langle\beta_c^\nabla(y,\cdot),\beta_c^\nabla(y,\cdot)\rangle_t$$

$$-\int_s^t \sum_{k,r=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial y^r} b_c(\xi_{xs}(\theta),\xi_{xs}(\theta),\theta) y^k \cdot y^r d\theta$$

(§1 引理 8),过程 $\zeta^\nabla(y,t)$ 的特征有类似的表达式。

由定理 4 的假设得:

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial y^r} b_c(x,y,t)\right| + \left|\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial y^r} b_d(x,y,t)\right| \leqslant C,$$

$$|\alpha^\nabla(y,t)| \leqslant C(1+|y|),$$

因此场 $A^\nabla(y,t) \in S(C,C)$.

考虑方程

$$\eta(t) = z + \int_0^t A^\nabla(\eta(s),ds), \tag{16}$$

为简单起见令 $s=0$. 由 §1 定理 9 得如果 $A^\nabla(y,t) \in S(C, C)$ 且

$$\int_{\mathscr{R}^m} |u|^4 \pi^\nabla(y,T,du) \leqslant C(1+|y|^4), \tag{17}$$

其中 $\pi^\nabla(y,t,A)$ 是结合于过程 $A^\nabla(y, t)$ 的跳跃测度 $\nu_y^\nabla(t, A)$ 的测度,那末方程(16)的解有有限四阶矩.

转到方程(15). 我们假定定理 4 的条件和(17)成立. 为简单起见, 再令 $s=0$, $\xi_{xs}(t)=\xi_{x0}(t)=\xi_x(t)$. 我们还需要假定场 $\nabla^2 A(x,t)$ 及过程

$$\varphi(t) = \int_0^t \nabla^2 A(\xi_x(v),dv) \cdot \eta_k(v) \cdot \eta_r(v)$$

的存在性. 这时在等式右边的积分将了解为沿随机曲线 $\xi_x(t)$ 在场

$$A_{kr}^{(2)}(x,t) = \int_0^t \nabla^2 A(x,dv) \cdot \eta_k(v) \cdot \eta_r(v)$$

的线积分. 随机函数 $\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^r} A(x,t)$ 表为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^r} A(x,t) = \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^r} \alpha(x,s)ds + \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^r} \beta(x,t),$$

并设:

1) $\alpha(x,t)$ 以概率为 1 对每个 $t\in[0,T]$ 按 x 二次连续可微且

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^r}\alpha(x,t)\right| \leqslant C, k, r = 1, \cdots, m,$$

其中 C 是非随机常数;

2) 以概率为 1 对每个 $t\in[0,T]$ 存在偏导数

$$\frac{\partial^4}{\partial x^k \partial y^k \partial x^r \partial y^r} b^{ij}(x,y,t), \tag{18}$$

它依 x, y 连续且对所有 x, y, t, 以非随机常数 C 为界.

这时导数(18)理解为导数 $\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial y^k} b^{ij}(x, y, t)$ 在上述意义下的混合导数 $\frac{\partial^2}{\partial x^r \partial y^r}$.

如果条件 2) 成立,那末正如由上述所得,在均方意义下的导数

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^r}\beta(x,t) = \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\beta(x,t)\right)$$

存在. 现来考虑函数

$$\begin{aligned} A^{(2)}(x,t) &= \int_0^t \nabla^2\alpha(x,v)\cdot\eta_k(v)\cdot\eta_r(v)dv \\ &\quad + \int_0^t \nabla^2\beta(x,dv)\cdot\eta_k(v)\cdot\eta_r(v) \\ &= \int_0^t \alpha^{(2)}(x,v)dv + \beta^{(2)}(x,t). \end{aligned}$$

第一个积分显然以概率为 1 存在,它有有限二阶矩. 所考虑的积分中的第二个是平方可积鞅场. 它的分量的互特征有如下表达式

$$\langle \beta^{(2)p}(x,\cdot), \beta^{(2)q}(y,\cdot)\rangle_t = \int_0^t \sum_{i,j,i',j'=1} \frac{\partial^4 b^{pq}(x,y,v)}{\partial x^i \partial y^j \partial x^{i'} \partial y^{j'}}$$

$$\times\ \eta_k^i(v)\eta_r^j(v)\eta_k^{i'}(v)\eta_r^{j'}(v)dv.$$

按照这些注解函数 $\varphi(t)$ 存在且有有限二阶矩,而且由已有

的估计得，$\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\varphi(t)|^2<\infty$。但那时方程(15)有唯一解且 $\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta_{k_r}(t)|^2<\infty$。

现转到方程(14)的解按 x 的可微性问题。以 $\eta(t,x)$ 表示方程(14)的解且置

$$\eta_h(t)=\frac{1}{h}[\eta(t,x+h\delta_r)-\eta(t,x)].$$

函数 $\eta_h(t)$ 满足方程

$$\eta_h(t)=\varphi_h(t)+\int_0^t\nabla A(\xi_x(v),dv)\cdot\eta_h(v),$$

其中

$$\varphi_h(t)=\frac{1}{h}\int_0^t[\nabla A(\xi_{x+h\delta_r}(v),dv)$$
$$-\nabla A(\xi_x(v),dv)]\eta(v,x+h\delta_r),$$

注意

$$\varphi_h(t)-\varphi(t)=\varphi'_h(t)+\varphi''_h(t),$$

$$\varphi'_h(t)=\int_0^t\left[\frac{1}{h}(\nabla A(\xi_{x+h\delta_r}(v),dv)-\nabla A(\xi_x(v),dv))\right.$$
$$\left.-\nabla^2A(\xi_x(v),dv)\eta_r(v)\right]\cdot\eta(v,x+h\delta_r),$$

$$\varphi''_h(t)=\int_0^t\nabla^2A(\xi_x(v),dv)\cdot\eta_r(v)$$
$$\cdot[\eta(v,x+h\delta_r)-\eta(v,x)],$$

利用函数(18)的有界性和按 x,y 的连续性，以及场的互特征的表达式，不难得到

$$\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\varphi'_h(t)|^2\to0.$$

此外，

$$\mathbf{E}\sup|\eta(t,x+\Delta x)-\eta(t,x)|^4=O(|\Delta x|^4).$$

由此得

$$\mathbf{E}\sup|\varphi_h(t)-\varphi(t)|^2\to0$$

和由于§1 定理 11 的注，我们得

$$\mathbf{E}\sup_{a\leqslant t\leqslant T}|\eta_h(t)-\eta(t)|^2\to 0 \text{ 当 } h\to 0.$$

因此，下定理成立.

定理 5 如果定理 4 的条件、不等式(17)及上述的条件 1) 和 2)均成立，那末在均方意义下的导数 $\eta_{kr}(t)=\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^r}\xi_{xs}(t)$存在，并满足方程(15)以及按 (x,s) 均方连续.

在上述定理中余下来要证明的仅是二阶导数 $\eta_{kr}(t)$ 按 (x,s) 均方连续. 这利用 §1 定理 9 的估计，类似于引理 2 容易证得.

Колмогоров 方程 设 $\xi_{xs}(t)$ 是无后效方程(5)的解. 我们来证明函数

$$F(t,x)=\mathbf{E}f(\xi_{xt}(T)),(t,x)\in[0,T]\times\mathscr{R}^m,$$

满足一个重要的积分一微分方程，此方程的形式不依赖于函数 $f(x)$. 对于函数 $f(x)$ 的依赖性仅表现在边界条件应合并到方程中.

引理 4 设定理 4 的条件成立，$A(x,t)\in\bar{S}(C,C)$，函数 $f(x)$ 二次连续可微且它的二阶偏导数一致有界. 那末导数 $\frac{\partial F(t,x)}{\partial x^k}$ 存在，按 (x,t) 连续及

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x^k}=\mathbf{E}\left(\nabla f(\xi_{xt}(T)),\frac{\partial}{\partial x^k}\xi_{xt}(T)\right). \tag{19}$$

证. 事实上，设 $h_k=h\delta_k$,

$$\left|\frac{F(t,x+h_k)-F(t,x)}{h}-\mathbf{E}\left(\nabla f(\xi_{xt}(T)),\frac{\partial}{\partial x^k}\xi_{xt}(T)\right)\right|$$

$$\leqslant\left|\mathbf{E}\left(\nabla f(\xi_{xt}(T)),\frac{\Delta\xi_{xt}}{h}-\frac{\partial}{\partial x^k}\xi_{xt}(T)\right)\right|$$

$$+\left|\mathbf{E}\nabla^2 f(\xi_{xt}(T)+\theta\Delta\xi_{xt})\cdot\frac{\Delta\xi_{xt}}{h}\cdot\Delta\xi_{xt}\right|$$

$$\leqslant C\left[\mathbf{E}(1+|\xi_{xt}(T)|^2)\cdot\mathbf{E}\left|\frac{\Delta\xi_{xt}}{h}-\frac{\partial}{\partial x^k}\xi_{xt}(T)\right|^2\right]^{1/2}$$

$$+C\left[\mathbf{E}|\Delta\xi_{xt}|^2\cdot\mathbf{E}\left|\frac{\Delta\xi_{xt}}{h}\right|^2\right]^{1/2},$$

其中C是仅依赖于 $\sup|\nabla^2 f(x)|$，$\Delta\xi_{xt}=\xi_{x+h_k t}(T)-\xi_{xt}(T)$ 的常数。由所得的不等式得引理的结论。

注。如果补充要求 $\xi_{xt}(T)$ 的适当阶数的矩是有限的，那末引理的结论对二次连续可微且当 $|x|\to\infty$ 时增长速度不快于 x 的某个幂次的函数仍正确。

引理5 设函数 $f(x)$ 二次连续可微且它的二阶偏导数一致有界，而函数 $\xi_{xt}(T)$ 有按 x^k 的一阶、二阶均方偏导数且它们按变元 (x,t) 是均方连续的。

那末函数 $F(t,x)$ 有按 x 的二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^k\partial x^j}=\left(\mathbf{E}\nabla^2 f(\xi_{xt}(T))\frac{\partial}{\partial x^k}\xi_{xt}(T),\ \frac{\partial}{\partial x^j}\xi_{xt}(T)\right)$$
$$+\left(\mathbf{E}\nabla f(\xi_{xt}(T)),\frac{\partial}{\partial x^k\partial x^j}\xi_{xt}(T)\right),\qquad(20)$$

且按变元 (t,x) 连续。

证。设

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\partial F(t,x+h_k)}{\partial x^j}-\frac{\partial F(t,x)}{\partial x^j}\right)-\left(\mathbf{E}\nabla^2 f(\xi_{xt}(T))\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial}{\partial x^k}\xi_{xt}(T),\ \frac{\partial}{\partial x^j}\xi_{xt}(T)\right)$$
$$-\left(\mathbf{E}\nabla f(\xi_{xt}(T)),\ \frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^j}\xi_{xt}(T)\right)$$
$$=z_1+z_2+z_3+z_4,$$

其中

$$z_1=\left(\mathbf{E}\nabla f(\xi_{xt}(T)),\frac{1}{h}\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\xi_{x+h_k t}(T)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial x^j}\xi_{xt}(T)-\frac{\partial^2}{\partial x^j\partial x^k}\xi_{xt}(T)\right]\right),$$

$$z_2=\left(\mathbf{E}[\nabla^2 f(\xi)-\nabla^2 f(\xi_{xt}(T))],\ \frac{\Delta\xi}{h}\cdot\frac{\partial}{\partial x^j}\xi_{x+h_k t}(T)\right),$$

$$z_3=\left(\mathbf{E}\nabla^2 f(\xi_{xt}(T))\left[\frac{\Delta\xi}{h}\right.\right.$$

$$- \frac{\partial}{\partial x^k} \xi_{xt}(T) \Big], \ \frac{\partial}{\partial x^j} \xi_{x+h_k t}(T) \Big),$$

$$z_4 = \Big(\mathbf{E} \nabla^2 f(\xi_{xt}(T)) \frac{\partial}{\partial x^k} \xi_{xt}(T),$$

$$\Big[\frac{\partial}{\partial x_j} \xi_{x+h_k t}(T) - \frac{\partial}{\partial x^j} \xi_{xt}(T) \Big] \Big).$$

这里 $\bar{\xi}$ 表示在连结点 $\xi_{xt}(T)$ 和 $\xi_{x+h_k t}(T)$ 的区间上的某个点.

因为函数 $\nabla f(x)$ 当 $|x| \to \infty$ 时增长不快于 $|x|$,且均方导数 $\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} \xi_{xt}(T)$ 存在,所以当 $h \to 0$ 时 $Z_1 \to 0$。对于 Z_2 有如下估计:

$$|Z_2| \leqslant \Big[\mathbf{E} \Big(\frac{\Delta \xi}{h} \Big)^2 \Big]^{1/2} \Big[\mathbf{E} |\nabla^2 f(\bar{\xi})$$

$$- \nabla^2 f(\xi_{xt}(T))|^2 \Big| \frac{\partial}{\partial x^j} \xi_{xt}(T) \Big|^2 \Big]^{1/2}$$

$$+ \Big[\mathbf{E} |\nabla^2 f(\bar{\xi}) - \nabla^2 f(\xi_{xt}(T))|^2 \Big| \frac{\partial}{\partial x^j} \xi_{x+h_k t}(T)$$

$$- \frac{\partial}{\partial x^j} \xi_{xt}(T) \Big|^2 \Big]^{1/2},$$

由此易见当 $h \to 0$ 时 $|Z_2| \to 0$。类似地可验证 当 $h \to 0$ 时 $|Z_3| \to 0$ 及 $|Z_4| \to 0$。 因此偏导数 $\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^j} F(t,x)$ 存在及式(20)成立。

由(20)见到,导数 $\frac{\partial}{\partial x^k} \xi_{xt}(T)$ 和 $\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^j} \xi_{xt}(T)$ 按 (x,t) 的均方连续性蕴含 3 导数 $\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^j} F(t,x)$ 按 (t,x) 的连续性。 引理得证.

设引理的条件成立及 $0 \leqslant t' < t < t'' < T$. 那末

$$F(t,x) = \mathbf{E} f(\xi_{\xi_{xt}'(t'')(t'')}(T))$$

$$= \mathbf{E}\{[\mathbf{E} f(\xi_{yt''}(T))]_{y=\xi_{xt}'(t'')}\} = \mathbf{E} F(t'', \xi_{xt}'(t'')).$$

于是

$$\frac{F(t',x)-F(t'',x)}{t''-t'}$$
$$=\frac{1}{t''-t'}\mathbf{E}\{F(t'',\xi_{xt'}(t''))-F(t'',x)\}.$$

因为函数 $F(t,x)$ 二次连续可微，所以可应用定理 3 及其注 2。

我们得到如下定理：

定理 6 设

1) $A(x,t)\in\bar{S}(C,C_N)$ 和随机微分方程(5)的解 $\xi_{xs}(t)$ 有按 (x,s) 的一、二阶均方偏导数，且按 (x,s) 均方连续；

2) 函数 $f(x)$ 二次连续可微且 $f(x)$ 连同其一阶和二阶偏导数一致有界。

那末函数

$$F(t,x)=\mathbf{E}f(\xi_{xt}(T)) \tag{21}$$

按 x 二次连续可微，按 t 可微，且满足方程

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}+(\nabla F(t,x),a(x,t))$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m}\nabla^k\nabla^j F(t,x)b^{kj}(x,t)+\int_{\mathscr{R}^m}[F(t,x+u)$$
$$-F(t,x)-(\nabla F(t,x),u)]\Pi(x,t,du)=0 \tag{22}$$

及边界条件

$$\lim_{t\to T}F(t,x)=f(x). \tag{23}$$

推论 1 设

1) 非随机函数 $a(x,t)$ 连续和按 x 二次连续可微以及按 x 的一、二阶偏导数一致有界；

2) 随机函数 $\beta(x,t)$ 对固定的 x 是有有限二阶矩的独立增量过程，满足

$$\mathbf{E}\beta(x,t)=0,$$
$$\mathbf{E}\beta(x,t)\beta^*(y,t)=\int_0^t b(x,y,s)ds,$$

$b(x,y,t)$ 的二阶及四阶混合偏导数

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial y^r} b^{ij}(x,y,t), \frac{\partial^4}{\partial x^k \partial y^k \partial x^r \partial y^r} b^{ij}(x,y,t)$$

一致有界；

3）过程 $\nabla\beta(x,t)$ 的间断分量满足条件(17)；

4）函数 $f(x)$ 按 x 二次连续可微，且连同它的一阶、二阶偏导数一致有界。

那末函数 $F(t,x) = \mathbf{E}f(\xi_{xt}(T))$ 满足方程(22)和边界条件(23)，其中 $\xi_{xt}(s)$ 是由随机微分方程

$$\left.\begin{aligned} d\xi(s) = a(\xi(s),s)ds + \beta(\xi(s),ds), s \geqslant t \\ \xi(t) = x \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

所确定的马尔科夫过程。

我们来证明，由最简单的概率论对象——标准 Wiener 过程和 Poisson 测度出发，可以得到形为(22)的十分一般的方程。

推论 2 假设 $w_1(t), \cdots, w_q(t)$ 是相互独立的 Wiener 过程，和 $\nu(A,\Delta)$ 是在 $\mathscr{R}^q \times [0,T]$ 上独立于 Wiener 过程 $w_j(t)$, $j=1,\cdots,q$ 的 Poisson 测度，

$$\mathbf{E}\nu(A,[0,t]) = \Pi(A)t,$$

$$\tilde{\nu}(A,\Delta) = \nu(A,\Delta) - \Pi(A)\Delta t.$$

设 $a(x,t)$, $\sigma_k^j(x,t)$, $g^j(x,t,u)$ 是非随机函数，$j=1,\cdots,m$, $k=1,2,\cdots,q$, $(x,t,u)\in\mathscr{R}^m\times[0,T]\times\mathscr{R}^q$，满足条件：

1）函数 $a^j(x,t), \sigma_k^j(x,t), g^j(x,t,u), j=1,\cdots,m, k=1,2,\cdots,q$，按 (x,t) 连续和按 x 二次连续可微；

2）函数 $a^j(x,t)$, $\sigma_k^j(x,t)$ 按 x 的一阶和二阶偏导数一致有界；

3）$\int(|\nabla g|^2 + |\nabla g|^4 + |\nabla^2 g|^2)\Pi(du) \leqslant C$，其中 C 不依赖于 (x,t)。

以 $\xi_{xt}(t)$ 表示随机微分方程

$$d\xi(s) = a(\xi(s),s)ds + \sum_{k=1}^{q} \sigma_k(\xi(s),s)dw^k(s)$$

$$+ \int_{\mathscr{R}^q} g(\xi(s), s, u)\tilde{\nu}(du, ds),$$

$$\xi(t) = x,$$

的解。

那末函数 $F(t,x) = \mathbf{E} f(\xi_{xt}(T))$ 是方程

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} + (a(t,x), \nabla F(t,x))$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m} b^{kj}(x,t)\nabla^k\nabla^j F(t,x)$$

$$+ \int_{\mathscr{R}^q}[F(t, x + g(t,x,u)) - F(t,x)$$

$$- (g(t,x,u), \nabla F(t,x))]\Pi(du) = 0 \qquad (25)$$

的解，其中 $f(x)$ 满足定理 6 的条件，

$$b^{kj}(x,t) = \sum_{r=1}^{q} \sigma_r^k(x,t)\sigma_r^j(x,t).$$

为证明上面的推论，注意场

$$\beta_c(x,t) = \sum_{k=1}^{q}\int_0^t \sigma_k(x,s)dw(s)$$

有由式

$$\mathbf{E}\{\beta_c^j(x,\Delta)\beta_c^k(y,\Delta)|\mathfrak{F}_t\} = \mathbf{E}\beta_c^j(x,\Delta)\beta_c^k(y,\Delta)$$

$$= \int_t^{t+\Delta t}\sum_{r=1}^{q} \sigma_r^j(x,s)\sigma_r^k(y,s)ds$$

所定义的互特征，其中 $\mathfrak{F}_t$ 是由随机变量 $w^k(s), \nu(A,s)$，$s \leqslant t$，$A \in \mathfrak{B}^m, k = 1, \cdots, q$，所生成的 σ-代数的完备化。类似地，对场

$$\zeta(x,t) = \int_0^t\int_{\mathscr{R}^q} g(x,s,u)\tilde{\nu}(du, us),$$

我们有

$$\mathbf{E}\{\zeta^j(x,\Delta)\zeta^k(y,\Delta)|\mathfrak{F}_t\}$$

$$= \int_t^{t+\Delta t}\int_{\mathscr{R}^q} g^j(x,s,u)g^k(y,s,u)\Pi(du)ds.$$

由给出的假设易得场

$$A(x,t)=\int_0^t a(x,s)ds+\beta_c(x,t)+\zeta(x,t)$$

满足定理 6 的条件，其次

$$\Pi(x,t,B)=\Pi\{u:g(x,t,u)\in B\}.$$

现时如果在方程 (22) 中出现的关于函数 $F(t, x)$ 的积分作积分变量替换： $u\to g(t,x,u)$，那末方程(22)转换为(25)。

公式(21)可视为有偏导数(22)的积分-微分方程的Cauchy 问题的解的概率论表示。一方面，例如可利用方程(22)确定 Марков 过程 $\xi_{xt}(s)$ 的转移概率或研究这些概率的解析性质。另方面，如果希望得到方程(22)(或(25))的数值或近似解，那末表示式(21)可用作解的概率理论模拟 (Monte-Carlo 方法)。以前已证明的随机微分方程的有限-差分近似解的收敛性定理特别给出了解方程(22)(或(25))的简单有限-差分近似解的步骤。

可以扩大联系于随机微分方程解的有偏导数的积分-微分方程类。为此我们来研究如何确定随机向量

$$\int_t^T h(\xi_{xt}(s),s)ds$$

的分布的问题，其中 $h(x,t)$，$(x, t)\in\mathscr{R}^m\times[0, T]$，是连续且按 x 二次可微，取值于 $\mathscr{R}^q$ 和有一致有界的一、二阶偏导数的函数。

为解决此问题我们用如下方法进行。将关系式

$$d\eta(s)=h(\xi_{xt}(s),s)ds,\quad s\geqslant t,\quad \eta(t)=y,$$

并入方程(24)中，且将它们理解为随机微分方程

$$\left.\begin{aligned}&d\zeta_{xt}(s)=B(\zeta_{xt}(s),ds),\\&\zeta_{xt}(s)=(\xi_{xt}(s),\eta(s)),\ \zeta_{xt}(s)=z,z=(x,y),\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

令

$$\bar F(t,x,y)=\bar F(t,z)=\mathbf{E}\bar f(\zeta_{xt}(T)),$$

$$\bar f(z)=\bar f(x,y)=f(x)\exp\{i(\lambda,x)+i(\mu,y)\},$$

其中 $f(x)$ 是二次连续可微函数，它的一阶和二阶偏导数一致有界，λ 是 m-维向量，μ 是 q-维向量。将定理 6 应用于方程(26)，因此，$\bar F(z,t)$ 满足方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{F}+(a,\nabla_x\bar{F})+(h,\nabla_y\bar{F})$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m}b^{kj}\nabla_x^k\nabla_x^j\bar{F}+\int_{\mathscr{R}^m}[\bar{F}(t,x+u,y)$$

$$-\bar{F}(t,x,y)-(u,\nabla_x\bar{F})]\Pi(x,t,du)=0. \qquad (27)$$

此处 ∇x 是按变量 x 的梯度记号，∇_y 是按变量 y 的梯度记号，因为 $\eta(T)=y+\int_t^T h(s,\xi_{xt}(s))ds$，所以 $\nabla_y\bar{F}=i\mu\bar{F}$. 在方程(27)中令 $y=0$ 并以 $i\mu\bar{F}$ 代替 $\nabla_y\bar{F}$，我们得到

$$F(t,x)=\bar{F}(t,x,0)=\mathbf{E}f(\xi_{xt}(T))\exp\{i(\lambda,\xi_{xt}(T))$$

$$+i(\mu,\int_t^T h(s,\xi_{xt}(s))ds)\}.$$

函数 $F(t,x)$ 满足方程

$$\frac{\partial}{\partial t}F+(a,\nabla F)+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m}b^{kj}\nabla^k\nabla^jF+i(\mu,h)F$$

$$+\int_{\mathscr{R}^m}[F(t,x+u)-F(t,x)$$

$$-(u,\nabla F(t,x))]\Pi(x,t,du)=0, \qquad (28)$$

及边界条件

$$F(T,x)=f(x)e^{i(\lambda,x)}.$$

如果令 $f(x)=1$，那末随机向量 $(\xi_{xt}(T),\int_t^T h(\xi_{xt}(s),s)ds)$的分布的联合特征函数满足方程(28)。如果令 $F(T,x)=1$，那末得到所考虑的随机微分方程(24)的解 $\xi_{xt}(s)$ 的可加泛函的分布的特征函数的方程。方程(28)区别于方程(22)是在于有附加的被加项

$$i(\mu,h(t,x))F(t,x).$$

例. Wiener 过程可加泛函的分布 我们来提供计算一维Wiener过程的齐次可加泛函(积分型)的分布的一些见解。

在我们所考虑情形 $\xi_{xt}(s)=x+w(s)-w(t),s\geqslant t$，和

$$\eta(T)=\int_t^T h(x+w(s)-w(t))ds.$$

函数

$$F(t,x) = \mathbf{E}e^{i\mu\eta(T)}f(x + w(T) - w(t))$$

满足方程

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2} + i\mu h(x)F(t,x) = 0,\ t < T,$$

和边界条件

$$F(T,x) = f(x).$$

令 $v(T - t, x) = F(t,x)$，我们得到初始条件为 $v(0,x) = f(x)$ 的函数 $v(t,x)$ 的方程

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} + i\mu h(x)v(t,x). \tag{29}$$

这时函数 $v(t,x)$ 可表为

$$v(t,x) = \mathbf{E}\exp\{i\mu\int_0^t h(w(s) + x)ds\}f(x + w(t)).$$

因为过程 $w(s)$ 随机等价于过程$\sqrt{t}\,w\left(\frac{s}{t}\right)$，所以关于$v(t,x)$的后一表达式可用下式代换:

$$v(t,x) = \mathbf{E}\exp\left\{i\mu t\int_0^1 h(\sqrt{t}\,w(s) + x)ds\right\}f(x + \sqrt{t}\,w(1)). \tag{30}$$

公式(30)给出了关于抛物型方程(29)的 Cauchy 问题用"求积法"的解(现时将给定在 $\mathscr{C}[0, 1]$ 上的某个泛函的积分了解为"求积法",而积分是按标准Wiener测度,即是按 Wiener 过程在$\mathscr{C}[0,1]$中生成的测度进行)。

今后假定 $f(x) \equiv 1$. 换句话说,我们研究 $\eta(T)$ 的分布的特征函数的计算. 方程(29)可利用关于 t 的 Laplace 变换求解。

$$z(p,x) = \int_0^\infty e^{-pt}v(t,x)dt,$$

其中 p 是非负数. 以 e^{-pt} 乘方程(29)并对 t 由 0 到∞的积分,得

$$pz(p,x) - 1 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}z(p,x) + i\mu h(x)z(p,x). \tag{31}$$

我们来证明，当 $h(x)$ 是分段连续有界函数时，方程(31)也成立。选取一致有界函数序列 $h_n(x)$，使得对每个 x，它们收敛于 $h(x)$ 而且它们之中的每一个是二次连续可微及有一阶、二阶有界偏导数，设

$$z_n(p,x)=\int_0^\infty e^{-pt}\mathbf{E}\exp\left\{iu\int_0^t h_n(x+w(s))ds\right\}dt.$$

那末 $|z_n(p,x)|\leqslant 1/p$ 和 $z_n(p,x)\to z(p,x)$ 当 $n\to\infty$。函数 $z_n(p,x)$ 满足方程(31)。由该方程可见，导数 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}z_n(p,x)$ 一致有界且当 $n\to\infty$ 时收敛于极限

$$2(pz(p,x)-1-i\mu h(x)z(p,x)).$$

由此得

定理 7 如果函数 $h(x)$ 有界和分段连续，那末函数 $z(p,x)$ 连续可微，在函数 $h(x)$ 的所有连续点有二阶导数且满足方程(31)。

利用定理 7 计算变量

$$\eta(t)=\int_0^t \operatorname{sgn} w(s)ds$$

的分布。在所考虑的情形里方程有形式

$$z''(p,x)+2(i\mu\operatorname{sgn}x-p)=-2.$$

分为区域 $x>0$ 及 $x<0$ 解此方程，我们得

$$z(p,x)=\frac{1}{p-i\mu}+C_1e^{\sqrt{2p-2i\mu}\,x}$$

$$+C_2e^{-\sqrt{-2p-2i\mu}\,x},\quad x>0,$$

$$z(p,x)=\frac{1}{p+i\mu}+C_3e^{\sqrt{2p+2i\mu}\,x}$$

$$+C_4e^{-\sqrt{2p+2i\mu}\,x},\quad x<0.$$

由 $z(p,x)$ 的有界性，当 $x\to\pm\infty$ 时，$C_1=C_4=0$。利用函数 $z(p,x)$ 和 $z'_x(p,x)$ 在点 $x=0$的连续性，得等式

$$\frac{1}{p-i\mu}+C_2=\frac{1}{p+i\mu}+C_3;$$

$$-C_2\sqrt{2p-2i\mu}=C_3\sqrt{2p+2i\mu},$$

由此得

$$C_3=\frac{1}{p+i\mu}\left[-1+\sqrt{\frac{p+i\mu}{p-i\mu}}\right].$$

为确定变量 $\eta(T)$ 的分布，知道 $z(p,0)$ 就够了．当 $|\mu|<p$ 时

$$z(p,0)=\frac{1}{\sqrt{p^2+\mu^2}}=\frac{1}{p}\left(1+\frac{\mu^2}{p^2}\right)^{-1/2}$$

$$=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n!!}\left(\frac{\mu}{p}\right)^{2n}.$$

因为

$$\int_0^\infty t^n e^{-pt}dt=\frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^k\varphi d\varphi=\begin{cases}0, & \text{当 } k \text{ 是奇数时},\\ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi, & \text{当 } k=2n \text{ 时}.\end{cases}$$

所以，

$$z(p,0)=\int_0^\infty\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\mu^{2n}t^{2n}}{(2n)!}\right)e^{-pt}dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-pt}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^k\varphi\frac{(i\mu t)^k}{k!}d\varphi\right)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-pt}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{i\mu t\sin\varphi}d\varphi dt.$$

因此

$$\mathbf{E}\exp\left\{i\mu\frac{1}{t}\int_0^t\operatorname{sgn}w(s)ds\right\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{i\mu\sin\varphi}d\varphi$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\mu x}f(x)dx,$$

其中 $f(x)=0$ 当 $|x|>1$ 及

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ 当 } |x|<1. \tag{32}$$

我们得如下结果：变量 $\frac{1}{t}\int_0^t \operatorname{sgn} w(s)ds$ 有分布密度(32)。

随机变量

$$\tau_t=\int_0^t \frac{1+\operatorname{sgn} w(s)}{2}ds$$

有直观的意义。它等于在区间 $(0,t)$ 期间，过程 $w(s)$ 在正半轴上的穿越时间。利用密度(32)，可求变量 τ_t 的分布。事实上，

$$\mathbf{P}\{\tau_t<xt\}=\mathbf{P}\left\{\frac{1}{t}\int_0^t \operatorname{sgn} w(s)ds<2x-1\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\arcsin(2x-1)+\frac{\pi}{2}\right).$$

通常用稍为不同的形式记所得的公式。注意

$$\arcsin(2x-1)+\frac{\pi}{2}=\arccos(1-2x).$$

如果令 $\frac{1}{2}\arccos(1-2x)=z$ 那末

$$1-2x=\cos 2z, \quad x=\frac{1-\cos 2z}{2}=\sin^2 z,$$

$$z=\arcsin\sqrt{x}.$$

于是

$$\mathbf{P}(\tau_t<x)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{x}{t}}, \quad 0\leqslant x\leqslant t. \tag{33}$$

所得的结果称为反正弦定律。

§3. 随机变量组序列的极限定理与随机微分方程

设给出取值于 $\mathscr{R}^m$ 的随机向量组的序列

$$\xi_{n0}, \xi_{n1}, \cdots, \xi_{nm_n}, n = 1,2,\cdots. \tag{1}$$

假设增量 $\Delta\xi_{nk} = \xi_{nk+1} - \xi_{nk}$ 是小随机变量。概率论的经典问题之一是讨论在变量 $\Delta\xi_{nk}$ 的各种假设下当 $n \to \infty$ 时变量 ξ_{nm_n} 的可能的极限分布类。当 $\Delta\xi_{nk}, k = 0,1,\cdots,m_n - 1$，独立时，我们要详细地研究独立和问题。

在本段我们从随机过程理论的观点或更确切地，联系随机微分方程理论来考虑随机变量组的序列（1）的极限分布的一般问题。

我们将随机向量组的序列(1)与随机过程序列 $\xi_n(t)$ 相对应，这过程序列称为以组序列(1)相应或生成的过程。为此，还需给出实数序列

$0 = t_{n0} < t_{n1} < \cdots < t_{nm_n-1} < t_{nm_n} = T, n = 1, 2, \cdots$，和假定

$$\xi_n(t) = \xi_{nk}，如果\ t \in [t_{nk}, t_{nk+1}).$$

如果当 $n \to \infty$ 时 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m_n} \Delta t_{nk} \to 0$，且所有变量 $\{\Delta\xi_{nk}, k = 0,1,\cdots,m_n - 1\}$ 在某种有待今后明确的意义下接近于量 $\{\Delta\xi(t_{nk}), k = 0,1,\cdots,m_n - 1\}$，其中 $\xi(t), t \in [0,T]$ 是某一随机过程，$\Delta\xi(t_{mk}) = \xi(t_{nk+1}) - \xi(t_{nk})$，那末可以期望，变量 ξ_{nm_n} 的分布收敛于变量 $\xi(T)$ 的分布，并且对定义在 $\mathscr{D}^m[0, T]$ 上的连续泛函 $f[x(\cdot)]$，变量 $f[\xi_n(\cdot)]$ 的分布将接近于 $f[\xi(\cdot)]$ 的分布。

因此我们希望把所研究的问题包括在我们在第 I 卷第六章所研究的随机过程的极限定理的一般框架中。

按照卷 I 所得的结果，在研究随机过程的极限定理时我们可分为两个问题：1）研究随机过程的边沿分布的弱收敛条件和极限分布的特点，以及 2）建立在适当的泛函空间中对应于随机过程的测度序列的弱紧性准则。在泛函空间中弱紧测度的一般准则已在卷 I 第六章建立。在本节借助以前有的结果，我们推导出在所考虑的问题中更方便检验的测度弱紧性的某些充分条件。其次

我们研究按组的序列(1)所构造的或是随机方程的解过程的边沿分布弱收敛于随机微分方程的解的边沿分布。最后我们将提供一般定理应用于更特殊的模型和具体问题的例子。

在 $\mathscr{D}$ 中对应于随机变量组序列的测度的弱紧性 在本节我们约定将 $\mathscr{D}$ 了解为空间 $\mathscr{D}^m[0,T]$，而在 $\mathscr{D}$ 中的测度了解为在 $\mathscr{D}$ 中的柱集所生成的 σ- 代数上给出的测度。

设 $\xi_n(t)$, $n=1,2,\cdots$, $t\in[0,T]$ 是取值于 $\mathscr{R}^m$ 以概率为 1 样本函数属于 $\mathscr{D}$ 的随机过程的序列。过程 $\xi_n(t)$ 在 $\mathscr{D}$ 上生成的测度 q_n 是在空间 $\mathscr{D}$ 的柱集上由关系式

$$q_n(C_{t_1t_2\cdots t_r}(A^r))=\mathbf{P}\{(\xi_n(t_1),\cdots,\xi_n(t_r))\in A^r\}$$

所定义，我们将它称为在 $\mathscr{D}$ 中对应于过程 $\xi_n(t)$ 的测度，这里 A^r 是空间 $\mathscr{R}^m\times\mathscr{R}^m\times\cdots\times\mathscr{R}^m=\mathscr{R}^{mr}$ 中的 Borel 集合，而 $C_{t_1\cdots t_r}(A^r)=\{x(\cdot):x(\cdot)\in\mathscr{D},\ (x(t_1),\cdots,x(t_r))\in A^r\}$ 是在坐标 $(t_1,t_2,\cdots,t_r)$ 上以 A^r 为基的柱集，现时我们感兴趣的是测度 $q_n(\cdot)$ 的序列弱收敛于某个极限的条件。该问题的意义在卷 I(第六章)已说明。我们记得，例如，如果序列 $q_n(\cdot)$ 弱收敛于$q(\cdot)$，其中 $q(\cdot)$ 是 $\mathscr{D}$ 中相应于某过程 $\xi(t)$ 的测度，那末对任意有界 q-几乎处处连续(空间 $\mathscr{D}$ 的距离下)的泛函 $f[x(\cdot)]$，随机变量 $\zeta_n=f[\xi_n(\cdot)]$的分布弱收敛于随机变量 $\zeta=f[\xi(\cdot)]$ 的分布。

下面我们限于推导 $\mathscr{D}$ 中测度弱收敛的条件。当然，关于 $\mathscr{C}=\mathscr{C}^m[0,T]$ 中测度的弱收敛性可作为特殊情形得到。对应于随机过程 $\xi_n(\cdot)$ 的测度 $q_n(\cdot)$ 的序列的弱收敛性等价于测度的弱紧性和过程 $\xi_n(t)$ 的全体边沿分布的弱收敛性。由于这些原因，在本段将研究测度序列的弱紧性条件。

由关于没有第二类间断点的过程的基本极限定理(卷 I 第六章§5 定理 2)得知为使 $\mathscr{D}$ 中对应于随机过程 $\xi_n(t)$, $t\in[0,T]$ 的测度 $q_n(\cdot)$ 是弱紧的充分必要条件是

$$\lim_{\epsilon\to0}\varlimsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\Delta_c(\xi_n(\cdot))>\varepsilon\}=0,\tag{2}$$

其中

$$\Delta_c(x(\cdot))=\sup_{t-c\leqslant t'\leqslant t\leqslant t''\leqslant t+c}\{|x(t')-x(t)|\wedge|x(t)-x(t'')|\}$$

$$+\sup_{0\leqslant t\leqslant c}|x(t)-x(0)|+\sup_{T-c\leqslant t\leqslant T}|x(T)-x(t)|.$$

根据卷 I 第六章§5 定理 3,条件(2)成立，如果对某个 $\beta>0$ 和 $0\leqslant t_1<t_2<t_3\leqslant T$.

$$\mathbf{E}|\xi_n(t_2)-\xi_n(t_1)|^\beta|\xi_n(t_3)-\xi_n(t_2)|^\beta\leqslant H(t_3-t_1)^{1+\alpha},$$

其中 $\alpha>0$ 和常数H不依赖于 n. 我们需要更详细地对此结果作一些说明.

假定

$$\lim_{N\to\infty}\varlimsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_n(t)|>N\}=0. \tag{3}$$

设 $\tau_n=\inf\{t:\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_n(t)|>N\}$, $(\inf\phi=T)$, 且令 $\xi_n^N(t)=\xi_n(t)$ 当 $t<\tau_n$ 和 $\xi_n^N(t)=0$, 当 $t>\tau_n$. 那末

$$\mathbf{P}\{\Delta_c(\xi_n(\cdot))>\varepsilon\}\leqslant\mathbf{P}\{\tau_n<T\}+\mathbf{P}\{\Delta_c(\xi_n^N(\cdot))>\varepsilon\}.$$

因此下面的论断成立.

定理 1 如果样本函数属于 $\mathscr{D}$ 的随机过程序列满足条件(3)且对某个 $\beta>0$ 和任意 $N>0$

$$\mathbf{E}|\xi_n^N(t_2)-\xi_n^N(t_1)|^\beta|\xi_n^N(t_3)-\xi_n^N(t_2)|^\beta$$
$$\leqslant H_N(t_3-t_1)^{1+\alpha}, \tag{4}$$

其中 H_N 不依赖于 n. 那末在 $\mathscr{D}$ 中相应于随机过程 $\xi_n(\cdot)$ 的测度 $q_n(\cdot)$ 的序列为弱紧.

现转至按组的序列(1)构造出的过程 $\xi_n(t)$.将(1)对应于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_{nk}, k=0,1,\cdots,m_n\}, n=1,2,\cdots$, 其中 $\mathfrak{F}_{nk}$ 是随机向量 $\xi_{n0},\xi_{n1},\cdots,\xi_{nk}$ 所生成的 σ-代数，这时包含在一个组的变量 ξ_{nk} 自然在同一概率空间给出，但不同的组，一般来说，定义在不同的概率空间上.

假设变量 ξ_{nk} 有有限二阶距. 令

$$\mathbf{E}\{\Delta\xi_{nk}|\mathfrak{F}_{nk}\}=\alpha_{nk}\Delta t_{nk},$$

$$\mathbf{E}\{(\Delta\xi_{nk}-\alpha_{nk}\Delta t_{nk})(\Delta\xi_{nk}-\alpha_{nk}\Delta t_{nk})^*|\mathfrak{F}_{nk}\}=\beta_{nk}^2\Delta t_{nk}.$$

这里 Δt_{nk} 遵照如下条件任意地选取：$\Delta t_{nk}\to 0$，

$$\sum_{k=1}^{m_n-1}\Delta t_{nk}=T$$

（T固定且不依赖于 ω，当 $n\to\infty$ 时 $\max_k\Delta t_{nk}\to 0$）。当 Δt_{nk} 选定时，随机向量 α_{nk} 和矩阵 β^2_{nk} 唯一地由上述等式所确定。显然，矩阵 β^2_{nk} 是对称和非负定的。我们以 β_{nk} 表示矩阵 β^2_{nk} 的"非负定平方根"。它也是对称非负定矩阵。今后我们将认为矩阵 β^2_{nk} 是非退化的（以概率为 1），因此 β^{-1}_{nk} 存在。

将变量 $\Delta\xi_{nk}$ 表为

$$\Delta\xi_{nk}=\alpha_{nk}\Delta t_{nk}+\beta_{nk}\Delta\psi_{nk},$$

其中

$$\Delta\psi_{nk}=\beta^{-1}_{nk}(\Delta\xi_{nk}-\alpha_{nk}\Delta t_{nk})$$

和

$$\psi_{n0}=0,\psi_{nk}=\sum_{j=0}^{k-1}\Delta\psi_{nj}=\sum_{j=0}^{k-1}\beta^{-1}_{nj}(\Delta\xi_{nj}-\alpha_{nj}\Delta t_{nj}),$$
$$k=1,\cdots,m_n.$$

设 $$\varphi_{n0}=0,\varphi_{nk}=\sum_{j=0}^{k-1}\beta_{nj}\Delta\psi_{nj}=\sum_{j=0}^{k-1}(\Delta\xi_{nj}-\alpha_{nj}\Delta t_{nj}),$$
$$k=1,\cdots,m_n.$$

序列 $\{\psi_{nk},k=0,1,\cdots,m_n\}$，$\{\varphi_{nk},k=0,1,\cdots,m_n\}$ 是 $\mathfrak{F}_{nk}$-鞅。这时

$$\mathbf{E}\{\Delta\psi_{nk}\Delta\psi^*_{nk}|\mathfrak{F}_{nk}\}=\mathbf{I}\Delta t_{nk},$$
$$\mathbf{E}\{\Delta\varphi_{nk}\Delta\varphi^*_{nk}|\mathfrak{F}_{nk}\}=\beta^2_{nk}\Delta t_{nk}.$$

因为 α_{nk} 和 β_{nk} 是 $\mathfrak{F}_{nk}=\sigma\{\xi_{n0},\xi_{n1},\cdots,\xi_{nk}\}$- 可测，所以能找到这样的非随机 Borel 函数 $a_{nk}(x_0,x_1,\cdots,x_k)$，$b_{nk}(x_0,x_1,\cdots,x_k)$，$x_j\in\mathscr{R}^m$，$j=0,1,\cdots,k$，$k=1,\cdots,m_n$，使得

$\alpha_{nk}=a_{nk}(\xi_{n0},\xi_{n1},\cdots,\xi_{nk})$，$\beta_{nk}=b_{nk}(\xi_{n0},\xi_{n1},\cdots,\xi_{nk})$。这时函数 $a_{nk}(x_0,\cdots,x_k)$ 取值于 $\mathscr{R}^m$，而 $b_{nk}(x_0,\cdots,x_k)$ 是矩阵函数。

引理 1 假定函数 $a_{nk}(x_0,\cdots,x_k),b_{nk}(x_0,\cdots,x_k)$ 满足条件

$$|a_{nk}(x_0,\cdots,x_k)|+|b_{nk}(x_0,\cdots,x_k)| \leqslant C\left(1+\sup_{0\leqslant j\leqslant k}|x_j|\right), \tag{5}$$

其中常数 C 不依赖于 n,那末能找到这样的常数 C_1 和 C_2,也不依赖于 n,使得

$$\mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant j\leqslant k}|\xi_{nj}|^2|\mathfrak{F}_{n0}\}\leqslant C_1(1+|\xi_{n0}|^2), \tag{6}$$

$$\mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant j\leqslant r}|\xi_{nj}-\xi_{ns}|^2|\mathfrak{F}_{ns}\} \leqslant C_2(1+|\xi_{ns}|^2)(t_{nr}-t_{ns}). \tag{7}$$

证. 因为

$$\xi_{nk+1}=\xi_{n0}+\sum_{j=0}^{k}\alpha_{nj}\Delta t_{nj}+\sum_{j=0}^{k}\beta_{nj}\Delta\phi_{nj},$$

所以

$$\sup_{0\leqslant j\leqslant k+1}|\xi_{nj}|^2\leqslant 3|\xi_{n0}|^2+\sup_{0\leqslant j\leqslant k}\left|\sum_{r=0}^{j}\alpha_{nr}\Delta t_{nr}\right|^2 +\sup_{0\leqslant j\leqslant k}\left|\sum_{r=0}^{j}\beta_{nr}\Delta\phi_{nr}\right|^2]$$

$$\leqslant 3\left[|\xi_{n0}|^2+t_{nk}\sum_{r=0}^{k}|\alpha_{nr}|^2\Delta t_{nr} +\sup_{j\leqslant k}\left|\sum_{r=0}^{j}\beta_{nr}\Delta\phi_{nr}\right|^2\right].$$

令 $v_{nk}=\mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant j\leqslant k}|\xi_{nj}|^2|\mathfrak{F}_{n0}\}$. 由上述不等式得

$$v_{nk+1}\leqslant 3\left[|\xi_{n0}|^2+2TC^2\sum_{r=0}^{k}(1+v_{nr})\Delta t_{nr} +\mathbf{E}\left\{\sup_{j\leqslant k}\left|\sum_{r=0}^{j}\beta_{nr}\Delta\phi_{nr}\right|^2|\mathfrak{F}_{n0}\right\}\right].$$

顾及到和 $\sum_{r=0}^{j}\beta_{nr}\Delta\phi_{nr}$ 构成鞅,且利用 Doob 不等式得

$$\mathbf{E}\left\{\sup_{j\leqslant k}\left|\sum_{r=0}^{j}\beta_{nr}\Delta\phi_{nr}\right|^2\middle|\mathfrak{F}_{n0}\right\}\leqslant 4\mathbf{E}\left\{\left|\sum_{r=0}^{k}\beta_{nr}\Delta\phi_{nr}\right|^2\middle|\mathfrak{F}_{n0}\right\}$$

$$=4\mathbf{E}\left\{\sum_{r=0}^{k}|\beta_{nr}\Delta\phi_{nr}|^2|\mathfrak{F}_{n0}\right\}$$

$$=4\mathbf{E}\left\{\sum_{r=0}^{k}sp\beta_{nr}^2\Delta t_{nr}|\mathfrak{F}_{n0}\right\}.$$

因此，

$$v_{nk+1}\leqslant 3|\xi_{n0}|^2+C'\left(t_{nk}+\sum_{r=0}^{k}v_{nr}\Delta t_{nr}\right),$$

其中 C' 是仅依赖于 T 的某个常数。

引进分段常数函数 $v_n(t)$，设 $v_n(t)=v_{nk}$，当 $t\in[t_{nk},t_{nk+1})$。由后一不等式得，

$$v_n(t)\leqslant 3|\xi_{n0}|^2+C'\int_0^t(1+v_n(s))ds.$$

解这积分不等式(§1 引理 11)，得

$$v_n(t)\leqslant 3|\xi_{n0}|^2e^{C't}+(e^{C't}-1),$$

由此得式(6). 不等式(7)可类似地证明. 由等式

$$\xi_{nk+1}-\xi_{ns}=\sum_{j=s}^{k}\alpha_{nj}\Delta t_{nj}+\sum_{j=s}^{k}\beta_{nj}\Delta\phi_{nj}$$

得

$$\sup_{s\leqslant j\leqslant k+1}|\xi_{nj}-\xi_{ns}|^2\leqslant 2\left[\sup_{s\leqslant j\leqslant k}\left|\sum_{r=s}^{j}\alpha_{nr}\Delta t_{nr}\right|^2\right.$$

$$\left.+\sup_{s\leqslant j\leqslant k}\left|\sum_{r=s}^{j}\beta_{nr}\Delta\phi_{nr}\right|^2\right].$$

设

$$z_{nr}=\mathbf{E}\{\sup_{s\leqslant j\leqslant r}|\xi_{nj}-\xi_{ns}|^2|\mathfrak{F}_{ns}\}.$$

由上述关系式易得，

$$z_{nr+1}\leqslant 4TC^2\sum_{j=s}^{r}\mathbf{E}\{1+\sup_{s\leqslant k\leqslant j}|\xi_{nk}|^2|\mathfrak{F}_{ns}\}\Delta t_{nj}$$

$$+ 8\mathbf{E}\left\{\sum_{j=s}^{r} |\beta_{nj}\Delta\phi_{nj}|^2 | \mathfrak{F}_{ns}\right\},$$

由此对变量 z_{nr} 得不等式

$$z_{nr+1} \leqslant C'' \sum_{k=s}^{r} (1 + v'_{nk}) \Delta t_{nk},$$

其中常数 C'' 仅依赖于 C，而 $v'_{nk} = \mathbf{E}\{\sup_{s \leqslant j \leqslant k} |\xi_{nj}|^2 | \mathfrak{F}_{ns}\}$。变量 v'_{nr} 可利用不等式(6)估计，据此，$v_{nk} \leqslant C_1(1 + |\xi_{ns}|^2)$。这时由所得的估计得引理的第二个结论。

定理 2 如果组的序列(1)满足条件

$$|a_{nk}(x_0, x_1, \cdots, x_k)| + |b_{nk}(x_0, x_1, \cdots, x_k)|$$
$$\leqslant C(1 + \sup_{0 \leqslant j \leqslant k} |x_j|),$$
$$n = 1, 2, \cdots, k = 0, 1, \cdots, m_n, \tag{8}$$

其中 C 是不依赖于 n 的常数，又 $\sup_n \mathbf{E}|\xi_{n0}|^2 < \infty$，那末在 $\mathscr{D}$ 中测度 $q_n(\cdot)$ 的序列是弱紧的。

作为定理 1 和引理 1 的推论得定理 2。事实上，首先由引理 1 及 Чебышев 不等式得

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\xi_n(t)| > N\} \leqslant \frac{C\mathbf{E}(1 + |\xi_{n0}|)^2}{N^2},$$

因此在现时情形定理 1 的条件(3)成立。其次当 $t \in [t_{nk}, t_{nk+1})$ 时设 $\mathfrak{F}_n(t) = \mathfrak{F}_{nk}$。那末

$$E\{|\xi_n^N(t_3) - \xi_n^N(t_2)|^2 | \mathfrak{F}_n(t_2)\}$$
$$\leqslant \chi_N(t_2)\mathbf{E}\{|\xi_n(t_3) - \xi_n(t_2)|^2 | \mathfrak{F}_n(t_2)\},$$

其中 $\chi_N(t)$ 是事件 $\{\tau_n > t\}$ 的示性函数。再利用引理 1，得

$$\mathbf{E}\{|\xi_n^N(t_3) - \xi_n^N(t_2)|^2 | \mathfrak{F}_n(t_2)\}$$
$$\leqslant \chi_N(t_2) C_2 (1 + |\xi_n^N(t_2)|^2)(t_3 - t_2),$$

最后，我们有

$$\mathbf{E}|\xi_n^N(t_3) - \xi_n^N(t_2)|^2 |\xi_n^N(t_2) - \xi_n^N(t_1)|^2$$
$$\leqslant \mathbf{E}(\mathbf{E}\{|\xi_n^N(t_3) - \xi_n^N(t_2)|^2 | \mathfrak{F}_n(t_2)\}$$
$$\times |\xi_n^N(t_2) - \xi_n^N(t_1)|^2)$$

$$\leqslant C_2^2(1+N^2)\mathbf{E}(1+|\xi_{n0}|^2)(t_3-t_1)^2.$$

因此定理 1 的条件成立，从而得证定理 2。

我们还指出定理 1 对于平方可积鞅的组序列 (1) 的如下应用。

设 $\mathbf{E}\{\Delta\xi_{nk}|\mathfrak{F}_{nk}\}=0$。令

$$\mathbf{E}\{|\Delta\xi_{nk}|^2|\mathfrak{F}_{nk}\}=\gamma_{nk}\Delta t_{nk},\ k=0,\cdots,m_n-1, \tag{9}$$

和设 $\rho_n=\inf\{r:\ \gamma_{nk}\geqslant N\}(\inf\varnothing=m_n)$。那末 ρ_n 是 $\{\mathfrak{F}_{nr},\ r=0,\cdots,m_n\}$ 上的随机时间。设 $\xi_n^N(t)=\xi_n(t\wedge t_n\rho_n)$。过程 $\xi_n^N(t)$ 也是鞅。这时

$$\mathbf{P}\{\Delta_C(\xi_n(\cdot))>\varepsilon\}\leqslant\mathbf{P}\{\rho_n<m_n\}$$
$$+\mathbf{P}\{\Delta_C(\xi_n^N(\cdot))>\varepsilon\}.$$

其次，如果量 t_2 和 t_1 有 $t_2=t_{nj}$，$t_3=t_{nr}$，那末

$$\mathbf{E}\{|\xi_n^N(t_3)-\xi_n^N(t_2)|^2\mathfrak{F}(t_2)\}\leqslant\sum_{k=j\wedge\rho_n}^{n\wedge\rho_n}\gamma_{nk}\Delta t_{nk}$$
$$\leqslant N(t_3-t_2).$$

因此 $(t_1<t_2<t_3)$

$$\mathbf{E}|\xi_n^N(t_3)-\xi_n^N(t_2)|^2|\xi_n^N(t_2)-\xi_n^N(t_1)|^2\leqslant N^2(t_3-t_1).$$

非实质性的补充假设 t_1,t_2 和 t_3 分别有形式 t_{ni},t_{nj} 和 t_{nr}，我们还得出如下定理：

定理 3 如果在组序列(1)中每个组是鞅，且

$$\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant r<m_n-1}\gamma_{nr}>N\}=0,$$

其中变量 γ_{nr} 由式(9)所定义，那末在 $\mathscr{D}$ 中对应于过程 $\xi_n(\cdot)$ 的测度序列是弱紧的。

推论 在 $\mathscr{D}$ 中对应于满足 $\mathbf{E}\{\Delta\psi_{nk}|\mathfrak{F}_{nk}\}=0$，$\mathbf{E}\{\Delta\psi_{nk}\cdot\Delta\psi_{nk}^*|\mathfrak{F}_{nk}\}=\mathbf{I}\Delta t_{nk}$ 的过程 $\psi_n(t)$ 的测度序列是弱紧的。

定理 2 容易推广至不具有有限二限矩的随机向量组的序列。为此，我们引进 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_{nk},k=1,\cdots,m_n\}$ 上的随机时间 j_n，设 $j_n=\min\{k:|\xi_{nk}|>N\}$ 和 $j_n=m_n+1$，如集合 $\{k:|\xi_{nk}|>N\}$ 是空集。对每个 $N>0$ 考虑组序列 $\{\xi_{nk}^N,\ k=0,$

$\cdots, m_n\}$, $n=1,2$, 其中 $\xi^N_{nk}=\xi_{nk}$ 当 $k<j_n$ 及 $\xi^N_{nk}=\xi_{nj_n-1}$ 当 $k\geqslant j_n$, 向量 ξ^N_{nk} 就有任意阶矩, 设 $a^N_{nk}(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ 及 $b^N_{nk}(x_0,x_1,\cdots,x_k)$ 由序列 $\{\xi^N_{nk}, k=0,1,\cdots,m_n\}$ 构造的方式如同 $a_{nk}(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ 及 $b_{nk}(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ 由 $\{\xi_{nk}, k=0,1,\cdots,m_n\}$ 构造出的一样。

定理 4 如果

$$\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{P}\{\max_{0\leqslant k\leqslant m_n}|\xi_{nk}|>N\}=0$$

和

$$\begin{aligned}|a^N_{nk}(x_0,x_1,\cdots,x_k)|+|b^N_{nk}(x_0,x_1,\cdots,x_k)|\\ \leqslant C^N(1+\max_{0\leqslant j\leqslant k}|x_j|),\end{aligned}$$

其中 C^N 是可能依赖于N但不依赖于 n 和 k 的常数, 那末对应于过程 $\xi_n(t)$ 的测度 $q_n(\cdot)$ 的序列在 $\mathscr{D}$ 中是弱紧的.

类似于定理 2 的结论对对应于随机微分方程的解的测度也成立. 考虑依赖于参数 α 的方程族

$$\left.\begin{aligned}d\xi_\alpha=A_\alpha(\theta_t\xi_\alpha, dt), &\ t\geqslant 0,\\ \xi_\alpha(t)=\varphi(t), &\ t\leqslant 0.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

定理 5 设 $A_\alpha(\varphi, t)\in S(\lambda_0^\alpha, \lambda_N^\alpha)$ (或 $A_\alpha(\varphi,t)\in S^C(\lambda_0^\alpha, \lambda_N^\alpha)$) 和

$$\lim_{N\to\infty}\sup_\alpha \mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\lambda_0^\alpha(t)|>N\}=0.$$

那末在 $\mathscr{D}[0,T]$ 中对应于方程(10)的解的测度族 $q_\alpha(\cdot)$ 是弱紧的.

证明类似于上定理的证明, 它借助于定理 1 和代替引理 1 而利用§2 定理7(和定理 4)就可以得证.

收敛于 Wiener 过程的条件 转来研究按随机向量组的序列(1)构造出的随机过程序列 $\{\xi_n(t), t\in[0,T]\}$, $n=1,2,\cdots$收敛于 Wiener 过程的条件.

对任意 $\varepsilon>0$, 令

$$\mathbf{P}\{|\Delta\xi_{nk}|\geqslant\varepsilon|\mathfrak{F}_{nk}\}=\rho'_{nk}\Delta t_{nk},\tag{11}$$

$$\mathbf{E}\{\chi_{nk}\Delta\xi^*_{nk}|\mathfrak{F}_{nk}\}=\rho''_{nk}\Delta t_{nk},\tag{12}$$

$$\mathbf{E}\{\chi_{nk}\Delta\xi_{nk}\Delta\xi_{nk}^{*}\,|\,\mathfrak{F}_{nk}\} = (I + \rho_{nk}''')\Delta t_{nk}, \tag{13}$$

其中

$\Delta t_{nk} = t_{nk+1} - t_{nk}$， $0 = t_{n0} < t_{n1} < \cdots < t_{nm0} = T$， 数 T 和 t_{nk} 用任意方式选取，但要求

$$\max_{0\leqslant k\leqslant m_n-1} \Delta t_{nk} \to 0 \text{ 当 } n\to\infty$$

和随后的假设成立，ρ_{nk}' 是纯量，ρ_{nk}'' 是向量，ρ_{nk}''' 是随机变量矩阵，它们分别由相应的等式所确定. 最后，如果 $|\Delta\xi_{nk}| < \varepsilon$，$\chi_{nk} = \chi_\varepsilon(\Delta\xi_{nk}) = 1$，和如果 $|\Delta\xi_{nk}| \geqslant \varepsilon$，$\chi_{nk} = 0$.

对 m-维 Wiener 过程来说条件概率和条件期望 (11)—(13) 与无条件时相同并有阶

$$\mathbf{P}\{|\Delta w| \geqslant \varepsilon\} = 0\left[\left(\frac{\varepsilon^2}{\Delta t}\right)^{\frac{m-2}{2}} e^{-\frac{\varepsilon^t}{2\Delta t}}\right],$$

$$|\mathbf{E}\{\chi_\varepsilon(\Delta w)\Delta w\}| = 0\left(\left(\frac{\varepsilon^2}{\Delta t}\right)^{\frac{m-1}{2}} e^{-\frac{\varepsilon^t}{2\Delta t}}\right).$$

$$\mathbf{E}\{\chi_\varepsilon(\Delta w)|\Delta w|^2\} = I\Delta t + 0\left(\left(\frac{\varepsilon^2}{\Delta t}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{\varepsilon^t}{2\Delta t}}\right).$$

可以预料，对任意固定 ε，如果 ρ_{nk}'，ρ_{nk}''，ρ_{nk}'''“足够”小，那末当 $n\to\infty$ 时过程 $\xi_n(t) - \xi_n(0)$ 的边沿分布将弱收敛于 Wiener 过程的边沿分布.

首先建立变量 $\xi_n(T) - \xi_n(0) = \xi_{nm_n} - \xi_{n0}$ 的分布收敛于 $w(T)$ 的分布的条件. 为此考虑条件特征函数之差

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \mathbf{E}\{\exp\{i(\xi_n(T) - \xi_n(0), z)\}\,|\,\mathfrak{F}_{n0}\} \\ &\quad - \mathbf{E}\{\exp\{i(w(T), z)\}\,|\,\mathfrak{F}_0\} \\ &= \mathbf{E}\left\{\exp\{i(\xi_n(T) - \xi_n(0), z\}\right. \\ &\quad \left. - \exp\left\{-\frac{|z|^2 T}{2}\right\}\right|\, \mathfrak{F}_{n0}\right\}.\end{aligned}$$

令

$$\chi^{n0} = 1,\ \chi^{nk} = \prod_{j=0}^{k-1} \chi_{nj}.$$

将 σ_n 表为

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{m_n-1} \mathbf{E}\{\sigma_{nk} | \mathfrak{F}_{n0}\} + \mathbf{E}\{(1 - \chi^{nm_n})\exp\{i(\xi_n(T) - \xi_n(0), z)\} | \mathfrak{F}_{n0}\},$$

其中

$$\begin{aligned}\sigma_{nk} &= \chi^{nk+1}\exp\{i(\xi_n(t_{nk+1}) - \xi_n(0), z)\} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{|z|^2(T - t_{nk+1})}{2}\right\} \\ &\quad - \chi^{nk}\exp\{i(\xi_n(t_{nk}) - \xi_n(0), z)\} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{|z|^2(T - t_{nk})}{2}\right\} \\ &= \chi^{nk}\exp\{i(\xi_n(t_{nk}) - \xi_n(0), z)\} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{|z|^2(T - t_{nk+1})}{2}\right\}\tilde{\sigma}_{nk},\end{aligned}$$

$$\tilde{\sigma}_{nk} = \chi_{nk}\exp\{i(\Delta\xi_{nk}, z)\} - \exp\left\{-\frac{|z|^2\Delta t_{nk}}{2}\right\}.$$

我们来估计 $\gamma_{nk} = \mathbf{E}\{\tilde{\sigma}_{nk} | \mathfrak{F}_{nk}\}$. 利用 Taylor 公式将 γ_{nk} 表为

$$\gamma_{nk} = \delta_{nk}^{(1)} + \delta_{nk}^{(2)} + \delta_{nk}^{(3)} + \delta_{nk}^{(4)} + \delta_{nk}^{(5)},$$

其中

$$\delta_{nk}^{(1)} = \mathbf{E}\{\chi_{nk} | \mathfrak{F}_{nk}\} - 1,$$

$$\delta_{nk}^{(2)} = i\mathbf{E}\{\chi_{nk}(\Delta\xi_{nk}, z) | \mathfrak{F}_{nk}\},$$

$$\delta_{nk}^{(3)} = \left(\frac{|z|^2}{2}\Delta t_{nk} - \frac{1}{2}\mathbf{E}\left\{\chi_{nk}(\Delta\xi_{nk}, z)^2 | \mathfrak{F}_{nk}\right\}\right),$$

$$\delta_{nk}^{(4)} = \frac{|z|^2\Delta t_{nk}}{2}\left(\exp\left\{-\frac{|z|^2\Delta t_{nk}}{2}\right\} - 1\right),$$

$$\delta_{nk}^{(5)} = \frac{1}{2}\mathbf{E}\{\chi_{nk}(\Delta\xi_{nk}, z)^2(\exp\{i\theta(\Delta\xi_{nk}, z)\} - 1) | \mathfrak{F}_{nk}\}.$$

显然,

$$|\delta_{nk}^{(1)}| = \rho'_{nk}\Delta t_{nk}, \qquad |\delta_{nk}^{(2)}| \leqslant |z||\rho''_{nk}|\Delta t_{nk},$$

$$|\delta_{nk}^{(3)}| \leqslant \frac{1}{2}|z|^2|\rho''_{nk}|\Delta t_{nk}, |\delta_{nk}^{(4)}| \leqslant |\Delta t_{nk}|^2|z|^2,$$

$$|\delta_{nk}^{(5)}| \leqslant \frac{|z|^3}{2}|\mathbf{I} + \rho'''_{nk}|\varepsilon\Delta t_{nk}.$$

此处将 $|A|$ 理解为 A 的算子范数，A 是矩阵. 可以看出

$$|\mathbf{E}\{(1 - \chi^{nm_n})\exp\{i(\xi_n(T) - \xi_n(0), z)\}|\mathfrak{F}_{n0}\}|$$

$$\leqslant \mathbf{P}\{\chi^{nm_n} = 0|\mathfrak{F}_{n0}\} \leqslant \mathbf{E}\sum_{k=1}^{m_n} P(|\Delta\xi_{nk}|$$

$$\geqslant \varepsilon|\mathfrak{F}_{nk})|\mathfrak{F}_{n0}\} = \mathbf{E}\left\{\sum_{k=1}^{m_n} \rho'_{nk}\Delta t_{nk}|\mathfrak{F}_{n0}\right\}.$$

因此，对任意 $\varepsilon > 0$ 当 $\max_k \Delta t_{nk}$ 足够小时

$$\sigma_n \leqslant C(z)\left[\mathbf{E}\left\{\sum_{k=1}^{m_n}(\rho'_{nk} + |\rho''_{nk}|\right.\right.$$

$$\left.\left. + |\rho'''_{nk}|)\Delta t_{nk}|\mathfrak{F}_{n0}\right\} + \varepsilon T\right]. \tag{14}$$

我们得到如下结果:

定理 6 如果组的序列(1)满足

$$\mathbf{E}\left\{\sum_{k=1}^{m_n}(\rho'_{nk} + |\rho''_{nk}| + |\rho'''_{nk}|\Delta t_{nk})\right\} \to 0 \tag{15}$$

和 $\max_k \Delta t_{mk} \to 0$，其中 ρ'_{nk}, ρ''_{nk} 和 ρ'''_{nk} 由等式(11)—(13)所定义，那末变量 $\xi_{nm_n} - \xi_{n0}$ 的条件分布收敛于均值为 **0** 及方差矩阵为 TI 的 Gauss 分布.

注1. 如果在定理 6 的条件中进行如下改变：认为 $t_{nm_n} = T_n$

$$\mathbf{E}\{\chi_{nk}\Delta\xi_{nk}\Delta\xi^*_{nk}|\mathfrak{F}_{nk}\} = (B + \rho'''_{nk})\Delta t_{nk}.$$

其中 B 是常数矩阵，和当 $n \to \infty$ 时 $T_n \to T$，而定理的其余条件仍假定成立，那末差 $\xi_{nm_n} - \xi_{n0}$ 的分布收敛于均值为 **0** 及方差矩阵为 TB 的 Gauss 分布.

注2. 如果定理 6 的假设成立和变量 ξ_{n0} 的分布弱收敛于$\mathscr{B}^m$

上的测度 $F(\cdot)$，那末变量 ξ_{nm_n} 的分布弱收敛于密度是

$$\int_{\mathscr{R}^m} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2T}} F(dy)$$

的分布。

容易将定理 6 推广。

定理 7 设定理 6 的条件成立和 $t_{nk_j} \to t_j$ 当 $n \to \infty, j = 1, 2, \cdots, r, 0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_r < T$。那末随机向量

$$\xi_{nk_1} - \xi_{n0}, \xi_{nk_2} - \xi_{nk_1}, \cdots, \xi_{nk_r} - \xi_{nk_{r-1}},$$

的联合分布弱收敛于序

$$w(t_1) - w(0), w(t_2) - w(t_1), \cdots, w(t_r) - w(t_{r-1})$$

的联合分布，其中 $w(t)$ 是 m- 维 Wiener 过程：

证. 为证明起见我们考虑差

$$\sigma_n = \mathbf{E}\left\{\exp\left\{i \sum_{j=0}^{r-1} (\xi_n(t_{nk_{j+1}}) - \xi_n(t_{nk}), z_j)\right\}\right.$$

$$\left. - \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{r-1} |z_j|^2 (t_{j+1} - t_j)\right\} \Big| \mathfrak{F}_{n0}\right\},$$

其中 $z_j, j = 0, \cdots, r$ 是 $\mathscr{R}^m$ 中任意向量，并将 σ_n 用如下形式表示：

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{k-1} \mathbf{E}\left\{\exp\left\{i \sum_{j=0}^{k} (\xi_n(t_{nk_{j+1}}) - \xi_n(t_{nk_j}), z_j)\right.\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\sum_{j=k+1}^{r-1} |z_j|^2 (t_{j+1} - t_j)\right\} - \exp\left\{i \sum_{j=0}^{k-1} (\xi_n(t_{nk_{j+1}})\right.$$

$$\left.\left. - \xi_n(t_{nk_j}), z) - \frac{1}{2}\sum_{j=k}^{r-1} |z_j|^2 (t_{j+1} - t_j)\right\} \Big| \mathfrak{F}_{n0}\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} \mathbf{E}\{\mathbf{E}(\sigma_{nk} | \mathfrak{F}_{nk}) | \mathfrak{F}_{n0}\}.$$

至于变量 $\mathbf{E}(\sigma_{nk} | \mathfrak{F}_{nk})$，可以利用不等式 (14) (用明显的变换)估计出。定理得证。

推论 如果序列 $\{\xi_{nk}, \mathfrak{F}_{nk}, k = 1, \cdots, m_n\}$ 是有有限二阶

矩的鞅，而且

$$\mathbf{E}\{\Delta\xi_{nk}\Delta\xi_{nk}^{*}|\mathfrak{F}_{nk}\} = I\Delta t_{nk} \tag{16}$$

和

$$\mathbf{E}\sum_{k=1}^{m_n-1}(1-\chi_{nk})|\Delta\xi_{nk}|^2\to 0,\ 当\ n\to\infty, \tag{17}$$

那末对应于过程 $\xi_n(t)-\xi_n(0)$ 在 $\mathscr{D}$ 中的测度 $q_n(\cdot)$ 的序列弱收敛于 Wiener 测度.

条件 (17) 是独立变量和的中心极限定理的古典 Linderberg 条件. 利用 Чебышев 不等式，容易验证由 (17) 得 (15)（此时 $\rho_{nk}''' = 0$）.

另一方面，定理 3 的推论适用于所考虑的情形，由于这一推论，由组序列 $\{\xi_{nk},\ k=1,\cdots,m_n\},\ n=1,2,\cdots$ 所构造的过程 $\xi_n(t)$ 所对应的测度族是弱紧的.

推广上述定理是有趣的，假定时刻 t_{nk} 的选取可以是随机的. 此时首先应当要求量 $\Delta t_{nk}=t_{nk+1}-t_{nk}$ 的选取不可能预料到"将来"，即是 Δt_{nk} 是 $\mathfrak{F}_{nk}$- 可测. 在现时导出的某些补充假设下证明定理 6 时用到的计算和估计不用作很大的改变.

这样我们得到如下命题.

定理 8 假设

1) 时刻 Δt_{nk} 是 $\mathfrak{F}_{nk}$- 可测随机变量, $k=1,2,\cdots,m_n-1$;

2) $\mathbf{E}|t_{nm_n}-T|\to 0$ 当 $n\to\infty$，其中 T 是非随机的;

3) 条件(16)和(17)成立.

那末向量 $\xi_{nm_n}-\xi_{n0}$ 的分布弱收敛于 $w(T)$ 的分布，其中 $w(t)$ 是 m-维 Wiener 过程. 如果这时 $t_{nm_n}=T$，即是非随机的，那末当依概率 $t_{nk_j}\to t_j,\ j=1,2,\cdots,r$，其中 t_j 是非随机的，变量

$$\xi_n(t_{nk_1})-\xi_n(t_{n0}),\cdots,\xi_n(t_{nk_r})-\xi_n(t_{nk_{r-1}})$$

的联合分布弱收敛于

$$w(t_1)-w(0),\cdots,w(t_r)-w(t_{r-1})$$

的分布，并且在 $\mathscr{D}$ 中过程 $\xi_n(t)$ 对应的测度弱收敛于 Wiener 测度。

证. 为证明此论断我们转向定理 6 并观察在它的证明中应当进行怎样的改变，使它能转换为现时所考虑的情形。因为一般来说，现在 $t_{nm_n}\neq T$，所以在 σ_N 的表达式中出现的补充被加项

$$\mathbf{E}\{\chi^{nm_n}\exp\{i(\xi_n(t_{nm_n})-\xi_n(0),z)\}\left(\exp\left\{-\frac{|z|^2}{2}(T-t_{nm_n})\right\}-1\right)|\mathfrak{F}_{n0}\right\}$$

依概率趋于 0。

与证明定理 6 比较，和 $\sum_{k=1}^{m}\delta_{nk}^{(4)}$ 的估计需要作某些改变，现时它的估计可利用不等式

$$\mathbf{E}\left\{\sum_{k=1}^{m_n}\delta_{nk}^{(4)}|\mathfrak{F}_{n0}\right\}\leqslant\frac{|z|^4}{4}\varepsilon\mathbf{E}\{t_{nm_n}|\mathfrak{F}_{n0}\}$$

$$+|z|^2\mathbf{E}\left\{\sum_{k=1}^{m_n}\Delta t_{nk}(1-\chi_\varepsilon(\Delta t_{nk}))|\mathfrak{F}_{n0}\right\}.$$

因为函数 $|t|(1-\chi_\varepsilon(|t|))$ 下凸且 $\Delta t_{nk}=\frac{1}{m}\{|\Delta\xi_{nk}|^2|\mathfrak{F}_{nk}\}$，所以

$$\Delta t_{nk}(1-\chi_\varepsilon(\Delta t_{nk}))\leqslant\mathbf{E}\frac{|\Delta\xi_{nk}|^2}{m}\left(1-\chi_\varepsilon\left(\frac{|\Delta\xi_{nk}|^2}{m}\right)\right).$$

因此由条件(17)得，对任意 $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\sum_{k=1}^{m_n}\Delta t_{nk}(1-\chi_2(\Delta t_{nk}))=0.$$

顾及到定理的条件 1)，不难相信，在证明定理 6 时所用到的其余的变换和不等式在现时所考虑的情形仍然有效. 定理得证。

设 $\{\xi_n,\mathfrak{F}_n,n=0,1,\cdots\}$ 是有有限二阶矩的鞅。令

$$\gamma_n^2=\mathbf{E}\{(\xi_n-\xi_{n-1})^2|\mathfrak{F}_{n-1}\}$$

并假定存在 $\mathfrak{F}_0$-可测函数 $\varphi(n)$，使得在 L_1 收敛意义下

$$\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{k=1}^{n}\gamma_n^2\to 1. \tag{18}$$

令

$$\xi_{nk}=\frac{1}{\sqrt{\varphi(n)}}\xi_k,\quad k=0,1,\cdots,n,\quad \Delta t_{nk}=\frac{\gamma_{k+1}^2}{\varphi(n)}.$$

那末 $t_{nk}=\Delta t_{n0}+\cdots+\Delta t_{nk-1}$ 是 $\mathfrak{F}_{k-1}$-可测，且

$$\mathbf{E}\{\xi_{nk+1}-\xi_{nk}|\mathfrak{F}_k\}=0,$$

$$\mathbf{E}\{(\xi_{nk+1}-\xi_k)^2|\mathfrak{F}_k\}=\frac{\gamma_{k+1}}{\varphi(n)}=\Delta t_{nk}.$$

因此可以应用定理 8。我们得如下命题：

定理 9 如果对鞅 $\{\xi_n,\mathfrak{F}_n,n=1,2,\cdots\}$，条件 (18) (在 L_1 收敛意义下)成立，且对任意 $\varepsilon>0$，以概率为 1

$$\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{k=1}^{n}\int_{\{(\xi_k-\xi_{k-1})^2>\varepsilon^2\varphi(n)\}}(\xi_k-\xi_{k-1})^2 ap\to 0,$$

那末变量 $\frac{1}{\sqrt{\varphi(n)}}(\xi_n-\xi_0)$ 的条件分布渐近于正态(0.1)。

注. 在定理 9 中所考虑的序列 $\xi_{n0},\cdots,\xi_{nk}$ 所构造出的随机过程 $\xi_n(t)$ 中断于随机时间 t_{nn}。由于以概率为 1 有 $\varphi(n)\to\infty$，我们可以利用变量 ξ_{nk}，当 $k>n$ 时，开拓过程 $\xi_n(t)$ 使得在固定的时间区间上，例如[0,1]上，有定义。那末由定理 8 得知在 $\mathscr{D}[0,1]$ 中过程 $\xi_n(t)$ 对应的测度序列弱收敛于 Wiener 测度。

收敛于任意独立增量过程的条件 首先记得如果 ζ_n 是随机向量族，当 $h\to 0$ 时 $\zeta_h\to 0$，且极限 $\frac{1}{\Delta(h)}\mathbf{E}(e^{i(\zeta_h,z)}-1)$ 存在，那末有(卷 I 第三章)：

$$\lim_{h\to\infty}\frac{1}{\Delta(h)}\mathbf{E}(e^{i(\zeta_h,z)}-1)=i(a,z)-\frac{1}{2}(bz,z)$$
$$+\int_{\mathscr{R}^m}\left(e^{i(z,u)}-1-\frac{i(u,z)}{1+|z|^2}\right)\frac{1+|u|^2}{|u|^2}\Pi(du),$$

其中 $\Pi(\cdot)$ 是在点 0 连续的某一有限测度. 参数 $\Delta(h)$ 可视为对应于随机向量 ζ_h 的正常的局部时间.

与此相应我们假设每个向量 $\Delta\xi_{nk} = \xi_{nk+1} - \xi_{nk}$ 可以和正的非随机变量 Δt_{nk} 相比较,

$$\frac{1}{\Delta t_{nk}} \mathbf{E}\{e^{i(\Delta\xi_{nk},z)} - 1 | \mathfrak{F}_{nk}\} = L(t_{nk},z) + \rho_{nk},$$

其中

$$L(t,z) = i(a(t),z) - \frac{1}{2}(b(t)z,z)$$

$$+ \int_{\mathscr{R}^m}\left(e^{i(z,u)} - 1 - \frac{i(u,z)}{1+|z|^2}\right)\frac{1+|u|^2}{|u|^2}\Pi(t,du),$$

$t_{nk} = \Delta t_{n0} + \cdots + \Delta t_{nk}$, $a(t)$, $b(t)$, $\Pi(t,A)$ 是非随机的, $a(t)$ 是向量函数, $b(t)$ 是非负定矩阵, $\Pi(t, A)$ 是 $\mathscr{B}^m$ 上的有限测度 $(\Pi(t,\{0\}) = 0)$.

此外, 假设 $t_{nm_n} = T$, 当 $n \to \infty$ 时 $\max\limits_k \Delta t_{nk} \to 0$ 和函数 $L(t,z)$ 在区间 $[0,T]$ 上 Riemann 可积.

定理10 如果上述假设成立和当 $n \to \infty$

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{m_n-1} |\rho_{nk}|\Delta t_{nk}\right) \to 0, \tag{19}$$

那末当 $n \to \infty$ 时向量 $\xi_{nm_n} - \xi_{n0}$ 的分布弱收敛于特征函数为

$$J(z) = \exp\left\{\int_0^T L(t,z)dt\right\}$$

的分布.

证. 该定理的证明类似于定理 6 的证明. 引入量

$$\sigma_n = \mathbf{E}\left\{\exp\{i(\xi_{nm_n} - \xi_{n0},z)\} - \exp\left\{\int_0^T L(t,z)dt\right\} | \mathfrak{F}_{n0}\right\}$$

和表为

$$\sigma_n = \mathbf{E}\left\{\sum_{k=1}^{m_n-1} \exp\{i(\xi_{nk} - \xi_{n0},z)\}\exp\left\{\int_{t_{nk+1}}^T L(t,z)dt\right\}\right.$$

$$\times \mathbf{E}\{\tilde{\sigma}_{nk} | \mathfrak{F}_{nk}\} | \mathfrak{F}_{n0}\Big\},$$

其中

$$\tilde{\sigma}_{nk} = \exp\{i(\Delta\xi_{nk}, z)\} - \exp\left\{\int_{t_{nk}}^{t_{nk+1}} L(t, z)dt\right\}.$$

注意到

$$\Big| \mathbf{E}\{\tilde{\sigma}_{nk} | \mathfrak{F}_{nk}\}\Big| \leqslant |\rho_{nk}|\Delta t_{nk} + \Big|\int_{t_{nk}}^{t_{nk+1}} [L(t,z) - L(t_{nk}, z)]dt + \int_{t_{nk}}^{t_{nk+1}} L(t,z)dt\Big(\exp\Big\{\theta \int_{t_{nk}}^{t_{nk+1}} L(t,z)dt\Big\} - 1\Big)\Big|.$$

顾及到 $\exp\left\{\int_0^t L(t,z)dt\right\}$ 是某个分布的特征函数，我们得到 σ_n 的如下估计:

$$\sigma_n \leqslant \mathbf{E}\sum_{k=1}^{m_n-1} |\rho_{nk}|\Delta t_{nk} + \sum_{k=1}^{m_n-1} (\delta_{nk}\Delta t_{nk} + C(z)\Delta t_{nk}^2),$$

其中 δ_{nk} 是函数 $L(t,z)$ 在区间 $[t_{nk}, t_{nk+1}]$ 上的振幅，$C(z)$ 是仅依赖于 T 和 $\sup_c |L(t, z)|$ 的常数，所得的不等式证明了定理。

正如在收敛于 Wiener 过程那样，由已证明的定理易得如下结果。

定理 11 如果定理 10 的条件成立，且 $t_{nk_j} \to t_j (j = 1, \cdots, r)$，那末差

$$\xi_{nk_1} - \xi_{n0},\ \xi_{nk_2} - \xi_{nk_1}, \cdots, \xi_{nk_r} - \xi_{nk_{r-1}}$$

的联合分布弱收敛于向量

$$\xi(t_1) - \xi(0),\ \xi(t_2) - \xi(t_1), \cdots, \xi(t_r) - \xi(t_{r-1})$$

的联合分布，其中 $\xi(t)$ 是独立增量的 m- 维过程，变量 $\xi(s + h) - \xi(s)$ 的分布有特征函数

$$J(s, s + h, z) = \exp\left\{\int_s^{s+h} L(t,z)dt\right\}.$$

有有限二阶矩的随机向量组序列的极限定理 我们来研究组

的序列(1)收敛于比独立增量过程更一般的过程的条件。按上面的做法我们假定非随机时间序列 $0<t_{n0}<t_{n1}<\cdots<t_{nm_n}=T$ 相应于序列 $\xi_{n0},\xi_{n1},\cdots,\xi_{nm_n}$，且对 $\Delta\xi_{nk}$ 引入表示式

$\Delta\xi_{nk}=a_{nk}\ (\xi_{n0},\xi_{n1},\cdots,\xi_{nk})\Delta t_{nk}+b_{nk}\ (\xi_{n0},\xi_{n1},\cdots,\xi_{nk})\Delta\psi_{nk}$，其中 $\{\psi_{nk},k=0,1,\cdots,m_n\}$ 是鞅且

$$\mathbf{E}\{\Delta\psi_{nk}\Delta\psi^*_{nk}|\mathfrak{F}_{nk}\}=\mathbf{I}\Delta t_{nk},$$

在 $[0,T]\times\mathscr{D}[0,T]$ 上定义函数

$a_n(t,x(\cdot))$，$b_n(t,x(\cdot))(t\in[0,T],x(\cdot)\in\mathscr{D}[0,T])$，令

$$a_n(t,x(\cdot))=a_{nk}(x(0),x(t_{n1}),\cdots,x(t_{nk}))$$

$$\text{当}\ t\in[t_{nk},t_{nk+1}),\ k=0,1,\cdots,m_n-1,$$

$$a_n(T,x(\cdot))=a_{nm_n}-1(x(0),x(t_{n1}),\cdots,x(t_{nm_n}-1)),$$

和类似地定义 $b_n(t,x(\cdot))$。由定义，如果对 $t\in[0,s]$，$x(t)=y(t)$，那末对所有 $t\in[0,s]$，$a_n(t,x(\cdot))=a_n(t,y(\cdot))$ 及 $b_n(t,x(\cdot))=b_n(t,y(\cdot))$。现时我们的基本假设是：当 $n\to\infty$ 函数 $a_n(t,x(\cdot))$ 及 $b_n(t,x(\cdot))$ 在 $[0,T]\times\mathscr{D}[0,T]$ 中分别收敛于函数 $a(t,x(\cdot))$ 及 $b(t,x(\cdot))$。确切地说，将认为如下条件成立：

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\substack{t\in[0,T]\\x(\cdot)\in\mathscr{D}[0,T]}}\{[1+\|x(\cdot)\|]^{-1}[|a_n(t,x(\cdot))-a(t,x(\cdot))|+|b_n(t,x(\cdot))-b(t,x(\cdot))|]\}=0,\tag{20}$$

其中 $\|x(\cdot)\|=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|x(t)|$。

根据我们通常的想法，现希望用随机向量组的序列(1)构造出与 $\xi(t)$ 接近的过程 $\xi_n(t)$，$\xi(t)$ 是随机微分方程

$$d\xi(t)=a(t,\xi(\cdot))+b(t,\xi(\cdot))d\psi(t)\tag{21}$$

的解，其中 $\psi(t)$ 是按鞅 $\psi_{nk},k=1,\cdots,m_n$，构造出的过程 $\psi_n(t)$ 的极限过程。为达到这点我们需要一系列估计。除随机向量组(1)外，我们还考虑组序列 $\{\eta_{nk},k=0,1,\cdots,m_n\},n=1,2,\cdots$，它们是由关系式

$$\eta_{n0}=\xi_{n0},$$

$$\Delta\eta_{nk} = \eta_{nk+1} - \eta_{nk} = a(t_{nk},\eta_n(\cdot))\Delta t_{nk} + b(t_{nk},\eta_n(\cdot))\Delta\psi_{nk}, \tag{22}$$

的递推序列关系所定义，其中 $\eta_n(t) = \eta_{nk}$ 当 $t\in[t_{nk},t_{nk+1})$，$k = 0,1,\cdots,m_n$。这样的定义是可能的，因为为计算 $a(t_{nk},\eta_n(\cdot))$，$b(t_{nk},\eta_n(\cdot))$ 的值，只要知道 $\eta_{n0},\eta_{n1},\cdots,\eta_{nk}$ 就够了。

引理 2 假定条件(5),(20)成立,此外

$$|a(t,x(\cdot)) - a(t,y(\cdot))| + |b(t,x(\cdot)) - b(t,y(\cdot))| \leqslant C\|x(\cdot) - y(\cdot)\|. \tag{23}$$

那末

$$\mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant k\leqslant r}|\eta_{nk} - \xi_{nk}|^2|\mathfrak{F}_{n0}\} \leqslant \varepsilon_n(1 + |\xi_{n0}|^2)t_{nr},$$

其中 ε_n 是非随机量,当 $n\to\infty$ 时 $\varepsilon_n\to 0$。

证. 将差 $\eta_{nk+1} - \xi_{nk+1}$ 表为

$$\begin{aligned}\eta_{nk+1} - \xi_{nk+1} &= \sum_{j=0}^{k}[a(t_{nj},\eta_n(\cdot)) - a(t_{nj},\xi_n(\cdot))]\Delta t_{nj} \\ &+ \sum_{j=0}^{k}[b(t_{nj},\eta_n(\cdot)) - b(t_{nj},\xi_n(\cdot))]\Delta\psi_{nj} \\ &+ \sum_{j=0}^{k}[a(t_{nj},\xi_n(\cdot)) - a_n(t_{nj},\xi_n(\cdot))]\Delta t_{nj} \\ &+ \sum_{j=0}^{k}[b(t_{nj},\xi_n(\cdot)) - b_n(t_{nj},\xi_n(\cdot))]\Delta\psi_{nj} \\ &= \Sigma_k^{(I)} + \Sigma_k^{(I)} + \Sigma_k^{(III)} + \Sigma_k^{(IV)}.\end{aligned}$$

令

$$v_{nk} = \mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant j\leqslant k}|\eta_{nj} - \xi_{nj}|^2|\mathfrak{F}_{n0}\}.$$

利用类似于证明引理 1 时所采用的方法来估计和 $\Sigma_k^{(I)},\cdots,\Sigma_k^{(IV)}$. 例如,利用 $\Sigma_k^{(II)}$ 是鞅,得

$$\mathbf{E}\{\sup_{j\leqslant k}|\Sigma_j^{(II)}|^2|\mathfrak{F}_{n0}\} \leqslant 4\mathbf{E}\{|\Sigma_k^{(II)}|^2|\mathfrak{F}_{n0}\}$$

$$\leqslant 4\sum_{j=0}^{k}\mathbf{E}\{|b(t_{nj},\eta_n(\cdot))$$

$$-b(t_{nj},\xi_n(\cdot))|^2\Delta t_{nj}|\mathfrak{F}_{n0}\}.$$

借助于不等式(23)，会见到被估计的量不超过

$$4C\sum_{j=0}^{k}v_{nj}\Delta t_{nj}.$$

利用(20)，不难得不等式

$$\mathbf{E}\{\sup_{j\leqslant k}|\Sigma_j^{(IV)}|^2|\mathfrak{F}_{n0}\}$$

$$\leqslant \varepsilon_n\sum_{j=0}^{k}\mathbf{E}\{(1+\sup_{r\leqslant j}|\xi_{nr}|^2)\Delta t_{nj}|\mathfrak{F}_{n0}\},$$

其中 $\varepsilon_n\to 0$ 当 $n\to\infty$。类似地估计量 $\sup_{j\leqslant k}|\Sigma_j^{(I)}|$ 和 $\sup_{j\leqslant k}|\Sigma_j^{(III)}|^2$.

利用引理1，我们推出式

$$v_{nk+1}\leqslant C'\sum_{j=0}^{k}v_{nj}+\varepsilon_n t_{nk+1}(1+|\xi_{n0}|^2),$$

其中 C' 是仅依赖于 C 及 T 的常数，由此得

$$v_{nk+1}\leqslant\varepsilon_n(1+|\xi_{n0}|^2)(e^{c't}-1).$$

引理得证.

由引理 2 得，过程 $\xi_n(t)$ 和 $\eta_n(t)$ 的边沿分布不仅同时弱收敛，而且对应的极限相同。现转至研究过程 $\eta_n(t)$ 的极限性质将更为方便.

设 η'_{nk} 和 η''_{nk}，$k=0,1,\cdots,m_n$，是按公式(22)对不同的初始条件 $\eta'_{n0}=\xi'$，$\eta''_{n0}=\xi''$ 构造出的序列。类似引理 2 可证明下引理：

引理 3 如果引理 2 条件成立，那末

$$\mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant j\leqslant k}|\eta'_{nj}-\eta''_{nj}|^2|\mathfrak{F}_{n0}\}\leqslant e^{c't_{nk}}|\xi'-\xi''|^2,$$

其中 c' 是某个常数.

以前已引入随机微分方程的有限-差分近似值，而且已证明它

们收敛于随机微分方程的解(§1，定理 12 和 13)．可对过程 $\eta_n(t)$ 证明类似的结论．我们用下方式导入的过程 $\zeta_n(t)$ 起着过程$\eta_n(t)$的有限一差分近似值的作用． 选取某些值 $t_{nk_1}, t_{nk_2}, \cdots, t_{nk_r}$，其中 r 是固定数． 为省略记号起见，令 $t_{nk_j} = s_j$，$j = 1, 2, \cdots, r$，$s = 0$，$s_{r+1} = T$，和设

$$\zeta_n(0) = \xi_{n0},$$

$$\zeta_n(t) = \zeta_n(s_j) + a(s_j, \zeta_n(\cdot))(t - s_j) + b(s_j, \zeta_n(\cdot))[\phi_n(t) - \phi_n(s)]$$

当 $t \in [s_j, s_{j+1})$，$j = 0, 1, \cdots, r - 1$.

我们来估计量

$$v_n(t) = \mathbf{E}\{\sup_{0 \leqslant s = t_{nj} < t} |\eta_n(s) - \zeta_n(s)|^2\}.$$

我们有

$$v_n(t) = 2\mathbf{E}\sup|\Sigma'_t|^2 + 2\mathbf{E}\sup|\Sigma''_t|^2, \tag{24}$$

其中

$$\Sigma'_t = \sum_{k=0}^{j-1} [a(s_{nk}, \zeta_n(\cdot)) - a(t_{nk}, \eta_n(\cdot))]\Delta t_{nk} + \sigma'_n(t),$$

$$\Sigma''_t = \sum_{k=0}^{j-1} [b(s_{nk}, \zeta_n(\cdot)) - b(t_{nk}, \eta_n(\cdot))]\Delta t_{nk} + \sigma''_n(t),$$

及

$$\sigma'_n(t) = a(s_{nj}, \zeta_n(\cdot))(t - t_{nj}),$$

$$\sigma''_n(t) = b(s_{nj}, \zeta_n(\cdot))[\phi_n(t) - \phi_n(t_{nj})],$$

当 $t \in [t_{nj}, t_{nj+1})$ 且 $s_{nk} = s_i$，如果 $t_{nk} \in [s_i, s_{i+1})$.

注意，如果 $t_{nk} \in [s_i, s_{i+1})$，那末

$$\begin{aligned}
&|a(s_{nk}, \zeta_n(\cdot)) - a(t_{nk}, \eta_n(\cdot))| \\
&\quad \leqslant |a(s_i, \zeta_n(\cdot)) - a(s_i, \eta_n(\cdot))| + |a(s_i, \eta_n(\cdot)) \\
&\quad - a(t_{nk}, \eta_n(\cdot))| \leqslant C \sup_{s \leqslant s_i} |\eta_n(s) - \zeta_n(s)| \\
&\quad + \rho(t_{nk} - s_i)(\sup_{s \leqslant t_{nk}} |\eta_n(s)| + 1).
\end{aligned} \tag{25}$$

这时我们引入条件：当 $t > s$

$$|a(s,x(\cdot))-a(t,x(\cdot))|\leqslant\rho(t-s)(1+\sup_{0\leqslant t'\leqslant t}|x(t',1),\tag{26}$$

其中 $\rho(t),t>0$ 是非负单调不减函数且 $\rho(0+)=0$。

假设对矩阵函数 $b(t,x(\cdot))$ 不等式

$$|b(s,x(\cdot))-b(t,x(\cdot))|\leqslant\rho(t-s)(1+\sup_{0\leqslant t'\leqslant t}|x(t')|)\tag{27}$$

成立。那末类似（25）的不等式对差 $|b(s_{nk},\zeta_n(\cdot))-b(t_{nk},\eta_n(\cdot))|$ 也成立。

还设 $w_n(t)=\mathbf{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\eta_n(s)|^2$。不难见到，

$$\mathbf{E}\sup_t|\Sigma_t'|^2\leqslant 2T\sum_k c^2\mathbf{E}\sup_{t<s_i}|\eta_n(s)-\zeta_n(s)|^2\Delta t_{nk}$$

$$+2T\sum_k\rho(t_{nk}-s_i)(1+w_n(t_{nk}))\Delta t_{nk}$$

或

$$\mathbf{E}\sup_t|\Sigma_t'|^2\leqslant 2TC^2\sum_{i=0}^{r}v_n(s_i)(s_{i+1}-s_i)+2T^2(1+w_n(T))\rho(|\delta|),$$

其中 $|\delta|=\max_{0\leqslant i\leqslant r}(s_{i+1}-s_i)$。

我们来估计不等式(24)右边的第二个被加项。为此目的注意和 Σ_t'' 作为 t 的函数是平方可积鞅。因此

$$\mathbf{E}\sup_t|\Sigma_t''|^2\leqslant 4\mathbf{E}|\Sigma_T''|^2=4\mathbf{E}\sum_k|b(s_{nk},\rho_n(\cdot))-b(t_{nk},\eta_n(\cdot))|^2\Delta t_{nk},$$

类似于上述的推导由此得

$$\mathbf{E}\sup_t|\Sigma_t''|^2\leqslant 2C^2\sum_{i=0}^{r}v_n(s_i)(s_{i+1}-s_i)+2T\rho(|\delta|)(1+w_n(T)).$$

因此

$$v_n(T) \leqslant 2C^2(T+1)\sum_{i=0}^{r} v_n(s_i)(s_{i+1}-s_i)$$
$$+\rho(|\delta|)c'(w_n(T)+1). \tag{28}$$

$w_n(T)$ 的估计由引理 1 得
$$w_n(T) \leqslant C_1(1+\mathbf{E}|\xi_{n0}|^2).$$
函数 $v_n(t)$ 单调不减。

设当 $t\in[s_i,s_{i+1})$ 时 $\bar{v}_n(t)=v_n(s_i)$. 在不等式 (28) 可用 $\bar{v}_n(s)$ 代换函数 $v_n(s)$，而用 $t\in[0,T]$ 代换 T. 我们得这样的积分不等式:

$$\bar{v}_n(t) \leqslant C_1\int_0^t \bar{v}_n(s)ds + C_2\rho(|\delta|),$$

由此得，
$$\bar{v}_n(t) \leqslant C_2\rho(|\delta|)e^{C_1T} \leqslant C_3\rho(|\delta|).$$
这里 C_3 是形为 $C_3=C'(1+\mathbf{E}|\xi_{n0}|^2)\rho(|\delta|)$ 的常数，而 C' 仅依赖于C 及 T. 因此证明了下引理:

引理 4 如果引理 2 的条件和不等式(26), (27)成立，那末
$$\mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta_n(t)-\zeta_n(t)|^2|\mathfrak{F}_{n0}\} \leqslant C'\rho(|\delta|)(1+|\xi_{n0}|^2),$$
其中 $|\delta|=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant r}|s_{i+1}-s_i|$.

直到现在还没有作出关于过程 $\phi_n(t)$ 收敛性的任何假设. 记得过程 $\phi_n(t)$, $t\in[0,T]$ 是 $\mathfrak{F}_{nt}$- 鞅，其中 $\mathfrak{F}_{nt}=\mathfrak{F}_{nk}$ 当 $t\in[t_{nk},t_{nk+1})$，而且
$$\mathbf{E}\{\Delta\phi_{nk}\Delta\phi_{nk}^*|\mathfrak{F}_{nk}\}=\mathbf{I}\Delta t_{nk}.$$
假设极限过程 $\phi(t)$ 也是关于某个 σ- 代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t\in[0,T]\}$ 的平方可积鞅且
$$\mathbf{E}\{\Delta\phi\Delta\phi^*|\mathfrak{F}_s\}=I(t-s), \tag{29}$$
其中 $\Delta\phi=\phi(t)-\phi(s)$, $s<t$. 关于收敛于独立增量的鞅的条件在前面已经指出.

因此假定下条件成立:

Ψ_1. 在空间 $\mathscr{R}^m\times\mathscr{D}$ 中由随机向量 ξ_{n0} 及随机过程 $\phi_n(t)$,

$t\in[0, T]$ 所产生的测度 $Q_n(\cdot,\cdot)$ 弱收敛于随机向量 ξ_0 及平方可积鞅 $\phi(t)$ 对应的测度 $Q(\cdot,\cdot)$.

转来证明过程 $\xi_n(t)$ 的边沿分布弱收敛于随机微分方程的解的边沿分布. 我们注意到如果引理 2 的条件成立，那末方程(21)有唯一解,此解有有限二阶矩(§1 定理 3).

设 $\xi_\delta(t)$ 表示方程(21)由区间 $[0,T]$ 的分割

$$\delta=\{0=s_0,s_1,\cdots,s_{r+1}=T\}$$

作出的有限-差分近似解. 此处我们对过程 $\xi_\delta(t)$ 的定义作某些修正,也就是,当 $t\in(s_i,s_{i+1}]$ 时令

$$\xi_\delta(t)=\xi_\delta(s_i)+a(s_i,\xi_\delta(\cdot))(t-s_i)$$
$$+b(s_i,\xi_\delta(\cdot))(\phi(t)-\phi(s_i)),$$

和 $\xi_\delta(0)=\xi_0$. 不难验证,如果不等式(26)和(27)成立,那末在此修正后, §1 定理 12 的结论保持成立,因此

$$\mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_\delta(t)-\xi(t)|^2\}\to 0.$$

利用归纳法验证，对每个 t, $\xi_\delta(t)$ 是变元 ξ_0 的连续函数且是 $\phi(s)$, $0\leqslant s\leqslant t$, 的连续泛函, $\xi_\delta(t)=g_{(t,\delta)}(\xi_0,\phi(\cdot))$. 这时 $\zeta_n(t)$ 完全同样可以用 ξ_{n0} 和 $\phi_n(s)$ 表示为:

$$\zeta_n(t)=g_{(t,\delta)}(\xi_{n0},\phi_n(\cdot)).$$

现取任意序列 $\{t_k,k=1,\cdots,p\}$, $t_k\in[0, T]$, 和任意连续有界函数 $f(x_0,x_1,\cdots,x_p)$, $x_k\in\mathscr{R}^m$, 和我们估计差

$$r_n=\mathbf{E}f(\xi_0,\xi(t_1),\cdots,\xi(t_p))$$
$$-\mathbf{E}f(\xi_{n0},\eta_n(t_1),\cdots,\eta_n(t_p)).$$

我们有

$$|r_n|\leqslant\mathbf{E}|f(\xi_0,\xi(t_1),\cdots,\xi(t_p))-f(\xi_0,\xi_\delta(t_1),\cdots\xi_\delta(t_p))|$$
$$+|\mathbf{E}f(\xi_0,\xi_\delta(t_1),\cdots,\xi_\delta(t_p))-\mathbf{E}f(\xi_{n0},\zeta_n(t_1),\cdots,\zeta_n(t_p))|$$
$$+\mathbf{E}|f(\xi_{n0},\zeta(t_1),\cdots,\zeta_n(t_p))-f(\xi_{n0},\eta_n(t_1),\cdots,\eta_n(t_p))|$$
$$=r'+r_n''+r_n'''.$$

对任意给定 $\varepsilon>0$ 首先选取 δ, 使 $r'<\varepsilon/3$ 和对所有足够大的 n, $r_n'''<\varepsilon/3$。现只要注意到由于上述注解 $f(\xi_0,\xi_\delta(t_1),\cdots,$

$\xi_\delta(t_p)) = F_{(t,\delta)}(\xi_0, \phi(\cdot))$，$f(\xi_{n0}, \zeta_n(t), \cdots, \zeta_n(t_p)) = F_{(t,\delta)}(\xi_{n0}, \phi_n(\cdot))$，其中 $F_{(t,\delta)}(x,\phi(\cdot))$ 是 x 和 ϕ 的有界连续函数．因此如果条件 Ψ_1 成立，那末 $r''_n \to 0$ 当 $n \to \infty$．于是我们证明了如下定理：

定理 12 假设随机向量组的序列 (1) 满足条件(5)，(20) 和 Ψ_1，泛函 $a(t,x(\cdot))$，$b(t,x(\cdot))$ 满足条件(23)，(26)和(27)，那末按序列 (1) 构造的过程 $\xi_n(t)$ 的边沿分布弱收敛于随机方程(21)的解相应的边沿分布．

所考虑的模型的重要的特殊情形是方程 (21) 的系数 $a(t, x(\cdot))$ 和 $b(t,x(\cdot))$ 不依赖于过去，即

$$a(t,x(\cdot)) = a(t,x(\cdot)),\ b(t,x(\cdot)) = b(t,x(\cdot)). \qquad (30)$$

那末方程(21)取为无滞后随机微分方程的形式：

$$d\xi = a(t,\xi(t))dt + b(t,\xi(t))d\phi(t),\ \xi(0) = \xi_0, \qquad (31)$$

而函数 $a(t,x),b(t,x),(t,x) \in [0,T] \times \mathscr{R}^m$，应当满足条件

$$|a(t,x)| + |b(t,x)| \leqslant C(1 + |x|), \qquad (32)$$

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leqslant C|x - y|, \qquad (33)$$

$$|a(s,x) - a(t,x)| + |b(s,x) - b(t,x)| \leqslant \rho(t - s)(1 + |x|), \qquad (34)$$

其中 $\rho(t)$ 如上面所定义．如果这时鞅 $\phi(t)$ 是独立增量过程，那末方程(31)是无后效方程及

$$A(x,t) = \int_0^t a(t,x)dt + \int_0^t b(t,x)d\phi(t) \in \bar{S}(C,C).$$

当注意到 $t \in (s_i, s_{i+1}]$ 时 $\xi_\delta(t)$ 是变元 ξ_0 的连续函数，

$$\Delta\phi(s_k) = \phi(s_{k+1}) - \phi(s_k),\ k = 0,1,\cdots,i-1$$

和 $\phi(t) - \phi(s_i)$，对所考虑的情形我们可以对定理 12 作某些更明确的说明．因此前面引入的泛函 $F_{(t,\delta)}(x,x(\cdot))$ 是关于 x 及有限个形为 $x(t_{k+1}) - x(t_k)$ 的差的连续函数．我们可减弱条件 Ψ_1，用如下条件代替 Ψ_1：

Ψ_2．对任意 r 和 $t_k,t_k \in [0,T]$，$k = 1,\cdots,r$，随机向量

$$\xi_n, \phi_n(t_1), \cdots, \phi_n(t_r)$$

的联合分布弱收敛于给定在某概率空间上的随机向量

$$\xi_0, \phi(t_1), \cdots, \phi(t_r),$$

的联合分布,其中 $\phi(t)$ 是满足条件(29)的平方可积鞅.

定理 13 假定组的序列(1)满足条件 (20), 而且泛函 $a(t, x(\cdot)), b(t, x(\cdot))$ 是满足条件(26),(27),(32)及(33)的形为(30)的函数,而鞅 $\phi_n(t)$满足条件 Ψ_2, 那末过程 $\xi_n(t)$ 的边沿分布弱收敛于随机微分方程(31)的解的相应的边沿分布.

如果 Lindeberg 条件成立: 对任意 $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{m_n-1} \mathbf{E}\chi_{nk}(\varepsilon)|\Delta\phi_{nk}|^2 \to 0, \text{ 当 } n \to \infty,$$

其中 $\chi_{nk}(\varepsilon) = 1$, 如果 $|\Delta\xi_{nk}| \geqslant \varepsilon$ 和 $\chi_{nk}(\varepsilon) = 0$, 在相反情形,那末条件 Ψ_2 成立, $\phi(t)$ 是 Wiener 过程,和在 $\mathscr{D}$ 中对应于随机过程 $\xi_n(t)$ 的测度 $q_n(t)$ 弱收敛于随机微分方程(31)的解对应的测度.

随机微分方程的极限定理 考虑依赖于参数 $u \in [0, u_0]$ 的随机微分方程

$$d\xi_u = A_u(\xi_u, dt), \ \xi_u(0) = \xi_u^0, \ t \in [0, T], \tag{35}$$

其中

$$A_u(x, t) = \int_0^t \alpha_u(x, s)ds + \beta_u(x, t),$$

和 $A_u \in s(\lambda_0^u, \lambda_N^u)$, 对于这些方程的一个极限定理以前已研究过(§1 定理 11). 这里我们考虑由方程(35)在$\mathscr{D}$($\mathscr{D} = \mathscr{D}^m[0, T]$)中的解所生成的测度 $q_u(\cdot)$ 的弱收敛的条件. 我们来证明下面的定理.

定理 14 设下列条件成立:

1) $\lim\limits_{N\to\infty} \sup\limits_{u\in[0,u_0]} \mathbf{P}\{\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} |\lambda_0^u(t)| > N\} = 0;$ (36)

2) 对任意 $N_1 > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{u\in[0,u_0]} \mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\lambda_{N_1}^u(t)| > N\} = 0; \tag{37}$$

3）当 $u\to 0$ 时随机函数

$$\int_0^t \alpha_u(x,s)ds,\ \beta(x,t)$$

的边沿分布弱收敛于随机函数

$$\int_0^t \alpha_0(x,s)ds,\ \beta_0(x,t)$$

的相应分布；

4）当 $u\to 0$ 时向量 ξ_u^0 的分布弱收敛于向量 ξ^0 的分布。

那末测度 $q_u(\cdot)$ 弱收敛于 $q_0(\cdot)$。

留意在定理 14 中没有假设函数 $A_u(t,x)$ 给定在同一概率空间。

在证明定理时将利用到如下关于小扰动随机微分方程的引理（与 §1 定理 10 相比较）。

引理 5 设

$$d\tilde{\xi}_u = A_u(\tilde{\xi}_u(t),dt) + A_{\delta u}(\tilde{\xi}_u(t),dt),\delta > 0,$$
$$\tilde{\xi}_u(0) = \xi_0^u, u\in[0,u_0],$$

同时下列条件成立：

1）$A_u(x,t)\in S(\lambda_0^u,\lambda_N^u)$，而且函数 λ_0^u 和 λ_N^u 满足条件(36)和(37)。

2）$A_{\delta u}(x,t)\in S(\lambda_0^u,\tilde{\lambda}_N^{\delta u})$，其中 $\lambda_0^u(t)$ 是和条件 1）同样的函数，此外，

$$|\alpha_{\delta u}(x,t)| \leqslant \gamma_{\delta u}(x,t),$$

$$\mathbf{E}\{|\Delta\beta_{\delta u}(x,t)|^2|\mathfrak{F}_t\} \leqslant \mathbf{E}\left\{\int_t^{t+\Delta t}\gamma_{\delta u}^2(x,s)ds\,|\mathfrak{F}_t\right\},$$

对任意 $\varepsilon > 0$，$N > 0$，

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{u\in[0,u_0]}\mathbf{P}\{\sup_{\substack{t\in[0,T]\\|x|\leqslant N}}\gamma_{\delta u}^2(x,t) > \varepsilon\} = 0.$$

3）当 $u\to 0$ 初始向量 ξ_u^0 的分布弱收敛于某个极限。

那末

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\tilde{\xi}_u(t) - \xi_u(t)| > \varepsilon\} \to 0 \text{ 当 } \delta\to 0 \text{ 时对 } u \text{ 一}$$

致地成立。

证. 设 ε' 是任意给定的正数，

$$\tau = \inf\{t: \lambda_0^u(t) \geqslant N, \lambda_{N_1}^u(t) \geqslant N_2; \sup_{|x| \leqslant N_1} \gamma_{\delta u}(x,t) \geqslant \varepsilon'\},$$

如果所指定的 t 的集合不空，及 $\tau = T$，在相反情形. 这里 N, N_1 和 N_2 是正数，它们的选取将在下面加以明确. 我们姑且仅指出，由不等式

$$\mathbf{P}\{\tau < T\} \leqslant \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \lambda_0^u(t) \geqslant N, \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \lambda_N^u(t) \geqslant N_2\}$$

$$+ \mathbf{P}\{\sup_{\substack{0 \leqslant t \leqslant T \\ |x| \leqslant N_1}} \gamma_{\delta u}(x,t) > \varepsilon'\}$$

和引理的假设，得知对任意 N_1 和 $\varepsilon > 0$ 可找到足够小的不依赖于 u, N 和 N_2 的 δ_0，及足够大的不依赖于 u, ε' 和 δ 的 N^0, N_2^0，使当 $N > N^0$，$N_2 \geqslant N_2^0$ 及 $\delta < \delta_0$ 时

$$\mathbf{P}\{\tau < T\} < \varepsilon.$$

构造函数 $\alpha_u'(x, t)$ 及 $\beta_u'(x, t)$ 使得当 $|x| \leqslant N_1$ 时分别与 $\alpha_u(x,t)$ 及 $\beta_u(x,t)$ 相等且属于类 $S(\lambda_0^u, \lambda^{u'})$，其中 $\lambda^{u'} = \lambda^{u'}(t)$ 不依赖于N和 $\lambda^{u'}(t) \leqslant 1 + \lambda_{N_1}^u(t)$. 当 $t \leqslant \tau$ 时令 $\bar{\alpha}_u(x, t) = \alpha_u'(x,t)$，当 $t > \tau$ 时令 $\bar{\alpha}_u(x,t) = 0$; $\bar{\beta}_u(x, t) = \beta_u'(x, t \wedge \tau)$; 当 $t \leqslant$ 时 $\bar{\alpha}_{\delta u}(x,t) = \alpha_{\delta u}(x,t)$，当 $t > \tau$ 时 $\bar{\alpha}_{\delta u}(x,t) = 0$; $\bar{\beta}_{\delta u}(x,t) = \beta_{\delta u}(x, t \wedge \tau)$. 此时 $\bar{A}_u(x,t) \in S(N, N_1 + 1)$，$\bar{A}_{\delta u}(x,t) \in S(N, \bar{\lambda}^{\delta u})$，其中

$$\bar{A}_u(x,t) = \int_0^t \bar{\alpha}_u(x,s)ds + \bar{\beta}(x,t),$$

而 $\bar{A}_{\delta u}(x,t)$ 有类似的意义.

考虑下面的方程

$$d\eta(t) = \bar{A}_u(\eta(t), dt),$$

$$d\tilde{\eta}(t) = \bar{A}_u(\tilde{\eta}(t), dt) + \bar{A}_{\delta u}(\tilde{\eta}(t), dt),$$

$$\eta(0) = \tilde{\eta}(0) = \xi_u^0.$$

这些方程的解存在，而且 $\eta(t) = \xi_u(t)$ 直到 $t < \tau$ 和 $|\eta(t)| < N_1$，且类似地，$\tilde{\eta}(t) = \tilde{\xi}_n(t)$ 直到 $t < \tau$ 及 $\sup_{s < t} |\tilde{\eta}(s)| < N_1$.

我们来估计差 $\eta(t) - \tilde{\eta}(t)$.

注意

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta(t)-\tilde{\eta}(t)|>\varepsilon\}\leqslant\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\tilde{\eta}(t)|\geqslant N_1\}$$
$$+\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta(t\wedge\tau_1)-\tilde{\eta}(t\wedge\tau_1)|>\varepsilon\},$$

其中 $\tau_1=\inf\{t:|\tilde{\eta}(t)\geqslant N_1\}$ $(\inf\varnothing=T)$.

由前述结果(§1 定理 7)得,

$$\mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\tilde{\eta}(t)|^2|\mathfrak{F}_0\}\leqslant(1+|\xi_u^0|^2)C(N).$$

于是,对任意 $C_0>0$

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\tilde{\eta}(t)\geqslant N_1\}\leqslant\frac{(1+C_0^2)C(N)}{N_1^2}$$
$$+\mathbf{P}\{|\xi_u^0|>C_0\}.$$

令

$$v_u(t)=\mathbf{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\eta(s\wedge\tau_1)-\tilde{\eta}(s\wedge\tau_1)|^2.$$

因为

$$|\eta(t)-\tilde{\eta}(t)|^2\leqslant3\left(\left|\int_0^t\left[\bar{\alpha}_u(\eta(s),s)-\bar{\alpha}_u(\tilde{\eta}(s),s)\right]ds\right|^2\right.$$
$$+\left|\int_0^t\bar{\beta}_u(\eta(s),ds)-\bar{\beta}_u(\tilde{\eta}(s),ds)\right|^2$$
$$\left.+\left|\int_0^t\bar{A}_{\delta u}(\tilde{\eta}(s),ds)\right|^2\right),$$

所以,利用以前所采用的方法,得

$$v_u(t)\leqslant12\mathbf{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left|\int_0^{s\wedge\tau_1}\bar{A}_{\delta u}(\tilde{\eta}(s),ds)\right|^2$$
$$+C(N_2)\int_0^t v_u(s)ds,$$

其中 $C(N_2)$ 仅依赖于 T 和 N_2. 由后一积分不等式得

$$v_u(t)\leqslant C'(N_2)\mathbf{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left|\int_0^{s\wedge\tau_1}\bar{A}_{\delta u}(\tilde{\eta}(s),ds)\right|^2.$$

其次我们有

$$\mathbf{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left|\int_0^{s\wedge\tau_1}\bar{A}_{\delta u}(\tilde{\eta}(s),ds\right|^2\leqslant2\left(t\mathbf{E}\int_0^{t\wedge\tau_1}|\bar{\alpha}_{\delta u}(\tilde{\eta}(s),s)\right|^2ds$$
$$\left.+\mathbf{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left|\int_0^{s\wedge\tau_1}\bar{\beta}_{\delta u}(\tilde{\eta}(s),ds)\right|^2\right)$$

$$\leqslant (2t+\delta)\mathbf{E}\int_0^{t\wedge\tau_1\wedge t}\gamma_{\delta u}^2(\tilde{\eta}(s),s)ds.$$

顾及到随机时间 τ 及 τ_1 的定义，我们得

$$v_u(t)\leqslant \varepsilon' C''(N_2).$$

由此得

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta(t\wedge\tau_1)-\tilde{\eta}(t\wedge\tau_1)|>\varepsilon\}<\frac{\varepsilon' C''(N_2)}{\varepsilon^2}$$

和

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta(t)-\tilde{\eta}(t)|>\varepsilon\}\leqslant \mathbf{P}\{|\xi_u^0|>C_0\}$$
$$+\frac{(1+C_0^2)C(N)}{N_1^2}+\frac{\varepsilon' C''(N_2)}{\varepsilon^2}.$$

其次，

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_u(t)-\tilde{\xi}_u(t)|>\varepsilon\}$$
$$\leqslant \mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_u(t)-\eta(t)|>0\}$$
$$+\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta(t)-\tilde{\eta}(t)|>\varepsilon\}$$
$$+\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\tilde{\eta}(t)-\tilde{\xi}_u(t)|>0\},$$

而且

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_u(t)-\eta(t)|>0\}\leqslant \mathbf{P}(\tau<T)$$
$$+\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta(t)|\geqslant N_1\}$$

和对量 $\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\tilde{\xi}_u(t)-\tilde{\eta}(t)|^2>0\}$ 类似的不等式成立。因此，

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_u(t)-\tilde{\xi}(t)|>\varepsilon\}\leqslant 2\mathbf{P}(\tau<T)$$
$$+3\mathbf{P}\{|\xi_u^0|>C_0\}+\frac{3(1+C_0^2)C(N)}{N_1^2}+\frac{\varepsilon' C''(N_2)}{\varepsilon^2}.$$

当给定 ε 时，我们现在可按下面的次序选取不依赖于 u 的常数 C_0,N,N_1,N_2 和 ε'：首先由条件

$$3\cdot\mathbf{P}\{|\xi_u^0|>C_0\}<\frac{\varepsilon}{4}$$

选取 C_0，然后选取 N，使

$$2\mathbf{P}\{\sup_{0<t\leqslant T}\lambda_0^u(t)>N\}<\frac{\varepsilon}{12}.$$

再确定 N_1，使不等式

$$3(1+C_0^2)C(N)/N_1^2<\frac{\varepsilon}{4}$$

成立。其次，设 N_2 是满足

$$2\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\lambda_{N_1}^u(t)>N_2\}<\frac{\varepsilon}{12};$$

由条件 $\frac{\varepsilon' C''(N)}{\varepsilon^2}<\frac{\varepsilon}{4}$ 确定 ε'。最后选取 δ_0，使当 $\delta<\delta_0$ 时

$$2\mathbf{P}\{\sup_{\substack{0\leqslant t\leqslant T\\|x|\leqslant N_1}}\gamma_{\delta u}(x,t)>\varepsilon'\}<\frac{\varepsilon}{12}.$$

这就证明了对所有 $\delta<\delta_0$ 及任意 $u\in[0,u_0]$ 有

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_u(t)-\tilde{\xi}_u(t)|>\varepsilon\}<\varepsilon.$$ 引理得证。

定理 14 的证明。 因为定理的条件 1) 保证了在 $\mathscr{D}$ 中对应于方程(35)的解的测度的弱紧性，所以为证明定理只要验证过程 $\xi_u(t)$ 的边沿分布弱收敛于过程 $\xi_0(t)$ 对应的边沿分布就够了。我们从有特殊形式的场 $\alpha_u(x,t)$ 和 $\beta_u(x,t)$ 开始证明这点，然后转向一般情形。

设

$$\alpha_u(x,t)=\sum_{k=1}^r a_k(x)\alpha_u^k(t),$$

$$\beta_u(x,t)=\sum_{k=1}^r b_k(x)\beta_u^k(t),$$

其中 $a_k(x)$, $b_k(x)$, $k=1,\cdots,r$ 是有一致有界导数的非随机纯量可微函数，$\beta_u^k(t)$ 是平方可积鞅且

$$|\alpha_u^k(t)|\leqslant\lambda_0^u(t),\quad k=1,\cdots,r,$$

$$\mathbf{E}\{|\Delta\beta_u^k(t)|^2|\mathfrak{F}_t\}\leqslant\mathbf{E}\left\{\int_t^{t+\Delta t}(\lambda_0^u(s))^2ds\middle|\mathfrak{F}_t\right\}.$$

假设函数 $\lambda_0^u(t)$ 满足条件(36)，当 $u\to 0$ 时合成的过程

$$\left(\int_0^t \alpha_u^1(s)ds, \cdots, \int_0^t \alpha_u^r(s)ds, \beta_u^1(t), \cdots, \beta_u^r(t)\right)$$

的边沿分布弱收敛于某个过程

$$\left(\int_0^t \alpha_0^1(s)ds, \cdots, \int_0^t \alpha_0(s)ds, \beta_0^1(t), \cdots, \beta_0^r(t)\right)$$

的相应分布且随机向量 ξ_u^0 依分布收敛于向量 ξ_0。

在这些补充假设下我们来证明定理 14 的结论。

设 $t_k, t_k \in [0,T]$，$k=1,\cdots,s$ 是给定的数列。 引入方程(35)的有限-差分近似解 $\xi_{\delta u}(t)$，而且假设点 t_k，$k=1,\cdots,s$ 包含在分割 δ 中. 因为 §1 定理 13 附注的条件成立，所以对任意 $\varepsilon>0$ 可求得 δ_0，使当 $|\delta|<\delta_0$ 时对所有 $u\in[0,u_0]$

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_u(t)-\xi_{\delta u}(t)|>\varepsilon\}\leqslant\varepsilon.$$

设 $f(x_1,\cdots,x_s)$ 是一任意连续且连同它的一阶偏导数有界的函数，$x_k\in\mathscr{R}^m$。 我们有

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{E}f[\xi_u(t_1),\cdots,\xi_u(t_s)]-\mathbf{E}f[\xi_0(t_1),\cdots,\xi_0(t_s)]\\
&\quad\leqslant|\mathbf{E}(f[\xi_u(t_1),\cdots,\xi_u(t_s)]-f[\xi_{\delta u}(t_1),\cdots,\xi_{\delta u}(t_s)])|\\
&\quad+|\mathbf{E}f[\xi_{\delta u}(t_1),\cdots,\xi_{\delta u}(t_s)]-\mathbf{E}f[\xi_{\delta 0}(t_1),\cdots,\xi_{\delta 0}(t_s)]|\\
&\quad+|\mathbf{E}(f[\xi_{\delta 0}(t_1),\cdots,\xi_{\delta 0}(t_s)]-f[\xi_0(t_1),\cdots,\xi_0(t_s)])|\\
&\quad=I_1+I_2+I_3.
\end{aligned}$$

这时

$$I_1\leqslant C[\varepsilon+\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\zeta_{\delta u}(t)-\xi_u(t)|>\varepsilon\}],$$

$$I_3\leqslant C[\varepsilon+\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_{\delta 0}(t)-\xi_0(t)|>\varepsilon\}],$$

其中 C 是某个常数。因此不依赖于值 u 当 $|\delta|<\delta_0$ 时 $I_1+I_3\leqslant 4C\varepsilon$。此外，不难见到，$f[\xi_{\delta u}(t_1),\cdots,\xi_{\delta u}(t_s)]$ 是量

$$\int_{s_j}^{s_{j+1}}\alpha_u(s)ds,\ \beta^k(s_{j+1})-\beta^k(s_j),$$

$$j=0,1,\cdots,L,\ k=1,\cdots,r.$$

的连续和有界函数。其中 s_j 是构成分割 δ 的点。 因此对选定的 δ，当 $u\to 0$ 时

$$I_2=\mathbf{E}f[\xi_{\delta u}(t_1),\cdots,\xi_{\delta u}(t_s)]$$

$$-\mathbf{E}f[\xi_{\delta 0}(t_1),\cdots,\xi_{\delta 0}(t_s)]\to 0.$$

因此在所考虑的情形证明了当 $u\to 0$ 时过程 $\xi_u(t)$ 的边沿分布的弱连续性。

我们转到一般情形时定理 14 的证明。

我们引进逼近 $A_u(x,t)$ 的场 $\tilde{A}_{\delta u}(x,t), u\in[0,u_0]$. 为此对每个 $\delta>0$，在球$\left\{x:|x|\leqslant\frac{1}{\delta}\right\}$中作 δ-网 $x_1,x_2,\cdots,x_{n\delta}$ 及满足下面条件的函数组 $g_i(x)$, $j=1,\cdots,n_\delta$: $g_j(x)\geqslant 0$ 及当 $|x-x_j|\geqslant\delta$ 时 $g_j(x)=0$，$\sum_{j=1}^{n_\delta}g_j(x)=1$，$|x|\leqslant\frac{1}{\delta}$，和函数 $g_j(x)$ 是连续可微的。

令

$$\tilde{\alpha}_{\delta u}(x,t)=\sum_{j=1}^{n_\delta}g_j(x)\alpha_u(x_j,t),$$

$$\tilde{\beta}_{\delta u}(x,t)=\sum_{j=1}^{n_\delta}g_j(x)\beta_u(x_j,t),$$

$$\tilde{A}_{\delta u}(x,t)=\int_0^t\tilde{\alpha}_{\delta u}(x,s)ds+\tilde{\beta}_{\delta u}(x,t),$$

$$A_{\delta u}(x,t)=\tilde{A}_{\delta u}(x,t)-A_u(x,t)$$

$$=\int_0^t\alpha_{\delta u}(x,s)ds+\beta_{\delta u}(x,t).$$

引进随机微分方程

$$d\eta_u(t)=\tilde{A}_{\delta u}(\eta_u(t),dt),\ \eta_u(0)=\xi_u^0, t\in[0,T]. \tag{38}$$

注意到如果定理 14 的条件成立，那末对任意固定的 δ，方程(38)满足所考虑的特殊情形所引进的条件。

设 $f(x_1,\cdots,x_s)$ 再次表示任意连续且连续可微函数，它和它的偏导数是有界的。令

$$\mathbf{E}f[\xi_u(t_1),\cdots,\xi_u(t_s)]-\mathbf{E}f[\xi_0(t_1),\cdots,\xi_0(t_s)]$$
$$=J_1+J_2+J_3,$$

其中

$$J_1 = \mathbf{E}(f[\xi_u(t_1),\cdots,\xi_u(t_s)] - \mathbf{E}f[\eta_u(t_1),\cdots,\eta_u(t_s)],$$
$$J_2 = \mathbf{E}f[\eta_u(t_1),\cdots,\eta_u(t_s)] - \mathbf{E}f[\eta_0(t_1),\cdots,\eta_0(t_s)],$$
$$J_3 = \mathbf{E}(f[\eta_0(t_1),\cdots,\eta_0(t_s)] - f[\xi_0(t_1),\cdots,\xi_0(t_s)]).$$

由前面所考虑的定理14的特殊情形得知对任意固定的 δ，当 $u\to 0$ 时 $J_2\to 0$。因此，为在一般情形证明定理只要验证当 $\delta\to 0$ 时 $J_1+J_3\to 0$ 对 u 是一致地成立。对任意 $\varepsilon>0$

$$J_1+J_3\leqslant C(2\varepsilon+\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_u(t)-\eta_u(t)|>\varepsilon\}$$
$$+\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_0(t)-\eta_0(t)|>\varepsilon\}),$$

其中 c 是仅依赖于函数 $f(x_1,\cdots,x_s)$ 的常数。

我们来证明引理 5 适用于方程(35)与(38)。为此我们留意当 $|x|\leqslant N_0<\dfrac{1}{\delta}$ 时

$$|\alpha_{\delta u}(x,t)| = |\tilde{\alpha}_{\delta u}(x,t)-\alpha_u(x,t)|$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{n_\delta} g_j(x)\,|\alpha_u(x_j,t)-\alpha_u(x,t)|$$
$$\leqslant \sum_{j:|x_j-x|<\delta} g_j(x)\,|\alpha_u(x_j,t)-\alpha_u(x,t)|$$
$$\leqslant \delta\lambda_{N_0}(t).$$

类似地，

$$\mathbf{E}\{|\Delta\beta_{\delta u}(x,t)|^2|\mathfrak{F}_t\}\leqslant \sum_{j=1}^{n_\delta} g_j(x)\sum_{j=1}^{n_\delta}\mathbf{E}\{g_j(x)|\Delta\beta_u(x_j,t)$$
$$-\Delta\beta_u(x,t)|^2|\mathfrak{F}_t\}\leqslant \delta^2\mathbf{E}\left\{\int_t^{t+\Delta t}\lambda_{N_0}^2(s)\,ds\,|\mathfrak{F}_t\right\}.$$

此外，容易验证

$$|\tilde{\alpha}_{\delta u}(x,t)|\leqslant 2(1+|x|)\lambda_0(t),$$
$$\mathbf{E}\{|\Delta\tilde{\beta}_{\delta u}(x,t)|^2|\mathfrak{F}_t\}\leqslant 2(1+$$
$$|x|^2)\mathbf{E}\left\{\int_t^{t+\Delta t}\lambda_0^2(s)ds\,|\mathfrak{F}_t\right\}.$$

所得的估计不依赖于 u，且引理5的条件成立；此外

$$\sup_{\substack{t\in[0,T]\\|x|\leqslant N}} \gamma_{\delta u}^2(x,t) \leqslant \delta^2 \sup_{t\in[0,T]} \lambda_N^2(t).$$

因此可找到不依赖于 u 的 δ_0，使当 $\delta<\delta_0$ 时 $J_1+J_3<4C_\varepsilon$.定理得证。

例. 有小非线性的振动 考虑有小非线性项的振动方程，

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=\varepsilon f_1\left(x,\frac{dx}{dt}\right)+\sqrt{\varepsilon}\,f_2\left(x,\frac{dx}{dt}\right)w(t), \tag{39}$$

其中 $x=x(t)$，$f_1(x,y)$，$f_2(x,y)$ 的纯量函数，ε 是小参数，$w(t)$ 是 Wiener 过程。

方程(39)应当理解为形如

$$\left.\begin{aligned}&d\dot{x}=(-\omega^2x+\varepsilon f_1(x,\dot{x}))dt+\sqrt{\varepsilon}\,f_2(x,\dot{x})dw(t),\\&dx=\dot{x}dt,\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

的两个随机微分方程的组。

把通常研究非线性振动的方法应用于方程组(40)。引进变量替换

$$x=a\cos\psi,\ \dot{x}=-a\omega\sin\psi,\ \psi=\omega t+\theta$$

或

$$a=\sqrt{x^2+\frac{1}{\omega^2}\dot{x}^2},\ \psi=-\text{arc tg}\,\frac{\dot{x}}{\omega x}.$$

为得到量 a 和 θ 的方程，我们利用伊藤公式。我们得到如下的关系式：

$$\begin{aligned}da=&\ \varepsilon\left(-\frac{\sin\psi}{\omega}\tilde{f}_1(a,b)+\frac{\cos^2\psi}{2\omega^2a}\tilde{f}_2^2(a,\theta)\right)dt\\&-\frac{\sqrt{\varepsilon}\sin\psi}{\omega}\tilde{f}_2(a,\theta)dw,\\d\theta=&\ \varepsilon\left(-\frac{\cos\psi}{\omega a}\tilde{f}_1(a,\theta)+\frac{\sin2\psi}{2\omega^2a^2}\tilde{f}_2^2(a,\theta)\right)dt\\&-\frac{\sqrt{\varepsilon}\cos\psi}{2\omega a}\tilde{f}_2(a,\theta)dw,\end{aligned}$$

如果过程 $w(t)$ 是可微的，在第一个方程有附加项

$$\varepsilon \frac{\cos^2 \psi}{2\omega^2 a} \tilde{f}_2^2(a, \theta)$$

和第二个方程有附加项$\frac{\sin 2\psi}{2\omega^3 a^2} \tilde{f}_2^2(a, \theta)$，其中

$$\tilde{f}_i(a, \theta) = f_i(a \cos \psi_1 - \omega a \sin \psi), \quad i = 1, 2,$$

那末上述方程与我们得到过的方程是不同的。

代替 t 引入新时间，$t \to \frac{t}{\varepsilon}$，和令

$$a_\varepsilon(t) = a\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad \theta_\varepsilon(t) = \theta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),$$

$$\xi_\varepsilon(t) = (a_\varepsilon(t), \theta_\varepsilon(t)).$$

那末

$$d\xi_\varepsilon(t) = A_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t), dt),$$

$$A_\varepsilon^i(a, \theta, t) = \int_0^t \alpha_\varepsilon^i(a, \theta, s) ds + \beta_\varepsilon^i(a, \theta, t), i = 1, 2,$$

其中

$$\alpha_\varepsilon^1(a, \theta, t) = -\frac{\sin\left(\frac{\omega}{\varepsilon} t + \theta\right)}{\omega} \tilde{f}_1\left(a, \frac{\omega}{\varepsilon} t + \theta\right)$$

$$+ \frac{\cos^2\left(\frac{\omega}{\varepsilon} t + \theta\right)}{2\omega^2 a} \tilde{f}_2^2\left(a, \frac{\omega}{\varepsilon} t + \theta\right),$$

$$\alpha_\varepsilon^2(a, \theta, t) = -\frac{\cos\left(\frac{\omega}{\varepsilon} t + \theta\right)}{\omega a} \tilde{f}_1\left(a, \frac{\omega}{\varepsilon} t + \theta\right)$$

$$+ \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{\varepsilon} t + \theta\right)}{2\omega^3 a^2} \tilde{f}_2^2\left(a, \frac{\omega}{\varepsilon} t + \theta\right),$$

$$\beta_\varepsilon^1(a, \theta, t) = -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\omega} \int_0^{t/\varepsilon} \tilde{f}_2(a, \omega s + \theta) \sin(\omega s + \theta) dw(s),$$

$$\beta_\varepsilon^2(a, \theta, t) = -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\omega a} \int_0^{t/\varepsilon} \tilde{f}_2(a, \omega s + \theta) \cos(\omega s + \theta) dw(s).$$

不难验证在对函数 $f_1(x,\dot{x})$ 和 $f_2(x,\dot{x})$ 的十分一般的假设下，当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$\int_0^t \alpha_\varepsilon^1(a,\theta,s)ds \to t\bar{f}_1(a),$$

$$\int_0^t \alpha_\varepsilon^2(a,\theta,s)ds \to t\bar{f}_2(a),$$

其中

$$\bar{f}_1(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-f_1(a\cos\psi,-a\omega\sin\psi)\frac{\sin\psi}{\omega}\right.$$

$$\left.+f_2^2(a\cos\psi,-a\omega\sin\psi)\frac{\cos^2\psi}{2\omega^2 a}\right]d\psi,$$

$$\bar{f}_2(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-f_1(a\cos\psi,-a\omega\sin\psi)\frac{\cos\psi}{\omega a}\right.$$

$$\left.+f_2^2(a\cos\psi,-a\omega\sin\psi)\frac{\sin 2\psi}{2\omega^3 a^2}\right]d\psi.$$

另一方面，$\beta_\varepsilon(a,\theta,t)$ 是独立(在时间方面)增量的 Gauss 场，而且

$$\mathbf{E}(\beta_\varepsilon^1(a,\theta,t))^2=\frac{\varepsilon}{\omega}\int_0^{t/\varepsilon}\bar{f}_2^2(a,\omega s+\theta)\sin^2(\omega s+\theta)ds,$$

$$\mathbf{E}\beta_\varepsilon^1(a,\theta,t)\beta_\varepsilon^2(a,\theta,t)=\frac{\varepsilon}{\omega a^t}\int_0^{t/\varepsilon}\bar{f}_2^2(a,\omega s+\theta)\sin(\omega s+\theta)$$

$$\times\cos(\omega s+\theta)ds,$$

$$\mathbf{E}(\beta_\varepsilon^2(a,\theta,t))^2=\frac{\varepsilon}{\omega^2 a^2}\int_0^{t/\varepsilon}\bar{f}_2^2(a,\omega s+\theta)\cos^2(\omega s+\theta)ds.$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时场 $\beta_\varepsilon(a,\theta,t)$ 的相关矩阵收敛于如下极限 $(h>0)$:

$$\lim R_\varepsilon(t,t+h)=\lim R_\varepsilon(t,t)=t\begin{pmatrix}b_{11}(a)b_{12}(a)\\ b_{12}(a)b_{22}(a)\end{pmatrix},$$

其中

$$b_{11}(a)=\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}f_2^2(a\cos\psi,-\omega a\sin\psi)\sin^2\psi d\psi,$$

$$b_{12}(a)=\frac{1}{2\pi\omega a}\int_0^{2\pi}f_2^2(a\cos\psi,-\omega a\sin\psi)\sin\psi\cos\psi d\psi,$$

$$b_{22}(a)=\frac{1}{2\pi\omega^2a^2}\int_0^{2\pi}f_2^2(a\cos\psi,-\omega a\sin\psi)\cos^2\psi d\psi.$$

矩阵

$$B(a)=\{b_{ik}(a)\}$$

是对称非负定的，现构造非负定对称矩阵

$$\sigma(a)=\{\sigma_{ik}\},\ i,k=1,2,$$

使得

$$\sigma^2(a)=B(a).$$

场 $\beta_\varepsilon(a,t)$ 的边沿分布弱收敛于场

$$\beta_0(a,t)=\{\beta_0^1(a,t),\beta_0^2(a,t)\}$$

的边沿分布，$\beta_0(a,t)$ 可利用关系式

$$\beta_0^1(a,t)=\sigma_{11}(a)w_1(t)+\sigma_{12}(a)w_2(t),$$
$$\beta_0^2(a,t)=\sigma_{12}(a)w_1(t)+\sigma_{22}(a)w_2(t),$$

给出。此处 $w_1(t)$ 和 $w_2(t)$ 表示两个独立的 Wiener 过程。

因此，如果定理 14 的余下关于函数 $f_1(x,\dot{x})$，$f_2(x,\dot{x})$ 的正则性条件成立，那末可断定:

方程(39)的解可表为

$$x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)=a_\varepsilon(t)\cos\left(\frac{\omega t}{\varepsilon}+\theta(t)\right),$$

$$\dot{x}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)=-\omega a_\varepsilon(t)\sin\left(\frac{\omega t}{\varepsilon}+\theta_\varepsilon(t)\right),$$

而且随机过程 $(a_\varepsilon(t),\theta_\varepsilon(t))$ 的分布当 $\varepsilon\to 0$ 时弱收敛于随机微分方程

$$d\bar{a}=\bar{f}_1(\bar{a})dt+\sigma_{11}(\bar{a})dw_1+\sigma_{12}(\bar{a})dw_2,$$
$$d\bar{\theta}=\bar{f}_2(\bar{a})dt+\sigma_{12}(\bar{a})dw_1+\sigma_{22}(\bar{a})dw_2,$$

的解过程 $(\bar{a}(t),\bar{\theta}(t))$ 对应的测度。

第三章　关于连续过程的随机微分方程和 $\mathscr{R}^m$ 中的连续 Марков 过程

§1. 伊藤过程

在研究随机微分方程的解时我们已经有机会遇到有伊藤随机微分的过程，即是能利用 Wiener 过程随机积分表示的过程. 这样的过程称为伊藤过程;在这一段将研究它的基本性质.

定义和某些性质　我们将认为某个概率空间 $\{\Omega,\mathfrak{U},P\}$ 和在这空间中的 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t,\ t\geqslant 0\}$ 是固定的. 设 $w(t)$ 是在这空间上取值于 $\mathscr{R}^m$ 且适应于流 $\mathfrak{F}_t$ 的 Wiener 过程; 这意味着 $w(t)$ 是 $\mathfrak{F}_t$-可测变量，而 $s>t$ 时，全体 $w(s)-w(t)$ 独立于 σ-代数 $\mathfrak{F}_t$. 以 $\mathfrak{M}_1[0,T]$ 表示可测函数 $f(s,\ \omega)$ 的集合: 对所有 $s\in[0,T]$,$f(s,\omega)$ 作为ω的函数是 $\mathfrak{F}_s$-可测且满足

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^T|f(s,\ \omega)|ds<\infty\right\}=1.$$

我们将取值于 $\mathscr{R}^n$ 的过程 $\eta(t)$,$t\in[0,T]$,称为关于 $(w(t),\mathfrak{F}_t)$ 的伊藤过程,如果存在这样的对象:

1) $\mathfrak{F}_0$-可测变量 η_0; 2) 取值于 $\mathscr{R}^n$ 的可测函数 $a(s,\ \omega)$, 且对固定的 s,$a(s,\omega)$ 作为ω的函数是 $\mathfrak{F}_s$-可测的;以及 3) 取值为 $\mathscr{R}^m$ 到 $\mathscr{R}^n$ 的算性算子的可测函数,当固定 s 时,它是 $\mathfrak{F}_s$-可测的，使得

$$\eta(t)=\eta_0+\int_0^t a(s,\omega)ds+\int_0^t B(s,\omega)dw(s),\ 0<t, \qquad (1)$$

及

$$|a(s,\omega)|+\mathrm{Sp}B(s,\omega)B^*(s,\omega)\in\mathfrak{M}_1[0,T].$$

后一条件显然是(1)式左边积分存在的充分必要条件， 今后主要

考虑在 $\mathscr{R}^m$ 中的伊藤过程；用 $\mathfrak{L}(\mathscr{R}^m)$ 表示在 $\mathscr{R}^m$ 中的线性算子的集合。所有被考虑的随机函数将假定是适应于流 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的。

在定义了伊藤过程后引起的首要问题之一是由该过程能否确定函数 $a(s,\omega)$ 及 $B(s,\omega)$？又怎样才能做到这一点？为解决这问题，我们需要一个由 P. Levy 建立的一维 Wiener 过程的重要特性。

定理 1 如果 $\xi(t)$ 是 $\mathscr{R}^1$ 中的连续过程且存在 σ-代数流 $\mathfrak{F}_t$，使得 $(\xi(t),\mathfrak{F}_t)$ 及 $(\xi^2(t)-t,\mathfrak{F}_t)$ 是鞅，那末 $\xi(t)$ 是关于流 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的 Wiener 过程。

（这个定理的证明包含在第一章 §3 定理 3 中.）

由这个定理可得出某些推论。

推论 1 如果 $b(s,\omega)\in\mathscr{R}^m$ 和 $|b(s,\omega)|=1$，那末过程

$$\xi(t)=\int_0^t(b(s,\omega),\ dw(s))$$

是 Wiener 过程。

推论 2 如果 $\xi(t)$ 是取值于 $\mathscr{R}^m$ 的连续过程且对某个 σ-代数流 $\mathfrak{F}_t$ 及所有 $z\in\mathscr{R}^m, h>0$，有

$$\mathbf{E}(\xi(t+h)-\xi(t)\,|\,\mathfrak{F}_t)=0$$

$$\mathbf{E}((\xi(t+h)-\xi(t),z)^2\,|\,\mathfrak{F}_t)=h|z|^2,$$

那末 $\xi(t)$ 是 $\mathscr{R}^m$ 中的 Wiener 过程。

这可由如下事实得出：对每个 $z\in\mathscr{R}^m$，过程 $(\xi(t),\ z)/|z|$ 是 $\mathscr{R}^1$ 中的 Wiener 过程。

推论 3 设对所有 s 和 ω，$B(s,\omega)$ 是 $\mathscr{R}^m$ 中的酉算子。那末

$$\xi(t)=\int_0^t B(s,\omega)dw(s)$$

是 $\mathscr{R}^m$ 中的 Wiener 过程。

事实上，$(\xi(t),\mathfrak{F}_t)$ 是鞅，而

$$\mathbf{E}((\xi(t+h)-\xi(t),z)^2\,|\,\mathfrak{F}_t)$$

$$=\mathbf{E}\left(\left(\int_t^{t+h}(B(s,\omega)z,\ dw(s))\right)^2\middle|\mathfrak{F}_t\right\}$$

$$= \mathbf{E}\left(\int_t^{t+h} |B(s, \omega)z|^2 ds | \mathfrak{F}_t\right) = h|z|^2.$$

推论 4 设 $w_1(t)$ 是 $\mathscr{R}^1$ 中关于流 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的 Wiener 过程，$\alpha(s,\omega)$ 是数值函数和对所有 $t>0$

$$\int_0^t \alpha^2(s,\omega)ds < \infty, \quad \int_0^\infty \alpha^2(s,\omega)ds = \infty,$$

τ_t 由等式

$$t = \int_0^{\tau_t} \alpha^2(s,\omega)ds$$

所定义。那末过程

$$\xi(t) = \int_0^{\tau_t} \alpha(s,\omega)dw_1(s)$$

是关于 σ-代数流 $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_{\tau_t}(t \geqslant 0)$的 Wiener 过程。

为验证这点，注意 τ_t 是 Марков 时间，于是，$(\xi(t), \hat{\mathfrak{F}}_t)$ 是鞅，而且

$$\mathbf{E}[(\xi(t+h)-\xi(t))^2 | \hat{\mathfrak{F}}_t]$$
$$= \mathbf{E}\left(\int_{\tau_t}^{\tau_{t+h}} \alpha^2(s, \omega)ds | \hat{\mathfrak{F}}_t\right) = h.$$

定理 2 关于直线上的 Lebesgue 测度和测度 **P** 的乘积测度，对几乎所有 s 和 ω，形为(1)的伊藤过程 $\eta(t)$ 唯一地确定 s 和 ω 的函数 $a(s,\omega)$ 和 $B(s,\omega)$。

证。 只要证明由公式 (1) 所定义的过程 $\eta(t)$ 等于 0 推得 $a(s,\omega)$ 和 $B(s,\omega)$ 几乎处处等于 0 就够了。

设对 $t \in [0,T]$

$$0 = \int_0^t a(s,\omega)ds + \int_0^t B(s,\omega)dw(s). \tag{2}$$

由(2)易得对所有 $z \in \mathscr{R}^m$

$$0 = \int_0^t (a(s,\omega), z)ds + \int_0^t (B(s,\omega)z, dw(s)). \tag{3}$$

设 $f(s,\omega)$ 是任意有界可测且适应于流 $\mathfrak{F}_t$ 的函数。由 (3) 得等式

$$\int_0^t (f(s,\omega)B(s,\omega)z, dw(s))$$

$$= -\int_0^t f(s,\omega)(a(s,\omega),z)ds.$$

令 $f(s,\omega)=\operatorname{sgn}(a(s,\omega),z)$，那末

$$\int_0^t (f(s,\omega)B(s,\omega)z,dw(s)) = -\int_0^t |(a(s,\omega),z)|ds. \quad (4)$$

令

$$\zeta_N = T, \text{如果} \int_0^T |B(s,\omega)z|^2 ds \leqslant N,$$

及

$$\zeta_N = \inf\left[t: \int_0^t |B(s,\omega)z|^2 ds > N\right],$$

如果

$$\int_0^t |B(s,\omega)z|^2 ds > N.$$

ζ_N 是关于流 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的 Марков 时间且因为

$$\mathbf{E}\int_0^{\zeta_N} (f(s,\omega)B(s,\omega)z,dw(s)) = 0,$$

所以

$$\mathbf{E}\left[\int_0^{\zeta_N} (f(s,\omega)B(s,\omega)z,dw(s))\right]^2 \leqslant N.$$

在(4)中以 ζ_N 置换 t 并取数学期望，求得

$$\mathbf{E}\int_0^{\zeta_N} |(a(s,\omega),z)|ds = 0.$$

但 $\zeta_N \uparrow T$ 个当 $N\to\infty$。这意味着

$$\mathbf{E}\int_0^T |(a(s,\omega),z)|ds = 0.$$

由此关系式得以概率为 1

$$\int_0^T |a(s,\omega)|ds = 0.$$

这表示在(3)中第一个被加项等于 0，因此对所有 t

$$\int_0^t (B(s,\omega)z,dw(s)) = 0.$$

从而以概率为 1

$$\left[\int_0^{\zeta_N}(B(s,\omega)z,\ dw(s))\right]^2=0.$$

取数学期望，然后当 $N\to\infty$ 时取极限，得

$$\mathbf{E}\int_0^T|B(s,\omega)z|^2ds=0,$$

这就完成了定理的证明.

我们来寻找使伊藤过程是 Wiener 过程的条件. 为此，首先证明两个引理.

引理 1 设

$$\xi(t)=\int_0^t\alpha(s,\omega)ds+\int_0^t\beta(s,\omega)dw_1(s),$$

其中 $w_1(t)$ 是 Wiener 过程. 如果 $\xi(t)$ 是鞅，$\mathbf{E}\xi^2(T)<\infty$，那末对直线上的 Lebesgue 测度和测度 P 的乘积测度几乎处处 $\alpha(s,\omega)=0$.

证. 令

$$\zeta_N=T,\ \text{如果}\int_0^T\beta^2(s,\omega)ds\leqslant N,$$

和

$$\zeta_N=\inf\left[t:\int_0^t\beta^2(s,\omega)ds>N\right],$$

如果 $\int_0^T\beta^2(s,\omega)ds>N$.

又设 $\xi_N(t)=\xi(t\wedge\zeta_N)$. 如果 $\phi(s,\omega)$ 是有界可测函数，那末因为 $\xi_N(t)$ 是平方可积鞅，所以

$$0=\mathbf{E}\int_0^T\phi(s,\ \omega)d\xi_N(s)=\mathbf{E}\int_0^{\zeta_N}\phi(s,\omega)\alpha(s,\ \omega)ds$$
$$+\mathbf{E}\int_0^{\zeta_N}\beta(s,\omega)dw_1(s).$$

这就是说，

$$0=\mathbf{E}\int_0^{\zeta_N}\operatorname{sgn}\alpha(s,\omega)\cdot\alpha(s,\omega)ds$$
$$=\mathbf{E}\int_0^{\zeta_N}|\alpha(s,\omega)|ds.$$

当 $N\to\infty$ 时取极限就得所需的证明。

引理 2 如果

$$\xi(t)=\int_0^t\beta(s,\omega)dw_1(s) \text{ 和 } \mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\xi^2(t)<\infty,$$

那末

$$\mathbf{E}\int_0^T\beta^2(s,\omega)ds<\infty.$$

证。我们来证 $\xi(t)$ 是鞅。设

$$h_N=\sup\left[\delta<h:\int_t^{t+\delta}\beta^2(s,\omega)ds<N\right].$$

那末

$$\mathbf{E}\left(\int_t^{t+h_N}\beta(s,\omega)dw_1(s)|\mathfrak{F}_t\right)=0, \tag{5}$$

且当 $N\to\infty$ 时 $h_N\to h$。因为

$$\left|\int_t^{t+h_N}\beta(s,\omega)dw_1(s)\right|\leqslant 2\sup_u\left|\int_0^u\beta(s,\omega)dw_1(s)\right|$$

且右边的表达式按测度 $\mathbf{P}$ 平方可积，所以在(5)中当 $N\to\infty$ 时可取极限。设 ζ_N 如在引理 1 所定义。由 $\xi(t)$ 是鞅得等式

$$\mathbf{E}\xi^2(T)=\mathbf{E}[\xi(T)-\xi(\zeta_N)]^2+\mathbf{E}\xi^2(\zeta_N).$$

就是说

$$\mathbf{E}\int_0^{\zeta_N}\beta^2(s,\omega)ds\leqslant\mathbf{E}\xi^2(T).$$

当$N\to\infty$时取极限，即完成引理的证明。

定理 3 如果由公式(1)所定义的伊藤过程 $\eta(t)$ 是 $\mathscr{R}^m$ 中关于流 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的 Wiener 过程，那末对几乎所有 s 和 ω

$\eta_0=0, a(s,\omega)=0, B(s,\omega)B^*(s,\omega)=I$，($I$ 是单位算子)。

证。设定理的条件成立。那末 $\eta_0=0$ 且对所有 $z\in\mathscr{R}^m$

$$(\eta(t),z)=\int_0^t(a(s,\omega),z)ds$$
$$+\int_0^t|B(s,\omega)z|dw_1(s), \tag{6}$$

其中

$$w_1(t)=\int_0^t\left(\frac{B(s,\omega)z}{|B(s,\omega)z|},\quad dw(s)\right),$$

由于定理1的推论1，$w_1(t)$ 是 Wiener 过程。因为 $(\eta(t),z)$ 是关于 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的鞅和 $\mathbf{E}(\eta(t),z)^2<\infty$，所以由引理1得 $(a(s,\omega),z)=0$ 对几乎所有 s 和 ω 成立。因为对 Wiener 过程 $(\eta(t),z)$ 有

$$\mathbf{E}\sup_{t\leqslant T}(\eta(t),z)^2<\infty,$$

所以对所有 z

$$\mathbf{E}\int_0^t|B(s,\omega)z|^2ds<\infty.$$

设 $b(s,\omega)$ 是取值于 $\mathscr{R}^m$ 的某个有界函数，那末

$$\int_0^t(b(s,\omega),d\eta(s))=\int_0^t(B(s,\omega)b(s,\omega),dw(s)).$$

于是

$$t=\mathbf{E}\int_0^t|B(s,\omega)b(s,\omega)|^2ds=\mathbf{E}\int_0^t|b(s,\omega)|^2ds$$

且不论是怎样的 $b(s,\omega)$，

$$\mathbf{E}|B(s,\omega)b(s,\omega)|^2=\mathbf{E}|b(s,\omega)|^2. \tag{7}$$

设 $b_1(s,\omega)$ 等于在 $|z|=1$ 条件下 $|B(s,\omega)z|$ 达到极小值的 z，而 $b_2(s,\omega)$ 是等于达到极大值的 z。那末

$$\mathbf{E}(|B(s,\omega)b_2(s,\omega)|^2-|B(s,\omega)b_1(s,\omega)|^2)=0,$$

从而，$|B(s,\omega)b_1(s,\omega)|=|B(s,\omega)b_2(s,\omega)|$。因此对满足 $|z|=1$ 的所有 z，

$$|B(s,\omega)b_1(s,\omega)|=|B(s,\omega)z|=|B(s,\omega)b_2(s,\omega)|.$$

于是对任意向量 $z_0\in\mathscr{R}^m$，可证明算子

$$\frac{1}{|B(s,\omega)z_0|}B(s,\omega)=U(s,\omega)$$

是酉算子。设 $\dfrac{1}{|B(s,\omega)z_0|}=\alpha(s,\omega)$。那末由(7)得

$$\mathbf{E}|b(s,\omega)|^2(1-\alpha^2(s,\omega))=0.$$

由于 $|b(s,\omega)|$ 的任意性，我们可断定对几乎所有 s 和 ω, $\alpha^2(s,\omega)=1$. 因此 $B(s,\omega)$ 是酉算子.

注. 如果 Wiener 过程 $\eta(t)$ 是关于 $(w(t),\mathfrak{F}_t)$ 的伊藤过程，那末 $w(t)$ 也是关于 $(\eta(t),\mathfrak{F}_t)$ 的伊藤过程；即是，如果

$$\eta(t)=\int_0^t B(s,\omega)dw(s),$$

那末

$$w(t)=\int_0^t B^*(s,\omega)d\eta(s).$$

这由等式 $B^*(s,\omega)B(s,\omega)=I$ 得到.

推论 如果关于 $(w(t),\mathfrak{F}_t)$ 的伊藤过程 $\eta(t)$ 是 Wiener 过程，那末所有关于 $(\eta(t),\mathfrak{F}_t)$ 的伊藤过程是关于 $(w(t),\mathfrak{F}_t)$ 的伊藤过程，和所有关于 $(w(t),\mathfrak{F}_t)$ 的伊藤过程也是关于 $(\eta(t),\mathfrak{F}_t)$ 的伊藤过程.

在解决用公式 (1) 定义的过程 $\eta(t)$ 表示函数 $a(s,\omega)$ 和 $B(s,\omega)$ 的问题之前，我们来研究能用随机积分表示的过程.

伊藤空间 我们考虑由形为

$$\eta(t)=\int_0^t (b(s,\omega),dw(s)),\quad t\in[0,T],$$

的过程 $\eta(t)$ 所组成的过程集合 $I_T(w(t),\mathfrak{F}_t)$，其中 $b(s,\omega)$ 是取值 $\mathscr{R}^m$ 的可测函数，且几乎处处

$$\int_0^T |b(s,\omega)|^2 ds<\infty.$$

$I_T(w(t),\mathfrak{F}_t)$ 是线性空间. 我们称它为伊藤空间. 关于依概率一致收敛的完备性是此空间的重要性质.

定理 4 如果 $\eta_n(t)$ 是空间 $I_T(w(t),\mathfrak{F}_t)$ 中满足当 $n\to\infty$, $m\to\infty$ 时依概率 $\sup\limits_{t\leqslant T}|\eta_n(t)-\eta_m(t)|\to 0$ 的过程序列，那末存在过程 $\eta_0(t)\in I_T(w(t),\mathfrak{F}_t)$ 使得当 $n\to\infty$ 时依概率 $\sup\limits_{t\leqslant T}|\eta_n(t)-\eta_0(t)|\to 0$.

为证明这个定理我们需要这样的引理：

引理3 如果

$$\eta_n(t)=\int_0^t(b_n(s,\omega),dw(s))$$

是 $I_T(w(t),\mathfrak{F}_t)$ 中的过程序列且当 $n\to\infty$ 时依概率 $\sup_{t\leq T}|\eta_n(t)|\to 0$，那末当 $n\to\infty$时依概率

$$\int_0^T|b_n(s,\omega)|^2ds\to 0.$$

证. 不失一般性，可以认为以概率为1

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\leq T}|\eta_n(t)|=0,$$

因为只要换为子序列情形总可以做到这点. 而为了证明某个序列依概率收敛于0，证明它的所有子序列包含依概率收敛于0的子序列就够了.

令

$$\tau_N=\sup[t:t\leq T,\sup_{s\leq t,n>N}|\eta_n(s)|<\varepsilon].$$

对足够大的 $N,\tau_N=T$；τ_N 是 Марков 时间. 设 $\eta_n^N(t)=\eta_n(t)$ 当 $t\leq\tau_N$ 和 $\eta_n^N(t)=\eta_n(\tau_N)$ 当 $t\geq\tau_N$. 那末当 $n>N$ 时 $|\eta_n^N(t)|\leq\varepsilon$，和依概率 $\eta_n^N(T)\to 0$. 从而当 $n\to\infty$时，

$$\mathbf{E}|\eta_n^N(T)|^2=\mathbf{E}\int_0^{\tau_N}|b_n(s,\omega)|^2ds\to 0.$$

但

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left\{\int_0^T|b_n(s,\omega)|^2ds>\delta\right\}&\leq\mathbf{P}\{\tau_N<T\}+\mathbf{P}\left\{\int_0^{\tau_N}|b_n(s,\omega)|^2ds>\delta\right\}\\&\leq\mathbf{P}\{\tau_N<T\}+\frac{1}{\delta}\mathbf{E}\int_0^{\tau_N}|b_n(s,\omega)|^2ds.\end{aligned}$$

因此

$$\varlimsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\int_0^T|b_n(s,\omega)|^2ds>\delta\right\}\leq\mathbf{P}\{\tau_N<T\}.$$

当$N\to\infty$时，此式取极限即得所需的证明.

定理的证明．由定理的条件得 $\eta_n(0)$ 依概率收敛于某极限．因此不失一般性，可以认为对所有 $n, \eta_n(0)=0$。

因为当 $n, m\to\infty$ 时依概率

$$\sup_{t<T}\left|\int_0^t (b_n(s,\omega)-b_m(s,\omega),\ dw(s))\right|\to 0,$$

所以由于引理 3，当 $n, m\to\infty$ 依概率

$$\int_0^T |b_n(s,\omega)-b_m(s,\omega)|^2 ds\to 0. \tag{8}$$

选取子序列 n_k 使得

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{k,l\to\infty}\int_0^T |b_{n_k}(s,\omega)-b_{n_l}(s,\ \omega)|^2 ds=0\right\}=1.$$

那末存在这样的函数 $b_0(s,\omega)$，使

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{k\to\infty}\int_0^T |b_{n_k}(s,\ \omega)-b_0(s,\ \omega)|^2 ds=0\right\}=1, \tag{9}$$

而且 $b_0(s,\omega)$ 是可测且对所有 s 作为 ω 的函数是 $\mathfrak{F}_s$-可测[1)]． 由 8)和 9)得，当 $n\to\infty$ 时

$$\int_0^T |b_n(s,\omega)-b_0(s,\omega)|^2 ds\to 0,$$

依概率收敛．由于第一章 § 2 引理 2

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t<T}\left|\int_0^t (b_n(s,\omega),dw(s)) - \int_0^t (b_0(s,\omega),\ dw(s))\right|>\varepsilon\right\}$$
$$\leqslant P\left\{\int_0^T |b_n(s,\omega)-b_0(s,\omega)|^2 ds>\delta\right\}+\frac{\delta}{\varepsilon^2}.$$

先令 $n\to\infty$ 取极限，然后令 $\delta\to 0$ 取极限，即可证过程序列 $\eta_n(t)$ 依概率一致收敛于 $I_T(w(t),\mathfrak{F}_t)$ 中的过程

$$\eta_0(t)=\int_0^t (b_0(s,\omega),dw(s)).$$

1）为此需要从 $b_{n_k}(s,\ \omega)$ 中选取关于勒贝格测度和 P 的乘积测度几乎处处收敛子列，且在此子序列极限存在的地方，$b_0(s,\omega)$ 定义为这个极限．

定理得证.

$I_T(w(t),\mathfrak{F}_t)$ 中的过程是局部鞅，而且可以找到随机时间的导出序列 $\tau_N\uparrow T$,使得过程

$$\eta_N(t)=\eta(\tau_N\wedge t)$$

是平方可积鞅. 如果

$$\eta(t)=\int_0^t(b(s,\omega),dw(s)),\qquad(10)$$

τ_N 可取为

$$\tau_N=\sup\left[t:t\leqslant T,\int_0^t|b(s,\ \omega)|^2ds<N\right].$$

由于

$$\eta^2(t)-\int_0^t|b(s,\omega)|^2ds$$

也是局部鞅（τ_N 也是此过程的随机时间的导出序列),所以

$$\langle\eta,\eta\rangle_t=\int_0^t|b(s,\omega)|^2ds.$$

如果 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t,\lambda=\max(t_{k+1}-t_k)$，那末由第一章 § 1 定理 22 得,在依概率收敛意义下

$$\int_0^t|b(s,\ \omega)|^2ds=\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=0}^{n-1}(\eta(t_{k+1})-\eta(t_k))^2.\qquad(11)$$

对 $I_T(w(t),\ \mathfrak{F}_t)$ 中的任对过程 $\eta_1(t)$ 和 $\eta_2(t)$ 可以定义表达式

$$\langle\eta_1,\ \eta_2\rangle_t=\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=0}^{n-1}(\eta_1(t_{k+1})-\eta_1(t_k))(\eta_2(t_{k+1})-\eta_1(t_k));$$

(12)

极限应了解为依概率收敛意义下,λ 和 $t_k,k=1,\cdots,\ n$ 与上面的意义相同(见第一章 § 1 定理 22 推论).

如果 $\eta_k(t),k=1,2$,由等式

$$\eta_k(t)=\int_0^t(b_k(s,\omega),dw(s))$$

所定义,那末由(12)得

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_t = \int_0^t (b_1(s, \omega), b_2(s, \omega)) ds. \tag{13}$$

公式(13)使得能由等式(10)定义的过程 $\eta(t)$ 恢复函数 $b(s, \omega)$.

事实上,设 $\zeta_z(t), z \in \mathscr{R}^m$,由等式

$$\zeta_z(t) = (z, w(t)) = \int_0^t (z, dw(s))$$

所定义。那末

$$\langle \eta, \zeta_z \rangle_t = \int_0^t (b(s, \omega), z) ds,$$

就是说,对几乎所有 t

$$(b(t, \omega), z) = \frac{d}{dt} \langle \eta, \zeta_z \rangle_t. \tag{14}$$

显然,为确定 $b(t, \omega)$ 只要对 $\mathscr{R}^m$ 中某个基 z 知道 $(b(t, \omega), z)$ 就够了.

这结果给出了由按等式 (1) 所定义的伊藤过程 $\eta(t)$ 求函数 $a(s, \omega)$ 和 $B(s, \omega)$ 的可能性.

注意, 对 $\mathscr{R}^1$ 中所有以概率为 1 有界变差的过程 $\gamma(t)$ 和 Wiener 过程 $w_1(t)$ 来说,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} [\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)][w_1(t_{k+1}) - w_1(t_k)] = 0$$

(λ, t_k 如同前述意义),这因为极限号下的和不超过

$$\operatorname{Var} \gamma(\cdot) \sup_{|s_1 - s_2| \leq \lambda} |w_1(s_1) - w_2(s_2)|$$

以及 $w_1(t)$ 是连续过程.

设

$$\gamma_z(t) = \int_0^t (a(s, \omega), z) ds.$$

显然, $\gamma_z(t)$ 的变差不超过

$$\int_0^T |(a(s, \omega), z)| ds,$$

于是对 $z, x \in \mathscr{R}^m$,有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}[\gamma_x(t_{k+1})-\gamma_x(t_k)][\zeta_x(t_{k+1})-\zeta_x(t_k)]=0.$$

其次，如果

$$\xi_z(t)=\left(z,\int_0^t B(s,\ \omega)dw(s)\right)$$
$$=\int_0^t(B(s,\omega)z,dw(s)),$$

那末

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}[\zeta_x(t_{k+1})-\zeta_x(t_k)][\xi_z(t_{k+1})-\xi_z(t_k)]$$
$$=\langle\zeta_x,\xi_z\rangle_t=\int_0^t(x,B^*(s,\omega)z)ds.$$

因此，如果 $\eta(t)$ 由公式(1)所定义，那末对所有 $z,x\in\mathscr{R}^m$

$$\int_0^t(B(s,\omega)x,z)ds$$
$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n-1}[\zeta_x(t_{k+1})-\zeta_x(t_k)][(\eta(t_{k+1}),z)-(\eta(t_k),\ z)]$$

依概率收敛．于是对几乎所有 t

$$(B(t,\omega)x,z)=\frac{d}{dt}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}[\zeta_x(t_{k+1})-\zeta_x(t_k)]$$
$$\times[(\eta(t_{k+1}),z)-(\eta(t_k),z)].\tag{15}$$

公式(15)对几乎所有 t 和 ω 确定了 $B(t,\omega)$。如果确定了 $B(t,\omega)$，那末对几乎所有 t 和 ω

$$(a(t,\omega),z)=\frac{d}{dt}\Big[(\eta(t)-\eta(0)),z)$$
$$-\int_0^t(B^*(s,\omega)z,\ dw(s))\Big].\tag{16}$$

因此证明了

定理5 由公式(1)所给的伊藤过程 $\eta(t)$ 对几乎所有 t 和 ω 确定了函数 $a(t,\omega)$ 和 $B(t,\omega)$ 的值。

以 $I_T(\mathfrak{F}_t)$ 表示这样的过程 $\eta(t)$ 的集合：如存在可测数值函数 $\beta(s,\omega),\beta^2(s,\omega)\in\mathfrak{M}_1[0,T]$ 和关于流 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的 Wiener 过程 $w_1(t)$，使得

$$\eta(t)=\int_0^t\beta(s,\omega)dw_1(s). \tag{17}$$

$I_t(\mathfrak{F}_t)$ 中的过程的集合也可以只用 σ-代数 $\mathfrak{F}_t$ 来描述。易见，凡是关于 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的 Wiener 过程 $w(t)$ 总有 $I_T(w(t),\mathfrak{F}_t)\subset I_T(\mathfrak{F}_t)$. 事实上，如果

$$\eta(t)=\int_0^t(b(s,\omega),dw(s)),$$

那末

$$\eta(t)=\int_0^t|b(s,\omega)|dw_1(s),$$

其中

$$w_1(t)=\int_0^t\left(\frac{b(s,\omega)}{|b(s,\omega)|},\ dw(s)\right)$$

由于定理 1 推论 1 它是 Wiener 过程(如果 $|b(s,\omega)|=0$，我们认为 $\frac{b(s,\omega)}{|b(s,\omega)|}=z$，其中 z 是 $\mathscr{R}^m$ 中某个固定向量)。显然，$I_T(\mathfrak{F}_t)$ 中的过程 $\eta(t)$ 有如下性质：

1) $\eta(t)$ 是关于流 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的连续局部鞅；

2) 单调过程 $\langle\eta,\eta\rangle_t$ 关于直线上的 Lebesgue 测度是绝对连续，即是，存在非负可测函数 $\gamma(s,\omega)$，使

$$\langle\eta,\eta\rangle_t=\int_0^t\gamma(s,\omega)ds.$$

看来，在 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 附加上十分广泛的条件以后，条件 1) 和 2) 保证 $\eta(t)$ 属于 $I_T(\mathfrak{F}_t)$.

定义 如果至少有一个过程 $w_1(t)$ 存在，使得它是关于 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的一维 Wiener 过程，那末我们称流 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 是非退化的.

定理 6 设流 $\{\mathfrak{F}_t,0\leqslant t\leqslant T\}$ 是非退化的，那末所有满足条件 1) 和 2) 的过程 $\eta(t)$ 均属于 $I_T(\mathfrak{F}_t)$,

证．设

$$\langle\eta,\eta\rangle_t=\int_0^t\gamma(s,\omega)ds,$$

而 $w(t)$ 是关于 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的某一 Wiener 过程（因为流 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 是非退化的，所以它存在）．设

$$g_1(s,\omega)=\begin{cases}0, & \gamma(s,\omega)=0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{\gamma(s,\omega)}}, & \gamma(s,\omega)>0.\end{cases}$$

$$g_2(s,\omega)=\begin{cases}1, & \gamma(s,\omega)=0,\\ 0 & \gamma(s,\omega)>0.\end{cases}$$

令

$$\tilde{w}(t)=\int_0^t g_1(s,\omega)d\eta(s)+\int_0^t g_2(s,\omega)dw(s).$$

（按局部平方可积鞅随机积分的定义是第一章 § 2.）

正如由第一章 § 2 定理 3 所得，按局部鞅的随机积分仍是局部鞅．此时

$$\langle\tilde{w},\tilde{w}\rangle_t=\int_0^t g_1^2(s,\omega)d\langle\eta,\eta\rangle_s$$

$$+2\int_0^t g_1(s,\omega)g_2(s,\omega)d\langle\eta,w\rangle_s+\int_0^t g_2^2(s,\omega)ds$$

$$=\int_0^t[g_1^2(s,\omega)\gamma(s,\omega)+g_2^2(s,\omega)]ds=t,$$

因为，按函数 g_1 和 g_2 定义，$g_1\cdot g_2=0$ 和 $g_1^2\gamma+g_2^2=1$．这就是说，$\tilde{w}(t)$ 是 $\mathfrak{F}_t$-局部鞅且 $\langle\tilde{w},\tilde{w}\rangle_t=t$．但由于第一章 § 3 定理 3，$\tilde{w}(t)$ 是 Wiener 过程，

$$\int_0^t\sqrt{\gamma(s,\omega)}\,d\tilde{w}(s)=\int_0^t\sqrt{\gamma(s,\omega)}\,g_1(s,\omega)d\eta(s)$$

$$+\int_0^t\sqrt{\gamma(s,\omega)}\,g_2(s,\omega)dw(s)$$

$$=\int_0^t\sqrt{\gamma(s,\omega)}\,g_1(s,\omega)d\eta(s),$$

如果

$$\zeta(t)=\int_0^t\sqrt{\gamma(s,\omega)}\,g_1(\cdot,\ \ )d\eta(s),$$

那末

$$\langle\eta,\zeta\rangle_t=\int_0^t\sqrt{\gamma(s,\omega)}\,g_1(s,\omega)d\langle\eta,\eta\rangle_s$$

$$=\int_0^t\gamma(s,\omega)ds=\langle\eta,\eta\rangle_t,$$

$$\langle\zeta,\zeta\rangle_t=\int_0^t\gamma(s,\omega)ds=\langle\eta,\eta\rangle_t.$$

因此

$$\langle\eta-\zeta,\eta-\zeta\rangle_t=\langle\eta,\eta\rangle_t$$
$$-2\langle\eta,\zeta\rangle_t+\langle\zeta,\zeta\rangle_t=0.$$

就是说，$\mathbf{E}(\eta(t)-\zeta(t))^2=\mathbf{E}\langle\eta-\zeta,\eta-\zeta\rangle_t=0$ 和以概率为1有 $\eta(t)=\zeta(t)$，即是

$$\eta(t)=\int_0^t\sqrt{\gamma(s,\omega)}\ d\tilde{w}(s).$$

定理得证。

今后总假定流 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 是非退化的。

我们将证明空间 $I_T(\mathfrak{F}_t)$ 也是完备的。

定理 7 设 $\eta_n(t)$ 是 $I_T(\mathfrak{F}_t)$ 中的过程序列，如果存在过程 $\eta_0(t)$ 使得在依概率收敛意义下

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\leqslant T}|\eta_n(t)-\eta_0(t)|=0,$$

那末 $\eta_0(t)$ 随机等价于 $I_T(\mathfrak{F}_t)$ 中某个过程。

证。易见，$\eta_0(t)$ 是局部 $\mathfrak{F}_t$-鞅。余下要证明 $\langle\eta_0,\eta_0\rangle_t$ 关于 Lebesgue 测度绝对连续。

不失一般性，可认为 $\eta_n(t)$ 以概率为1一致收敛于 $\eta_0(t)$。

设 τ_N 由关系式

$$\tau_N=\sup\{t:t\leqslant T,\ \sup_{n>N}\sup_{s\leqslant t}|\eta_n(s)-\eta_0(s)|>\varepsilon\}$$

所定义；令 $\eta_n^N(t)=\eta_n(t\wedge\tau_N)$。那末 $|\eta_n^N(t)-\eta_0^N(t)|<\varepsilon$ 当 $n>N$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}|\eta_n^N(t)-\eta_0^N(t)|^2=0.$$

但

$$\mathbf{E}\langle\eta_n^N-\eta_0^N,\eta_n^N-\eta_0^N\rangle_t=\mathbf{E}|\eta_n^N(t)-\eta_0^N(t)|^2.$$

于是，

$$\lim_{n\to 0}\mathbf{E}\langle\eta_n^N-\eta_0^N,\eta_n^N-\eta_0^N\rangle_t=0.$$

但

$$\mathbf{P}\{\langle\eta_n-\eta_0,\eta_n-\eta_0\rangle_T>\delta\}$$

$$\leqslant\mathbf{P}\{\tau_N<T\}+\frac{1}{\delta}M\langle\eta_n^N-\eta_0^N,\eta_n^N-\eta_0^N\rangle_T.$$

因为对足够大的 $N,\tau_N=T$，所以依概率收敛意义

$$\langle\eta_n-\eta_0,\eta_n-\eta_0\rangle_T\to 0.$$

不失一般性，可以认为后一关系式以概率为 1 成立．因为，当 $t_1<t_2$ 时

$$\langle\eta_0,\eta_0\rangle_{t_2}-\langle\eta_0,\eta_0\rangle_{t_1}\leqslant 2[\langle\eta_n,\eta_n\rangle_{t_2}-\langle\eta_n,\eta_n\rangle_{t_1}$$
$$+\langle\eta_n-\eta_0,\eta_n-\eta_0\rangle_{t_2}-\langle\eta_n-\eta_0,\eta_n-\eta_0\rangle_{t_1}],$$

所以对 $[0,T]$ 上所有 Borel 集合 Λ

$$\int_\Lambda d\langle\eta_0,\eta_0\rangle_t\leqslant 2\int_\Lambda d\langle\eta_n,\eta_n\rangle_t$$

$$+2\int_\Lambda d\langle\eta_n-\eta_0,\eta_n-\eta_0\rangle_t\leqslant 2\int_\Lambda d\langle\eta_n,\eta_n\rangle_t$$

$$+2\langle\eta_n-\eta_0,\eta_n-\eta_0\rangle_T. \tag{18}$$

设 Λ 的 Lebesgue 测度为 0．顾及到 $\langle\eta_n,\eta_n\rangle_t$ 的绝对连续性，得

$$\int_\Lambda d\langle\eta_0,\eta_0\rangle_t\leqslant 2\langle\eta_n-\eta_0,\eta_n-\eta_0\rangle_T.$$

当 $n\to\infty$ 取极限，即证明了 $\langle\eta_0,\eta_0\rangle_t$ 关于 Lebesgue 测度是绝对连续．定理得证．

注．类似于公式(18)，对所有 Borel 集 $\Lambda\subset[0,T]$ 及过程 $\eta_1(t),\eta_2(t)\in I_T(\mathfrak{F}_t)$，可建立等式

$$\left|\int_\Lambda d\langle\eta_1,\eta_2\rangle_t\right|\leqslant\sqrt{\int_\Lambda d\langle\eta_1,\eta_1\rangle_t}\sqrt{\int_\Lambda d\langle\eta_2,\eta_2\rangle_t},$$

由此得 $\langle\eta_1,\eta_2\rangle_t$ 依 Lebesgue 测度绝对连续。此时如果

$$\langle\eta_i,\eta_k\rangle_t=\int_0^t\varphi_{ik}(s,\omega)ds,i,k=1,2,$$

那末

$$\varphi_{12}(s,\omega)\leqslant\sqrt{\varphi_{11}(s,\omega)\varphi_{22}(s,\omega)}.$$

在空间 $I_t(\mathfrak{F}_t)$ 可引进正交过程概念。我们将称两个过程 $\eta_1(t)$ 和 $\eta_2(t)$ 是正交，如果对所有 $t\in[0,T]$

$$\langle\eta_1,\eta_2\rangle_t=0.$$

我们说过程 $\eta(t)$ 能用过程 $\xi_1(t),\cdots,\xi_n(t)$ 线性表示，如果存在函数 $\alpha_1(t,\omega),\cdots,\alpha_n(t,\omega)$ 使

$$\sum_{i=1}^n\alpha_i^2(t,\omega)\in\mathfrak{M}_1[0,T]$$

和

$$\eta(t)=\sum_{i=1}^n\int_0^t\alpha_i(s,\omega)d\xi_i(s).$$

设 $\eta_1(t),\cdots,\eta_n(t)$ 是 $I_T(\mathfrak{F}_t)$ 中过程的某一集合。假设它们是线性独立的，即是它们之中的任何一个不能用其余的在上述意义下线性表示。那末可构造两两正交，且可用 $\eta_1(t),\cdots,\eta_n(t)$ 线性表示的过程 $\xi_1(t),\cdots,\xi_n(t)$，使得 $\eta_1(t),\cdots,\eta_n(t)$ 也能用 $\xi_1(t),\cdots,\xi_n(t)$ 线性表示。它们可按下列公式构造：

$$\xi_1(t)=\eta_1(t),$$

$$\xi_k(t)=\eta_k(t)-\sum_{i=1}^{k-1}\int_0^t\alpha_{ki}(s,\omega)d\xi_i(s),k=2,\cdots,n, \tag{19}$$

其中

$$\alpha_{ki}(s,\omega)=\frac{\varphi_{ki}(s,\omega)}{g_{ii}(s,\omega)},$$

如果

$$\langle\xi_i,\eta_k\rangle_t=\int_0^t\varphi_{ki}(s,\omega)ds,$$

$$\langle \xi_i, \xi_i \rangle_t = \int_0^t g_{ii}(s, \omega) ds$$

(当 $g_{ii}(s,\omega) = 0, \varphi_{ki}(s,\omega) = 0$ 和上关系式也被认为等于 0；见定理 7 注)。由公式(19)见，η_k 可用 $\xi_1, \cdots, \xi_k$ 线性表示，而 ξ_k 可用 $\eta_1, \cdots, \eta_k$ 线性表示。当 $j < k$ 时

$$\langle \xi_k, \xi_j \rangle_t = \langle \eta_k, \xi_j \rangle_t - \sum_{i=1}^{k-1} \int_0^t \alpha_{ki}(s, \omega) d\langle \xi_i, \xi_j \rangle_s.$$

如果 $\xi_1, \cdots, \xi_{k-1}$ 是两两正交，那末

$$\langle \xi_k, \xi_j \rangle_t = \int_0^t \varphi_{kj}(s, \omega) ds$$

$$- \int_0^t \alpha_{kj}(s, \omega) g_{jj}(s, \omega) ds = 0.$$

这用归纳法就建立了 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 的正交性。

设 $\{\xi_k(t), k = 1, 2, \cdots\}$ 是 $I_T(\mathfrak{F}_t)$ 中两两正交的过程序列，而 $\eta(t) \in I_T(\mathfrak{F}_t)$。

设

$$\langle \xi_k, \xi_k \rangle_t = \int_0^t g_k(s, \omega) ds,$$

$$\langle \eta, \xi_k \rangle_t = \int_0^t \varphi_k(s, \omega) ds, \qquad \langle \eta, \eta \rangle_t = \int_0^t \varphi(s, \omega) ds,$$

由定理 7 的注得知在 g_k 为 0 处 $\varphi_k(s, \omega)$ 几乎处处为 0。在 g_k 不为 0 处，设

$$\alpha_\eta^k(s, \omega) = \frac{\varphi_k(s, \omega)}{g_k(s, \omega)},$$

在相反情形设 $\alpha_\eta^k(s, \omega) = 0$。那末

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^n \int_0^t \alpha_\eta^k(s, \omega) d\xi_k(s) + \eta_n(t),$$

其中 $\eta_n(t)$ 正交于 $\xi_1(t), \cdots, \xi_n(t)$，于是也正交于过程

$$\int_0^t \alpha_\eta^k(s, \omega) d\xi_k(s).$$

因此，

$$\langle\eta,\eta\rangle_t=\int_0^t\varphi(s,\omega)ds$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_0^t[\alpha_\eta^k(s,\omega)]^2\varphi_k(s,\omega)ds+\langle\eta_n,\eta_n\rangle_t.$$

由此得对几乎所有(t,ω),

$$\sum_{k=1}^{n}[\alpha_\eta^k(t,\omega)]^2\varphi_k(t,\omega)\leqslant\varphi(t,\omega)$$

$\left(我们利用到\ \frac{d\langle\eta_n,\eta_n\rangle}{dt}\geqslant 0\right)$. 就是说

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_\eta^k(t,\omega)]^2\varphi_k(t,\omega)\leqslant\varphi(t,\omega)$$

(左边级数是收敛的,因为它的每一项是非负的). 因此,设

$$\zeta_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\alpha_\eta^k(s,\omega)d\xi_k(s),$$

我们有,当 $n,m\to\infty(n<m)$ 时

$$\langle\zeta_n-\zeta_m,\zeta_n-\zeta_m\rangle_T$$

$$=\int_0^T\sum_{k=n+1}^{m}[\alpha_\eta^k(s,\omega)]^2\varphi_k(s,\omega)ds\to 0. \qquad (20)$$

注意对所有过程 $\zeta(t)\in I_T(\mathfrak{F}_t)$, 从 $\zeta(t)$ 可表为 Wiener 过程的随机积分和随机积分的性质得出不等式

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\leqslant T}|\zeta(t)|>c\}\leqslant\frac{N}{c^2}+\mathbf{P}\{\langle\zeta,\zeta\rangle_T>N\}, \qquad (21)$$

(见第一章§3引理2). 因此由(20)推断出依概率

$$\sup_{t\leqslant T}|\zeta_n(t)-\zeta_m(t)|\to 0,$$

于是,由于定理7,存在过程 $\zeta_0(t)\in I_T(\mathfrak{F}_t)$,使得依概率

$$\sup_{t\leqslant T}|\zeta_n(t)-\zeta_0(t)|\to 0.$$

这样,我们建立了级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \alpha_\eta^k(s,\omega)d\xi_k(s)$$

依概率收敛，且它的和属于 $I_T(\mathfrak{F}_t)$. 就是说，

$$\eta(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \alpha_\eta^k(s,\omega)d\xi_k(s)+\eta_0(t),$$

其中 $\eta_0(t)\in I_T(\mathfrak{F}_t)$. 容易验证 $\eta_0(t)$ 正交于所有过程 $\xi_k(t)$, $k=1,2,\cdots$. 如果对所有 $\eta(t)\in I_T(\mathfrak{F}_t)$, 等式

$$\eta(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \alpha_\eta^k(s,\omega)d\xi_k(s) \tag{22}$$

成立，那末序列 $\{\xi_k(t),\ k=1,2,\cdots\}$ 称为 $I_T(\mathfrak{F}_t)$ 中的正交基. 由上述显然得到：两两正交的泛函序列 $\{\xi_k(t),k=1,2,\cdots\}$ 是基的充分必要条件是不存在异于 0 并正交于所有 $\xi_k(t)$ 的过程 $\eta(t)\in I_T(\mathfrak{F}_t)$.

当 $\varphi_k(t,\omega)$ 几乎处处是正的，满足

$$\int_0^t \varphi_k(s,\omega)ds=\langle\xi_k,\xi_k\rangle_t,$$

和 $\{\xi_k(t),k=1,2,\cdots\}$ 构成基，那末过程

$$w_k(t)=\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\varphi_k(s,\omega)}}d\xi_k(s)$$

可作为新的基；而且

$$\langle w_k,w_k\rangle_t=t.$$

过程 $w_k(t)$ 是 Wiener 过程，并且它们是独立的. 事实上，如果 $w^{(m)}(t)$ 是在 $\mathscr{R}^m$ 中有坐标 $(w_1(t),\cdots,w_m(t))$ 的过程，那末它是鞅，且对 $z\in\mathscr{R}^m$:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}[(w^{(m)}(t+h)-w^{(m)}(t),z)^2|\mathfrak{F}_t]\\&=\mathbf{E}\left\{\sum_{k,j=1}^{m}[\langle w_k,w_j\rangle_{t+h}-\langle w_k,w_j\rangle_t]z_kz_j|\mathfrak{F}_t\right\}\\&=h|z|^2.\end{aligned}$$

(z_k 表示 z 的坐标). 这意味着，由于定理 1 推论 2，它是 $\mathscr{R}^m$ 中

的 Wiener 过程。

我们来研究什么时候 $I_T(\mathfrak{F}_t)$ 有由 Wiener 过程组成有限基的问题。

定理 8 空间 $I_T(\mathfrak{F}_t)$ 有由 m 个 Wiener 过程组成的有限基，如果在 $\mathscr{R}^m$ 中存在 Wiener 过程 $w^{(m)}(t)$ 使得

$$\sigma[w^{(m)}(s),\ s\leqslant t]\subset\mathfrak{F}_t\subset\overline{\sigma[w^{(m)}(s),s\leqslant t]},$$

其中 $\sigma[w^{(m)}(s),s\leqslant t]$ 是由变量 $w^{(m)}(s)$, $s\leqslant t$,所生成的 σ-代数,$\overline{\sigma[\cdot]}$ 是这个 σ-代数的完备化。

证. 设 $w_1(t),\cdots,w_m(t)$ 是 $w^{(m)}(t)$ 的坐标. 显然它们属于 $I_T(\mathfrak{F}_t)$ 且由于独立性而两两正交. 为验证它们构成 $I_T(\mathfrak{F}_t)$ 中的基,只要证明当 $\xi(t)\in I_T(\mathfrak{F}_t)$ 且满足条件

$$\langle\xi,w_k\rangle_t=0,\ k=1,\cdots,m,$$

时能推得等式 $\langle\xi,\xi\rangle_T=0$ 就够了. 假定

$$\langle\xi,\xi\rangle_t=\int_0^t\gamma(s,\omega)ds.$$

取独立于 $w^{(m)}(t)$ 的一维 Wiener 过程 $\tilde{w}(t)$. 若 $\gamma(s,w)>0$, 设 $\alpha(s,\omega)=1$,若 $\gamma(s,\omega)=0$,设 $\alpha(s,\omega)=0$,那末过程

$$w_{m+1}(t)=\int_0^t\frac{\alpha(s,\omega)}{\sqrt{\gamma(s,\omega)}}d\xi(s)$$

$$+\int_0^t(1-\alpha(s,\omega))d\tilde{w}(s)$$

属于 $I_T(\hat{\mathfrak{F}}_t)$, 其中 $\hat{\mathfrak{F}}_t=\sigma[\mathfrak{F}_t\cup\sigma[\tilde{w}(s),\ s\leqslant t]]$. 此外, $I_T(\mathfrak{F}_t)\subset I_T(\hat{\mathfrak{F}}_t)$. 且由于 $\tilde{w}(t)$ 独立于每个 $\mathfrak{F}_t$-适应过程，从而 $\tilde{w}(t)$ 正交于 $I_T(\mathfrak{F}_t)$ 中所有过程,所以

$$\langle w_{m+1},\ w_{m+1}\rangle_t=\int_0^t\frac{\alpha^2(s,\omega)}{\gamma(s,\omega)}\gamma(s,\omega)ds$$

$$+\int_0^t(1-\alpha(s,\omega))^2ds=t.$$

利用 ξ 和 w_k 的正交性,可证明

$$\langle w_k,w_{m+1}\rangle_t=0,\quad k=1,\cdots,m.$$

因此，$(w_1(t),\cdots,w_m(t),w_{m+1}(t))$ 构成 $m+1$ 维 Wiener 过程，从而 $w_{m+1}(t)$ 独立于 $w^{(m)}(t)$，也就独立于 σ-代数 $\mathfrak{F}_t$。因此

$$\mathbf{E}(w_{m+1}(T)|\mathfrak{F}_t)=0.$$

利用 $\tilde{w}(t)$ 关于 $\mathfrak{F}_T$ 的独立性，得

$$\mathbf{E}\left(\int_0^t(1-\alpha(s,\omega))d\tilde{w}(s)|\mathfrak{F}_T\right)=0.$$

从而

$$\mathbf{E}\left(\int_0^t\frac{\alpha(s,\omega)}{\sqrt{\gamma(s,\omega)}}d\xi(s)|\mathfrak{F}_T\right)=0.$$

但在条件数学期望记号下的变量是 $\mathfrak{F}_T$-可测，即是，对所有 t

$$\zeta(t)=\int_0^t\frac{\alpha(s,\omega)}{\sqrt{\gamma(s,\omega)}}d\xi(s)=0.$$

因此对几乎所有 ω

$$\langle\zeta,\zeta\rangle_T=\int_0^T\alpha^2(s,\omega)ds=0;$$

从而对几乎所有 (s,ω)，$\alpha(s,\omega)=0$ 和 $\gamma(s,\omega)=0$，于是

$$\langle\xi,\xi\rangle_T=\int_0^T\gamma(s,\omega)ds=0.$$

定理得证.

当 σ-代数 $\mathfrak{F}_t$ 满足上述定理的条件时，空间 $I_T(\mathfrak{F}_t)$ 有十分简单的结构. 注意当 $\eta(t)\in I_T(\mathfrak{F}_t)$ 及 $\mathbf{E}\eta^2(T)<\infty$ 时，由于 $\eta(t)$ 是鞅，所以

$$\eta(t)=\mathbf{E}(\eta(T)|\mathfrak{F}_t).$$

$I_T(\mathfrak{F}_t)$ 中满足 $\mathbf{E}\eta^2(T)<\infty$ 的过程 $\eta(t)$ 所成的子集 $I_T^2(\mathfrak{F}_t)$ 在依概率一致收敛意义下在 $I_T(\mathfrak{F}_t)$ 中稠密：如果

$$\eta(t)=\int_0^t\gamma(s,\omega)dw(s),\quad \eta_N(t)=\int_0^t\gamma_N(s,\omega)dw(s),$$

$$\int_0^T(\gamma_N(s,\omega))^2ds\leqslant N$$

及

$$\int_0^T |\gamma_N(s,\omega) - \gamma(s,\omega)|^2 ds \to 0,$$

而 $w(t)$ 是 Wiener 过程,那末

$$\eta(t) = \lim_{N\to\infty} \eta_N(t).$$

因此为刻划 $I_T(\mathfrak{F}_t)$，只要刻划处处稠密集 $I_T^2(\mathfrak{F}_t)$ 就够了.下述定理给出这样的刻划.

定理 9 如果流 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 满足定理 8 的条件，那末 $I_T^2(\mathfrak{F}_t)$ 中所有过程有形式

$$\eta(t) = \mathbf{E}(\eta | \mathfrak{F}_t), \tag{23}$$

其中 η 是 $\mathfrak{F}_T$-可测变量，满足 $\mathbf{E}\eta = 0$，$\mathbf{E}\eta^2 < \infty$；反之如果 η 满足这样的条件，那末由公式（23）所确定的过程 $\eta(t)$ 属于 $I_T^2(\mathfrak{F}_t)$.

证. 对 $I_T^2(\mathfrak{F}_t)$ 中的过程，η 应取 $\eta(T)$.

设 η 是 $\mathfrak{F}_T$-可测，$\mathbf{E}\eta = 0$，$\mathbf{E}\eta^2 < \infty$. 那末可找到自身及它的一、二阶导数连续有界的函数 $f_\varepsilon(x_1,\cdots,x_n)(x_i \in \mathscr{R}^m)$ 和集 $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n \leqslant T$，使得

$$\mathbf{E}(\eta - f_\varepsilon(w(t_1),\cdots,w(t_n)))^2 \leqslant \varepsilon.$$

(此处 $w(t)$ 表示生成流 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的过程.)令

$$\eta_\varepsilon(t) = \mathbf{E}(f_\varepsilon(w(t_1),\cdots,w(t_n)) | \mathfrak{F}_t).$$

显然 $\eta_\varepsilon(t)$ 是鞅且 $\mathbf{E}\eta_\varepsilon(T)^2 < \infty$. 我们来证明 $\eta_\varepsilon(t) \in I_T(\mathfrak{F}_t)$.

设

$$f_\varepsilon^{(k)}(x_1,\cdots,x_k) = \mathbf{E} f_\varepsilon(x_1,\cdots,x_k,x_k + w(t_{k+1}) - w(t_k),\cdots,x_k + w(t_n) - w(t_k)).$$

那末在区间 $[t_{k-1}, t_k]$ 上

$$\eta_\varepsilon(t) = \int f_\varepsilon^{(k)}(w(t_1),\cdots,w(t_{k-1}),w(t) + y)p(t_k - t,y)dy,$$

其中 $p(t,y)$ 是 $w(t)$ 的分布密度. 就是说,

$$\eta_\varepsilon(t) = \Phi_\varepsilon^{(k)}(w(t_1),\cdots,w(t_{k-1}),t,w(t)),\quad t \in [t_{k-1},t_k],$$

其中 $\Phi_\varepsilon^{(k)}(w(t_1),\cdots,w(t_{k-1}),\ t,x)$ 是 t 和 x 的二次连续可微函数.

按伊藤公式

$$\eta_\varepsilon(t)-\eta_\varepsilon(t_{k-1})=\int_{t_{k-1}}^{t}\left[\frac{\partial}{\partial s}\Phi_\varepsilon^{k}(w(t_1),\cdots,w(t_{k-1}),s,w(s))\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\frac{d^2}{dx^2}\Phi_\varepsilon^{(k)}(w(t_1),\cdots,w(t_{k-1}),s,w(s))\right]ds$$

$$+\int_{t_{k-1}}^{t}\left(\frac{d}{dx}\Phi_\varepsilon^{(k)}(w(t_1),\cdots,w(t_{k-1}),s,w(s)),dw(s)\right)\quad(24)$$

$\left(\frac{d}{dx}\Phi_\varepsilon^{(k)}\right.$ 取值于 $\mathscr{R}^m$, $\left.\frac{d^2}{dx^2}\Phi_\varepsilon^{(k)}\text{ 是取值于 }\mathfrak{L}(\mathscr{R}^m)\right)$. 因为 $\eta_\varepsilon(t)$ 是鞅,所以由于引理 1,(24)式的右边的第一个积分等于 0. 可见 $\eta_\varepsilon(t)=\eta_\varepsilon(t_{k-1})$

$$+\int_{t_{k-1}}^{t}\left(\frac{d}{dx}\Phi_\varepsilon^{(k)}(w(t_1),\cdots,w(t_{k-1}),s,w(s)),dw(s)\right).$$

因为 $\eta_\varepsilon(0)=\mathbf{E}\eta_\varepsilon=0$,所以证明了存在函数 $b_\varepsilon(s,\omega)$,使

$$\eta_\varepsilon(t)=\int_0^t(b_\varepsilon(s,\omega),dw(s)),$$

和对固定 s, $t_{k-1}\leqslant s\leqslant t_k$,随机变量

$$b_\varepsilon(s,\omega)=\frac{d}{dx}\Phi_\varepsilon^{(k)}(w(t_1),\cdots,w(t_{k-1}),s,w(s))$$

是 $\mathfrak{F}_t$-可测和有界. 其次,

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta_\varepsilon(t)-\eta(t)|>c\}\leqslant\frac{1}{c^2}M|\eta_\varepsilon-\eta|^2\leqslant\frac{\varepsilon^2}{c^2}.$$

也就是 $\eta(t)$ 作为 $l_T(\mathfrak{F}_t)$ 中依概率一致收敛的极限也属于 $l_T(\mathfrak{F}_t)$.

推论 设 ξ 是任意 $\mathfrak{F}_T$-可测变量. 如果 $\mathbf{E}\xi^2<\infty$,那末

$$\xi=\mathbf{E}\xi+\int_0^T(b(s,\omega),dw(s)),$$

其中 $b^2(s,\omega)\in\mathfrak{M}_1[0,T]$ 和对每个 s 是 $\mathfrak{F}_s$-可测.

为验证此推论,仅需注意变量 $\xi-\mathbf{E}\xi$ 满足定理 9 的条件,于是 $\xi-\mathbf{E}\xi=\xi(T)$,其中 $\xi(t)\in l_T^2(\mathfrak{F}_t)$.

我们引用流 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的一个例子，对于这个流 $\{\mathfrak{F}_t\}$，$I_T(\mathfrak{F}_t)$ 有由一维 Wiener 过程 $w(t)$ 组成的基，但 $\mathfrak{F}_t$ 实质比 $\overline{\sigma[w(s), s\leqslant t]}$ 更大。设 $w(t)$ 是一维 Wiener 过程，$\mathfrak{F}_t^{(1)}$ 是由它生成的 σ-代数流，而 τ 是独立于 $w(t)$ 的变量，它有连续分布且取值于 $[0,T]$。设

$$\mathfrak{F}_t^{(2)}=\sigma[\{\tau>s\},s\leqslant t],\ \mathfrak{F}_t=\mathfrak{F}_t^{(1)}\cup\mathfrak{F}_t^{(2)}.$$

我们来证明凡 $\eta(t)\in I_T(\mathfrak{F}_t)$ 的过程均可以用 $w(t)$ 线性表示。这只要对 $I_T^2(\mathfrak{F}_t)$ 中的过程证明就够了。令

$$\phi(\tau)=\mathbf{E}(\eta(T)|\tau).$$

那末

$$\mathbf{E}(\phi(\tau)|\mathfrak{F}_t)=\mathbf{E}(\phi(\tau)|\mathfrak{F}_t^{(2)})=\phi(\tau)\chi_{\{\tau\leqslant t\}}$$

$$+[1-\chi_{\{\tau\leqslant t\}}]\frac{1}{\mathbf{P}\{\tau>t\}}\int_0^T\phi(u)dF(u)$$

$$=\frac{1}{\mathbf{P}\{\tau>t\}}\left[\int_\tau^T\phi(u)dF(u)\right.$$

$$\left.+\chi_{\{\tau\leqslant t\}}\int_t^T(\phi(\tau)-\phi(u))dF(u)\right],$$

其中 $F(u)=\mathbf{P}\{\tau<u\}$，$\chi_A$ 是集合 A 的示性函数。另方面，

$$\mathbf{E}(\phi(\tau)|\mathfrak{F}_t)=\mathbf{E}(\eta(t)|\mathfrak{F}_t^{(2)})=\mathbf{E}(\eta(t)|\tau).$$

于是，由于 $\eta(t)$ 的连续性，$\mathbf{E}(\phi(\tau)|\mathfrak{F}_t)$ 也连续。但函数

$$\chi_{\{\tau<t\}}\int_t^T[\phi(\tau)-\phi(u)]dF(u)$$

是关于 t 的连续函数仅在

$$\int_t^T[\phi(\tau)-\phi(u)]dF(u)=0$$

对几乎所有 t 成立的条件下才是可能的。由此条件得，对几乎所有 τ，$\phi(\tau)$ 是常数，且因为 $\mathbf{E}\phi(\tau)=0$，所以对几乎所有 τ，$\phi(\tau)=0$。

可构造函数序列 $f_n(s,x_1,\cdots,x_n)$ 使

$$\mathbf{E}(\eta(T)-f_n(\tau,w(t_1),\cdots,w(t_n)))^2\to 0$$

和

$$\mathbf{E}f_n(s, w(t_1), \cdots, w(t_n)) = 0,$$

$\{t_k\}$ 是区间 $[0, T]$ 上的某一稠密集，例如可取

$$f_n(\tau, w(t_1), \cdots, w(t_n)) = \mathbf{E}(\eta(T) | \tau, w(t_1), \cdots, w(t_n)).$$

类似于定理 9，可证明

$$\mathbf{E}(f_n(\tau, w(t_1), \cdots, w(t_n) | \mathfrak{F}_t) = \int_0^t g_n(s, \tau, \omega) dw(s),$$

其中 $g_n(s, \tau, \omega)$ 在固定 s 时是 $\mathfrak{F}_s$-可测。取极限即可证明 $\eta(t) \in I_T(\mathfrak{F}_t, w(t))$。

伊藤过程与扩散型过程 设 $\xi(t)$ 是 $[0, T]$ 上取值于 $\mathscr{R}^m$ 的连续 Марков 过程，$P(t, x, s, dy)$ 是它的转移概率。此过程称为扩散过程(见第 II 卷第一章 § 1)，如果存在定义在 $[0, T] \times \mathscr{R}^m$ 上取值于 $\mathscr{R}^m$ 的函数 $a(t, x)$ 和取值于 $\mathfrak{L}(\mathscr{R}^m)$ 的 $B(t, x)$，使得对所有 $\varepsilon > 0$，下列条件成立:

(I) $$\int_{|y-x|>\varepsilon} P(t, x, s, dy) = o(s-t),$$

(II) $$\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} (y-x) P(t, x, s, dy) = a(t, x)(s-t) + o(s-t),$$

(III) $$\forall z \in \mathscr{R}^m, \int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} (y-x, z)^2 P(t, x, s, dy) = (B(t, x)z, z)(s-t) + o(s-t).$$

我们来证明在某些补充限制下，过程 $\xi(t)$ 是关于某个 Wiener 过程 $w(t)$ 的伊藤过程，先证明下面的引理。

引理 4 设 $\eta(t)$ 是连续过程，$\{\mathfrak{F}_t\}$ 是由此过程生成的 σ-代数流。如果对所有 t，存在变量 ζ_t，使

$$\sup_{h>0} \left| \frac{1}{h} \mathbf{E}(\eta(t+h) - \eta(t) | \mathfrak{F}_t) \right| \leqslant \zeta_t \text{ 和 } \mathbf{E}\zeta_t < \infty, \text{此外,}$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathbf{E}(\eta(t+h) - \eta(t) | \mathfrak{F}_t) = 0,$$

那末 $\eta(t)$ 是鞅。

证。设对 $s \geqslant t$

$$\phi(s) = \mathbf{E}(\eta(s)|\mathfrak{F}_t).$$

那末

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{\phi(s+h)-\phi(s)}{h} = \lim_{h\downarrow 0}\mathbf{E}\left(\frac{\eta(s+h)-\eta(s)}{h}\,|\mathfrak{F}_t\right)$$

$$= \lim_{h\downarrow 0}\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\frac{\eta(s+h)-\eta(s)}{h}\,|\mathfrak{F}_s\right)|\mathfrak{F}_t\right)$$

$$= \mathbf{E}\left(\lim_{h\downarrow 0}\mathbf{E}\left(\frac{\eta(s+h)-\eta(s)}{h}\,|\mathfrak{F}_s\right)|\mathfrak{F}_t\right) = 0.$$

控制函数 ζ_t 的存在保证了极限与条件数学期望号交换的可能性．由 $\eta(s)$ 的连续性得 $\phi(s)$ 的连续性．因此，$\phi(s)$ 是连续函数，此函数在每个点存在等于 0 的右导数．因此当 $s \geqslant t$ 时 $\phi(s)$ 是常数．因为 $\phi(t) = \eta(t)$，所以

$$\mathbf{E}(\eta(s)|\mathfrak{F}_t) = \eta(t).$$

引理得证．

定理 10 设任意紧集 $K \subset \mathscr{R}^m$，条件（I）对 $0 \leqslant t < s \leqslant T$ 和 $x \in K$ 一致成立；条件（II）和（III）成立，而且函数 $a(s, x)$ 和 $B(s,x)$ 连续，对每个紧集 K 存在常数 l 和 c 使：

1）当 $x \in K$ 时

$$\left|\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} |y-x|\,P(t,x,s,\,dy)\right|$$
$$+\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} |y-x|^2 P(t,x,s,dy) \leqslant l(s-t),$$

2）$\sup\limits_{|x|>C} P(t,x,s,K) \leqslant l(s-t)$.

那末存在取值于 $\mathscr{R}^m$ 的 Wiener 过程 $w(t)$，使 $\xi(t)$ 是关于 $w(t)$ 的伊藤过程，而且

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s,\xi(s))ds + \int_0^t B^{1/2}(s,\xi(s))dw(s), \tag{25}$$

其中 $B^{1/2}$ 是算子 B 的非负定平方根．

证．任意 $z \in \mathscr{R}^m$，设

$$\eta(t) = \left(\xi(t) - \xi(0) - \int_0^t a(s,\xi(s))ds, z\right),$$

我们来证明 $\eta(t)$ 是局部鞅。

设 τ_N 是过程 $\xi(t)$ 从集合 $K_N = \{x: |x| \leqslant N\}$ 首次走出时间。以 $f_N(x)$ 表示 $f_N(x) = (x, z)$ 当 $|x| \leqslant N$，$f_N(x) = 0$ 当 $|x| \geqslant N + 1$ 的二次连续可微函数。我们来估计表示式

$$\left|\int [f_N(y) - f_N(x)] P(t,x,s,dy)\right|$$
$$\leqslant \left|\int_{|y-x|>\varepsilon} [f_N(y) - f_N(x)] P(t,x,s,dy)\right|$$
$$+ \left|\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} (f'_N(x), y - x) P(t,x,s,dy)\right|$$
$$+ \frac{1}{2}\left|\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} (f''_N(x + \Theta(y-x))(y-x), y-x)\right.$$
$$\left.\times p(t,x,s,dy)\right|.$$

(这里 $0<\Theta<1$；我们利用到 Taylor 公式)。由于条件 1)和 2)，凡 $C > N + 1 + \varepsilon$，

$$\left|\int_{|y-x|>\varepsilon} [f_N(y) - f_N(x)] P(t,x,s,dy)\right|$$
$$\leqslant 2\sup_z |f_N(z)| \left[\sup_{|x|\leqslant C} \int_{|x-y|>\varepsilon} P(t,x,s,dy)\right.$$
$$\left. + \sup_{|x|\geqslant C} P(t,x,s,K_{N+1})\right] = O(s-t).$$

其次，由于条件 1)

$$\left|\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} (f'_N(x), y-x) P(t,x,s,dy)\right|$$
$$\leqslant \sup_{|x|\leqslant N+1} |f'_N(x)| \left|\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} (y-x) P(t,x,s,dy)\right|$$
$$= O(s-t).$$

类似地对建立

$$\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} (f''_N(x+\Theta(y-x)(y-x), y-x) P(t,x,s,dy)$$
$$= O(s-t)$$

按 t, s 一致地成立。因此，存在这样的常数 l_1 使得

$$\left|\int[f_N(y)-f_N(x)]P(t,x,s,dy)\right|\leqslant l_1(s-t).$$

令

$$\eta_N(t)=f_N(\xi(t))-f_N(\xi(\theta))$$
$$-\int_0^t\Big[(a(s,\xi(s)),\ f'_N(\xi(s)))$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}f''_N(\xi(s))B(s,\xi(s))\Big]ds.$$

因为表达式

$$(a(s,x),f'_N(x))+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}f''_N(x)B(s,x)$$

是有界的，所以用 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 表示由过程 $\xi(t)$ 生成的 σ-代数流，我们有

$$\left|\mathbf{E}\left(\frac{\eta_N(s)-\eta_N(t)}{s-t}\,\middle|\,\mathfrak{F}_t\right)\right|\leqslant l_2,$$

其中 l_2 是某个常数．此外，易见

$$\lim_{s\downarrow t}\frac{1}{s-t}\int[f_N(y)-f_N(x)]P(t,x,s,dy)$$
$$=(a(t,x),\ f'_N(x))+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}f''_N(x)B(t,x)$$

(这个事实，例如，在证明第 II 卷第一章 § 1 定理 6 时已确立)．因此

$$\lim_{s\downarrow t}\mathbf{E}\left(\frac{\eta_N(s)-\eta_N(t)}{s-t}\,|\,\mathfrak{F}_t\right)=0.$$

于是，由于引理 4 $\eta_N(t)$ 是鞅．但当 $t\leqslant\tau_N$ 时 $\eta_N(t)=\eta(t)$，因此证明了 $\eta(t)$ 是局部鞅．

现来证明

$$\zeta(t)=\eta^2(t)-\int_0^t(B(s,\xi(s))z,z)ds$$

也是局部鞅．为此注意当 $t\leqslant\tau_N$ 时过程 $\zeta(t)$ 等于过程

$$\zeta_N(t)=\eta_N^2(t)-\int_0^t(B(s,\xi(s))f'_N(\xi(s)),f'_N(\xi(s)))ds.$$

过程 $\zeta_N(t)$ 有界且

$$\left|\mathbf{E}\left(\frac{\zeta_N(s)-\zeta_N(t)}{s-t}\middle|\mathfrak{F}_t\right)\right|\leqslant\mathbf{E}\left(\frac{[\eta_N(s)-\eta_N(t)]^2}{s-t}\middle|\mathfrak{F}_t\right)$$

$$+\sup_{x,u}(B(u,x)f'_N(x),f'_N(x))$$

$$\leqslant 2\mathbf{E}\left(\frac{[f_N(\xi(s))-f_N(\xi(t))]^2}{s-t}\middle|\mathfrak{F}_t\right)+l_3,$$

其中 l_3 是某个常数. 但当 $C>N+1+\varepsilon$ 时,

$$\mathbf{E}([f_N(\xi(s))-f_N(\xi(t))]^2|\mathfrak{F}_t)$$

$$\leqslant\sup_x\int[f_N(y)-f_N(x)]^2P(t,x,s,dy)$$

$$\leqslant\sup_x\int_{|x-y|\leqslant\varepsilon}[f_N(y)-f_N(x)]^2P(t,x,s,dy)$$

$$+O\left(\sup_{|x|\leqslant C}\int_{|y-x|>\varepsilon}P(t,x,s,dy)\right.$$

$$\left.+\sup_{|x|\geqslant C}P(t,x,s,K_{N+1})\right)$$

$$=O\left(\sup_{|x|\leqslant C}\int_{|x-y|\leqslant\varepsilon}|x-y|^2P(t,x,s,dy)+(s-t)\right).$$

就是说对某个 l_4,

$$\left|\mathbf{E}\left(\frac{\zeta_N(s)-\zeta_N(t)}{s-t}\middle|\mathfrak{F}_t\right)\right|\leqslant l_4.$$

此外,

$$\lim_{s\downarrow t}\mathbf{E}\left(\frac{\zeta_N(s)-\zeta_N(t)}{s-t}\middle|\mathfrak{F}_t\right)$$

$$=\lim_{s\downarrow t}\mathbf{E}\left(\frac{[\eta_N(s)-\eta_N(t)]^2}{s-t}\middle|\mathfrak{F}_t\right)$$

$$-(B(t,\xi(t))f'_N(\xi(t)),\ f'_N(\xi(t))))=0.$$

利用引理 4,得证 $\zeta_N(t)$ 是鞅,因而证明了 $\zeta(t)$ 是局部鞅. 于是 $\eta(t)$ 是局部鞅,且

$$\langle\eta,\eta\rangle_t=\int_0^t(B(s,\xi(s))z,z)ds.$$

设 $\tilde{w}$ 是独立于 $\xi(t)$ 的 $\mathscr{R}^m$ 中的 Wiener 过程. 以 $P_1(s,$

x) 表示在算子 $B(s,x)$ 的值域上的投影算子，$P_2(s,x)$ 是在算子 $B(s,x)$ 的零-空间上的投影算子；P_1 和 P_2 正交，$P_1+P_2=I$。令

$$\xi_1(t)=\xi(t)-\int_0^t a(s,\xi(s))ds,$$

$$w(t)=\int_0^t B^{-1/2}(s,\xi(s))P_1(s,\xi(s))d\xi_1(s)$$

$$+\int_0^t P_2(s,\xi(s))d\widetilde{w}(s)$$

(按 ξ_1 的积分定义为按局部鞅的积分；将 $B^{-1/2}P_1z$ 理解为在 B 的值域中这样的向量 z': $B^{1/2}z'=P_1z$)。 由 $\xi_1(t)$ 和 $\widetilde{w}(t)$ 的独立性得

$$\langle(\xi_1,z),\ (\widetilde{w},z)\rangle_t=0.$$

因此，$(w(t),z)$ 是连续局部鞅，满足

$$\langle(w,z),(w,z)\rangle_t=\int_0^t(P_1(s,\xi(s))z,z)ds$$

$$+\int_0^t(P_2(s,\xi(s))z,z)ds=t(z,z).$$

这就是说，$w(t)$ 是 $\mathscr{R}^m$ 中的 Wiener 过程. 其次，因为 $B^{1/2}P_2=0$，所以

$$\int_0^t B^{1/2}(s,\xi(s))dw(s)=\int_0^t P_1(s,\xi(s))d\xi_1(s)$$

$$+\int_0^t B^{1/2}(s,\xi(s))P_2(s,\xi(s))d\widetilde{w}(s)$$

$$=\int_0^t P_1(s,\xi(s))d\xi_1(s).$$

对所有 $z\in\mathscr{R}^m$，因为

$$\left\langle\int_0^t(P_2(s,\xi(s))z,d\xi_1(s),\int_0^t(P_2(s,\xi(s))z,\ d\xi_1(s))\right\rangle$$

$$=\int_0^t(B(s,\xi(s))P_2(s,\xi(s))z,P_2(s,\xi(s))z)ds=0,$$

所以

$$\int_0^t (P_2(s,\xi(s))z, d\xi_1(s)) = 0.$$

因此

$$\int_0^t P_1(s, \xi(s))d\xi_1(s) = \int_0^t [P_1(s,\xi(s)) + P_2(s,\xi(s))]d\xi_1(s)$$
$$= \xi_1(t) - \xi_1(0).$$

就是说，

$$\xi(t) - \xi(0) - \int_0^t a(s,\xi(s))ds$$
$$= \int_0^t B^{1/2}(s, \xi(s))dw(s).$$

定理得证.

注 1. 如果要求

$$\sup_{x\in\mathscr{R}^m} \int_{|y-x|>\varepsilon} P(t,x,y,dy) = O(s-t),$$

那末定理的条件 2) 成为多余的，因为它是用来估计

$$\left|\int_{|x-y|>\varepsilon} (f_N(y) - f_N(x))P(t,x,s,dy)\right|$$
$$+ \left|\int_{|y-x|>\varepsilon} (f_N(y) - f_N(x))^2 P(t,x,s,dy) = O(s-t),\right.$$

现由于 f_N 是有界的，这估计式成立.

注 2. 假设对所有 $\varepsilon > 0$ 在 $\mathscr{R}^m$ 中的连续过程 $\xi(t), t\in[0,T]$，在 $s > t$ 时满足条件

(I) $\quad \mathbf{P}\{|\xi(s) - \xi(t)| > \varepsilon | \mathfrak{F}_t\} = o(s-t),$

(II) $\quad \mathbf{E}((\xi(s) - \xi(t), z)\psi_\varepsilon(\xi(s) - \xi(t)) | \mathfrak{F}_t)$
$$= (a(t,\xi(\cdot)), z)(s-t) + o(s-t),$$

(III) $\quad \mathbf{E}((\xi(s) - \xi(t), z)^2\psi_\varepsilon(\xi(s) - \xi(t)) | \mathfrak{F}_t)$
$$= (B(t,\xi(\cdot))z, z)(s-t) + o(s-t),$$

其中 $z\in\mathscr{R}^m$, $\psi_\varepsilon(x) = 1$ 当 $|x| \leqslant \varepsilon$, $\psi_\varepsilon(x) = 0$ 当 $|x| > \varepsilon$, $a(t,x(\cdot))$ 和 $B(t,x(\cdot))$ 是定义在 $[0,T]\times\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 上的函数 ($\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 是在 $[0,T]$ 上取值于 $\mathscr{R}^m$ 的连续函数的集合).

如果 $a(t, x(\cdot))$ 和 $B(t, x(\cdot))$ 连续且存在这样的常数

l,使得

$$\frac{1}{s-t}\mathbf{P}\{|\xi(s)-\xi(t)|>\varepsilon|\mathfrak{F}_t\}\leqslant l,\quad s>t,$$

那末可以存在 Wiener 过程 $w(t)$ 使

$$\xi(t)=\xi(0)+\int_0^t a(s,\xi(\cdot))ds$$
$$+\int_0^t B^{1/2}(s,\xi(\cdot))dw(s). \tag{26}$$

此论断的证明与定理 10 的证明相同.

测度的绝对连续替换 设 $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$ 是原概率空间, $\mathfrak{F}_t\subset\mathfrak{S}$ 是某个 σ-代数流, $w(s)$ 是关于它的 Wiener 过程. 如果 $\rho_T(\omega)$ 是关于 $\mathfrak{S}$ 的非负可测泛函, 满足 $\mathbf{E}\rho_T(\omega)=1$. 那末可在 $\{\Omega,\mathfrak{S}\}$ 上考虑新的概率测度

$$\tilde{\mathbf{P}}(A)=\int_A\rho_T(\omega)\mathbf{P}(d\omega). \tag{27}$$

一般来说,在概率空间 $\{\Omega,\mathfrak{S},\tilde{\mathbf{P}}\}$ 上过程 $w(t)$ 已经不是 Wiener 过程.

但是对某个特殊形式的泛函 $\rho_T(\omega)$ 来说, 在概率空间 $\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$ 和 $\{\Omega,\mathfrak{S},\tilde{\mathbf{P}}\}$ 上的伊藤过程类是相重合的. 这事实是属于 Гирсанов 的如下重要定理的推论.

定理 11 设 $b(t,\omega)$ 是 $[0,T]\times\Omega$ 上取值于 $\mathscr{R}^m$ 的适应于 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的函数, $|b(t,\omega)|^2\in\mathfrak{M}_1[0,T]$. 令

$$\rho_T(\omega)=\exp\left\{-\int_0^T(b(s,\omega),dw(s))\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int_0^T|b(s,\omega)|^2ds\right\}. \tag{28}$$

那末,如果 $\mathbf{E}\rho_T(\omega)=1$,则过程

$$\tilde{w}(t)=\int_0^t b(s,\omega)ds+w(t) \tag{29}$$

是概率空间 $\{\Omega, \mathfrak{S}, \tilde{\mathbf{P}}\}$ 上关于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的 Wiener 过程.

在证明定理以前，先证明某些辅助命题。

引理 5 如果 $b(s,\omega)$ 是 t 的有界阶梯函数，$|b(s,\omega)|\leqslant N$，那末对 $t\in[0,T]$

$$\mathbf{E}\left(\exp\left\{\int_t^T (b(s,\omega),\ dw(s))\right\}\Big|\ \mathfrak{F}_t\right)\leqslant e^{\frac{1}{2}N^2(T-t)}. \tag{30}$$

证. 当 $s>t$ 时，

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(\exp\{(b(t,\omega),\ w(s)-w(t))\}|\mathfrak{F}_t)\\&=\exp\left\{\frac{1}{2}|b(t,\ w)|^2(s-t)\right\}\leqslant e^{\frac{1}{2}N^2(s-t)}.\end{aligned}$$

设 $t=t_0<t_1<\cdots<t_n=T$ 和 $b(s,\omega)=b(t_k,\ \omega)$ 当 $t_k\leqslant s<t_{k+1}$. 那末

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left(\exp\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(b(t_k,\omega),\ w(t_{k+1})-w(t_k))\right\}\Big|\ \mathfrak{F}_t\right)\\&=\mathbf{E}(\cdots\mathbf{E}(\mathbf{E}(\exp\{(b(t_{n-1},\omega),w(t_n)-w(t_{n-1}))\}|\mathfrak{F}_{t_{n-1}})\\&\quad\times\exp\{(b(t_{n-2},\omega),w(t_{n-1})-w(t_{n-2}))\}|\mathfrak{F}_{t_{n-2}})\times\\&\quad\cdots\times\exp\{(b(t_0,\omega),w(t_1)-w(t_0))\}|\mathfrak{F}_{t_0})\\&\leqslant\prod_{k=0}^{n-1}\exp\left\{\frac{1}{2}\ N^2(t_{k+1}-t_k)\right\}.\end{aligned}$$

推论 任意适应于 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的函数 $b(t,\omega)$，如满足 $|b(t,\omega)|\leqslant N$，那末等式(30)成立.

利用取极限的方法可得到此推论.

引理 6 如果 $b(t,\omega)$ 是适应于 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的函数，且 $|b(t,\omega)|\leqslant N$，那末

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left(\exp\left\{-\int_t^T(b(s,\omega),dw(s))\right.\right.\\&\qquad\left.\left.-\frac{1}{2}\int_t^T|b(s,\ \omega)|^2ds\right\}\Big|\mathfrak{F}_t\right)=1.\end{aligned}$$

证. 设

$$\rho_{t_1t_2}(\omega)=\exp\left\{-\int_{t_1}^{t_2}(b(s,\omega),\ dw(s))\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}|b(s,\omega)|^2ds\Big\}. \tag{31}$$

那末利用伊藤公式，得

$$\rho_{t_1,t_2}(\omega)=1+\int_{t_1}^{t_2}\rho_{t_1,s}(\omega)(b(s,\omega),dw(s)).$$

因为由于引理 5 的推论

$$\mathbf{E}|\rho_{t,s}(\omega)|^2|b(s,\omega)|^2\leqslant N^2e^{2N^2(s-t)},$$

所以

$$\mathbf{E}\left(\int_{t_1}^{t_2}\rho_{t_1,s}(\omega)(b(s,\omega),\ dw(s))|\mathfrak{F}_{t_1}\right)=0.$$

这就完成了引理的证明.

推论 1 任意适应于 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的函数 $b(t,\ \omega)$，如满足 $|b(t,\omega)|^2\in\mathfrak{M}_1[0,T]$,则有

$$\mathbf{E}\left(\exp\Big\{-\int_t^T(b(s,\omega),\ dw(s))-\frac{1}{2}\int_t^T|b(s,\ \omega)|^2ds\Big\}|\mathfrak{F}_t\right)\leqslant 1.$$

这不等式是 Fatou 定理的推论.

推论 2 如果 $\mathbf{E}\rho_T(\omega)=1$,那末当 $0\leqslant t_1<t_2\leqslant T$ 时

$$\mathbf{E}(\rho_{t_1,t_2}(\omega)|\mathfrak{F}_{t_1})=1.$$

事实上

$$1=\mathbf{E}\rho_{0,t_1}(\omega)\mathbf{E}(\rho_{t_1,t_2}(\omega)\mathbf{E}(\rho_{t_2,T}(\omega)|\mathfrak{F}_{t_2})|\mathfrak{F}_{t_1}). \tag{32}$$

如果不等式

$$\mathbf{E}(\rho_{t_1,t_2}(\omega)|\mathfrak{F}_{t_1})<1$$

以正概率成立,那末在(32)右边的表示式也是小于 1.

现来证明定理 11. 我们以 $\tilde{\mathbf{E}}$ 表示按测度 $\tilde{p}$ 的数学期望.

为证明定理,只要验证当 $t_1<t_2$ 时

$$\tilde{\mathbf{E}}\exp\{i(z,\tilde{w}(t_2)-\tilde{w}(t_1))\}|\mathfrak{F}_{t_1})=\exp\Big\{-\frac{1}{2}|z|^2(t_2-t_1)\Big\}$$

就够了,即只要证对所有有界 $\mathfrak{F}_{t_1}$-可测变量 η

$$\mathbf{E}\eta\exp\{i(z,\tilde{w}(t_2)-\tilde{w}(t_1))\}$$
$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}|z|^2(t_2-t_1)\right\}\tilde{\mathbf{E}}\eta. \tag{33}$$

因为由引理 6 推论 2 得知对 $\mathfrak{F}_t$-可测变量 ξ

$$\tilde{\mathbf{E}}\xi=\mathbf{E}\xi\rho_{0,t}(\omega)\rho_{t,T}(\omega)$$
$$=\mathbf{E}\xi\rho_{0,t}(\omega)\mathbf{E}(\rho_{t,T}(\omega)|\mathfrak{F}_t)$$
$$=\mathbf{E}\xi\rho_{0,t}(\omega), \tag{34}$$

所以(33)等价于下等式:

$$\mathbf{E}\eta'\exp\{i(z,\tilde{w}(t_2)-\tilde{w}(t_1))\}\rho_{t_1,t_2}(\omega)$$
$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}|z|^2(t_2-t_1)\right\}\mathbf{E}\eta', \tag{35}$$

其中 $\eta'=\eta\rho_{0,t_1}(\omega)$ 是满足 $\mathbf{E}|\eta'|<\infty$ 的变量.

按伊藤公式

$$d\exp\{i(z,\tilde{w}(t)-\tilde{w}(t_1))\}\rho_{t_1,t}(\omega)=\exp\{i(z,\tilde{w}(t)$$
$$-\tilde{w}(t_1))\}\rho_{t_1,t}(\omega)[-(b(t,\omega),dw(t))$$
$$+i(b(t,\omega),z)dt+i(z,dw(t))$$
$$\left.-\frac{1}{2}|z|^2dt-i(b(t,\omega),z)dt\right].$$

因此,

$$\exp\{i(z,\tilde{w}(t_2)-\tilde{w}(t_1))\}\rho_{t_1,t_2}(\omega)$$
$$=1+\int_{t_1}^{t_2}\exp\{i(z,\tilde{w}(t)-\tilde{w}(t_1))\}\rho_{t_1,t}(\omega)$$
$$\times[i(z,dw(t))-(b(t,\omega),dw(t))]$$
$$-\frac{1}{2}|z|^2\int_{t_1}^{t_2}\exp\{i(z,\tilde{w}(t)-\tilde{w}(t_1))\}\rho_{t_1,t}dt.$$

假设 $|b(t,\omega)|\leqslant N$. 因为

$$[\rho_{t_1,t}(\omega)(|z|+|b(t,\omega)|)]^2$$
$$\leqslant(N+|z|)^2\exp\left\{-2\int_{t_1}^{t}(b(s,\omega),dw(s))\right\},$$

所以由于引理 5

$$\mathbf{E}\int_{t_1}^{t_2}[\rho(t_1,t)(|z|+|b(t,\omega)|)]^2dt<\infty;$$

这意味着，

$$\mathbf{E}\eta'\int_{t_1}^{t_2}\exp\{i(z,\widetilde{w}(t)-\widetilde{w}(t_1))\}\rho_{t_1,t}(\omega)$$
$$\times[-(b(t,\omega),dw(t))+i(z,dw(t))]=0$$

和

$$\mathbf{E}\eta'\exp\{i(z,\widetilde{w}(t_2)-\widetilde{w}(t_1))\}\rho_{t_1,t_2}(\omega)$$
$$=\mathbf{E}\eta'-\frac{|z|^2}{z}\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{E}\eta'\exp\{i(z,\widetilde{w}(t)$$
$$-\widetilde{w}(t_1))\}\rho_{t_1,t}(\omega)dt.$$

当 $t_2\in[t_1,T]$ 时，将此关系式看作关于

$$\mathbf{E}\eta'\exp\{i(z,\widetilde{w}(t_2)-\widetilde{w}(t_1))\}\rho_{t_1,t_2}(\omega)$$

的方程，解此方程，可证实对有界的 $b(t,\omega)$，(35) 是成立的。

现设 $b_N(s,\omega)$ 是有界函数序列，使得依概率

$$\int_0^T|b_N(s,\omega)-b(s,\omega)|^2ds\to 0.$$

那末令

$$\widetilde{w}_N(t)=\int_0^t b_N(s,\omega)ds+w(t),$$

$$\rho_{t,s}^N(\omega)=\exp\left\{-\int_t^s(b_N(u,\omega),dw(u))\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int_t^s|b_N(u,\omega)|^2du\right\},\tag{36}$$

我们有

$$\mathbf{E}\eta\rho_{0,t_2}^N(\omega)\exp\{i(z,\widetilde{w}_N(t_2)-\widetilde{w}_N(t_1))\}$$
$$=\mathbf{E}\eta\rho_{0,t_1}^N(\omega)\exp\left\{-\frac{|z|^2}{2}(t_2-t_1)\right\}.\tag{37}$$

因为当 $N\to\infty$ 时依概率 $\widetilde{w}_N(t)\to\widetilde{w}(t)$，所以

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{E}\eta\rho_{0,t_2}(\omega)\exp\{i(z,\widetilde{w}_N(t_2)-\widetilde{w}_N(t_1))\}$$
$$=\mathbf{E}\eta\rho_{0,t_2}(\omega)\exp\{i(z,\widetilde{w}(t_2)-\widetilde{w}(t_1))\}.\tag{38}$$

其次，

$$|\mathbf{E}\eta\rho_{0,t_2}^N(\omega)\exp\{i(z,\widetilde{w}_N(t_2)-\widetilde{w}_N(t_1))\}$$

$$- \mathbf{E}\eta\rho_{0,t_2}(\omega)\exp\{i(z,\tilde{w}_N(t_2)-\tilde{w}_N(t_1))\}|$$

$$\leqslant C\mathbf{E}|\rho_{0,t_2}^N(\omega)-\rho_{0,t_2}(\omega)|, \tag{39}$$

其中 C 是满足 $|\eta|\leqslant C$ 的常数。

同样有

$$|\mathbf{E}\eta\rho_{0,t_1}^N(\omega)-\mathbf{E}\eta\rho_{0,t_1}(\omega)|\leqslant C\mathbf{E}|\rho_{0,t_1}^N(\omega)-\rho_{0,t_1}(\omega)|.$$

我们来证明，对所有 $t\in[0,T]$

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{E}|\rho_{0,t}^N(\omega)-\rho_{0,t}(\omega)|=0. \tag{40}$$

因为 $\mathbf{E}\rho_{0,t}(\omega)=\mathbf{E}\rho_{0,t}^N(\omega)=1$，所以

$$\mathbf{E}|\rho_{0,t}^N(\omega)-\rho_{0,t}(\omega)|=\mathbf{E}(|\rho_{0,t}^N(\omega)-\rho_{0,t}(\omega)|$$
$$+\rho_{0,t}(\omega)-\rho_{0,t}^N(\omega)).$$

另方面，

$$|\rho_{0,t}^N(\omega)-\rho_{0,t}(\omega)|+\rho_{0,t}(\omega)-\rho_{0,t}^N(\omega)\leqslant 2\rho_{0,t}(\omega).$$

由于不等式左边依概率趋于 0，所以应用 Lebesgue 定理得(40)。

利用(38)和(39)，得证

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{E}\eta\rho_{0,t_2}^N(\omega)\exp\{i(z,\tilde{w}_N(t_2)-\tilde{w}_N(t_1))\}$$
$$=\mathbf{E}\eta\rho_{0,t_2}(\omega)\exp\{i(z,\tilde{w}(t_2)-\tilde{w}(t_1))\}.$$

由(40)得

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{E}\eta\rho_{0,t_1}^N=\mathbf{E}\eta\rho_{0,t_1}.$$

因而建立(35)，定理得证。

注. 假设过程 $w_1(t)\in\mathscr{R}^k$ 独立于过程 $w(t)$ 和 $\rho_T(\omega)$. 那末 $w_1(t)$ 也是 $\{\Omega,\mathfrak{S},\tilde{\mathbf{P}}\}$ 上的 Wiener 过程.

事实上，考虑空间 $\mathscr{R}^{m+k}$ 中的联合过程 $w^*(t)=\{w(t);w_1(t)\}$，它是 Wiener 过程. 如果在 $\mathscr{R}^{m+k}$ 中定义 $b^*(s,\omega)$ 为 $\{b(s,\omega);0\}$，那末

$$\int_0^T(b^*(s,\omega),dw^*(s))=\int_0^T(b(s,\omega),dw(s)),$$

由于定理 11，过程

$$\tilde{w}^*(t)=\int_0^t b^*(s,\omega)ds+w^*(t)$$

是 $\{\Omega,\mathfrak{S},\tilde{\mathbf{P}}\}$ 上的 Wiener 过程. 因此联合过程

$$\left\{w(t)+\int_0^t b(s,\omega)ds;w_1(t)\right\}$$

的两个分量是 Wiener 过程,且相互独立.

此附注使得能构造出由 $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$ 上的伊藤过程集合到空间 $\{\Omega,\mathfrak{S},\tilde{\mathbf{P}}\}$ 的伊藤过程的集合的映象.

事实上,设 $\tilde{w}(t)$ 是关于 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的任意一维 Wiener 过程.我们假设在 $I_T(\mathfrak{F}_t)$存在由 Wiener 过程组成的基.过程 $w_1(t),\cdots,w_m(t)$ 是 $w(t)$ 在 $\mathscr{R}^m$ 的坐标,它们可认为是此基的元素. 那末

$$\bar{w}(t)=\int_0^t(c(s,\omega),dw(s))$$

$$+\int_0^t\alpha(s,\omega)dw^*(s), \tag{41}$$

其中 $c(s,\omega)$ 是取值于 $\mathscr{R}^m$ 的函数,而 $\alpha(s,\omega)$ 是取值于 $\mathscr{R}^1$ 的函数, $w^*(t)$ 是独立于 $w(t)$ 的 Wiener 过程. 如果在 $\bar{w}(t)$ 用基的元素表示出的式中分别按 $w_1,\cdots,w_m$ 和其余的 Wiener 过程进行积分,就得到后一表示式.$\bar{w}(t)$ 是 $\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$ 上的 Wiener 过程当且仅当在表示式(41)中对几乎所有 s 和 ω,

$$|c(s,\omega)|^2+\alpha^2(s,\omega)=1.$$

使它和过程

$$\tilde{w}(t)=\int_0^t(c(s,\omega),d\tilde{w}(s))$$

$$+\int_0^t\alpha(s,\omega)dw^*(s) \tag{42}$$

相对应. 这是概率空间 $\{\Omega,\mathfrak{S},\tilde{\mathbf{P}}\}$ 上属于 $I_T(\mathfrak{F}_t)$ 的过程. 容易证明 $\langle\tilde{w},\tilde{w}\rangle_t=t$; 就是说, $\tilde{w}(t)$ 是 $\{\Omega,\mathfrak{S},\tilde{\mathbf{P}}\}$ 上的 Wiener 过程. 如果 $\eta(t)$ 是在概率空间 $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$ 上的某个数值伊藤过程, 那末这意味着存在 Wiener 过程 $\bar{w}(t)$ 和函数 $\beta(s,\omega)$ 及 $\gamma(s,\omega)$,使得

$$\eta(t)=\eta_0+\int_0^t\gamma(s,\omega)ds+\int_0^t\beta(s,\omega)d\bar{w}(s).$$

将它与 $\{\Omega,\mathfrak{S},\tilde{\mathbf{P}}\}$ 上的伊藤过程

$$\tilde{\eta}(t) = \eta_0 + \int_0^t \gamma(s,\omega)ds + \int_0^t \beta(s,\omega)d\tilde{w}(s) \tag{43}$$

相对应,用这样的方式建立的映象在所定义的意义下是在 $\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$ 和 $\{\Omega,\mathfrak{S},\tilde{\mathbf{P}}\}$ 上的伊藤空间之间的同构映象. 易见映象是可逆的,线性齐次和随机积分运算是可交换的.利用公式(41)—(43),我们求得

$$\tilde{\eta}(t) = \eta_0 + \int_0^t [\gamma(s,\omega) + \beta(s,\omega)(c(s,\omega),b(s,\omega))]ds$$
$$+ \int_0^t \beta(s,\omega)d\tilde{w}(s).$$

但这说明,在概率空间 $\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$ 和$\{\Omega,\mathfrak{S},\tilde{\mathbf{P}}\}$ 上的伊藤过程所成的伊藤空间相重合.

我们还来推导出一个关于 $\mathbf{E}\rho_T(\omega) = 1$ 的充分性条件的定理. 显然限于$m = 1$ 情形就够了.

定理 12 如果适应于 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的函数 $b(t,\omega)$ 满足条件

$$\mathbf{E}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T b^2(t,\omega)dt\right\} < \infty,$$

那末

$$\mathbf{E}\exp\left\{\int_0^T b(t,\omega)dw(t) - \frac{1}{2}\int_0^T b^2(t,\omega)dt\right\} = 1.$$

证. 设变量 ζ_t 由等式

$$t = \int_0^{\zeta_t} b^2(s,\omega)ds$$

所定义.

$$\tilde{\mathfrak{F}}_t = \mathfrak{F}_{\zeta_t}, \qquad \tilde{w}(t) = w(\zeta_t).$$

由定理 1 推论 4, 推得过程 $\tilde{w}(t)$ 是关于 σ-代数流 $\{\tilde{\mathfrak{F}}_t\}$ 的 Wiener 过程. 变量 $\int_0^T b^2(s,\omega)ds = \tau$ 是关于流 $\{\tilde{\mathfrak{F}}_t\}$ 的 Марков 时间. 为证明定理, 只要证对满足 $Me^{\frac{1}{2}\tau} < \infty$ 的所有 Марков 时间 τ,

$$\mathbf{E}\exp\left\{\tilde{w}(\tau) - \frac{1}{2}\tau\right\} = 1$$

就够了。

先假设 τ_a 是有特殊形式的 Марков 时间：它是过程 $\tilde{w}(t)$ 首次到达直线 $t-a(a>0)$ 的时间。易见，过程

$$\eta(t)=\exp\left\{\tilde{w}(t)-\frac{1}{2}t\right\}$$

是鞅。因为 τ_a 等于独立增量连续过程 $w(t)+t$ 首次到达水平 a 的时间，所以由第 II 卷第四章 § 2 公式(68)，(70)，(71)，有

$$\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_a}=e^{aB(\lambda)},$$

其中 $B(\lambda)$ 满足关系式

$$B(\lambda)+\frac{1}{2}B(\lambda)^2=\lambda,$$

且因为 $B(0)=0$，所以

$$B(\lambda)=1-\sqrt{1+2\lambda}.$$

因此

$$\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_a}=\exp\{a(1-\sqrt{1+2\lambda})\}. \tag{44}$$

尽管所给出的结果仅当 $R_e\lambda\geqslant 0$ 时正确，但由于当 $R_e\lambda>-\frac{1}{2}$ 时右边部分的解析性和当 $R_e\lambda\geqslant-\frac{1}{2}$ 时的连续性，易得公式(44)对 $R_e\lambda\geqslant-\frac{1}{2}$ 是正确的。特别，

$$\mathbf{E}e^{\frac{1}{2}\tau_a}=e^a. \tag{45}$$

因为 $\eta(\tau_a)=\exp\left\{\tilde{w}(\tau_a)-\frac{1}{2}\tau_a\right\}=e^{\frac{1}{2}\tau_a-a}$，所以由公式(45)得 $\mathbf{E}\eta(\tau_a)=1$。由 $\eta(t)$ 是鞅与 $\tilde{w}(t)$ 的强 Марков 性，可得对任意一对 Марков 时间 $\zeta_1,\zeta_2,\zeta_1\leqslant\zeta_2$，有

$$\mathbf{E}(\eta(\zeta_2)|\mathfrak{F}_{\zeta_1})\leqslant 1.$$

因此对所有马氏时间 $\zeta\leqslant\tau_a$

$$\eta(\zeta)\geqslant\mathbf{E}(\eta(\tau_a)|\mathfrak{F}_{\zeta})$$

和 $\mathbf{E}\eta(\zeta)\geqslant 1$，即是 $\mathbf{E}\eta(\zeta)=1$。显然，$\tau_a\wedge\tau\leqslant\tau_a$，

$$1 = \mathbf{E}\eta(\tau_a \wedge \tau)$$
$$= \mathbf{E}\eta(\tau_a)\chi_{\{\tau_a \leqslant \tau\}} + \mathbf{E}\eta(t)\chi_{\{\tau \leqslant \tau_a\}}. \tag{46}$$

但

$$\eta(\tau_a)\chi_{\{\tau_a \leqslant \tau\}} = e^{-a+\frac{1}{2}\tau_a}\chi_{\{\tau_a \leqslant \tau\}}$$
$$\leqslant e^{-a}\chi_{\{\tau_a \leqslant \tau\}}e^{\frac{1}{2}\tau}.$$

就是说，

$$\lim_{a\to\infty}\mathbf{E}\eta(\tau_a)\chi_{\{\tau_a \leqslant \tau\}} = 0,$$

因为在数学期望号内的变量有可积控制函数 $e^{\frac{1}{2}\tau}$ 及当 $a \to \infty$ 时趋于 0. 顾及到当 $a \uparrow \infty$时 $\chi_{\{\tau \leqslant \tau_a\}}$ 个 1 及对(46)取极限，我们得 $\mathbf{E}\eta(\tau) = 1$. 一般情形可由如下得出

$$\mathbf{E}\exp\left\{\int_0^T \mathscr{C}(s, \omega)dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \mathscr{C}^2(s,\omega)ds\right\}$$
$$= \mathbf{E}\exp\left\{\int_0^T \mathscr{C}_1(s, \omega)d\bar{w}(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \mathscr{C}_1^2(s,\omega)ds\right\},$$

其中 $\mathscr{C}_1^2(s,\omega) = 1 + \mathscr{C}^2(s,\omega)$,

$$\bar{w}(t) = \int_0^t \mathscr{C}(s,\omega)(\mathscr{C}_1(s,\omega))^{-1}dw(s)$$
$$+ \int_0^t (\mathscr{C}_1(s,\omega))^{-1}dw_1(s)$$

与 $w_1(t)$ 及 $\mathfrak{F}_t$ 独立.

§2. 关于扩散型的随机微分方程

在本节考虑扩散型过程，即是满足随机微分方程

$$d\xi(t) = a(t,\xi(\cdot))dt + B(t,\xi(\cdot))dw(t) \tag{1}$$

的过程，其中 $\xi(t)$ 是被考虑的过程，$w(t)$ 是 Wiener 过程，$\xi(t)$ 和 $w(t)$ 取值于 $\mathscr{R}^m$. 函数 $a(t,x(\cdot))$ 和 $B(t, x(\cdot))$ 是定义在 $[0, T] \times \mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 上分别取值于 $\mathscr{R}^m$ 和 $\mathfrak{L}(\mathscr{R}^m)$. 在各处均假定初始条件 $\xi(0) = 0$ 下求在区间 $[0,T]$ 上方程(1)的解. 为使(1)的右边可看成随机微分，我们将假定如下条件成立：

1) 函数 $a(t,x(\cdot))$ 和 $B(t,x(\cdot))$ 按联合变量是可测的，且对所有 $t\in[0,T]$，作为 $x(\cdot)$ 的函数关于 σ-代数 $\mathfrak{C}_t$ 可测，其中 $\mathfrak{C}_t$ 是由 $\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 中基在 $[0,t]$ 上的柱集所生成的 σ-代数. 后一要求等价于：如果在 $s\leqslant t$ 时 $x_1(s)=x(s)$，那末

$$a(t,x(\cdot))=a(t,x_1(\cdot)),B(t,x(\cdot))=B(t,x_1(\cdot)).$$

(1) 的解将认为是这样的过程 $\xi(t)$：$w_t(s)=w(t+s)-w(t)$ 独立于由过程 $\xi(\cdot)$ 到时刻 t 所生成的 σ-代数 $\mathfrak{F}^\xi_t$.

设 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 是过程 $w(t)$ 所生成的 σ-代数流，如果 $\mathfrak{F}^\xi_t\subset\mathfrak{F}_t$，即是对每个 t，$\xi(t)$ 是 $\mathfrak{F}_t$-可测，那末方程(1)的这样的解称为强解. 在当需要着重指出它不必是强解时，另外的解将称为弱解. 在考虑(1)的弱解时，概率空间常常是不固定的：$\xi(t)$ 是(1)的弱解，如果 $\xi(t)$ 定义在某个概率空间上，在此空间上有 Wiener 过程 $w(t)$，使得(1)成立. 有不同的概率测度(例如，对应于过程 $w(t)$ 或过程 $\xi(t)$ 的测度）的可测空间 $\{\mathscr{C}^m_{[0,T]},\ \mathfrak{C}\}$ 常考虑为概率空间.

除条件 1) 外，有时还加上条件：

2) $a(t,x(\cdot))$ 和 $B(t,x(\cdot))$ 按联合变量是连续的.

形为(1)的方程在下述更严格的条件已在第二章研究过：

3) 对所有紧集 $K\subset\mathscr{C}^m_{[0,T]}$，存在常数 l_k 使当 $x(\cdot)\in K$，$y(\cdot)\in K$ 时不等式

$$|a(t,x(\cdot))-a(t,y(\cdot))|+\|B(t,x(\cdot))-B(t,y(\cdot))\|\leqslant l_k\|x-y\|_m$$

成立，其中 $\|\cdot\|_m$ 是 $\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 的范数，$\|\cdot\|$是在 $\mathfrak{L}(\mathscr{R}^m)$ 的范数.

4) 存在 l，使对所有 $x(\cdot)$

$$|a(t,x(\cdot))|+\|B(t,x(\cdot))\|\leqslant l(1+\|x\|_m).$$

在这些条件下已证明了(1)的解存在，唯一和是强解.

对应于方程 (1) 的解的测度　对应于随机过程的测度的一般构造已在第 I 卷第五章 § 1 引人.

因为我们仅考虑 (1) 的连续解，所以对应于解 $\xi(t)$ 的测度自然是在 $\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 上考虑. 设 $\xi(t)$ 是 (1) 的某个解和 μ_ξ 是在

$\mathscr{C}^m_{[0,T]}=\Omega$ 上对应于它的测度。首先设对所有 $t\in[0,T],x(\cdot)\in\mathscr{C}^m_{[0,T]},B(t,x(\cdot))$ 是非退化算子。那末可断定：

a）过程

$$y(t)=x(t)-\int_0^t a(s,x(\cdot))ds \tag{2}$$

是概率空间 $\{\Omega,\mathfrak{C},\mu_\xi\}$ 上的局部鞅；

b）过程

$$z(t)=\int_0^t B^{-1}(s,x(\cdot))dy(s) \tag{3}$$

是这空间上的 Wiener 过程；这两个过程是关于 $\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 上的 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的局部鞅。

显然，当在 $\{\Omega,\mathfrak{C},\mu_\xi\}$ 上的过程 $z(t)$ 由公式(2)和(3)所定义时（$z(t)$ 是点 $\omega=x(\cdot)\in\mathscr{C}^m_{[0,T]}=\Omega$ 的可测函数），那末

$$x(t)=\int_0^t a(s,x(\cdot))ds+\int_0^t B(s,x(\cdot))dz(s). \tag{4}$$

因此如果测度 μ_ξ 使得条件 a）和 b）成立，那末它对应于方程(1)的某个解。

注意，使 $\{y(t),\mathfrak{C}_t\}$ 是局部鞅的函数 $a(s,\ x(\cdot))$ 关于勒贝格测度与测度 μ_ξ 的乘积测度对几乎所有 $(s,\ x(\cdot))$ 被唯一确定。如果 $\{y_1(t),\mathfrak{C}_t\}$ 是在同一概率空间上的局部鞅，其中

$$y_1(t)=x(t)-\int_0^t a_1(s,x(\cdot))ds,$$

那末 $\{y(t)-y_1(t),\mathfrak{C}_t\}$ 也同样是局部鞅。但易见 $\langle y-y_1,y-y_1\rangle_t=0$，也就是

$$\mathrm{E}\left(\int_0^t[a_1(s,x(\cdot))-a(s,\ x(\cdot))]^2ds\right)^2=0,$$

由此得知对几乎所有 s 和按测度 μ_ξ 对几乎所有 $x(\cdot)$ 有 $a_1(s,x(\cdot))=a(s,x(\cdot))$。

如果算子 $B(t,x(\cdot))$ 是退化的，那末由等式(2)定义的过程 $y(t)$ 将是局部鞅；在假设 $B(s,\ x(\cdot))$ 是非负对称算子时，等式(3)中的过程 $z(t)$ 也可用

$$z(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t (B(s,x(\cdot)+\varepsilon I)^{-1}dy(s)$$

来定义。这过程也是局部平方可积鞅，且对所有 $u\in\mathscr{R}^m$，满足等式

$$\langle (z,u),(z,u)\rangle_t=\int_0^t |P(s,x(\cdot))u|^2 ds,$$

其中 $P(s,x(\cdot))$ 是在算子 $B(s,x(\cdot))$ 的值域上的投影算子. 后一结论是等式

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|(B(s,x(\cdot))+\varepsilon I)^{-1}B(s,x(\cdot))u|^2$$
$$=|P(s,x(\cdot)u|^2$$

的推论。

现设 $Q(s,\ x(\cdot))$ 是在正交于 $B(s,x(\cdot))$ 的值域的子空间上的投影算子(我们在此处假设 $B(s,\ x(\cdot))$ 是对称和非负定的)。设 $w_1(t)$ 是独立于过程 $z(t)$ 的 $\mathscr{R}^m$ 上的 Wiener 过程。那末过程

$$w(t)=z(t)+\int_0^t Q(s,x(\cdot))dw_1(s) \tag{5}$$

是 Wiener 过程，这因为它是平方可积鞅且对所有 $u\in\mathscr{R}^m$

$$\langle (w,u),(w,u)\rangle_t=t|u|^2.$$

显然过程 $x(t)$ 满足方程

$$x(t)=\int_0^t a(s,\ x(\cdot))ds+\int_0^t B(s,x(\cdot))dw(s).$$

如果测度 μ_ξ 已给出，那末非负对称算子 $B(s,\ x(\cdot))$ 由下关系式唯一地被确定：对所有 $u\in\mathscr{R}^m$,

$$\langle (y,u),(y,u)\rangle_t=\int_0^t |B(s,x(\cdot))u|^2 ds \tag{6}$$

关于测度 μ_ξ 几乎处处成立。

于是下面的定理成立。

定理 1 如果测度 μ_ξ 使得由等式(2)所定义的过程 $\{y_t,\mathfrak{F}_t\}$ 是 $\{\mathscr{C}^m_{[0,T]},\ \mathfrak{C}_T,\ \mu_\xi\}$ 上的局部鞅，和满足关系式(6)，函数 $a(t,\ x(\cdot))$ 和 $B(t,x(\cdot))$ 满足条件 1)，那末测度 μ_ξ 对应于方程

(1)的某个弱解。

其次我们考虑关于方程(1)的某个解对应的测度 μ_ξ 的绝对连续测度。设 μ 就是这样的测度且

$$
\begin{aligned}
\rho_T(x(\cdot)) &= \frac{d\mu}{d\mu_\xi}(x(\cdot)) \\
&= \exp\left\{\int_0^T (b(s,x(\cdot)),dz(s)) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\int_0^T |b(s,x(\cdot))|^2 ds\right\},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

其中 $b(t,x(\cdot))$ 是定义在 $[0,T]\times\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 上取值于 $\mathscr{R}^m$ 满足和 $a(t,x(\cdot))$ 同样条件的函数；$z(t)$ 由等式(2),(3)所定义且是 $x(\cdot)$ 的函数。假设

$$
\int \rho_T(x(\cdot))\mu_\xi(dx(\cdot)) = 1. \tag{8}
$$

设 $\rho_t(x(\cdot))$ 由公式(7)所定义，如在其中以 t 代换 T。那末依伊藤公式，对 $u\in\mathscr{R}^m$

$$
\begin{aligned}
&(u,\xi(t))\rho_t(\xi(\cdot)) \\
&= \int_0^t (u,\xi(s))\rho_s(\xi(\cdot))(b(s,\xi(\cdot)),dw(s)) \\
&\quad + \int_0^t \rho_s(\xi(\cdot))(B^*(s,\xi(\cdot))u,dw(s)) \\
&\quad + \int_0^t [(a(s,\xi(\cdot)),u) \\
&\quad + (B^*(s,\xi(\cdot))u,b(s,\xi(\cdot)))\rho_s(\xi(\cdot))]ds.
\end{aligned}
$$

利用此等式及§1公式(34)，容易证明过程 $\{y_t,\mathfrak{C}_t\}$：

$$
\begin{aligned}
y(t) = x(t) - \int_0^t &(a(s,x(\cdot)) \\
&+ B(s,x(\cdot))b(s,x(\cdot)))ds
\end{aligned}
$$

是空间 $\{\mathscr{C}^m_{[0,T]},\mathfrak{C}_T,\mu\}$ 上的局部鞅。简单的计算表明，

$$
\langle (y,u),(y,u)\rangle_t = \int_0^t (B(s,x(\cdot))u,B(s,x(\cdot))u)ds.
$$

因此，对 $\{\mathscr{C}^m_{[0,T]},\mathfrak{C}_T,\mu\}$ 上的过程 $x(t)$ 等式(6)成立。按定理1

测度 μ 对应随机微分方程(1)的解. 从而下定理是正确的.

定理 2 设 $\xi(t)$ 是方程(1)的解且定义在 $[0, T] \times \mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 上取值于 $\mathscr{R}^m$ 的函数 $b(t,x(\cdot))$ 满足条件 1). 如果 $\rho_T(x(\cdot))$ 由等式(7)定义且(8)成立,那末微分方程

$$d\xi_1(t) = a_1(t,\xi_1(\cdot))dt + B(t,\xi_1(\cdot))dw(t), \qquad (9)$$

其中

$$a_1(t,x(\cdot)) = a(t,x(\cdot)) + B(t,x(\cdot))b(t,x(\cdot)), \qquad (10)$$

存在解,使对应于解 $\xi_1(t)$ 的测度 μ_{ξ_1} 是关于测度 μ_ξ 绝对连续,同时

$$\frac{d\mu_{\xi_1}}{d\mu_\xi}(x(\cdot)) = \rho_T(x(\cdot)). \qquad (11)$$

推论 1 如果方程(1)有解 $\xi(t)$, 且 $b(t, x(\cdot))$ 是使得由(7)式所定义的函数 $\rho_T(x(\cdot))$ 满足关系(8),那末对于由(10)所定义的所有 $a_1(t,x(\cdot))$,方程(9)也有解 $\xi_1(t)$. 特别,如果 $B(t, x(\cdot))$ 有一致有界逆算子及方程(1)对某个有界的 $a(t, x(\cdot))$ 是有解的,那末对于每个有界的 $a_1(t,x(\cdot))$ 方程(9)有解.

注. 因为 $\rho_T(x(\cdot))$ 处处为正,所以 $\frac{d\mu_{\xi_1}}{d\mu_\xi}$ 也处处为正, 也就是说,测度 μ_ξ 和 μ_{ξ_1} 等价.

我们来讨论 $B(t,x(\cdot)) = I$ 时的情况(I 是单位算子). 如果 $\xi(t)$ 是随机方程

$$d\xi(t) = a(t,\xi(\cdot))dt + dw(t) \qquad (12)$$

的解,

$$\rho_T(x(\cdot)) = \exp\left\{-\int_0^T (a(s,x(\cdot)), dx(\cdot)) + \frac{1}{2}\int_0^T |a(s,x(\cdot))|^2 ds\right\} \qquad (13)$$

和(8)成立, μ_ξ 是对应于过程 $\xi(\cdot)$ 的测度, μ_w 是对应于过程 $w(t)$ 的测度,那末 μ_ξ 是关于 μ_w 绝对连续,而且

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_w}(x(\cdot)) = (\rho_T(x(\cdot)))^{-1}. \tag{14}$$

事实上，由于定理 2，方程

$$d\xi_1(t) = a_1(t, \xi_1(\cdot))dt + dw(t)$$

存在解，使得 $\mu_\xi \sim \mu_{\xi_1}$. 这时 $a_1(t, x(\cdot)) = a(t, x(\cdot)) - Ia(t, x(\cdot)) = 0$. 于是 $\xi_1(t) = w(t)$.

公式(14)是公式(11)的推论.

现设 $a(s, x(\cdot))$ 是使 ρ_T 可能不满足(8).

令

$$a_N(t, x(\cdot)) = \begin{cases} a(t, x(\cdot)), \text{如果} \int_0^t |a(s, x(\cdot))|^2 ds < N, \\ 0, \qquad\qquad \text{如果} \int_0^t |a(s, x(\cdot))|^2 ds \geq N. \end{cases}$$

设

$$\xi_N(t) = \int_0^t a_N(s, \xi(\cdot))ds + w(t),$$

$$\tau_N = \sup\left[t: \int_0^t |a(s, \xi(\cdot))|^2 ds < N\right].$$

因为

$$\int_0^t |a(s, \xi_N(\cdot))|^2 ds \geq \int_0^{\tau_N} |a(s, \xi_N(\cdot))|^2 ds$$

$$= \int_0^{\tau_N} |a(s, \xi(\cdot))|^2 ds = N,$$

所以当 $t < \tau_N$ 时 $\xi_N(t) = \xi(t)$ 和当 $t > \tau_N$ 时 $a_N(t, \xi(\cdot)) = a_N(t, \xi_N(\cdot)) = 0$. 这就是说，

$$\xi_N(t) = \int_0^t a_N(s, \xi_N(\cdot))ds + w(t),$$

并根据已证明的事实，

$$\frac{d\mu_{\xi_N}(\cdot)}{d\mu_w}(x(\cdot)) = \exp\left\{\int_0^T (a_N(s, x(\cdot)), dx(s))\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^T |a_N(s,\ x(\cdot))|^2 ds\Big\}. \qquad (15)$$

对所有可测集 $E\subset\mathscr{C}^m_{[0,T]}$

$$\mu_{\xi_N}\Big(E\cap\Big\{x(\cdot):\int_0^T|a(s,x(\cdot))|^2ds<N\Big\}\Big)$$
$$=\mu_\xi\Big(E\cap\Big\{x(\cdot):\int_0^T|a(s,x(\cdot))|^2ds<N\Big\}\Big);$$

此外，如果

$$\int_0^T|a(s,x(\cdot))|^2ds<N,$$

那末

$$\exp\Big\{\int_0^T(a_N(s,x(\cdot)),dx(s))$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^T|a_N(s,\ x(\cdot))|^2ds\Big\}$$
$$=\exp\Big\{\int_0^T(a(s,x(\cdot)),dx(s))$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^T|a(s,x(\cdot))|^2ds\Big\}.$$

因此公式(14)对满足 $\int_0^T|a(s,\ x(\cdot))|^2ds<N$ 的所有 $x(\cdot)$ 是正确的。因为N可任意选取，所以公式(14)对满足

$$\int_0^T|a(s,x(\cdot))|^2ds<\infty$$

的所有 $x(\cdot)$ 是正确的。因此，如果

$$\mathbf{P}\Big\{\int_0^T|a(t,\ w(\cdot))|^2dt<\infty\Big\}=1,$$
$$\mathbf{P}\Big\{\int_0^T|a(t,\ \xi(\cdot))|^2dt<\infty\Big\}=1,$$

那末对所有可测集E有

$$\mu_\xi(E)=\lim_{N\to\infty}\mu_\xi(E\cap\{x(\cdot):$$

$$\left.\left.\int_0^T |a(s, x(\cdot))|^2 ds < N\right\}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{E\cap\left\{x(\cdot): \int_0^T |a(s,x(\cdot))|^2 ds < N\right\}} \hat{\rho}_T(x(\cdot))\mu_w(dx)$$

$$= \int_E \hat{\rho}_T(x(\cdot))\mu_w(dx),$$

其中

$$\hat{\rho}_T(x(\cdot)) = \exp\left\{\int_0^T (a(t,x(\cdot)),dx(t)) - \frac{1}{2}\int_0^T |a(t, x(\cdot))|^2 dt\right\}. \tag{16}$$

这表明

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_w}(x(\cdot)) = \hat{\rho}_T(x(\cdot)).$$

因为(16)的右边是正的,所以 $\frac{d\mu_w}{d\mu_\xi}$ 存在,而且

$$\frac{d\mu_w}{d\mu_\xi}(x(\cdot)) = (\hat{\rho}_T(x(\cdot)))^{-1}.$$

现设

$$\mu_\xi\left(\left\{x(\cdot): \int_0^T |a(s,x(\cdot))|^2 ds < \infty\right\}\right) = 1. \tag{17}$$

如果认为对于对条件 $\int_0^T |a(s,x(\cdot))|^2 ds = \infty$ 成立的 $x(\cdot)$ 有

$$\exp\left\{\int_0^T (a(t,x(\cdot)),dx(t)) - \frac{1}{2}\int_0^T |a(t,x(\cdot))|^2 dt\right\} = 0 \tag{18}$$

(因为测度 μ_ξ 集中在满足 $\int_0^T |a(s, x(\cdot))|^2 ds < \infty$ 的 $x(\cdot)$

上)[1]，那末正如前面一样，可证明

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_w}(x(\cdot))=\hat{\rho}_T(x(\cdot)).$$

等式(18)的成立是十分自然的，因为当 $\int_0^T |a(t,\ w(\cdot))|^2dt<\infty$ 时，

$$\int_0^T(a(t,w(\cdot)),dw(t))-\frac{1}{2}\int_0^T|a(t,\ w(\cdot))|^2dt$$

和 $w_1(\zeta)-\frac{1}{2}\zeta$ 有相同的分布，其中 ζ 与 $\int_0^T|a(t,w(\cdot))|^2dt$ 同分布，而 $w_1(s)$ 是一维 Wiener 过程，当 $\zeta\to\infty$ 时 $w_1(\zeta)-\frac{1}{2}\zeta\to-\infty$.

如果

$$\mu_w\left(\left\{x(\cdot):\int_0^T|a(s,x(\cdot))|^2ds<\infty\right\}\right)=1,$$

那末

$$\begin{aligned}\mu_w(E)&=\lim_{N\to\infty}\mu_w\Big(E\cap\Big\{x(\cdot):\\&\qquad\int_0^T|a(s,\ x(\cdot))|^2ds<N\Big\}\Big)\\&=\lim_{N\to\infty}\int\limits_{E\cap\left\{x(\cdot):\int_0^T|a(s,x(\cdot))|^2ds<N\right\}}\hat{\rho}_T^{-1}(x(\cdot))\mu_\xi(dx)\end{aligned}$$

---

1) 这里伊藤积分 $\int_0^T(f(x),dx(s))$ 定义为极限

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^T(f_N(s),dx(s)),$$

其中

$$f_N(t)=\chi_{[0,N]}\left(\int_0^t|f(s)|^2ds\right)f(t),$$

此极限在集合

$$\left\{x(0):\int_0^T|f(s)|^2ds<\infty\right\}$$

上几乎处处存在.

$$= \int_E \hat{\rho}_T^{-1}(x(\cdot))\mu_\xi(dx),$$

倘若认为对满足 $\int_0^T |a(s,x(\cdot))|^2 ds = \infty$ 的 $x(\cdot)$ 有 $\hat{\rho}_T^{-1}(x(\cdot)) = 0$. 就是说,

$$\frac{d\mu_w}{d\mu_\xi}(x(\cdot)) = \hat{\rho}_T^{-1}(x(\cdot))$$

(由于关于 $a(t,x(\cdot))$ 的假设,后一等式右边总是有定义).

于是下述定理是正确的.

定理 3 设 $a(s,x(\cdot))$ 是对 $s\in[0,T]$, $x(\cdot)\in\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 有定义取值于 $\mathscr{R}^m$ 的函数,满足条件 1). 如果

$$\xi(t) = \int_0^t a(s,\xi(t))ds + w(t),$$

其中 $w(t)$ 是 $\mathscr{R}^m$ 中关于 $\{\mathfrak{F}_t^\xi\}$ 的 Wiener 过程,那末

1) $\mathbf{P}\left\{\int_0^T |a(s,\xi(\cdot))|^2 ds < \infty\right\} = 1 \Rightarrow \mu_\xi \ll \mu_w$,

2) $\mathbf{P}\left\{\int_0^T |a(s, w(\cdot))|^2 ds < \infty\right\} = 1 \Rightarrow \mu_w \ll \mu_\xi$.

这时在情形 1)

$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_w}(x(\cdot)) = \hat{\rho}_T(x(\cdot))$ (考虑到(18)中的规定), 而在情形 2)

$$\frac{d\mu_w}{d\mu_\xi} = \hat{\rho}_T^{-1}(x(\cdot)).$$

随机微分方程解的存在性 本段的目的在于证明如下定理.

定理 4 设系数 $a(t,x(\cdot))$ 和 $B(t, x(\cdot))$ 满足本节开始时所陈述的条件 1) 和 2), 还有条件4). 那末方程(1)的解存在.

因此为了(1)的解存在,条件 3) 看来是不必要的,为证明这定理,我们需要某些引理.

引理 1 设条件 4) 成立. 那末对于方程(1)的解 $\xi(t)$ 下不等式

$$\mathbf{E}(\sup_{t\leqslant T}|\xi(t)|^2)\leqslant C$$

成立，其中常数C仅依赖于T和ι。

证。我们有

$$\sup_{s<t}|\xi(s)|^2\leqslant 2T\int_0^t|a(s,\xi(\cdot))|^2ds$$
$$+2\sup_{s\leqslant t}\left|\int_0^s B(u,\xi(\cdot))dw(u)\right|^2.$$

就是说，

$$\mathbf{E}\sup_{s\leqslant t}|\xi(s)|^2\leqslant 2T\int_0^t\mathbf{E}|a(s,\xi(\cdot))|^2ds$$
$$+8\mathbf{E}\left|\int_0^t B(s,\xi(\cdot))dw(s)\right|^2$$
$$=\mathbf{E}\int_0^t[2T|a(s,\xi(\cdot))|^2$$
$$+8\mathrm{Sp}B(s,\xi(\cdot))B^*(s,\xi(\cdot))]ds$$
$$\leqslant K\left(1+\int_0^t\mathbf{E}\sup_{u\leqslant s}|\xi(u)|^2ds\right),$$

其中K是仅依赖于T和ι的某个常数。由后一不等式得所需的证明。

注。类似地可确定对每个n存在仅依赖于T和ι的常数C_n，使

$$\mathbf{E}\sup_{t\leqslant T}|\xi(t)|^n\leqslant C_n.$$

引理 2 在引理 1 条件下存在仅依赖于T和ι的常数K，使得

$$\mathbf{E}|\xi(t+h)-\xi(t)|^4\leqslant Kh^2.$$

证。借助于伊藤公式，

$$|\xi(t+h)-\xi(t)|^4=(\xi(t+h)-\xi(t),\xi(t+h)-\xi(t))^2$$
$$=4\int_t^{t+h}|\xi(s)-\xi(t)|^2(B^*(s,\xi(\cdot))[\xi(s)-\xi(t)],dw(s))$$
$$+2\int_t^{t+h}\{|\xi(s)-\xi(t)|^2[2(\xi(s)-\xi(t),a(s,\xi(\cdot)))$$
$$+\mathrm{Sp}B(s,\xi(\cdot))B^*(s,\xi(\cdot))]+|B^*(s,\xi(\cdot))[\xi(s)$$

$$-\xi(t)]|^2\}ds.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}|\xi(t+h)-\xi(t)|^4\\
&\leqslant K_1\mathbf{E}\int_t^{t+h}|\xi(s)-\xi(t)|^3(1+\sup_{u\leqslant s}|\xi(u)|)ds\\
&+K_2\mathbf{E}\int_t^{t+h}|\xi(s)-\xi(t)|^2(1+\sup_{u\leqslant s}|\xi(u)|^2)ds.
\end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式和引理 1,我们得

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}|\xi(t+h)-\xi(t)|^4\\
&\quad\leqslant K_3\left(\left[\int_t^{t+h}\mathbf{E}|\xi(s)-\xi(t)|^4\right]^{3/4}h^{1/4}\right.\\
&\quad\left.+\left[\int_t^{t+h}\mathbf{E}|\xi(s)-\xi(t)|^4ds\right]^{1/2}h^{1/2}\right). \qquad (19)
\end{aligned}$$

由此不等式,利用引理 1 的注

$$\mathbf{E}|\xi(s)-\xi(t)|^4\leqslant 16C_4,$$

我们求得,对某个 K_4

$$\mathbf{E}|\xi(s)-\xi(t)|^4\leqslant K_4h.$$

在(19)中以 $K_4(s-t)$ 代替 $\mathbf{E}|\xi(s)-\xi(t)|^4$, 得所需的证明.

推论 对满足条件 1), 2) 和取同一常数 l 的条件 4) 的不同的 $a(s,x(\cdot))$ 和 $B(s,x(\cdot))$, 方程(1)的解 $\xi(t)$ 对应的测度的集合记为 $\mathscr{M}_l$,那末 $\mathscr{M}_l$ 是弱紧.

这由第 I 卷第六章 § 4 引理 5 和定理 2 得到.

我们转来证明定理 4.

构造使得下条件成立的序列 $a_n(t,x(\cdot))$ 和 $B_n(t,x(\cdot))$:

(I) 对某个 l'

$$|a_n(t,x(\cdot))|+\|B_n(t,x(\cdot))\|\leqslant l'(1+\|x(\cdot)\|_m);$$

(II) 存在常数 H_n,使

$$\begin{aligned}
&|a_n(t,x(\cdot))-a_n(t,y(\cdot))|\\
&\qquad+\|B_n(t,x(\cdot))-B_n(t,y(\cdot))\|\\
&\qquad\leqslant H_n\|x(\cdot)-y(\cdot)\|_m;
\end{aligned}$$

(III) 在 $\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 中的所有紧集上,一致地有

$$|a(t,x(\cdot))-a_n(t,x(\cdot))|+\|B_n(t,x(\cdot))$$
$$+B(t,x(\cdot))\|\to 0.$$

这样的函数序列可用如下方法构造(仅考虑序列 a_n).

设 $\Gamma_n(x)$ 是在点 $\frac{k}{n}T\in[0,T]$ 与 $x(\cdot)$ 相等的逐段线性函数. 以 $\gamma_n(t,x_0,\cdots,x_n)$ 表示在点 $t=\frac{k}{n}T$ 取值 x_k,属于 $\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 的逐段线性函数. 其次,我们定义

$$a_n(t,x(\cdot))=\int\cdots\int a(t,\gamma_n(\cdot,x_0,\cdots,x_n))\exp\left\{-\frac{\varepsilon_n}{n}\right.$$
$$\left.\times\sum_{k=0}^{n}x_k^2\right\}\prod_{k=0}^{n}\left(g\left(\frac{x\left(\frac{kT}{n}\right)-x_k}{\varepsilon_n}\right)\frac{dx_k}{\varepsilon_n}\right),$$

其中 $g(z)$ 是当 $z\in\mathscr{R}^m$ 有定义的非负函数,仅当 $|z|\leqslant 1$ 时异于0,它有有界导数,且 $\int g(z)dz=1$,而 $\varepsilon_n\to 0$. 那末

$$|a_n(t,x(\cdot))|\leqslant\sup_{|x_i|\leqslant\varepsilon_n}|a(t,\gamma_n(\cdot,x(0)+x_0,\cdots,x(T)$$
$$+x_n))|\leqslant\iota(1+\sup_s|\gamma(\cdot,x(0)+x_0,\cdots,x(T)$$
$$+x_n)|)\leqslant\iota(1+\varepsilon_n+\sup_s|x(s)|),$$

和 (I) 成立.

条件 (II) 由 $a_n(t,x(\cdot))$ 是 $x\left(\frac{k}{n}T\right)$ 的函数和按这些变量有有界导数得出.

最后,

$$|a_n(t,x(\cdot))-a(t,x(\cdot))|$$
$$\leqslant\int\cdots\int|a(t,\gamma_n(\cdot,x(0)+\bar{x}_0,\cdots,x(T)+\bar{x}_n))$$
$$-a(t,\gamma_n(\cdot,x(0),\cdots,x(T)))|\prod_{k=0}^{n}\left(g\left(\frac{\bar{x}_k}{\varepsilon_n}\right)\times\frac{d\bar{x}_k}{\varepsilon_n}\right)$$
$$+|a(t,x(\cdot))-a(t,\gamma_n(\cdot,x(0),\cdots,x(T)))|$$

$$+\int\cdots\int|a(t,\gamma_n(\cdot,x_0,\cdots,x_n))|$$

$$\times\left(1-\exp\left\{-\varepsilon_n\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}x_k^2\right\}\right)\prod_{k=0}^{n}\left(g\left(\frac{x\left(\frac{kT}{n}\right)-x_k}{\varepsilon_n}\right)\frac{dx_k}{\varepsilon_n}\right).$$

因为对所有紧集 $K\subset\mathscr{C}^m_{[0,T]}$，可以指定紧集 K_1，使对所有 $x\in K,\gamma(\cdot,x(0),\cdots,x(T))\in K_1$，此外，当 $|z_k|\leqslant\varepsilon_n$ 时

$$\sup_t|\gamma_n(t,x(0),\cdots,x(T))-\gamma_n(t,x(0)+z_0,$$
$$\cdots,x(T)+z_n)|\leqslant\varepsilon_n,$$

所以第一个被加项在每个紧K上一致趋于 0. 因为在每个紧集上，一致地有

$$\sup|x(t)-\Gamma_n x(t)|\to 0,$$

所以第二个被加项在每个紧集上也一致趋于 0. 最后，第三个被加项由量

$$c(1+\varepsilon_n+\sup_t|x(t)|)\varepsilon_n\sup_t(|x(t)|+\varepsilon_n)^2$$

估计出，于是当 $n\to\infty$时在每个紧集上一致趋于 0.

现设 $\xi_n(t)$ 是随机方程

$$\xi_n(t)=\int_0^t a_n(s,\xi_n(s))ds+\int_0^t B_n(s,\xi_n(s))dw(s)\quad(20)$$

的解.

以 μ_n 表示在 $\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 上对应于方程(20)的解 $\xi_n(t)$ 的测度，因为此方程的系数满足条件 3)和 4)，所以方程(20)的解存在且唯一. 由于前面的推论，测度 μ_n 的集合是紧的. 因此不失一般性，可认为 μ_n 弱收敛于某个测度 μ. 设 $g_t(x(\cdot))$ 是在 $\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 上某个连续 $\mathfrak{S}_t$-可测函数. 那末对所有 $u\in\mathscr{R}^m$

$$\int\Big[(x(t+h)-x(t),u)$$
$$-\int_t^{t+h}(a_n(s,x(\cdot)),u)ds\Big]g_t(x(\cdot))\mu_n(dx)$$
$$=\mathrm{E}(\xi_n(t+h)-\xi_n(t)$$

$$-\int_t^{t+h} a_n(s,\xi_n(\cdot))ds,u)g_t(\xi_n(\cdot))=0. \tag{21}$$

其次，

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_t^{t+h}|(a(s,x(\cdot))-a_n(s,x(\cdot)),u)|g_t(x(\cdot))\mu_n(dx)$$
$$=\varlimsup_{n\to\infty}\int_t^{t+h}\frac{|a(s,x(\cdot))-a_n(s,x(\cdot))|\cdot|u|}{1+\|x(\cdot)\|_m}g_t(x(\cdot))$$
$$\times(1+\|x(\cdot)\|_m)\mu_n(dx).$$

如果 $\nu_n(dx)=(1+\|x(\cdot)\|_m)\mu_n(dx)$，那末测度 ν_n 一致有界和弱收敛。因此对所有 $\varepsilon>0$ 可找到紧集 K_ε，使

$$\varlimsup_{n\to\infty}\nu_n(\mathscr{C}^m_{[0,T]}-K_\varepsilon)\leqslant\varepsilon.$$

于是，

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_t^{t+h}|(a(s,x(\cdot))-a_n(s,x(\cdot)),u)|\cdot|g_t(x(\cdot))|\mu_n(dx)$$
$$=O(\varlimsup_{n\to\infty}\nu_n(\mathscr{C}^m_{[0,T]}-K_\varepsilon)=O(\varepsilon)$$

(我们利用到 $a_n(s,x(\cdot))$ 所满足的条件 (I) 和 (III))。由于 $\varepsilon>0$ 的任意性

$$\lim_{n\to\infty}\iint_t^{t+h}|a(s,x(\cdot))-a_n(s,x(\cdot))|\cdot|g_t(x(\cdot))|ds\mu_n(dx)$$
$$=0. \tag{22}$$

由测度 μ_n 的弱收敛性得，

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int(x(t+h)-x(t),u)g_t(x(\cdot))\mu_n(dx)\\&\qquad=\int(x(t+h)-x(t),\ u)g_t(x(\cdot))\mu(dx),\\&\lim_{n\to\infty}\iint_t^{t+h}(a(s,x(\cdot)),u)g_t(x(\cdot))ds\mu_n(dx)\\&\qquad=\iint_t^{t+h}(a(s,x(\cdot)),\ u)g_t(x(\cdot))ds\mu(dx).\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

因此，当 $n\to\infty$ 时等式(21)取极限和顾及到关系式(22)和(23)，我们得

$$\int\Big[(x(t+h)-x(t),u)$$

$$-\int_t^{t+h}(a(s,x(\cdot)),u)ds\Big]g_t(x(\cdot))\mu(dx)=0. \qquad (24)$$

于是过程

$$y(t)=x(t)-\int_0^t a(s,x(\cdot))ds$$

是概率空间 $\{\mathscr{C}^m_{[0,T]},\mathfrak{S}_T,\mu\}$ 上的鞅.

利用等式

$$\int\Big[(x(t+h)-x(t)-\int_0^{t+h}a_n(s,x(\cdot))ds,u)^2$$

$$-\int_t^{t+h}(B_n^*(s,x(\cdot))u,B_n^*(s,x(\cdot))u)ds\Big]$$

$$\times g_t(x(\cdot))\mu_n(dx)=0,$$

正如前面一样，可证明过程

$$(y(t),u)^2-\int_0^t(B^*(s,x(\cdot))u,B^*(s,x(\cdot))u)ds$$

是 $\{\mathscr{C}^m_{[0,T]},\mathfrak{S}_T,\mu\}$ 上的鞅。就是说，

$$\langle(y(\cdot),u),(y(\cdot),u)\rangle_t=\int_0^t(B^*(s,x(\cdot))u,B^*(s,x(\cdot))u)ds.$$

因此根据定理 1，测度 μ 对应于方程(1)的解过程 $\xi(t)$，解的存在性得证。

注。设 τ 是关于流 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的某个有限 Марков 时间。利用过程 $w(t+\tau)-w(\tau)$ 与 σ-代数 $\mathfrak{S}_\tau$ 的独立性，如定理 4 一样，可证明在 $[\tau,T]$ 上的过程 $\xi(s)$ 满足关系式

$$\xi(t)-\xi(\tau)=\int_\tau^t a(s,\xi(\cdot))ds$$

$$+\int_\tau^t B(s,\xi(\cdot))dw(s),\ \tau\leqslant t\leqslant T,$$

倘若在 $[0,\tau]$ 上给出 $\xi(s)$ 和当 $s\leqslant\tau$ 时 $\xi(s)$ 是 $\mathfrak{S}_\tau$-可测。

解的唯一性 在研究随机方程解的唯一性问题时，如下由 И. В. Гирсанов 发现的事实起着本质的作用。

引理 3 (И. В. Гирсанов) 设 $(X,\mathfrak{B},\mu)$ 是概率空间，而

$(Y,\mathfrak{L})$ 是某个可测空间．如果空间 $(Y,\mathfrak{L})$ 至 $(X,\mathfrak{B})$ 的可测映象 $x=f(y)$ 存在，又空间 $(X,\mathfrak{B})$ 至 $(Y,\mathfrak{L})$ 的可测映象 $g_1(x)$，$g_2(x)$，关于测度 μ，对几乎所有 x 满足关系式

$$f(g_1(x))=f(g_2(x))=x,$$

而在 $(Y,\mathfrak{L})$ 上由等式 $\nu_i(C)=\mu(g_i^{-1}(C))$ 定义的测度 ν_i 有 $\nu_2\ll\nu_1$，那末关于测度 μ 对几乎所有 x 有

$$g_1(x)=g_2(x).$$

证．设 $Y_i=g_i(X)$，$y\in Y_1\cap Y_2$ 那末 $y=g_1(x_1)=g_2(x_2)$．就是说，

$$x_1=f(g_1(x_1))=f(g_2(x_2))=x_2$$

和 $g_1(x_1)=g_2(x_2)$．这关系式对所有 $x\in f(Y_1\cap Y_2)$ 是正确的．注意

$$\nu_i(Y_i)=\mu(X)=1,\ \nu_i(Y-Y_i)=0.$$

因为 $\nu_1(Y-Y_1)=0$，$\nu_2\ll\nu_1$，所以，$\nu_2(Y-Y_2)=0$ 和 $\nu_2(Y-Y_1)=0$，由此得 $\nu_2(Y_1\cap Y_2)=1$．因此

$$1=\nu_2(Y_1\cap Y_2)=\mu(g_2^{-1}(Y_1\cap Y_2))=\mu(f(Y_1\cap Y_2)).$$

从而引理得证．

现考虑随机微分方程(1)．设算子 $B(t,x(\cdot))$ 是可逆的，那末

$$w(t)=-\int_0^t B^{-1}(s,\xi(\cdot))a(s,\xi(\cdot))ds+\int_0^t B^{-1}(s,\xi(\cdot))d\xi(s),\tag{25}$$

因为 $\xi(t)$ 是伊藤过程，所以对方程(1)的所有解的随机积分有定义．关系式(25)定义了可测空间 $\{\mathscr{C}^m_{[0,T]},\mathfrak{S}_T\}$ 到概率空间 $\{\mathscr{C}^m_{[0,T]},\mathfrak{S}_T,\mu\}$ 的单值可测映象，其中 μ 是对应于 Wiener 过程 $w(t)$ 的测度，此映象起着 Гирсанов 引理的映象 f 的作用．方程(1)适应于 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 的不同解将起着映象 $g_i(x)$ 的作用．于是下面的定理是正确的．

定理 5 设方程(1)的系数满足条件 1) 和 2)，此外，对所有

$t\in[0,T]$ 和 $x(\cdot)\in\mathscr{C}^m_{[0,T]}$，算子 $B(t, x(\cdot))$ 是可逆的。如果 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 是方程(1)的两个强解，而且 $\mu_{\xi_2}\ll\mu_{\xi_1}$，那末以概率为 1 有 $\xi_1(t)=\xi_2(t)$。

注。如果对应于方程(1)的两个任意解 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 的测度是相同的，那末我们将称方程(1)的解是弱唯一的。

定理 5 断定了在 $B(t, x(\cdot))$ 非退化时由弱唯一性得到强解的唯一性．这个事实将在下面常常被利用。

推论 1 对所有 $x(\cdot)\in\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 设 $a(s,x(\cdot))$ 满足 $\int_0^T|a(s,x(\cdot))|^2ds<\infty$。那末方程

$$\xi(t)=w(t)+\int_0^t a(s,\xi(\cdot))ds \tag{26}$$

有不多于一个的强解。

事实上，由于定理 3，对应于过程 $\xi(t)$ 的测度是等价于 Wiener 测度，于是对应于方程(26)的任意两个强解的测度是等价的，且按定理 5 这些解以概率为 1 相等。

推论 2 设对所有 $s\in[0,T]$，$x(\cdot)\in\mathscr{C}^m_{[0,T]}$，算子 $B(s,x(\cdot))$ 是可逆的且

$$b(s,x(\cdot))=B^{-1}(s,x(\cdot))a(s,x(\cdot))$$

是有界函数。如果方程

$$d\xi_1(t)=B(t,\xi_1(\cdot))dw(t) \tag{27}$$

的解是弱唯一的，那末方程(1)的解是强唯一的。

事实上，由定理 2（因为 $b(s,x(\cdot))$ 有界，条件(8)成立)得，对方程(1)的所有解 $\xi(t)$ 可找到方程(27)的解 $\xi_1(t)$，使得对应于过程 $\xi_1(t)$ 和 $\xi(t)$ 的测度 μ_{ξ_1} 和 μ_ξ 等价．如果方程(27)的解弱唯一，那末方程(1)的解对应的测度是等价的，因为它们均等价于第一个方程的唯一弱解所对应的测度．余下只要应用定理 5。

推论 2 使得能将方程(1)的解的弱唯一性归结为关于方程(27)的同样问题。

事实上，假定使 $B^{-1}(s, x(\cdot))a(s, x(\cdot))$ 有界的所有 $a(s, x(\cdot))$，方程(1)有弱唯一解．设对满足条件 1) 和 2) 的某个 $a_1(s, x(\cdot))$，方程(1)有两个解 $\xi_i(t)(i=1,2)$ 和 $\mu_{\xi_1} \neq \mu_{\xi_2}$。令

$$\tau_N = \sup[t \leqslant \tau: \sup_{s \leqslant t}|B^{-1}(s,\xi_1(\cdot))a(s,\xi_1(\cdot))| \leqslant N, \sup_{s \leqslant t}|B^{-1}(s,\xi_2(\cdot))a(s,\xi_2(\cdot))| \leqslant N].$$

因为 $|B^{-1}(s,x(\cdot))a(s,x(\cdot))|$ 在每个紧集上有界且对所有 $\varepsilon > 0$ 可找到紧集 K_ε，使

$$\mathbf{P}\{\xi_1(\cdot) \in K_\varepsilon\} \geqslant 1-\varepsilon, \ \mathbf{P}\{\xi_2(\cdot) \in K_\varepsilon\} \geqslant 1-\varepsilon,$$

所以 $\mathbf{P}\{\tau_N = T\} \to 1$ 当 $N \to \infty$。如果

$$\sup_{s \leqslant t}|B^{-1}(s,x(\cdot))a(s,x(\cdot))| \leqslant N,$$

设

$$a_1^N(t,x(\cdot)) = a(t,x(\cdot)),$$

如果

$$|B^{-1}(s,x(\cdot))a(s,x(\cdot))| < N \qquad 当\ s < t_N,$$
$$|B^{-1}(t_N,x(\cdot))a(t_N,x(\cdot))| = N \qquad 当\ t_N \leqslant t,$$

设

$$a_1^N(t,x(\cdot)) = a(t_N,x(\cdot)).$$

显然，$a_1^N(t,x(\cdot))$ 满足条件 1) 和 2)，$|B^{-1}(t,x(\cdot))a_1^N(t,x(\cdot))| \leqslant N$。设 $\tilde{\xi}_i(t) = \xi_i(t)$ 当 $t \leqslant \tau_N$ 和对 $t > \tau_N$

$$\tilde{\xi}_i(t) - \tilde{\xi}_i(\tau_N) = \int_{\tau N}^t a_1^N(s,\tilde{\xi}_i(\cdot))ds + \int_{\tau N}^t B(s,\tilde{\xi}_i(\cdot))dw(s)$$

(由定理 4 的注得这些 $\tilde{\xi}_i(t)$ 存在)。显然当 $s < \tau_N$ 时

$$a_1^N(s,\tilde{\xi}_i(\cdot)) = a_1(s,\tilde{\xi}_i(\cdot));$$

可见，$\tilde{\xi}_i(\cdot)$ 是方程

$$d\tilde{\xi}_i(t) = a_1^N(t,\tilde{\xi}_i(\cdot))dt + B(t,\tilde{\xi}_i(\cdot))dw(t)$$

的解．如果 $\mu_{\xi_1} \neq \mu_{\xi_2}$，那末当$N$足够大时，$\mu_{\tilde{\xi}_1} \neq \mu_{\tilde{\xi}_2}$。因而方程(1)对某个 $a_1(s,x(\cdot))$ 的弱非唯一性导致使 $B^{-1}(s,x(\cdot))a(s,$

$x(\cdot)$) 有界的 $a(s, x(\cdot))$ 对应解的弱非唯一性，于是导致方程(27)的解的弱非唯一性．下面还要研究方程(27)的解的唯一性问题．我们从一维情形开始．

设 $B(t,x(\cdot))$ 是定义在 $[0,T]\times\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 上的可测函数，且对每个 t，它是 $\mathfrak{S}_t$-可测．如果对所有 $x(\cdot)\in\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 和将 $[0,T]$ 映到 $[0,T]$ 上的双方单值连续函数 $\lambda(t)(\lambda(0)=0)$ 使得

$$B(t,x_1(\cdot))=B(\lambda(t),x(\cdot))$$

成立，其中 $x_1(t)=x(\lambda(t))$ 那末称 $B(t,x(\cdot))$ 不变地依赖于时间．其次，我们定义泛函

$$\lambda_0(t,\ \xi(\cdot))=\int_0^t[d\xi(t)]^2;$$

如果 $\xi(t)$ 是伊藤过程，那末这样的泛函与 $\langle\xi,\xi\rangle_t$ 相等．令

$$\lambda_1(t,\ \xi(\cdot))=\int_0^t\frac{d_s\lambda_0(s,\xi(\cdot))}{B^2(s,\xi(\cdot))}$$

$$=\int_0^t B^{-2}(s,\xi(\cdot))d\langle\xi,\xi\rangle_s. \tag{28}$$

泛函 $\lambda_0(t,\xi(\cdot))$ 将不变地依赖于 t．倘若 $B(t,\xi(\cdot))$ 不变地依赖于 t，那末泛函 $\lambda_1(t,\xi(\cdot))$ 也是这样．

设 $\xi(\cdot)$ 是方程(27)的解．那末 $\lambda_1(t,\xi(\cdot))=t$．我们用等式

$$t=\lambda_0(\tau_t,\xi(\cdot)) \tag{29}$$

定义量 τ_t．令 $w_1(t)=\xi(\tau_t)$．显然 $w_1(t)$ 是局部鞅．此外，

$$\langle w_1,w_1\rangle_t=\lambda_0(\tau_t,\xi(\cdot))=t.$$

可见 $w_1(t)$ 是 Wiener 过程．以 φ_t 表示 τ_t 的反函数：$\tau_{\varphi_t}=t$．那末 $\xi(t)=w_1(\varphi_t)$．

函数 φ_t 可由过程 $w_1(\cdot)$ 所确定．事实上，利用关系式

$$t=\lambda_1(t,\xi(\cdot))=\lambda_0(t,w_1(\cdot)),$$

$$\lambda_1(t,\xi(\cdot))=\lambda_1(\varphi_t,w_1(\cdot)),$$

我们证实 φ_t 被等式

$$\lambda_1(\varphi_t,w_t(\cdot))=t \tag{30}$$

所确定。

于是，如果 $\xi(t)$ 是方程(27)的解，那末存在 Wiener 过程 $w_1(\cdot)$，使得 $\xi(t)=w_1(\varphi_t)$，其中 φ_t 按式(30)由过程 w_1 唯一地确定，而对所有伊藤过程，$\lambda_1(t,\xi)$ 由等式(28)所给出。关系式(30)等价于

$$t=\int_0^{\varphi_t} B^{-2}(s,w_1(\cdot))ds. \tag{31}$$

如果 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 是方程(27)的两个解，那末由于在那列举的条件下，$\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 是关于 Wiener 过程 $w_1(t)$ 和 $w_2(t)$ 的同一函数，所以对应于过程 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 的测度相同。应用定理 5 及推论 2，得如下结果。

定理 6 设在 $\mathscr{R}^1$ 中方程

$$d\xi(t)=a(t,\xi(\cdot))dt+B(t,\xi(\cdot))dw(t) \tag{32}$$

的系数满足条件 1) 和 2)，此外，设 $B(t,x(\cdot))>0$ 且不变地依赖于 t。

那末方程(32)的解是弱唯一的，强解是唯一的。

注。可以证明，即使函数 $B(t,x(\cdot))$ 非不变地依赖于 t，但可将它重写为不变地依赖于 t 的形式。这是因为能构造出函数 $B_1(t,x(\cdot))$，它不变地依赖于 t 和以概率为 1

$$B(t,\xi(\cdot))=B_1(t,\xi(\cdot)).$$

为了求得 $B(t,\xi(\cdot))$ 这样的表示，需要消除 $B(t,x(\cdot))$ 关于 t 的明显的依赖性，只要将 t 表为某个不变地依赖于 t 的函数 $\varphi(t,\xi(\cdot))$ 的形式即可。

我们来说明如何做到这点。设 $\lambda_0(t,\xi(\cdot))=\langle\xi,\xi\rangle_t$（显然，对微分方程(32)的解 $\xi(\cdot)$ 来说，此函数不依赖于 $a(\cdot,\cdot)$）。其次，令

$$F(t,\ \xi(\cdot))=\int_0^t B^2(s,\ \xi(\cdot))ds$$

和用关系式

$$F(\varphi(t,\xi(\cdot)),\xi(\cdot))=\lambda_0(t,\xi(\cdot))$$

定义 $\varphi(t,\xi(\cdot))$. 因为 $\lambda_0(t,\xi(\cdot))=F(t,\xi(\cdot))$, 易见以概率为 1 有 $\varphi(t,\xi(\cdot))=t$. 其次, $\varphi(t,\xi(\cdot))$ 由 $\xi(\cdot)$ 到时刻 t 的状态所确定,这因为 $\lambda_0(t,\xi(\cdot))$ 和 $F(t,\xi(\cdot))$ 是这样的. 我们来确定 $\varphi(t,\xi(\cdot))$ 不变地依赖于 t 的条件.

首先假定当 $t_k\leqslant t<t_{k+1}$ 时 $B(t,\xi(\cdot))=B_k(t,\xi(\cdot))$, 其中 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=T$ 和 $B_k(t,\xi(\cdot))$ 不变地依赖于 t. 那末当 $t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1}$ 时

$$\varphi(t,\xi(\cdot))=\varphi(t_k,\xi(\cdot))+\int_{t_k}^{t}\frac{d\lambda_0(s,\xi(\cdot))}{B_k^2(s,\xi(\cdot))}.$$

因为 $\lambda_0(t,\xi(\cdot))$ 和 $B_k^2(t,\xi(\cdot))$ 不变地依赖于 t, 所以函数 $\varphi(t,\xi(\cdot))$ 也将是不变地依赖于 t. 因此当 $B(t,x(\cdot))$ 是在固定区间上不变地依赖于 t 的关于 t 的阶梯函数的极限时, 所作的结论是正确的.

按联合变量连续的函数 $B(s,x)$ 就是这样的函数, 因为函数 $B_k(x)$ 显然不变地依赖于 t, $B(s,x)$ 可以用 t 的阶梯函数逼近.

现设 $\xi(t)$ 是方程(27)在 $\mathscr{R}^m$ 中的解,算子 $B(s,x(\cdot))$ 不变地依赖于 t 且 $g(t,x(\cdot))$ 是 $[0,T]\times\mathscr{C}_{[0,T]}^m$ 上不变地依赖于 t 的正函数. 利用关系式

$$t=\int_0^{\tau_t}g(s,\xi(\cdot))ds$$

定义变量 τ_t.

函数 τ_t 是连续的,按 t 递增且对每个 t, τ_t 是关于 Wiener 过程 $w(t)$ 的 Марков 时间.

令 $\xi_1(t)=\xi(\tau_t)$,

$$w_1(t)=\int_0^{\tau_t}\sqrt{g(s,\xi(\cdot))}\,dw(s).$$

过程 $w_1(t)$ 也是 $\mathscr{R}^m$ 中的 Wiener 过程. 因为

$$\xi_1(t)=\int_0^{\tau_t}B(s,\xi(\cdot))dw(s)$$

$$= \int_0^t B(\tau_s, \xi_1(\cdot))dw(\tau_s)$$

$$= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{g(s, \xi_1(\cdot))}} B(s, \xi_1(\cdot))$$

$$\times d \int_0^{\tau_s} \sqrt{g(u, \xi(\cdot))}\, dw(u)$$

$$= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{g(s, \xi_1(\cdot))}} B(s, \xi_1(\cdot))dw_1(s),$$

所以 $\xi_1(t)$ 满足随机微分方程

$$d\xi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{g(s, \xi_1(\cdot))}} B(s, \xi_1(\cdot))dw_1(s), \qquad (33)$$

其中 $w_1(t)$ 是某个 Wiener 过程. 设存在不变地依赖于 t 的函数 $\lambda_1(t, \xi(\cdot))$ 使得以概率为 1 有 $\lambda_1(t, \xi(\cdot)) = t$. 那末定义 φ_t 为 τ_t 的反函数: $t = \tau_{\varphi_t}$,我们有

$$t = \lambda_1(t, \xi(\cdot)) = \lambda_1(\varphi_t, \xi_1(\cdot)). \qquad (34)$$

于是,$\xi(t) = \xi_1(\varphi_t)$ 满足方程(27),其中 φ_t 按等式(34)由 $\xi_1(\cdot)$ 所确定. 由这个事实得到如下定理:

定理 7 设 $B(s, x(\cdot))$ 是取值于 $\mathfrak{L}(\mathscr{R}^m)$ 的算子函数和 $g(s, x(\cdot))$ 是取值于 $\mathscr{R}^1$ 的函数. 再设这两个函数都是定义在 $[0, T] \times \mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 上的可测函数且不变地依赖于 t. 如果方程(33)的解是弱唯一的,那末方程(27)的强解是唯一的.

证. 如果 $\xi(t)$ 和 $\xi'(t)$ 是方程(27)的两个解, 那末根据已证明的事实, 这些解有如下形状

$$\xi(t) = \xi_1(\varphi_t),\ \ \xi'(t) = \xi'_1(\varphi'_t),$$

其中 $\xi_1(t)$ 满足方程(33),而 $\xi'_1(t)$ 满足方程

$$d\xi'_1(t) = \frac{1}{\sqrt{g(s, \xi'_1(\cdot))}} B(s, \xi'_1(\cdot))dw'_1(s),$$

此处 $w'_1(\cdot)$ 是某个 Wiener 过程, 而 φ_t 和 φ'_t 由下述等式所定义:

$$t = \lambda_1(\varphi_t, \xi_1(\cdot)) = \lambda_1(\varphi'_t, \xi'_1(\cdot)),$$

$$\lambda_1(t,x(\cdot))=\langle z_u(\cdot),z_u(\cdot)\rangle_t,$$

$$z_u(t)=\int_0^t(u,B^{-1}(s,\xi(\cdot)))d\xi(s),\ u\in\mathscr{R}^m,|u|=1.$$

可见，$\xi(t)$ 和 $\xi'(t)$ 可由 Wiener 过程 $w_1(t)$ 和 $w_1'(t)$ 利用同样的变换得到；因此对应于这些过程的测度相同。余下只要利用定理 5.

伊藤过程与随机微分方程 设 $w(t)$ 是 $\mathscr{R}^m$ 中的 Wiener 过程，而 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 是此过程所产生的 σ-代数流。考虑伊藤过程

$$\xi(t)=\int_0^t a(s,\omega)ds+\int_0^t B(s,\omega)dw(s),\tag{35}$$

其中 $a(t,\omega)$ 和 $B(t,\omega)$ 是适应于 $\{\mathfrak{F}_t\}$，分别取值于 $\mathscr{R}^m$ 和 $\mathfrak{L}(\mathscr{R}^m)$ 的函数.

下面叙述 $\xi(t)$ 是随机微分方程(1)的解的条件.

以 $\{\mathfrak{F}_t^\xi\}$ 表示过程 $\xi(t)$ 所生成的 σ-代数流.

定理 8 设下述条件成立:

1) $a(s,\omega)$ 和 $B(s,\omega)$ 对几乎所有 ω 按 s 连续，

2) $\int_0^T\mathbf{E}|a(s,\omega)|^2ds<\infty$,

3) $B(s,\omega)$ 是正的对称算子.

那末存在对 $s\in[0,T]$，$x(\cdot)\in\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 有定义和分别取值于 $\mathscr{R}^m$ 和 $\mathfrak{L}(\mathscr{R}^m)$ 的可测函数 $a(s,x(\cdot))$ 和 $B(s,x(\cdot))$，满足本节开始所说的条件 1)，和存在关于 $\{\mathfrak{F}_t^\xi\}$ 的 Wiener 过程 $\bar{w}(t)$，使 $\xi(t)$ 满足式

$$\xi(t)=\int_0^t a(s,\xi(\cdot))ds+\int_0^t B(s,\xi(\cdot))d\bar{w}(s).\tag{36}$$

证. 设

$$\bar{a}(s,\omega)=\mathbf{E}(a(s,\omega)|\mathfrak{F}_s^\xi),$$

$$\eta(t)=\xi(t)-\int_0^t\bar{a}(s,\omega)ds.$$

显然，$\eta(t)$ 是 $\mathfrak{F}_t^\xi$-可测. 我们来证明 $\eta(t)$ 是关于流 $\{\mathfrak{F}_t^\xi\}$ 的局部鞅.

设

$$\tau_N = \sup[t \leqslant T, \sup_{s \leqslant t}|\eta(s)| \leqslant N], \quad \eta_N(t) = \eta(t \wedge \tau_N).$$

那末

$$\eta_N(t) = \int_0^{t\wedge\tau_N} [a(s,\omega) - \bar{a}(s,\omega)]ds + \int_0^{t\wedge\tau_N} B(s,\omega)dw(s).$$

由 $\eta_N(t)$ 的有界性及定理的条件 2),得

$$\mathbf{E}\left|\int_0^{t\wedge\tau_N} B(s,\omega)dw(s)\right|^2 < \infty.$$

于是当 $t_1 < t_2$ 时

$$\mathbf{E}\left(\int_{t_1\wedge\tau_N}^{t_2\wedge\tau_N} B(s,\omega)dw(s)\middle|\mathfrak{F}_{t_1}^{\xi}\right) = \mathbf{E}\left(\int_{t_1\wedge\tau_N}^{t_2\wedge\tau_N} B(s,\omega)dw(s)\middle|\mathfrak{F}_{t_1}\right) = 0,$$

这是因为 $\mathfrak{F}_{t_1} \supset \mathfrak{F}_{t_1}^{\xi}$. 其次,过程

$$\eta(t) = \int_0^t [a(s,\omega) - \bar{a}(s,\omega)]ds$$

在 $t_1 < t_2$ 时满足条件

$$\mathbf{E}\left(\int_{t_1}^{t_2}[a(s,\omega) - \bar{a}(s,\omega)]ds \,|\, \mathfrak{F}_{t_1}^{\xi}\right) = \mathbf{E}\left(\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{E}(a(s,\omega) - \bar{a}(s,\omega)\,|\,\mathfrak{F}_s^{\xi})ds' \,|\, \mathfrak{F}_{t_1}^{\xi}\right) = 0.$$

由此,对任意关于流 $\{\mathfrak{F}_t^{\xi}\}$ 的 Марков 时间 τ_N,有

$$\mathbf{E}\left(\int_{t_1\wedge t_N}^{t_2\wedge\tau_N}[a(s,\omega) - \bar{a}(s,\omega)]ds \,|\, \mathfrak{F}_{t_1}^{\xi}\right) = 0.$$

从而证明了 $\eta_N(t)$ 是鞅,也就是说 $\eta(t)$ 是局部鞅.

因为

$$\eta(t) = \int_0^t [a(s,\omega) - \bar{a}(s,\omega)]ds + \int_0^t B(s,\omega)dw(s),$$

所以对所有 $z \in \mathscr{R}^m$

$$\langle(z,\eta),(z,\eta)\rangle_t = \int_0^t |B(s,\omega)z|^2 ds.$$

因为左边的量是 $\mathfrak{F}_t^\xi$-可测，所以 $|B(t,\omega)z|$ 也是 $\mathfrak{F}_t^\xi$-可测. 可见,$B(t,\omega)$ 是适应于 $\{\mathfrak{F}_t^\xi\}$（正对称算子 B 由值 $(B^2z,z)=|Bz|^2$ 所确定). 令

$$\bar{w}(t)=\int_0^t B^{-1}(s,\omega)d\eta(t).$$

此过程适应于 $\{\mathfrak{F}_t^\xi\}$,是关于 $\{\mathfrak{F}_t^\xi\}$ 的局部鞅,且对 $z\in\mathscr{R}^m$

$$\langle(z,\bar{w}),(z,\bar{w})\rangle_t=|z|^2t.$$

这意味着，它是 $\mathscr{R}^m$ 中关于流 $\{\mathfrak{F}_t^\xi\}$ 的 Wiener 过程. 显然,

$$\eta(t)=\int_0^t B(s,\omega)d\bar{w}(t),$$

$$\xi(t)=\int_0^t\bar{a}(s,\omega)ds+\int_0^t B(s,\omega)d\bar{w}(t).\tag{37}$$

余下注意由于 $\bar{a}(t,\omega)$ 和 $B(t,\omega)$ 是适应于 $\{\mathfrak{F}_t^\xi\}$,所以存在函数 $a(t,x(\cdot))$ 和 $B(t,x(\cdot))$ 以概率为 1 有

$$\bar{a}(t,\omega)=a(t,\xi(\cdot)),\ B(t,\omega)=B(t,\xi(\cdot)).$$

以此代入(37),可得(36).

§3. 在 $\mathscr{R}^m$ 中的扩散过程

扩散过程已在第 II 卷第一章研究过. 这里都将扩散过程理解为以下随机微分方程的解:

$$d\xi(t)=a(t,\xi(t))dt+B(t,\xi(t))dw(t),\tag{1}$$

其中 $w(t)$ 是 Wiener 过程,过程 $\xi(t)$ 和 $w(t)$ 均取值于 $\mathscr{R}^m$, $a(t,x)$ 和 $B(t,x)$ 是分别取值于 $\mathscr{R}^m$ 和 $\mathfrak{L}(\mathscr{R}^m)$ 的 $[0,T]\times\mathscr{R}^m$ 上的可测函数. 在 $\xi(0)(\xi(s))$ 的初始条件下求解方程(1), 其中 $\xi(0)(\xi(s))$ 是独立于 $w(t)(w(t+s)-w(s))$ 的已给出的随机变量.

在第二章 §2 已考虑形为(1)的方程.在那里假设函数 $a(t,x)$ 和 $B(t,x)$ 满足局部 Lipschitz 条件;对每个N存在这样的 $l_{N,T}$, 当 $t\leqslant T,|x|\leqslant N,|y|\leqslant N$

$$|a(t,x)-a(t,y)|+\|B(t,x)-B(t,y)\|\leqslant l_{N,T}|x-y|,\tag{2}$$

在此假设下，方程(1)的解的唯一性已建立．此外，如果条件

$$|a(t,x)| + \|B(t,x)\| \leqslant K_T(1+|x|) \tag{3}$$

成立，那末方程的解存在．此时解必定适应于由随机变量 $\xi(0)$ $(\xi(s))$ 和 $w(u)(w(u+s)-w(s))$，$u \leqslant t$，所生成的 σ-代数流 $\mathfrak{F}_t$．

在本节中我们不要求条件 2) 成立，我们也不假定(1)的解对 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 适应(即为强解)．我们将找到弱解存在及弱唯一性的更一般的条件，因此也得到强解唯一性的更一般的条件．

对应于扩散过程的绝对连续测度 在这段将得到对应于扩散过程的测度关于另外的测度的密度公式．此外，导出关于方程(1)的解的一维分布的某些结果．恒假定下条件成立．

A. 系数 $a(t, x)$ 和 $B(t, x)$ 满足条件(2)和(3)且对所有 $t \in [0,\infty)$，$x \in \mathscr{R}^m$，$B(t,x)$ 是非退化算子．

定理 1 设 $a_1(t,x)$，$a_2(t,x)$ 和 $B(t,x)$ 满足条件 A，$\xi_i(t)$ 是方程

$$d\xi_i(t) = a_i(t,\xi_i(t))dt + B(t,\xi_i(t))dw(t) \tag{4}$$

在 $[s,\infty)$ 上以 $\xi_i(s)$ 为初值的解．设 $\mu_i^{s,T}$ 表示对应于 $[s,T]$ 上的过程 $\xi_i(t)$ 的测度，而 $\nu_s^i(dx)$ 是 $\xi_i(s)$ 的分布．那末条件 $\nu_s^1(\cdot) \sim \nu_s^2(\cdot)$ 蕴涵了测度 $\mu_1^{s,T}$ 和 $\mu_2^{s,T}$ 的等价性；同时

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_2^{s,T}}{d\mu_1^{s,T}}(\xi_1(\cdot)) = {} & \frac{d\nu_s^2}{d\nu_s^1}(\xi_1(s)) \\ & \times \exp\left\{\int_s^T (B^{-1}(t,\xi(t))(a_2(t,\xi(t)) \right. \\ & - a_1(t,\xi(t)), dw(t)) \\ & \left. - \frac{1}{2}\int_s^T |B^{-1}(t,\xi(t))(a_2(t,\xi(t)) - a_1(t,\xi(t)))|^2 dt\right\}.\end{aligned} \tag{5}$$

证．由第二章 § 2 的结果得 $\xi_i(t)$ 是 Марков 过程．利用 Марков 测度的密度的一般性质，可以认为只要对以概率为 1 地 $\xi_1(s) = \xi_2(s) = x$ 的情形证明就够了（见第一卷第七章 § 6 公式

(6)). 在此假设下我们来证明定理。

如果函数 $B^{-1}(t,x)[a_2(t,x)-a_1(t,x)]$ 有界,那末定理的结论是 § 2 定理 2 和方程(4)的解的唯一性的推论。

设 $a_n(t,x)$ 对所有 $n>2$ 有同样的常数 $l_{N,T}$ 和 K_T 满足条件 A,

$$a_n(t,x)=\begin{cases}a_2(t,x), & |x|\leqslant n,\\ a_1(t,x), & |x|\geqslant 2n.\end{cases}$$

如果在(4)中以 $a_n(t,x)$ 代替 $a_2(t,x)$, 初始条件是 $\xi_n(s)=x$, 而以 $\xi_n(t)$ 表示这时方程(4)在区间 $[s,\infty)$ 上的解。那末

$$B^{-1}(t,x)[a_n(t,x)-a_1(t,x)]$$

有界;于是

$$\frac{d\mu_n^{s,T}}{d\mu_1^{s,T}}(\xi_1(\cdot))=\exp\left\{\int_s^T(B^{-1}(t,\xi(t))\right.$$

$$\times[a_n(t,\xi_1(t))-a_1(t,\xi_1(t))],dw(t))$$

$$-\frac{1}{2}\int_s^T|B^{-1}(t,\xi_1(t))[a_n(t,\xi_1(t))$$

$$\left.-a_1(t,\xi_1(t))]|^2dt\right\}. \tag{6}$$

设 $\tau^n=\max[t\leqslant T:\sup_{s\leqslant t}|\xi_2(s)|\leqslant N]$. 由于(4)的解的唯一性,过程 $\xi_2(t)$ 和 $\xi_n(t)$ 在 $[s,\tau^n]$ 上相等。因此对所有 Borel 集 $A\subset\mathscr{C}^m_{[s,T]}$

$$\mu_n^{s,T}(A\cap S_r)=\mu_2^{s,T}(A\cap S_r),$$

其中 $S_r=\{x(\cdot):\sup_{s\leqslant t\leqslant T}|x(t)|<r\}$. 于是,在 S_r 上当 $n>r$ 时

$$\frac{d\mu_n^{s,T}}{d\mu_1^{s,T}}(x(\cdot))=\frac{d\mu_2^{s,T}}{d\mu_1^{s,T}}(x(\cdot)).$$

但当 $\xi_1(\cdot)\in S_r, n>r$ 时,(6)的右边和 $n=2$ 时一样,即是与(5)的右边相等$\left(因为\ \frac{d\nu_2^s}{d\nu_1^s}(\cdot)=1\right)$. 因而证明了测度 $\mu_2^{s,T}$ 和 $\mu_1^{s,T}$ 在 $\bigcup_r S_r$ 上等价,而因为 $\bigcup_{r=1}^{\infty}S_r=\mathscr{C}^m_{[s,T]}$, 所以它们本是等价的。同

样证明公式(5)，定理得证。

以 $R_\lambda(s,x,E)$ 表示变量

$$\mathbf{E}_{s,x}\int_s^\infty e^{-\lambda(t-s)}\chi_E(\xi(t))dt, \tag{7}$$

其中 $\lambda>0$，E 是 $\mathscr{R}^m$ 中的 Borel 集，$\xi(t)$ 是方程(1)在 $[s,\infty)$ 上初始条件是 $\xi(s)=x$ 的解。如在第二章 § 2 所证明，(1)的解是 Марков 过程，它的转移概率 $P(s,x,t,E)$ 由等式

$$P(s,x,t,E)=\mathbf{P}_{s,x}\{\xi(t)\in E\} \tag{8}$$

所给出，其中 $\xi(t)$ 是和(7)中的过程一样的解。 $\mathbf{E}_{s,x}$ 是按过程 $\xi(t)$ 对应的测度取的数学期望。$R_\lambda(s,x,E)$ 是 E 的测度。 使我们感兴趣的问题是这测度关于 Lebesgue 测度的密度的存在性。我们假设除条件 A 外下条件成立。

B. 对所有 N 存在 $C_N>0$，使当 $|x|\leqslant N$，$t\leqslant N$ 时

$$\mathrm{Sp}(I-B(t,x)B^*(t,x))^2\leqslant 1-C_N.$$

我们需要如下两个引理。

设 $f(s,x)$ 是某个可测有界函数；令

$$G_\lambda f(s,x)=\mathbf{E}\int_s^\infty e^{-\lambda(t-s)}f(t,x+w(t)-w(s))dt,$$

其中 $w(t)$ 是 $\mathscr{R}^m$ 中的 Wiener 过程。

引理1 设

$$Lg(s,x)=(b(s,x),g'_x)+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}C(s,x)g''_{xx}$$

是微分算子，它的系数 $b(s,x)$ 和 $C(s,x)$ 定义在 $[0,\infty)\times\mathscr{R}^m$ 上分别取值于 $\mathscr{R}^m$ 和 $\mathfrak{L}(\mathscr{R}^m)$ 的可测函数，且满足关系式：

$$|b(s,x)|\leqslant\delta,\quad \mathrm{Sp}C(s,x)C^*(s,x)\leqslant\theta^2.$$

那末对每个 $\varepsilon>0$，

$$\iint[LG_\lambda g(s,x)]^2dsdx\leqslant(\theta^2+\varepsilon)\iint g^2(s,x)dsdx \tag{9}$$

对所有足够大的 $\lambda>0$ 成立。

证。设

$$g(s,x)=\iint \exp\{i\alpha s+i(x,y)\}\tilde{g}(\alpha,y)d\alpha dy.$$

那末

$$G_\lambda g(s,x)=\mathbf{E}\int_s^\infty\iint \exp\{i\alpha s+i(x,y)$$
$$+i(w(t)-w(s),y)-\lambda(t-s)\}\tilde{g}(\alpha,y)d\alpha dy$$
$$=\iint \exp\{i\alpha s+i(x,y)\}\frac{1}{\lambda-i\alpha+\frac{1}{2}|y|^2}\tilde{g}(\alpha,y)d\alpha dy. \quad (10)$$

因此由于 Parseval 等式

$$\iint\left|\frac{\partial}{\partial x^k}G_\lambda g(s,x)\right|^2 dsdx$$
$$=(2\pi)^m\iint\frac{|y^k|^2}{\left(\lambda+\frac{1}{2}|y|^2\right)^2+\alpha^2}|\tilde{g}(\alpha,y)|^2 d\alpha dy,$$

$$\iint\left|\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^j}G_\lambda g(s,x)\right|^2 dsdx$$
$$=(2\pi)^m\iint\frac{|y^k y^j|^2}{\left(\lambda+\frac{1}{2}|y|^2\right)^2+\alpha^2}|\tilde{g}(\alpha,y)|^2 d\alpha dy.$$

于是,任意 $\varepsilon_1>0$,只要 $\lambda>(1+1/\varepsilon_1)\delta/(1+\varepsilon_1)\theta^2$, 就有

$$\iint|L[G_\lambda g(s,x)]|^2 dsdx$$
$$\leqslant(1+\varepsilon_1)\frac{\theta^2}{4}\iint\sum_{k,j}\left|\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^j}G_\lambda g(s,x)\right|^2 dsdx$$
$$+\left(1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\delta\iint\sum_k\left(\frac{\partial}{\partial x^k}G_\lambda g(s,x)\right)^2 dsdx$$
$$=(2\pi)^m\iint\frac{\frac{1}{4}(1+\varepsilon_1)\theta^2|y|^4+\left(1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\delta|y|^2}{\left(\lambda+\frac{1}{2}|y|^2\right)^2+\alpha^2}$$
$$\times|\tilde{g}(\alpha,y)|^2 d\alpha dy\leqslant(2\pi)^m(1+\varepsilon_1)\theta^2\iint|\tilde{g}(\alpha,y)|^2 d\alpha dy$$

$$= (1+\varepsilon_1)\theta^2 \iint g^2(s,x)\,ds\,dx.$$

引理得证。

推论 当 $\theta < 1$ 时，对所有 $f \in \mathscr{L}_2([0,\infty) \times \mathscr{R}^m)$，方程

$$f = g + LG_\lambda g \tag{11}$$

在 $\mathscr{L}_2([0,\infty) \times \mathscr{R}^m)$ 中有解。设 $\|\cdot\|_2$ 是 $\mathscr{L}_2([0,\infty) \times \mathscr{R}^m)$ 中的范数。那末

$$\|g\|_2 \leqslant \frac{1}{1-\theta_1}\|f\|_2,\ 0 < \theta_1 < 1.$$

对(11)的解用记号

$$g = (I + LG_\lambda)^{-1}f,$$

$(I + LG_\lambda)^{-1}$ 是由 $\mathscr{L}_2([0,\infty) \times \mathscr{R}^m)$ 到 $\mathscr{L}_2([0,\infty) \times \mathscr{R}^m)$ 的某个算子。

对所有足够大的 λ 有

$$\|(I + LG_\lambda)^{-1}\|_2 \leqslant \frac{1}{1-\theta_1}.$$

注 1. 由公式 (10) 得 G_λ 也是由 $\mathscr{L}_2([0,\infty) \times \mathscr{R}^m)$ 到 $\mathscr{L}_2([0,\infty) \times \mathscr{R}^m)$ 的算子，而且 $\|G_\lambda\| \leqslant 1/\lambda$。

其次，令

$$G_\lambda^\xi f(s,x) = \mathrm{E}_{s,x}\int_s^\infty e^{-\lambda(t-s)}f(t,\xi(t))\,dt, \tag{12}$$

其中 $\xi(t)$ 如(7)中一样是(1)的解。如果 $f(t,x)$ 有连续有界导数 f'_t, f'_x, f''_{xx}，那末利用伊藤公式，可写出

$$\mathrm{E}_{s,x}f(t,\xi(t)) = f(s,x) + \mathrm{E}_{s,x}\int_s^t [f'_u(u,\xi(u)) + (a(u,\xi(u)),$$

$$f'_u(u,\xi(u))) + \frac{1}{2}\mathrm{Sp}B(u,\xi(u))B^*(u,\xi(u))f''_{xx}(u,\xi(u))]\,du.$$

将此表达式代入(10)，得

$$G_\lambda^\xi f(s,x) = \frac{1}{\lambda}f(s,x)$$

$$+\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_{s,x}\int_s^\infty e^{-\lambda(t-s)}L_\xi f(t,\xi(t))dt,$$

其中

$$L_\xi u(t,x)=\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)+\left(a(t,x),\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)\right)$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}B(t,x)B^*(t,x)u''_{xx}(t,x),$$

或

$$f(s,x)=G_\lambda^\xi[\lambda f-L_\xi f](s,x). \tag{13}$$

引理 2 如果存在这样的 $c>0$，使对所有 $x\in\mathscr{R}^m$, $s\in[0,\infty)$,不等式

$$\mathrm{Sp}(B(s,x)B^*(s,x)-I)^2\leqslant 1-c,\ |a(s,x)|\leqslant\frac{1}{c},$$

成立，那末对所有足够大的 $\lambda>0$

$$G_\lambda^\xi f(s,x)=G_\lambda(I-L_1G_\lambda)^{-1}f(s,x),$$

其中

$$L_1u(t,x)=(a(t,x),u'_x(t,x))$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(B(t,x)B^*(t,x)-I)u''_{xx}.$$

存在只依赖于 c 的 λ_0 和 H,使当 $\lambda>\lambda_0$ 时

$$\|G_\lambda^\xi\|_2\leqslant H.$$

证. 设 $g\in\mathscr{L}_2([0,\infty)\times\mathscr{R}^m)$,以 $f=G_\lambda g$ 代入(13),得

$$G_\lambda g=G_\lambda^\xi[\lambda G_\lambda g-L_\xi G_\lambda g].$$

利用

$$G_\lambda g(s,x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}g(t+s,x+w(t))dt$$

得证

$$\frac{\partial}{\partial s}G_\lambda g(s,x)+\frac{1}{2}\Delta G_\lambda g(s,x)$$

$$=\mathbf{E}\int_0^\infty e^{-\lambda s}\left[\frac{\partial g}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta g(t+s,x+w(t))\right]dt$$

$$= G_\lambda\left[\frac{\partial g}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta g\right]= -g+\lambda G_\lambda g,$$

其中 $\Delta u = \mathrm{Sp}u''_{xx}$。如公式(13)的证明一样，利用伊藤公式可得后一等式．于是

$$\lambda G_\lambda g - L_\xi G_\lambda g = g - L_1 G_\lambda g.$$

因此

$$G_\lambda g = G_\lambda^\xi (g - L_1 G_\lambda g). \tag{14}$$

设 g 是方程

$$g - L_1 G_\lambda g = f$$

的解．如果 $f\in \mathscr{L}_2([0,\infty)\times\mathscr{R}^m)$，那末在引理的条件下这解存在，$g=(I-L_1G_\lambda)^{-1}f$ 存在．将这个 g 代入(14)，就得所需要的结果．

定理 2 如果引理 2 条件成立，那末对任意可积且平方可积的函数 $\varphi(x)$，对所有 $\lambda>\lambda_0$，其中 λ_0 仅依赖于 c，

$$\int\varphi(x)R_\lambda(s,x,E)dx$$

作为 E 的函数是对于 Lebesgue 测度 $m(E)$ 绝对连续．如果

$$R_\lambda(s,\varphi,E)=\int\varphi(x)R_\lambda(s,x,E)dx,$$

那末对任意 $\varepsilon,0<\varepsilon<1$，函数

$$r_s(y)=\frac{dR_\lambda(s,\varphi,\cdot)}{dm}(y)$$

是 $2-\varepsilon$ 次方可积，而且对每个 s_0 存在仅依赖于 c，ε 和 s_0 的常数 H_{s_0}，使当 $\lambda>\lambda_0$，$s\leqslant s_0$ 时

$$\int(r(y))^{2-\varepsilon}dy\leqslant H_{s_0}\left(\int\varphi^2(x)dx+\int|\varphi(x)|dx\right).$$

证．设 $f(s,x)=\chi_E(x)e^{-\delta s}$．那末

$$G_\delta^\xi f(s,x)=e^{-\delta s}R_{\lambda+\delta}(s,x,E).$$

于是

$$R_{\lambda+\delta}(s,x,E)=e^{\delta s}G_\lambda^\xi f(s,x).$$

利用引理 2，可写为：

$$R_{\lambda+\delta}(s,x,E)=e^{\delta s}G_\lambda(I-L_1G_\lambda)^{-1}f(s,x).$$

记

$$(I-L_1G_\lambda)^{-1}f=g.$$

那末

$$\left.\begin{aligned}&R_{\lambda+\delta}(s,x,E)\\&\quad=e^{\delta s}\int_0^\infty\int\frac{1}{(2\pi t)^{m/2}}\exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{2t}-\lambda t\right\}g(t,y)dtdy,\\&R_{\lambda+\delta}(s,\varphi,E)=e^{\delta s}\int_0^\infty\int\varphi(t,y)e^{-\lambda t}g(t,y)dtdy,\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

其中

$$\varphi(t,y)=(2\pi t)^{-m/2}\int\varphi(x)\exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{2t}\right\}dx.$$

如果 $\varphi(x)=\int e^{i(z,x)}\tilde{\varphi}(z)dz$,那末

$$\varphi(t,y)=\int\tilde{\varphi}(z)e^{-\frac{t|z|^2}{2}}e^{i(z,y)}dz.$$

因此

$$\begin{aligned}\int|\varphi(t,y)|^2dy&=(2\pi)^m\int|\tilde{\varphi}(z)|^2e^{-t|z|^2}dz\\&<(2\pi)^m\int|\tilde{\varphi}(z)|^2dz\\&=\int|\varphi(x)|^2dx.\end{aligned}$$

可见,

$$\begin{aligned}R_{\lambda+\delta}(s,\varphi,E)&\leqslant e^{\delta s}\sqrt{\frac{1}{2\lambda}\int|\varphi(x)|^2dx}\sqrt{\int_0^\infty\int g^2(t,y)dtdy}\\&\leqslant e^{\delta s}H_1\sqrt{\int\varphi^2(x)dx\int_0^\infty\int\chi_B(x)e^{-2\delta s}dxds}\quad;\end{aligned}$$

这里 $H_1=\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\|(I-L_1G_\lambda)\|$。最后求得

$$R_{\lambda+\delta}(s,\varphi,E)\leqslant H_1\frac{e^{\delta s}}{\sqrt{2\delta}}\sqrt{\int\varphi^2(x)dx\cdot m(E)}.$$

由此不等式得到 $R_{\lambda+\delta}(s,\varphi,E)$ 对于 Lebesgue 测度的密度存在，可见对某个 H_2

$$\int_E r_s(y)dy \leqslant H_2\sqrt{m(E)}.$$

设 $E_\alpha = \{y: r_s(y) > \alpha\}$。那末 $\alpha m(E_\alpha) \leqslant H_2(m(E_\alpha))^{1/2}$。于是，$m(E_\alpha) \leqslant \alpha^{-2}H_2^2$。因此，

$$\int r_s^{2-\varepsilon}(y)dy = \int_{r_s(y)\leqslant 1} r_s^{2-\varepsilon}(y)dy$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\int_{2^n\leqslant r_s(y)<2^{n+1}} r_s^{2-\varepsilon}(y)dy \leqslant$$

$$\leqslant \int r_s(y)dy + \sum_{n=0}^{\infty} H_2^2\frac{2^{2-\varepsilon}}{2^{n\varepsilon}}.$$

为完成定理的证明余下只要注意

$$\left|\int r_s(y)dy\right| \leqslant \int|\varphi(x)|R_\lambda(s,x,\mathscr{R}^m)dx$$

$$=\frac{1}{\lambda}\int|\varphi(x)|dx.$$

注1. 设(15)中的 $g(t,y)$ 属于 $\mathscr{L}_p([0,\infty)\times\mathscr{R}^m)$，其中 p 是使得

$$\int_0^\infty\int\left[(2\pi t)^{-m/2}\exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{2t}-\lambda t\right\}\right]^q atdy$$

$$<\infty\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right) \tag{16}$$

成立。这时

$$R_{\lambda+\delta}(s,x,E) \leqslant c\|g\|_p,$$

其中 $\|\cdot\|_p$ 是 $\mathscr{L}_p$ 中的范数。此外，如果 $\|g\|_p \leqslant (m(E))^\alpha$，其中 $\alpha > 0$，那末

$$R_{\lambda+\delta}(s,x,E) \leqslant c_1(m(E))^\alpha.$$

正如在定理 2 一样，由此不等式可推出 $R_{\lambda+\delta}(s,x,E)$ 对于 $m(E)$

的密度存在和对任意 $\varepsilon>0$,此密度是 $\frac{1}{1-\alpha}-\varepsilon$ 方可积. 为使(16)成立，需要

$$\frac{m}{2}(q-1)<1,\ q<\frac{m+2}{m},\ p>\frac{m+2}{2}.$$

如果 $m=1$,那末可取 $q=p=2$.

推论 1 在引理 2 的条件中 $m=1$ 时,$R_\lambda(s,x,E)$ 对于 Lebesgue 测度绝对连续,且若

$$r_\lambda(s,x,y)=\frac{dR_\lambda(s,x,\cdot)}{dm}(y), \tag{17}$$

那末对所有 ε, $0<\varepsilon<1$,和 ε_0,存在依赖于 c 的常数 C_2,使当 $\lambda>\lambda_0$, $s\leqslant s_0$ 时

$$\int r_\lambda^{2-\varepsilon}(s,x,y)dy\leqslant C_2. \tag{18}$$

注2. 假设方程(1)的系数 $a(t,x)$ 和 $B(t,x)$ 不依赖于 t 且等于 $a(x)$ 和 $B(x)$. 令

$$G_\lambda^\xi f(x)=\mathbf{E}_{0,x}\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(\xi(t))dt,$$

$$G_\lambda f(x)=\mathbf{E}\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(x+w(t))dt,$$

其中 $\xi(t)$ 是方程(1)在区间$(0,\infty)$上有初始条件 $\xi(0)=x$ 的解. 正如在引理 1 和 2 证明一样,可断定

$$G_\lambda^\xi f=G_\lambda[I-L_1G_\lambda]^{-1}f,$$

所有算子现仅在 $\mathscr{L}_2(\mathscr{R}^m)$ 中考虑. 此时范数 $\|(I-L_1G_\lambda)^{-1}\|_2$ 是有限的. 因此

$$G_\lambda^\xi\chi_E(x)$$

$$=\int\left[\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{2t}-\lambda t\right\}(2\pi t)^{-m/2}dt\right]g(y)dt,$$

其中 $g=[I-L_1G_\lambda]^{-1}\chi_E$. 易见当 $q<\frac{m}{m-2}$ 时,函数

$$\Gamma_\lambda(|x-y|)=\int_0^\infty(2\pi t)^{-m/2}\exp\left\{-\frac{|x-y|}{2t}-\lambda t\right\}dt$$

按 y 是 q 方可积. 特别当 $m\leqslant 3$ 时它是平方可积. 于是当 $m\leqslant 3$ 时在系数不依赖于 t 及满足引理 2 条件的情况下，(17)和(18)成立且常数 C_2 不依赖于 s。

我们再来证明一个引理，该引理使我们能够断定联系于方程(1)的解的某些测度有对 Lebesgue 测度的密度.

引理 3 设 $\xi(t)$ 满足方程(1),它的系数满足条件

$$|a(t,x)|+\|B(t,x)\|+\|B^{-1}(t,x)\|\leqslant C,$$

其中 C 是某个常数. 如果 $f(t,x)$ 是二次连续可微数值函数，它的导数 f'_t, f'_x, f''_{xx} 满足条件:

$$|f'_t|+|f'_x|+|f'_x|^{-1}+\|f''_{xx}\|\leqslant C_1,$$

那末对所有 T 和 ε, $0<\varepsilon<1$, 存在仅依赖于 C 和 C_1 的常数 $C_{T,\varepsilon}$,使集合 $E\subset\mathscr{R}^1$ 的函数

$$\mathbf{E}\int_0^T\chi_E(f(t,\xi(t)))dt$$

对 $\mathscr{R}^1$ 中的 Lebesgue 测度绝对连续,且若 $p_T(y)$ 是它对 Lebesgue 测度的密度,那末

$$\int(p_T(y))^{2-\varepsilon}dy\leqslant C_{T,\varepsilon}$$

证。令

$$\eta_t=f(t,\xi(t))-f(0,\xi(0))+\int_0^t\alpha(s,\xi(s))ds$$
$$+\int_0^t\beta(s,\xi(s))d\bar{w}(s),$$

其中

$$\alpha(s,x)=f'_s(s,x)+(a(s,x),f'_x(s,x))$$
$$+\frac{1}{2}\operatorname{Sp}B(s,x)B^*(s,x)f''_{xx}(s,x),$$
$$\beta(s,x)=|B^*(s,x)f'_x(s,x)|,$$

$$\bar{w}(t)=\int_0^t\left(\frac{B^*(s,\xi(s))f'_x(s,\xi(s))}{|B^*(s,\xi(s))f'_x(s,\xi(s))|},\quad dw(s)\right),$$

$\bar{w}(t)$ 是一维 Wiener 过程. 设 τ_t 由等式

$$t=\int_0^{\tau_t}\beta^2(s,\xi(s))ds$$

所定义，那末

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\int_0^T\chi_E(\eta_t)dt&=\mathbf{E}\int_0^{\tau_T}\chi_E(\eta_{\tau_s})d\tau_s\\&\leqslant\frac{1}{\delta}\mathbf{E}\int_0^{T/\delta}\chi_E(\eta_{\tau_s})ds,\end{aligned}$$

其中 $\delta>0$ 满足 $\delta\leqslant\beta^2(s,x)$. 其次,

$$\begin{aligned}\eta_{\tau_t}&=\int_0^{\tau_t}\beta(s,\xi(s))d\bar{w}(s)\\&\quad+\int_0^{\tau_t}\alpha(s,\xi(s))ds+f(0,\xi(0))\\&=\tilde{w}(t)+\int_0^t\gamma(s)ds+f(0,\xi(0)),\end{aligned}$$

其中 $\gamma(s)$ 是有界函数. 如果代替原来的测度而引入对于它绝对连续且有密度

$$\rho_T=\exp\left\{-\int_0^T\gamma(s)d\tilde{w}(s)-\frac{1}{2}\int_0^T\gamma^2(s)ds\right\}$$

的测度，那末过程 η_{τ_t} 是 Wiener 过程(见 § 1 定理 11). 因此，利用 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\int_0^{T_1}\chi_E(\tilde{w}(t))dt&=\mathbf{E}\int_0^{T_1}\chi_E(\eta_{\tau_t})\rho_{T_1}dt\\&\geqslant\frac{\left(\int_0^{T_1}\mathbf{E}\chi_E(\eta_{\tau_t})dt\right)^2}{\int_0^{T_1}\mathbf{E}\rho_{T_1}^{-1}dt}\geqslant\frac{\left(\int_0^{T_1}\mathbf{E}\chi_E(\eta_{\tau_t})dt\right)^2}{T_1e^{C_2T}}\end{aligned}$$

(我们利用到 § 1 引理 5),其中常数 C_2 只依赖于 $|\gamma(t)|$ 的极大值,所以它可选取为只依赖于 C_1 和 C. 于是证明了对某个 H

$$\mathbf{E}\int_0^T\chi_E(\eta_t)dt\leqslant H\sqrt{m(E)},\tag{19}$$

因为

$$\mathbf{E}\int_0^{T_1}\chi_E(\tilde{w}(t))dt$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}m(E)\int_0^{T_1}t^{-1/2}dt = \sqrt{\frac{T_1}{8\pi}}m(E).$$

正如在定理 2 中那样可从不等式(19)推导出引理的结论. 引理得证.

注. 在 $m=1$ 情形,取 $f(t,x)=x$, 我们可以验证,在引理 3 条件下对于方程(1)的解,对任意 ε, $0<\varepsilon<1$, 存在 $2-\varepsilon$ 方可积的函数 $g(y)$,使

$$\int_0^T \mathbf{P}\{\xi(t)\in E\}dt = \int_E g(y)dy.$$

解的存在性 由 § 2 定理 3 推得,满足条件(3)的系数 $a(t,x)$ 和 $B(t,x)$ 只要是连续的,方程(1)就有弱解. 如果利用 § 2 定理 2,那末在 $B(t,x)$ 是非退化的假设下,可除去 $a(t,x)$ 连续性的要求.

定理 3 设 $a(t,x)$ 和 $B(t,x)$ 满足条件(3), 此外, $B(t,x)$ 是连续的和对所有 $t\in[0,\infty)$ 及 $x\in\mathscr{R}^m$ 是非退化的. 那末方程(1)在 $[0,T]$ 上有满足初始条件 $\xi(0)$ 的(弱)解,

证. 方程

$$d\xi_0(t) = B(t,\xi_0(t))dw(t) \tag{20}$$

在初始条件 $\xi_0(0)=\xi(0)$ 下有解. 因此由于 § 2 定理 2, 对于使

$$B^{-1}(t,x)a(t,x)$$

是有界函数的所有 $a(t,x)$,方程(1)的解.

令

$$a_N(t,x) = \begin{cases} a(t,x), & |x|\leqslant N, \\ 0, & |x|>N, \end{cases}$$

那末函数 $B^{-1}(t,x)a_N(t,x)$ 有界,于是由于 § 1 引理 6

$$\mathbf{E}\exp\left\{\int_0^T(B^{-1}(t,\xi_0(t))a_N(t,\xi_0(t)),dw(t))\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^T |B^{-1}(t,\xi_0(t))a_N(t,\xi_0(t))|^2 dt\Big\} = 1.$$

设 μ_N 是在 $\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 上由等式

$$\mu_N(A) = \mathbf{E}\rho_N^T(\xi_0(\cdot))\chi_A(\xi(\cdot))$$

所定义的测度，其中 A 是 $\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 中的 Borel 集，且

$$\rho_N^T = \exp\Big\{\int_0^T (B^{-1}(t,\xi_0(t))a_N(t,\xi_0(t)), dw(t))$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^T |B^{-1}(t,\xi_0(t))a_N(t,\xi_0(t))|^2 dt\Big\}.$$

正如由 § 2 定理 2 所得，测度 μ_N 对应于方程

$$d\xi_N(t) = a_N(t,\xi_N(t)) + B(t,\xi_N(t))dw(t)$$

的解。设 $\tau_N = \max[t \leqslant T, \sup_{s\leqslant t}|\xi_N(s)| \leqslant N]$，那末当 $t < \tau_N$ 时 $\xi_N(t)$ 是(1)的解，显然，当 $N > r$ 时，$\mu_N(A\cap S_r)$ 不依赖于 $N(S_r = \{x(\cdot): \sup_t |x(t)| \leqslant r\})$。于是对所有 A 和 r，极限

$$\lim_{N\to\infty}\mu_N(A\cap S_r) = \mu(A\cap S_r)$$

存在，特别，

$$\mu(S_r) = \lim_{N\to\infty}\mu_N(S_r).$$

但

$$\mu(S_r) = \mathbf{E}\exp\Big\{\int_0^T (B^{-1}(t,\xi_0(t))a(t,\xi_0(t)), dw(t))$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^T |B^{-1}(t,\xi_0(t))a(t,\xi_0(t))|^2 dt\Big\}\chi_{S_r}(\xi(\cdot)).$$

由不等式(3)得，存在不依赖于N的常数 K，使

$$\mathbf{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_N(t)|^2|\xi(0)|) \leqslant K(1 + |\xi(0)|^2),$$

(例如，参见第二章 § 1 定理 9)。因此，

$$\lim_{r\to\infty}\ \underline{\lim}_{N\to\infty}\mu_N(S_r) = 1.$$

于是，

$$\mathbf{E}\exp\Big\{\int_0^T (B^{-1}(t,\xi_0(t))a(t,\xi_0(t)), dw(t))$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^T |B^{-1}(t,\xi_0(t))a(t,\xi_0(t))|^2 dt\Big\} \geqslant 1.$$

但根据§1引理6的推论1，这里只可能是等式。再应用§2定理2，可验证(1)的解存在；此时 $\mu(A)$ 是对应于解的测度，定理得证。

我们利用上段的结果对间断的 $B(t,x)$ 证明同样的存在性定理。

定理4 设方程(1)的系数满足不等式(3)，$B(t,x)$ 满足条件 B 和对每个 N，$B(t,x)$ 在 $|x|\leqslant N$ 时关于 x 一致地是 t 的连续函数。那末方程(1)在 $[0,T]$ 上有解，如果 $\xi(0)$ 有均方可积的分布密度 $\varphi_0(x)$。

证。如果我们证明了在初始条件 $\xi_0(0)=\xi(0)$ 下方程(20)的解存在，那末利用在定理3中同样的论证，可建立方程(1)的解存在。因此我们来证明(20)的解存在。

由于加在 $B(t,x)$ 上的条件，可以找到函数序列 $B_n(t,x)$ 使

1）对每个 N

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x|\leqslant N}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|B_n(t,x)-B(t,x)\|dx=0,$$

2）$B_n(t,x)$ 满足有同样的常数 K_T 的条件(3)，

3）$B_n(t,x)$ 满足常数 $l_{T,N}$ 可依赖于 n 的条件(2)，

4）$B_n(t,x)$ 满足有同样常数 C_N 的条件 B。

$B_n(t,x)$ 可取函数

$$B_n(t,x)=(2\pi\delta_n)^{-m}\int\exp\left\{-\frac{|y|^2}{2\delta_n}\right\}B(t,x+y)dy,$$

其中 $\delta_n\to 0$。条件2)—4)显然成立。易见 $B_n(t,x)$ 在 $|x|\leqslant N$ 时按照 t 一致连续。因此对所有 $\varepsilon>0$ 可指定 t_i，$0=t_0<t_1<\cdots<t_k=T$，使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|B_n(t,x)-B(t,x)\|$$
$$\leqslant\varepsilon+\sup_i\|B_n(t_i,x)-B(t_i,x)\|.$$

由后一不等式得条件1)。对每个 n，方程

$$d\xi_n(t) = B_n(t,\xi_n(t))dw(t), \xi_n(0) = \xi(0),$$

有解，而且这解唯一. 利用 § 2 引理 2，可得证过程 $\xi_n(t)$ 在 $\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 中对应的测度序列是紧的，不失一般性，可认为 μ_n 弱收敛于某个测度 μ.

我们可以证明这个测度是对应于以 $\xi(0)$ 为初始条件的方程(20)的解. 这证明类似于 § 2 定理 3 的证明. 因为 $\xi_n(t)$ 是局部鞅，所以对应于测度 μ 的过程 $\xi_0(t)$ 是局部鞅. 显然，$\xi_0(0)$ 的分布与 $\xi_n(0)$ 的极限分布相同，即是与 $\xi(0)$ 的分布相同. 为证明定理只要验证对每个 $z \in \mathscr{R}^m$

$$\eta_0(t) = (\xi_0(t), z)^2 - \int_0^t |B^*(s, \xi_0(s))z|^2 ds$$

也是局部鞅就够了(由于 § 2 定理 1). 因为对每个 n

$$\xi_n(t) = \xi(0) + \int_0^t B_n(s, \xi_n(s))dw(s),$$

即 $\xi_n(t)$ 是伊藤过程，故

$$\eta_n(t) = (\xi_n(t), z)^2 - \int_0^t |B_n^*(s, \xi_n(s))z|^2 ds$$

是局部鞅. 因此只要证明过程 $\eta_n(t)$ 的有限维分布收敛于过程 $\eta_0(t)$ 的有限维分布 (这时过程 $\eta_n(t)$ 在 $\mathscr{C}_{[0,T]}$ 上对应的测度弱收敛于过程 $\eta_0(t)$ 对应的测度). 设 $\eta_n^{(k)}(t)$ 由等式

$$\eta_n^{(k)}(t) = (\xi_n(t), z)^2 - \int_0^t |B_k^*(s, \xi_n(s))z|^2 ds,$$

$$k = 0, 1, 2 \cdots,$$

定义. 其中 $B_0(s,x) = B(s,x)$. 因为 $B_k(s,x)$ 是连续的，且 μ_n 弱收敛于 μ，故 $\eta_n^{(k)}(t)(k > 0)$ 的有限维分布收敛于 $\eta_0^{(k)}(t)$ 的有限维分布. 因此如果证明了对一切 $\varepsilon > 0, t \in [0,T]$，有

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \ \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{P}\{(\eta_n^{(k)}(t) - \eta_n(t)| > \delta\} = 0, \tag{21}$$

且此式对 $n = 0$ 成立，那末定理将得到证明. 因为当 $r \to \infty$ 时

$$\sup_n \mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi_n(t)| > r\}$$

趋于 0，所以，如果我们证明了对所有 r

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{P}\{|\eta_n^{(k)}(t)-\eta_n(t)|$$

$$>\delta,\ \sup_{0\leqslant s\leqslant T}|\xi_n(s)|<r\}=0. \tag{22}$$

和此式对 $n=0$ 也成立，那末(21)得证.

假定当 $|x|\leqslant r$ 时 $\tilde{B}_n(\rho,x)=B_n(t,x)$, $\tilde{B}_n(t,x)$ 满足条件(2)和对某个 $c>0$ (依赖于 r,而不依赖于 n)

$$\mathrm{Sp}(\tilde{B}_n(t,x)\tilde{B}_n^*(t,x)-I)^2\leqslant 1-\epsilon.$$

当 $n>0$ 时如果在方程(20)中以 $\tilde{B}_m(t,x)$ 代替 $B(t,x)$，这时以 $\tilde{\xi}_n(t)$ 表示此方程的解．如果 $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_n(t)|<r$，由于这方程的解的唯一性，$\tilde{\xi}_n(t)=\xi_n(t)$．因而

$$\begin{aligned}\int_0^T\mathbf{P}\{\xi_n(t)\in E,\ \sup_{0\leqslant s\leqslant T}|\xi_n(s)|<r\}dt\\ =\int_0^T\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_n(t)\in E,\ \sup_{0\leqslant s\leqslant T}|\tilde{\xi}_n(s)|<r\}dt\\ \leqslant e^{\lambda T}\int_0^\infty\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_n(t)\in E\}e^{-\lambda t}dt\\ =e^{\lambda T}\int\varphi_0(x)R_\lambda^{\tilde{\xi}_n}(0,x,E)dx,\end{aligned}$$

其中

$$R_\lambda^{\tilde{\xi}_n}(0,x,E)=\mathbf{E}\left(\int_0^\infty\chi_E(\tilde{\xi}_n(t))e^{-\lambda t}dt\,|\,\tilde{\xi}_n(0)=x\right).$$

由于定理 2 存在函数 $g_n(y)$ 使

$$\int_0^T\mathbf{P}\{\xi_n(t)\in E,\sup_{0\leqslant s\leqslant T}|\xi_n(s)|<r\}dt=\int_E g_n(y)dy, \tag{23}$$

$$\sup_n\int_{|y|\leqslant r}(g_n(y))^{2-\varepsilon}dy<\infty. \tag{24}$$

利用测度 μ_n 弱收敛于 μ，得证 $n=0$ 时(23)和(24)也成立．因此

$$\mathbf{P}\{|\eta_n^{(k)}(t)-\eta_n(t)|>\delta,\ \sup_{0\leqslant s\leqslant T}|\xi_n(s)|<r\}$$

$$\leqslant\frac{1}{\delta}\iint_0^t\|B_n^*(s,y)z\|^2$$

$$- |B_k^*(s,y)z|^2|\mathbf{P}\{\xi_n(s)\in dy,\ \sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_n(t)|<r\}dt$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta}\int_{|y|\leqslant r}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}||B^*(s,y)z|^2-|B_k^*(s,y)z|^2|$$

$$\times\int_0^T\mathbf{P}\{\xi_n(s)\in dy,\ \sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_n(t)|<r\}dy$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta}\int_{|y|\leqslant r}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}||B_n^*(s,y)z|^2-|B_k^*(s,y)z|^2|g_n(y)dy$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta}\Bigl(\int_{|y|\leqslant r}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}||B_n^*(s,y)Z|^2$$

$$-|B_k^*(s,y)|^2|^{\frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon}}dy\Bigr)^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}\Bigl(\int(g_n(y))^{2-\varepsilon}dy\Bigr)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}.$$

由后一不等式和条件 I) 得(22). 定理得证.

注1. 如果 $B(t,x)$ 不依赖于 t 且 $m\leqslant 3$, 那末(1)的解在任意初始条件下存在.

为证实这点,需利用定理 2 注 2, 由于该注, 无论 $\xi(0)$ 的初始分布是怎样的,(22)总成立.

我们还导出在任何初始条件下保证(1)的解存在的条件. 我们将假设 $B(t,x)$ 满足下面的条件

C. 对所有 r 可找到二次连续可微函数 $f_1(t,x),\cdots,f_k(t,x)$, 满足

$$\left|\frac{\partial f_k}{\partial t}\right|+\left|\frac{\partial f_k}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial f_k}{\partial x}\right|^{-1}+\left\|\frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2}\right\|\leqslant C,$$

和找到 $\mathscr{R}^1$ 中 Lebesguei 测度均为 0 的 Borel (集 $\Lambda_1,\cdots,\Lambda_k$, 使得当 $f_1(t,x)\bar{\in}\Lambda,\cdots,f_k(t,x)\bar{\in}\Lambda_k$, $t\in[0,T]$, $|x|\leqslant r$ 时 $B(t,x)$ 按 x 连续.

定理 5 如果 $a(t,x)$ 和 $B(t,x)$ 满足条件(3), $B(t,x)$ 满足条件 **C** 和 $\|B^{-1}(t,x)\|$ 局部有界, 那末不论是怎样的初始值 $\xi(0)$ 方程(1)有解.

证. 如在定理 3 和 4,只要考虑 $a(t,x)=0$ 情形就够了.

设 $B_n(t,x)$ 如定理 4 那样构造出. 那末在 $B(t,x)$ 的所有

连续点上 $B_n(t,x)\to B(t,x)$. 以 $G_1,\cdots,G_k$ 表示 $\mathscr{R}^1$ 中开集，$G_i\supset\Lambda_i$，其中 f_1，$\cdots$，f_k 和 Λ_1，$\cdots$，Λ_k 由条件 **C** 取得. 以 $F_r(G_1,\cdots,G_k)$ 表示满足 $|x|\leqslant r$，$f_i(t,x)\bar{\in}G_i$，对任意 $i=1,\cdots,k$ 的点对 $(t,x)\in[0,T]\times\mathscr{R}^m$ 的集合，$F_r(G_1,\cdots,G_k)$ 是闭的且 $B_n(t,x)$ 在 $F_r(G_1,\cdots,G_k)$ 上一致趋向于 $B(t,x)$，因为在这集合上函数 $B(t,x)$ 按 x 一致连续. 如在定理 4 的证明，可以假定如定理 4 那样构造出的过程 $\xi_n(t)$ 对应的测度 μ_n 收敛于某个极限测度 μ. 为证明定理，需要证明过程 $\eta_n(t)$ 的有限维分布收敛于过程 $\eta_0(t)$ 的有限维分布，其中 $\eta_n(t)$ 是和定理 4 中同样的过程. 为此，我们验证对所有连续的 $x(s)$，泛函

$$\int_0^T|B^*(s,x(s))z|^2ds \tag{25}$$

依测度 μ 几乎处处连续. 显然此泛函对 $\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 中所有满足如下条件的 $x(\cdot)$ 是连续的：对几乎所有 s，$B^*(s,x)$ 在点 $(s,x(s))$ 按 x 连续. 以 Γ 表示在 $[0,T]\times\mathscr{R}^m$ 中 $B^*(s,x)$ 关于 x 的间断点的集合. 那末对满足

$$\int_0^T\chi_\Gamma(s,x(s))ds=0$$

的 $x(\cdot)$，泛函(25)是连续的. 由条件 **C** 得

$$\int_0^T\chi_{T\wedge S_r}(s,\ x(s))ds\leqslant\sum_{i=1}^k\int_0^T\chi_{G_i}(f_i(s,x(s))ds.$$

由 μ_n 弱收敛于 μ 及 G_i 是开集，得

$$\varliminf_{n\to\infty}\mathbf{E}\chi_{G_i}(f_i(s,\ \xi_n(s)))\chi_{\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_n(t)|>r\}}$$
$$\geqslant\mathbf{E}\chi_{G_i}(f_i(s,\xi_0(s)))\chi_{\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_0(t)|<r\}},$$

其中 $\xi_0(\cdot)$ 是对应于测度 μ 的过程. 于是

$$\int_0^T\mathbf{E}\chi_{G_i}(f_i(s,\xi_0(s)))\chi_{\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_0(t)|<r\}}ds$$
$$\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_0^T\mathbf{E}\chi_{G_i}(f_i(s,\ \xi_n(s)))\chi_{\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_n(t)|<r\}}ds$$

$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_0^T \mathbf{E}\chi_{G_i}(f_i(s,\tilde{\xi}_n(s)))ds,$$

其中 $\tilde{\xi}_n(t)$ 是与定理 4 证明中同样的过程. 利用(19),得证

$$\mathbf{E}\int_0^T \chi_\Gamma(s,\ \xi_0(s))ds\chi_{\{\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_0(t)|<r\}} \leqslant H\sum_{j=1}^{k}\sqrt{m(G_j)}.$$

因为 $m(\Lambda_j)=0$ 和 $G_j\supset\Lambda_j$ 是任意开集,所以 $m(G_j)$ 可以任意小。于是

$$\mathbf{E}\int_0^T \chi_\Gamma(s,\ \xi_0(s))ds\cdot\chi_{\{\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_0(t)|<r\}}=0.$$

当 $r\to\infty$取极限得

$$\mathbf{E}\int_0^T \chi_\Gamma(s,\ \xi_0(s))ds=0,$$

即是, $\mu\left(\left\{x(\cdot):\int_0^T\chi_\Gamma(s,\ x(s))ds=0\right\}\right)=1$。因而证明了泛函(25)按测度几乎处处连续. 由此得过程

$$(\xi_n(t),z)^2-\int_0^t|B^*(s,\xi_n(s))z|^2ds$$

的有限维分布收敛于 $\eta_0(t)$ 的有限维分布。 为完成定理的证明,余下需证对所有 $\delta>0$,

$$\varlimsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\left|\int_0^t|B^*(s,\xi_n(s))z|^2ds\right.\right.$$
$$\left.\left.-\int_0^t|B^*_n(s,\ \xi_n(s))z|^2ds\right|>\delta\right\}=0. \qquad (26)$$

等式(26)由如下关系式可得:

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^T||B^*(s,\xi_n(s))z|^2-|B^*_n(s,\xi_n(s))z|^2|ds>\delta,\right.$$
$$\left.\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_n(t)<r\right\}$$

$$=\mathbf{P}\left\{\int_0^T||B^*(s,\tilde{\xi}_n(s))z|^2-|B^*_n(s,\ \tilde{\xi}_n(s))z|^2|ds>\delta,\right.$$
$$\left.\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\tilde{\xi}_n(t)<r\right\}$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{2|z|^2K_T^2(1+r^2)\int_0^T\sum_{j=1}^k \chi_{G_j}(f_j(t,\xi_n(t)))dt > \frac{\delta}{2}\right\}$$

$$+\mathbf{P}\left\{\int_0^T \big||B^*(s,\xi_n(s))z|^2-|B_n^*(s,\xi_n(s))z|^2\big|\right.$$

$$\times\prod_{j=1}^k(1-\chi_{G_j}(f_j(s,\xi_n(s)))ds > \frac{\delta}{2};$$

$$\left.\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_n(t)|<r\right\}.$$

因为当 $|x|\leqslant r$ 时

$$(|B^*(s,x)z|^2-|B_n^*(s,x)z|^2)\prod_{j=1}^k(1-\chi_{G_j}(f_j(s,x)))\to 0,$$

所以第二个被加项趋于0. 又因为

$$\mathbf{E}\int_0^T \chi_{G_j}(f_j(t,\xi_n(t)))dt\leqslant H\sqrt{m(G_j)},$$

所以,选取 G_j 使对所有 n 第一个被加项变成任意小. 由于 r 的任意性可得(26). 定理得证.

注1. 在定理3条件、定理4和定理5的注中,方程(1)在区间 $[\tau, T]$ 上存在初始条件是 $\xi(\tau)$ 的解, 倘若 τ 和 $\xi(\tau)$ 独立于 $w(s+\tau)-w(\tau)$, 当 $s>0$ 时, 即是如果 τ 是对过程 $w(t)$ 的 Марков 时间.

为证实这点,需将方程(1)改写为

$$d\xi'(t)=a(t+\tau,\xi'(t))dt+B(t+\tau,\xi'(t))dw'(t), \quad (27)$$

其中 $\xi'(t)=\xi(t+\tau)$, $w(t)=w(t+\tau)-w(\tau)$. 应用定理3—5的所有结论于方程(27); 在证明中只要代替概率与数学期望而考虑对确定的 τ 的条件概率与条件数学期望. 特别在定理4条件中, 如果 $\xi(t)$ 对确定的 τ 的条件分布对几乎所有 τ 有均方可积分布密度,那末方程(27)的解存在.

注2. 如果方程(1)的系数在每个有限区间 $[0,T]$ 上满足定理3和5的条件或定理4的注, 那末这方程对给定的初始条件在 $[0,\infty)$上有解.

这解可以这样构造. 选取序列 $T_n\uparrow\infty$, 且设 $\xi_n(t)$ 是方程(1)在区间 $[T_n, T_{n+1}]$ 上以 $\xi_n(T_n)=\xi_{n-1}(T_n)$ 为初始条件的解, $\xi_0(t)$ 是(1)在 $[0,T_1]$ 上有初始条件 $\xi(0)$ 的解. 那末过程 $\xi(t)=\xi_n(t)$, $t\in[T_n,T_{n+1}]$ $(T_0=0)$ 是所求的(1)的解.

解的唯一性 我们将考虑方程(1)在$[0,\infty)$上的解和证明在此区间上解的弱唯一性. 注意由(1)在$[0\ \infty)$上解的唯一性可得出在区间 $[0,T]$ 上的弱唯一性. 为此, 开拓系数 $a(t,x)$ 和 $B(t,x)$ 至 $[T,\infty)$ 上, 使方程(1)在此区间上对任意初始条件有解就够了. 这时(1)在 $[0, T]$ 上的解可开拓为在$[0,\infty)$上的解, 且可以利用解在$[0,\infty)$上的弱唯一性.

其次将利用到如下条件.

D. $a(s,x)$, $B(s,x)$ 在$[0,\infty)\times\mathscr{R}^m$ 上定义, 可测和对任意 T 条件(3)成立; 方程(1)在区间 $[\tau,\infty)$ 上有弱解, 其中 τ 是关于 $w(t)$ 的 Марков 时间, 使 $\xi(\tau)$ 是独立于 $w(t+\tau)-w(\tau)$, 且对任意 $(s_0,x_0)\in[0,\infty)\times\mathscr{R}^m$, 有

$$\varlimsup_{s\to s_0, x\to x_0} \mathrm{Sp}(B(s,x)B^*(s,x)-B(s_0,x_0)B^*(s,x))^2 \leqslant \|B^{-1}(s_0,x_0)B^{*-1}(s_0,x_0)\|^{-2}. \tag{28}$$

定理 6 如果条件 D 成立, 那末对无论怎样的 $\xi(0)$, 方程(1)在$[0,\infty)$上满足初始条件 $\xi(0)$ 的解是弱唯一的.

证 注意由条件 D 得知对每个点 $(s_0,x_0)\in[0,\infty)\times\mathscr{R}^m$, 存在 $\rho>0$, 使当 $|s-s_0|<\rho$, $|x-x_0|<\rho$ 时

$$\mathrm{Sp}(B(s,x)B^*(s,x)-B(s_0,x_0)B^*(s_0,x_0))^2 \leqslant(1-\rho)\|B^{-1}(s_0,x_0)B^{*-1}(s_0,x_0)\|^{-2}. \tag{29}$$

当 $|s-s_0|<\rho$, $|x-x_0|<\rho$ 时, 设 $\bar{B}(s,x)=B^{-1}(s_0,x_0)\cdot B(s,x)$; 在其余情形设 $\bar{B}(s,x)=I$. 当 $|x-x_0|<\rho$, $|s-s_0|<\rho$ 时设 $\bar{a}(s,x)=B^{-1}(s_0,x_0)a(s,x)$; 在其余情形设 $\bar{a}(s,x)=0$. 如果 $\xi(t)$ 是(1)在 $[s_0,\infty)$ 上的解, τ 是由集合 $\{x:|x-x_0|<\rho\}$ 走出的首次时间和 $\bar{\xi}(t)=B^{-1}(s_0,x_0)\xi(t)$, 那末当 $t\in[s_0,\tau\wedge(s_0+\rho)]$ 时 $\bar{\xi}(t)$ 是方程

$$d\xi(t) = \bar{a}(t,\xi(t))dt + \bar{B}(t,\xi(t))dw(t) \tag{30}$$

的解。由于 ρ 的选取方法，不等式

$$\mathrm{Sp}(\bar{B}(s,x)\bar{B}^*(s,x) - I)^2 \leqslant 1 - \rho$$

成立。利用(1)在任何有限区间上的解可由方程(30)的解用粘合的方法得到的事实,(因为在$[0,\infty)\times\mathscr{R}^m$ 中的每个紧集可用有限个形为

$$\{(s,x): |s-s_0| < \rho,\ |x-x_0| < \rho\}$$

的区域覆盖住,而(1)的解是连续的且因此对任意 $\varepsilon > 0$，在有限区间上有有限个数的 ε-振幅)只要证明方程(30)的解的弱唯一性就够了。因此定理进一步的证明将在如下假设下进行：代替(28)而要求

$$\sup_{s,x} \mathrm{Sp}(B(s,x)B^*(s,x) - I)^2 < 1 \tag{31}$$

和对某个 $C < \infty$, $|a(s,x)| \leqslant C$ 成立。记 $\xi_{s,x}(t)$ 为方程(1)在 $[s,\infty)$ 上有初始条件 $\xi_{s,x}(s) = x$ 时的解。借助于引理 2，可证明存在不依赖于解的选取的函数 $Q_{s,x}(t,E)$ 使

$$Q_{s,x}(t,E) = \mathbf{P}\{\xi_{s,x}(t) \in E\}.$$

事实上,对任意解 $\xi_{s,x}(t)$,函数 $Q_{s,x}(t,E)$ 由它的 Laplace 变换

$$\int_s^\infty e^{-\lambda(t-s)}Q_{s,x}(t,E)dt = e^{s\delta}G^{\xi}_{\lambda-\delta}[e^{-\delta s}\chi_E(x)] \tag{32}$$

所确定,由于引理 2，$G^{\xi}_{\lambda} = G_\lambda(I - L_1G_\lambda)^{-1}$ 按方程(1)的系数所唯一决定。类似地关系式(13)可写为

$$f(s,\xi(s)) = \mathbf{E}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda(t-s)}g(t,\xi(t))dt \,\middle|\, \mathfrak{F}^{\xi}_s\right],$$

其中 $\{\mathscr{F}^{\xi}_s\}$ 是由过程 $\xi(\cdot)$ 所生成的 σ-代数流(我们利用 $w(t+s) - w(t)$ 对于 $\mathfrak{F}^{\xi}_s$ 的独立性)，$f(s,x) = G_\lambda(I - L_1G_\lambda)^{-1} \times g(s,x)$。于是,

$$\mathbf{E}(\chi_E(\xi(t))\,|\,\mathfrak{F}^{\xi}_s) \text{ 和 } Q_{s,\xi(s)}(t,E)$$

有同样的 Laplace 变换。因此以概率为 1

$$\mathbf{E}(\chi_E(\xi(t))\,|\,\mathfrak{F}^{\xi}_s) = Q_{s,\xi(s)}(t,E). \tag{33}$$

而(33)意味着 $\xi(t)$ 是马尔科夫过程，它有由 Laplace 变换

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_{sx}(t,E)dt = e^{\delta s} G_{\lambda-\delta}[I - L_1 G_{\lambda-\delta}]^{-1} g_{\delta,E}(s,x), \quad (34)$$

所确定的转移概率 $Q_{s,x}(t, E)$，其中 $g_{\delta,E}(s,x) = e^{-\delta s}\chi_E(x)$。于是方程(1)的所有解均是有给定的转移概率(仅依赖于(1)的系数)的 Марков 过程。于是对任意 T 对应于 $\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 上的 $\xi(t)$ 的测度由 $\xi(0)$ 的分布唯一地确定。于是一个同样的测度对应于有初始条件 $\xi(0)$ 的任何两个解。

注。因为在定理的条件中算子 $B(t,x)$ 非退化，所以根据 § 2 Гирсанов 引理，由弱唯一性得强解的唯一性。

解关于参数的连续依赖性 使我们感兴趣的主要是解关于初次条件的连续性。但先来证明一个一般性的定理，由该定理可得到关于其它的参数的连续依赖性的判断。

定理 7 设 $\xi^n(t)$，$n = 0,1,\cdots$是方程

$$\xi^n(t) = x_n + \int_0^t a_n(s,\xi^n(s))ds + \int_0^t B_n(s, \xi^n(s))dw(s) \quad (35)$$

的解且如下条件成立：

1) 存在 K，使当 $0 \leqslant s \leqslant T$ 时

$$|a_n(s,x)| + \|B_n(s,x)\| \leqslant K(1 + |x|),$$

2) 对每个 n 定理 6 的条件成立，

3) 对每个 r 可找到函数 $f_1(t,x), \cdots, f_k(t,x)$，使

$$\sup_{t,x}\left(\left|\frac{\partial}{\partial t} f_j(t,x)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x} f_j(t,x)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x} f_j(t,x)\right|^{-1} + \left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_j(t, x)\right\|\right) < \infty.$$

且在 $\mathscr{R}^1$ 中的 Lebesgue 测度为 0 的 Borel 集 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_k$，使当

$(t,x) \in [0, T] \times \{x: |x| < r\} - \bigcup_{j=1}^k \{(t, x): f_j(t,x) \in \Lambda_j\}$ 时

$$\lim a_n(t,x) = a_0(t,x), \quad \lim B_n(t,x) = B_0(t,x).$$

那末，如果 $x_n \to x_0$，则在 $\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 上对应于过程 $\xi^n(t)$ 的测

度 μ_n 弱收敛于对应于过程 $\xi^0(t)$ 的测度 μ_0。

证。(它与定理 5 的证明十分相似).测度序列 μ_n 是紧的.如果 μ 是此序列的某个极限点,那末如在定理 5 一样,利用条件 3),得证过程

$$\eta_n(t) = \xi^n(t) - \int_0^t a_n(s, \xi^n(s)ds$$

和过程

$$(\eta_n(t), z)^2 - \int_0^t |B_n^*(s, \xi^n(s))z|^2 ds$$

的有限维分布分别收敛于过程

$$\eta_0(t) = \xi(t) - \int_0^t a_0(s, \xi(s))ds$$

和

$$(\eta_0(t), z)^2 - \int_0^t |B_0^*(s, \xi(s))z|^2 ds$$

的有限维分布,其中 $\xi(t)$ 是对应于测度 μ 的过程。因此由于 § 1 定理 1, $\xi(t)$ 是(35)在 $n=0$ 时的解。(在定理 5 中 $n>0$ 时解的唯一性是可以预料到的;事实上,因为只考虑对应于解的测度,所以在证明时仅利用到弱唯一性.)按假设,(35)的解是弱唯一的.因此紧序列 μ_n 有唯一的极限点。定理得证。

下面将利用到如下条件。

E. 对每个 $r>0$ 可找到函数 $f_1(t,x), \cdots, f_k(t,x)$,使

$$\sup_{t,x}\left(\left|\frac{\partial}{\partial t} f_i(t,x)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x} f_i(t,x)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x} f_i(t,x)\right|^{-1} + \left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_i(t, x)\right\|\right) < \infty,$$

和 $a(t,x)$ 及 $B(t,x)$ 在集合

$$[0, T] \times \{x: |x| < r\} - \bigcup_{i=1}^{k} \{(t,x): f_i(t,x) \in \Lambda_i\}$$

上连续,其中 Λ_i 是 Lebesgue 测度为 0 的 Borel 集;$a(t, x)$, $B(t,x)$ 满足定理 6 的条件。

推论 1 设 $\xi(t)$ 是使条件 **E** 成立时方程(1)的解。令

$$\mathbf{T}_s^t f(x) = \int f(y) P(s, x, t, dy).$$

对 $\mathscr{R}^m$ 上所有有界连续函数 f，函数 $\mathbf{T}_s^t f(x)$ 按变量的总体是连续的。

证。设 $s_n \to s_0$，$t_n \to t_0$，$x_n \to x_0$。方程

$$\xi_n(u) = x_n + \int_0^u a(s_n + v, \xi_n(v)) dv + \int_0^u B(s_n + v), \xi_n(v)) dw(v)$$

的解记为 $\xi_n(u)$。对于

$$a_n(v, x) = a(s_n + v, x), \quad B_n(v, x) = B(s_n + v, x), \quad n = 0, 1, \cdots,$$

定理的条件 3) 成立。定理的条件 1) 和 2) 也成立；可见

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} f(\xi_n(u)) = \mathbf{E} f(\xi_0(u)).$$

但 $\mathbf{E} f(\xi_n(u)) = \mathbf{T}_{s_n+u}^{s_n}$，因而

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_{s_n+u}^{s_n} f(x_n) = \mathbf{T}_{s_0+u}^{s_0} f(x_0).$$

其次，利用 § 2 引理 2，可证明存在 C，使对 n 一致地有

$$\mathbf{E} |\xi_n(u) - \xi_n(u + h)|^2 \leqslant Ch.$$

因此，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\mathbf{T}_{s_n}^{t_n} f(x_n) - \mathbf{T}_{s_0}^{t_0} f(x_0)| \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} |\mathbf{T}_{s_n}^{t_n} f(x_n) - \mathbf{T}_{s_n+(t_0-s_0)}^{s_n} f(x_n)| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{E} | f(\xi_n(t_n - s_n)) - f(\xi_n(t_0 - s_0))|.$$

因为在数学期望号内的变量是有界的和依概率趋向 0。所以后一表示式等于 0 。事实上，设 $u_n = t_n - s_n$，我们有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{P}\{|f(\xi_n(u_n)) - f(\xi_n(u_0))| > \varepsilon\} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{P}\{|\xi_n(u_0)| > N\}$$

$$+\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{P}\{|\xi_n(u_n)-\xi_n(u_0)|>\delta_N\},\tag{36}$$

其中 δ_N 是使当 $|y|\leqslant N$, $|x-y|\leqslant\delta_N$ 时 $|f(y)-f(x)|\leqslant\varepsilon$。因为$|u_n-u_0|\to 0$,所以(36)的右边第二个被加项等于0，可选取 ε 使第一项任意小．结论得证。

推论 2 如果条件 **E** 成立且 $\mu_{s,x}$ 表示对应于过程 $\xi(t-s)$ 的测度,其中 $\xi(t)$ 是方程(1)在 $[s,\infty)$ 上以 $\xi(s)=x$ 为初始条件的解,那末 $\mu_{s,x}$ 关于 s 和 x 弱连续。

此论断的证明已在推论1中得到．如果 $F_s(x(\cdot))$ 是在 $[0,T]\times\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 的每个紧集上关于 s, $x(\cdot)$ 连续,那末

$$\int F_s(x(\cdot))\mu_{s,y}(dx)$$

也是关于 s, y 连续,因为

$$\overline{\lim_{s\to s_0,y\to y_0}}\left|\int F_s(x(\cdot))\mu_{s,y}(dx)-\int F_s(x(\cdot))\mu_{x_0,y_0}(dx)\right|$$

$$\leqslant\overline{\lim_{s\to s_0,y\to y_0}}\int|F_s(x(\cdot))-F_{s_0}(x(\cdot))|\mu_{s,y}(dx)=0,$$

这由于在每个紧集上被积函数趋向0和对所有 $\varepsilon>0$ 可选取紧集 K, 使

$$\underline{\lim_{s\to s_0,y\to y_0}}\mu_{s,y}(K)\geqslant 1-\varepsilon。$$

推论 3 设 $f_n(x)$, $n=0,1,\cdots$是 $\mathscr{R}^m$ 上的连续有界函数序列，使对所有N

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|x|\leqslant N}|f_n(x)-f_0(x)|=0。$$

那末在定理7的条件中对每个N

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|x|\leqslant N}|\mathbf{E}f_n(\xi_x^{(n)}(t))-\mathbf{E}f_0(\xi_x^{(0)}(t))|=0,\tag{37}$$

其中 $\xi_x^{(n)}(t)$ 是在初始条件为 x 时方程(35)的解。

为证明(37),只要对任意收敛序列 $x_n\in\mathscr{R}^m$, $\lim x_n=x_0$,均有

$$\lim_{n\to\infty}|\mathbf{E}f_n(\xi_{x_n}^{(n)}(t))-\mathbf{E}f_0(\xi_{x_n}^{(0)}(t))|=0,$$

也就相当于验证等式

$$\lim_{n\to\infty}|\mathbf{E}f_n(\xi_{x_n}^{(n)}(t))-\mathbf{E}f_0(\xi_{x_n}^{(n)}(t))|=0$$

就够了．因为由定理 7 和推论 1 得

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}f_0(\xi_{x_n}^{(n)}(t))=\mathbf{E}f_0(\xi_{x_0}^{(0)}(t)),$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}f_0(\xi_{x_n}^{(0)}(t))=\mathbf{E}f_0(\xi_{x_0}^{(0)}(t)).$$

但

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{E}|f_n(\xi_{x_n}^{(n)}(t))-f_0(\xi_{x_n}^{(n)}(t))|\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{|x|\leqslant N}|f_n(x)$$

$$-f_0(x)|+\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{P}\{|\xi_{x_n}^{(n)}(t)|>N\}\sup_x|f_n(x)-f_0(x)|.$$

右边第一项等于 0，而选取足够大的 N，第二项可以做到任意小．公式(37)获证．

推论 4 设定理 7 中函数 $a_n(s,x)$ 和 $B_n(s,x)$，$n\neq 0$ 是按 x 二次连续可微和按联合变量是连续的，而函数 $f_n(x)$ 连同它到二阶的导数是连续有界的，如果 $P_n(s,y,t,E)$ 是(36)的解过程的转移概率，那末如由第二章 § 2 定理 6 所得一样 当 $s\leqslant t$ 时函数

$$u_n(s,x)=\int P_n(s,x,t,dy)f_n(y)$$

是 Cauchy 问题

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}u_n(s,x)+\left(a_n(s,x),\frac{\partial}{\partial x}u_n(s,x)\right)&\\+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}B_n^2(s,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_n(s,x)=0,&\\u_n(t,x)=f_n(x),&\end{aligned}\right\}\tag{38}$$

的唯一有界解．那末若对所有N及有界连续函数$f_n(x)$，$\sup_{|x|\leqslant N}|f_n(x)-f_0(x)|\to 0$，那末由于推论 3，$u_n(s,x)\to u_0(s,x)$，其中

$$u_0(s,x)=\int P_0(s,x,t,dy)f_0(y),$$

因此，$u_0(s,x)$ 是方程(38)在如下意义的广义解：对任意满足定理 7 的条件的二次连续可微函数 $a_n(s,x)$ 和 $B_n(s,x)$，以及收敛于 $f_0(x)$ 的总体有界的连续函数序列 $f_n(x)$，Cauchy 问题的有

界解收敛于同一连续函数 $u_0(s,x)$.

考察系数满足条件 **E** 的方程(1). 以 $\xi_{s,x}(t)$ 表示方程(1)在 $[s,\infty)$ 上初始条件是 $\xi_{s,x}(s)=x$ 的解.

设 G 是 $[0,\infty)\times\mathscr{R}^m$ 中某个区域. 记

$$\tau_{s,x}(G)=\inf[t:\xi_{s,x}(t)\notin G]$$

($\tau_{s,x}(G)$ 可等于 $+\infty$). 考虑当 t 足够大时(立即对所有 y)变为 0 的连续有界函数 $f(t,y)$. 设

$$\varphi_G(s,x)=\mathbf{E}f(\tau_{s,x}(G),\xi_{s,x}(\tau_{s,x}(G))). \tag{39}$$

注意到只要选取 T 使当 $t>T$ 时 $f(t,y)=0$ 就有

$$f(\tau_{s,x}(G),\xi_{s,x}(\tau_{s,x}(G)))=g_s(\eta_{s,x}(\cdot)),$$

其中 $\eta_{s,x}(t)=\xi_{s,x}(t-s)$, $g_s(x(\cdot))$ 是 $\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 上的泛函. 该泛函 $g_s(x(\cdot))$ 定义为: 如果 $\bar{t}$ 是 $x(\cdot)$ 落到 G 的边界上的首次时间, 那末

$$g_s(x(\cdot))=f(s+\bar{t},x(\bar{t}))\chi_{\{s+\bar{t}<T\}}.$$

显然, $g_s(x(\cdot))$ 对 $x(\cdot)$ 在 $\mathscr{C}^m_{[0,T]}$ 中的每个有界集上一致地关于 s 连续. 其次, 如果存在序列 $t_k\downarrow\bar{t}$ 使 $\tilde{x}(t_k)$ 不属于 G 的闭包和当 $t<\bar{t}$ 时 $\tilde{x}(t)\in G$, 那末对固定 s, $g_s(x(\cdot))$ 在点 $\tilde{x}(\cdot)$ 连续.

因此 由于推论 2, 函数 $\varphi_G(s,x)$ 在点 $\bar{s}$, $\bar{x}$ 连续的充分条件是对过程 $\xi_{\bar{s},\bar{x}}(\cdot)$ 以概率为 1 存在序列 $\varepsilon_k\downarrow 0$ 使

$$\xi_{\bar{s},\bar{x}}(\tau_{\bar{s},\bar{x}}(G)+\varepsilon_k)\notin[G],$$

其中 $[G]$ 是区域 G 的闭包.

现设 G 的边界是光滑的、又设 $\vec{n}$ 是在 $(-\infty,\infty)\times\mathscr{R}^m$ 中对 G 的边界点 $(\tau_{\bar{s},\bar{x}}(G),\xi_{\bar{s},\bar{x}}(\tau_{\bar{s},\bar{x}}(G)))$ 的法线. 显然, $\vec{n}$ 是 $\mathfrak{F}_{\tau_{\bar{s},\bar{x}}(G)}$-可测, 其中 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 是由 $\xi_{\bar{s},\bar{x}}(t)$ 所生成的 σ-代数流. 设 n_t 和 n_x 分别是 $\vec{n}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 和 $\mathscr{R}^m$ 上的投影. 当 $\varepsilon>0$ 时, 考虑过程

$$\zeta(\varepsilon)=n_t\varepsilon+(n_x,\xi_{\bar{s},\bar{x}}(\tau_{\bar{s},\bar{x}}(G)+\varepsilon)$$
$$-\xi_{\bar{s},\bar{x}}(\tau_{\bar{s},\bar{x}}(G))),$$

对足够小的 ε, 由关系式

$$\frac{\zeta(\varepsilon)}{\varepsilon + |\xi_{\bar{s},\bar{x}}(\tau_{\bar{s},\bar{x}}(G) + \varepsilon) - \xi_{\bar{s},\bar{x}}(G))|} \geqslant \delta, \tag{40}$$

其中 $\delta > 0$ 是某个固定的任意小的数，得

$$(\tau_{\bar{s},\bar{x}}(G) + \varepsilon,\ \xi_{\bar{s},\bar{x}}(\tau_{\bar{s},\bar{x}}(G) + \varepsilon)) \notin [G],$$

这因为该点位于某个圆锥体的内部，此圆锥体以G'的内法线为轴.

因此，

$$\zeta(\varepsilon) = O(\varepsilon) + \int_0^{\varepsilon} (g(s,\omega), dw(s)),$$

其中 $|g(s,\ \omega)| \geqslant \rho > 0$，$\rho$ 是非随机数，所以，利用 §1 定理 1 的推论 4 和 Wiener 过程重对数法则（见第 II 卷第四章 §3 定理 4），得证存在序列 ε_k，使

$$\varlimsup_{k\to\infty}\left(\zeta(\varepsilon_k) \Big/ \sqrt{\varepsilon_k \ln\ln\frac{1}{\varepsilon_k}}\right) > \rho_1,$$

其中 $\rho_1 > 0$ 是非随机常数. 类似的论断表明

$$\varlimsup_{k\to\infty} \Big(|\xi_{\bar{s},\bar{x}}(\tau_{\bar{s},\bar{x}}(G) + \varepsilon_k) - \xi_{\bar{s},\bar{x}}(\tau_{\bar{s},\bar{x}}(G))| \Big/ \sqrt{\varepsilon_k \ln\ln\frac{1}{\varepsilon_k}}\Big) < \rho_2.$$

可见，如果 $\delta = \rho_1/\rho_2$，那末当 k 足够大对 $\varepsilon = \varepsilon_k$ 关系式(40)成立.

因此，下面的定理是正确的.

定理 8 如果条件 **E** 成立和 $[0, \infty) \times \mathscr{R}^m$ 中的区域 G 有光滑的边界，边界的法线 $\vec{n}$ 在每个点于 $\mathscr{R}^m$ 上有非零投影，而函数 $f(t,y)$ 在 $[0,\infty] \times \mathscr{R}^m$ 上连续有界和对某个 $T > 0$，当 $t > T$ 时 $f(t,y) = 0$，那末函数

$$\mathbf{E}f(\tau_{s,x}(G), \xi_{s,x}(\tau_{s,x}(G))) \tag{41}$$

按联合变量连续.

推论 设函数 $f(t,y)$ 在 $[0,\infty) \times \mathscr{R}^m$ 上连续有界且当 $t \to \infty$ 时关于 y 一致地有 $|f(t,y)| \to 0$. 如果定理 8 的其它条件成立，那末函数(41)按 s, x 也连续.

事实上，函数 $f(t,y)$ 可表为级数的形式

$$f(t,y)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t,y),$$

其中 f_k 满足定理 8 的条件和 $|f_k(t,y)|\leqslant\alpha_k$, $\sum\alpha_k<\infty$. 那末显然有

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}f(\tau_{s,x}(G),\xi_{s,x}(\tau_{s,x}(G)))\\&\qquad=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}f_k(\tau_{s,x}(G),\xi_{s,x}(\tau_{s,x}(G))),\end{aligned}\tag{42}$$

和(42)中的级数一致收敛。由于(42)的右边被加项的连续性，级数和也是连续的。

齐次扩散过程 本段所涉及到的基本事实（大多由上述定理得到)是和齐次扩散过程,即是方程

$$d\xi(t)=a(\xi(t))dt+B(\xi(t))dw(t)\tag{43}$$

的解过程相联系的。

在本段总假定下述条件成立:

I. $a(x)$ 和 $B(x)$ 是定义在 $\mathscr{R}^m$ 上分别取值于 $\mathscr{R}^m$ 和 $\mathfrak{L}(\mathscr{R}^m)$ 的可测函数，$B^{-1}(x)$ 局部有界。

II. 对某个常数 K,不等式

$$|a(x)|+\|B(x)\|\leqslant K(1+|x|)$$

成立。

III. 对所有 $x_0\in\mathscr{R}^m$

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{x\to x_0}}\operatorname{Sp}(B(x)B^*(x)-B(x_0)B^*(x_0))^2\\&\qquad<\|B^{-1}(x_0)B^{*-1}(x_0)\|^{-2},\end{aligned}$$

和对所有 $r>0$ 可找到函数 $f_1(x),\cdots,f_k(x)$,使当 $C>0$ 时

$$|f'_x(x)|+|f'_x(x)|^{-1}+\|f''_{xx}(x)\|\leqslant C$$

和当

$$x\in\{x:|x|<r\}-\bigcup_{j=1}^{k}\{x:f_j(x)\in\Lambda_j\}$$

时 $a(x)$ 及 $B(x)$ 是连续的,其中 Λ_j 是 $\mathscr{R}^1$ 中 Lebesgue 测度为 0 的 Borel 集。

那末如下论断正确.

1. 方程(43)的解存在,弱唯一且是齐次 Марков 过程.

由弱唯一性和如果在(43)中用 Wiener 过程 $w_h(t) = w(t+h) - w(h)$ 代替 $w(t)$, 那末 $\xi(t+h)$ 作为 t 的函数是(43)的解,因而可得到齐次性. 注意过程 $\xi(t)$ 的转移概率由等式

$$P(t, x, E) = \mathbf{P}\{\xi_x(t) \in E\}$$

所定义,其中 $\xi_x(t)$ 是初始条件 $\xi_x(0) = x$ 时(43)的解.

2. 如果

$$\mathbf{T}_t f(x) = \int f(y) P(t, x, dy), \tag{44}$$

那末 $\mathbf{T}_t f(x)$ 按联合变量连续. 这由定理 7 推论 1 推得.

因此,过程 $\xi(t)$ 是齐次随机连续 Feller 过程. 因而它是强 Марков 过程.

我们称算子 $\tilde{A}$ 为 Марков 过程 $\xi(t)$ 的拟生成算子,如果它定义在某个集合 $\mathscr{D}_{\tilde{A}} \subset \mathscr{C}_{\mathscr{R}^m}$ 上, $\tilde{A}f$ 是局部有界 Borel 函数和对所有 $t > 0$, $x \in \mathscr{R}^m$

$$\mathbf{E}_x f(\xi(t)) - f(x) = \mathbf{E}_x \int_0^t \tilde{A} f(\xi(s)) ds. \tag{45}$$

如果 $t = \tau$ 时公式(45)正确, 其中 τ 是 Марков 时间, 满足 $\tau \leqslant \tau_U$, U 是点 x 的某个邻域,那末 $\tilde{A}$ 被称为拟特征算子.

3. (43)的解过程的拟生成算子定义在所有函数 $f \in \mathscr{C}^2_{\mathscr{R}^m}$ 上, 其中 $\mathscr{C}^2_{\mathscr{R}^m}$ 是满足

$$\sup_x \mathbf{P}(|f(x)| + |f'(x)| + \|f''_{xx}(x)\|) < \infty$$

的二次连续可微函数空间; 这时

$$\tilde{A} f(x) = (a(x), f'_x(x)) + \frac{1}{2} \operatorname{Sp} B(x) B^*(x) f''_{xx}(x). \tag{46}$$

这关系式可由作为伊藤公式的推论的等式

$$\mathbf{E}_x[f(\xi(T)) - f(\xi(0))] = \mathbf{E}_x \int_0^T ((a(\xi(t)), f'_x(\xi(t)))$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{Sp} B(\xi(t)) B^*(\xi(t)) f''_{xx}(\xi(t))) dt$$

得到。

利用等式(45)，正如在第 II 卷第二章 §5 引理 2 一样，可证明等式

$$\mathbf{E}_x f(\xi(\tau)) - f(x) = \mathbf{E}_x \int_0^\tau \tilde{A} f(\xi(s)) ds \tag{47}$$

对所有满足 $\mathbf{E}_x\tau < \infty$ 的 Марков 时间 τ 成立。

引理 4 如果 G 是有界区域，ζ_G 是由 G 走出的首次时间，那末 $\mathbf{E}_x\zeta_G$ 按 x 一致有界。

证。当 $x \in G$ 时设 $f(x) = \exp\{(z,x)\}$，而当 $x \notin G$ 时将函数 $f(x)$ 延拓使它属于 $\mathscr{C}^2_{\mathscr{R}^m}$。那末当 $x \in G$ 时

$$\tilde{A} f(x) = \left[(a(x), z) + \frac{1}{2}|B^*(x)z|^2\right]\exp\{(z,x)\}.$$

由于加在 $a(x)$ 和 $B(x)$ 上的条件，所以可选取 $z \in \mathscr{R}^m$，使 $\tilde{A}f(x) > \delta > 0$，$x \in G$。将这函数代入(47)和取 Марков 时间 $\zeta_G \wedge T$ 代换 τ，得

$$\mathbf{E}_x f(\xi(\zeta_G \wedge T)) - f(x) = \mathbf{E}_x \int_0^{\zeta_G \wedge T} \tilde{A} f(\xi(t)) dt$$

$$> \mathbf{E}_x[\zeta_G \wedge T]\delta.$$

由此，当 $T\to\infty$ 取极限后我们求得

$$\mathbf{E}_x\zeta_G \leqslant \frac{2}{\delta}\sup_{x\in G} e^{(x,z)}. \tag{48}$$

引理证毕。

我们来证明一个定理，它使我们能利用随机微分方程的解表示某些椭圆型微分方程边界问题的广义解。

定理 9 设 G 是有光滑边界的有界区域，G' 是 G 的边界，函数 $\varphi(x)$ 在 G' 上连续，$a(x)$ 和 $B(x)$ 满足条件 I—III。其次设 $a_n(x)$，$B_n(x)$ 是二次连续可微且以同一常数使条件 II 成立，$\|B_n^{-1}\|$ 在 G 中有界和在 $a(x)$ 及 $B(x)$ 的所有连续点上有 $a_n(x) \to a(x)$，$B_n(x) \to B(x)$，而 φ_n 是在 G' 上一致收敛于 φ 的连续函数序列。那末以 $u_n(x) = \varphi_n(x)|_{x\in G'}$ 为边界条件，方程

$$(a_n(x), u_n'(x)) + \frac{1}{2}\mathrm{Sp}B_n(x)B_n^*(x)u_n''(x) = 0 \qquad (49)$$

的解所成的函数序列 $u_n(x)$ 收敛于函数

$$u(x) = \mathrm{E}_x\varphi(\xi(\zeta_G)). \qquad (50)$$

证。当 $x \notin G$时，我们认为 $a_n(x) = a(x)$，$B_n(x) = B(x)$。设 $\xi^n(t)$ 是方程

$$d\xi^n(t) = a_n(\xi^n(t))dt + B_n(\xi^n(t))dw(t)$$

的解，而 u_n 满足(49)。利用关系式(46)和(47)可得

$$u_n(x) = \mathbf{E}_x^n\varphi(\xi^n(\zeta_G)),$$

其中 $\mathbf{E}_x^n$ 是对 Марков 过程 ξ^n 的数学期望。由定理 7 推出过程 $\xi^n(t)$ 的有限维分布收敛于过程 $\xi(t)$ 的有限维分布。

我们来证明

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_x^n\varphi(\xi^n(\zeta_G)) = \mathbf{E}_x\varphi(\xi(\zeta_G)).$$

结合定理 7 和 8，获证对所有 $\lambda > 0$，

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_x^n e^{-\lambda\zeta_G}\varphi(\xi^n(\zeta_G)) = \mathbf{E}_x e^{-\lambda\zeta_G}\varphi(\xi(\zeta_G)). \qquad (51)$$

余下要证明

$$\lim_{N\to\infty}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{P}_x^n\{\zeta_G > N\} = 0.$$

由于从(51)得知对几乎所有 N，

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}_x^n\{\zeta_G > N\} = \mathbf{P}_x\{\zeta_G > N\},$$

和，例如从(48)可得 ζ_G 的有限性，所以得证余下的等式。

因此，如果形为(50)的函数 $u(x)$ 是光滑的，那末它是方程

$$(a(x), u'(x)) + \frac{1}{2}\mathrm{Sp}B(x)B^*(x)u''(x) = 0$$

在G中有边界条件φ的解。在一般情形，它可视为此方程的广义解。

具有位势的可积核的齐次过程 我们来考察除条件 I—III 外还满足如下条件时方程(43)的解。

IV. 对所有有界 Borel 集 E，

$$\left.\begin{aligned} G(x,E) = \int_0^\infty P(t,\ x,\ E)dt < \infty, \\ \lim_{t\to\infty} \sup_x P(t,\ x,\ E) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

位势 $G(x,E)$ 对 Lebesgue 测度 m 绝对连续和位势的核

$$g(x,y) = \frac{dG(x,\cdot)}{dm}(y)$$

对某个 $\alpha > 1$ 满足条件

$$\sup_x \int (g(x,y))^\alpha dy < \infty. \tag{53}$$

我们发现,研究方程(43)总可归结为已经确定了位势$G(x,E)$的情形。为此,需代替过程 $\xi(t)$ 而考虑 $\mathscr{R}^{m+3}$ 中的过程 $(\xi(t), w_3(t))$,其中 $\xi(t)$ 是(43)在 $\mathscr{R}^m$ 中的解,而 $w_3(t)$ 是 $\mathscr{R}^3$ 中独立于 $\xi(t)$ 的 Wiener 过程。易见合成过程 $(\xi(t),w_3(t))$ 也满足形如(43)的方程;对该过程来说,位势被确定且(52)成立,因为对所有有界 Borel 集 $\mathbf{E}_3\subset\mathscr{R}^m$,

$$\int_0^\infty \mathbf{P}\{w_3(t)\in E_3\}dt < \infty,$$

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\mathscr{R}^3} \mathbf{P}\{w_3(t)+x\in E_3\} = 0.$$

在某些假设下$g(x,y)$的存在由定理 2 注 2 得到。例如,当 $m\geqslant 3$,$a(x)$,$B(x)$ 和 $B^{-1}(x)$ 有界且满足 Hölder 条件时,不等式(53)成立,因为在这些假设下,$P(t,x,E)$ 有密度 $\rho_t(x,y)$ 使对某个 c_1 和 c_2

$$\rho_t(x,y) \leqslant c_1 t^{-m/2}\exp\{-c_2|x-y|^2\}$$

(后者由抛物型方程的基本解的性质得到;参见 A. Friedman [1] 第一章 § 5,6)。

如果(53)成立且 $\beta = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}$,那末对 $f\in\mathfrak{L}_\beta(\mathscr{R}^m)$ 定义算子

$$\mathbf{G}f(x) = \mathbf{E}_x\int_0^\infty f(\xi(t))dt = \int g(x,y)f(y)dy;$$

这时 $\sup_x|\mathbf{G}f(x)| \leqslant K\|f\|_\beta$,其中

$$K = \sup_x \left(\int (g(x,y))^\alpha dy \right)^{1/\alpha}.$$

利用 $\mathfrak{L}_\beta(\mathscr{R}^m) \cap \mathscr{C}_{\mathscr{R}^m}$ 中的函数逼近 $\mathfrak{L}_\beta(\mathscr{R}^m)$ 中的函数，对所有 $T > 0$，函数

$$\mathbf{E}_x \int_0^T f(\xi(t))dt, \quad f \in \mathscr{C}_{\mathscr{R}^m},$$

按 x 的连续性，和条件(52)中第二式，得证对所有 $f \in \mathfrak{L}_\beta(\mathscr{R}^m)$，$\mathbf{G}f(x) \in \mathscr{C}_{\mathscr{R}^m}$。

设 $f \in \mathfrak{L}_\beta(\mathscr{R}^m)$，那末

$$\mathbf{E}_x \mathbf{G}f(\xi(t)) - \mathbf{G}f(x) = -\mathbf{E}_x \int_0^t f(\xi(s))ds.$$

因此，对 $\mathfrak{L}_\beta(\mathscr{R}^m)$ 中所有局部有界函数 f，$\mathbf{G}f \in \mathscr{D}_{\breve{A}}$ 和 $\breve{\mathbf{A}}\mathbf{G}f = -f$。考虑

$$\mathbf{G}f(\xi(t)) - \mathbf{G}f(\xi(0)) + \int_0^t f(\xi(s))ds,$$

它是鞅。设 $\mathbf{G}f$ 按 x 二次连续可微。

以 $\mathbf{A}_0$ 表示定义在二次连续可微函数空间 $\mathscr{C}^2_{\mathscr{R}^m}$ 上的微分算子

$$\breve{\mathbf{A}}_0 g = (a(x), g'(x)) + \frac{1}{2} \operatorname{Sp} B(x) B^*(x) g''_{xx}(x).$$

按伊藤公式

$$\mathbf{G}f(\xi(t)) - \mathbf{G}f(\xi(0)) = \int_0^t \mathbf{A}_0 \mathbf{G}f(\xi(s))ds + \int_0^t (B(\xi(s))(\mathbf{G}f)'_x(\xi(s)), dw(s)).$$

由 $\int_0^t [f(\xi(s)) - \breve{\mathbf{A}}_0 \mathbf{G}f(\xi(s))]ds$ 是鞅，得

$$\int_0^t [f(\xi(s)) - \mathbf{A}_0 \mathbf{G}f(\xi(s))]ds = 0$$

以概率为 1 成立，也就是说，

$$\mathbf{G}f(\xi(t)) - \mathbf{G}f(\xi(0)) + \int_0^t f(\xi(s))ds$$

$$- \int_0^t (b(\xi(s)), dw(s)), \tag{54}$$

其中 $b(x) = B(x)(\mathbf{G}f)'_x(x)$. 我们来证明，在某个补充假设下，表示式(54)对所有 $f \in \mathfrak{L}_\beta(\mathscr{R}^m)$ 是正确的。

以 $\hat{\mathscr{C}}_{\mathscr{R}^m}$ 表示在 $f \in \mathscr{C}_{\mathscr{R}^m}$ 中满足

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0, \quad \hat{\mathscr{C}}^2_{\mathscr{R}^m} = \hat{\mathscr{C}}_{\mathscr{R}^m} \cap \mathscr{C}^2_{\mathscr{R}^m},$$

的集合。

定理 10 设如下条件成立:

1) 如果 $f \in \mathfrak{L}_\beta(\mathscr{R}^m)$，则 $\mathbf{G}f \in \hat{\mathscr{C}}_{\mathscr{R}^m}$;

2) 在范数 $\|\cdot\|_\beta$ 下，$\mathbf{A}_0[\hat{\mathscr{C}}^2_{\mathscr{R}^m}] \cap \mathfrak{L}_\beta(\mathscr{R}^m)$ 在 $\mathfrak{L}_\beta(\mathscr{R}^m)$ 中稠密。

那末对所有 $f \in \mathfrak{L}_\beta(\mathscr{R}^m)$ 存在取值于 $\mathscr{R}^m$ 和满足

$$\sup_x \int |b(y)|^2 g(x, y) dy < \infty, \tag{55}$$

的函数 $b(x)$ 使等式(54)成立。

证。设 $\varphi_n \in \hat{\mathscr{C}}^2_{\mathscr{R}^m}$ 是满足 $\|\mathbf{A}_0\varphi_n - f\|_\beta \to 0$ 的序列。那末

$$\sup_x |\mathbf{G}\mathbf{A}_0\varphi_n(x) - \mathbf{G}f(x)| \to 0.$$

注意，$\varphi_n + \mathbf{G}\mathbf{A}_0\varphi_n$ 满足等式

$$\mathbf{E}_x[\varphi_n(\xi_n(t)) + \mathbf{G}\mathbf{A}_0\varphi_n(\xi(t))] - \varphi_n(x) - \mathbf{G}\mathbf{A}_0\varphi_n(x)$$
$$= \mathbf{E}_x \int_0^t \mathbf{A}_0\varphi_n(\xi(s)) ds - \mathbf{E}_x \int_0^t \mathbf{A}_0\varphi_n(\xi(s)) ds = 0$$

因为

$$\lim_{t \to \infty} |\mathbf{E}_x \mathbf{G}\mathbf{A}_0\varphi_n(\xi(t))|$$
$$= \lim_{t \to \infty} \left| \mathbf{E}_x \int_t^\infty \mathbf{A}_0\varphi_n(\xi(s)) ds \right|$$
$$= \mathbf{E}_x \lim_{t \to \infty} \int_t^\infty |\mathbf{A}_0\varphi_n(\xi(s))| ds = 0,$$

因为 $\mathbf{A}_0\varphi_n \in \mathfrak{L}_\beta(\mathscr{R}^m)$ 且对任意 N 有

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} |\mathbf{E}_x\varphi_n(\xi(t))| \leqslant \sup_{|y| > N} |\varphi_n(y)|,$$

又由于条件(52)的第二式，而 $\varphi_n \in \hat{\mathscr{C}}_{\mathscr{R}^m}$，所以 $\varphi_n + \mathbf{G}\tilde{\mathbf{A}}_0\varphi_n =$

0。于是

$$\sup_x |\varphi_n(x) - \mathbf{G}f(x)| \to 0.$$

将函数 $B(x)\varphi_n'(x)$ 记为 $b_n(x)$。那末

$$\varphi_n(\xi(t)) - \varphi_n(\xi(0)) - \int_0^t \mathbf{A}_0\varphi_n(\xi(s))ds$$

$$= \int_0^t (b_n(\xi(s)), dw(s)). \tag{56}$$

由 φ_n 一致收敛于 $\mathbf{G}f$ 和作为第 II 卷第二章 § 6 引理 3 的推论的不等式

$$\sup_x \mathbf{E}_x \left(\int_0^t |\mathbf{A}_0\varphi_n(\xi(s)) - \mathbf{A}_0\varphi_l(\xi(s))|ds\right)^2$$

$$\leqslant 2\left(\sup_x \mathbf{E}_x \int_0^t |\mathbf{A}_0\varphi_n(\xi(s)) - \mathbf{A}_0\varphi_l(\xi(s))|ds\right)^2$$

$$\leqslant 2K^2 \|\mathbf{A}_0\varphi_n - \mathbf{A}_0\varphi_l\|_\beta^2,$$

得对 t 一致地

$$\lim_{n,l\to\infty} \sup_x \mathbf{E}_x \int_0^t |b_n(\xi(s)) - b_l(\xi(s))|^2 ds = 0.$$

于是,

$$\lim_{n,l\to\infty} \sup_x \mathbf{E}_x \int_0^\infty |b_n(\xi(s)) - b_l(\xi(s))|^2 ds$$

$$= \lim_{n,l\to\infty} \sup_x \int |b_n(y) - b_l(y)|^2 g(x,y)dy = 0.$$

令

$$b(y) = \sum_{k=1}^\infty (b_{n_{k+1}}(y) - b_{n_k}(y)) + b_{n_1}(y),$$

此处 n_k 选取使

$$K_1 = \sum_{k=1}^\infty \sqrt{\sup_x \int |b_{n_{k+1}}(y) - b_{n_k}(y)|^2 g(x,y)dy} < \infty.$$

那末

$$\sqrt{\int |b(y)|^2 g(x, y)dy} \leqslant \sqrt{\int |b_{n_1}(y)|^2 g(x,g)dy} + K_1,$$

和对 $b(y)$ 来说定理的条件成立。因为

$$\lim_{n\to\infty}\sup_x\int|b(y)-b_n(y)|^2g(x,y)dy=0,$$

所以对任意 x 依概率 $\mathbf{P}_x$ 有

$$\int_0^t(b_n(\xi(t)),\ dw(t))\to\int_0^t(b(\xi(t)),dw(t)). \tag{57}$$

当 $n\to\infty$ 时对(56)取极限,即完成了定理的证明。

注。在证明中我们确立了如下结论:

如果 $b_n(y)$ 是取值于 $\mathscr{R}^m$,满足

$$\sup_x\int|b_n(y)|^2g(x,y)dy<\infty$$

和

$$\lim_{l,n\to\infty}\sup_x\int|b_n(y)-b_l(y)|^2g(x,y)dy=0$$

的函数序列,那末存在 $b(y)$ 使得对任意 x 在依概率 $\mathbf{P}_x$ 收敛意义下(57)成立。

现来考察满足定理 10 的扩散过程的 W-泛函的形式(W-泛函的定义在第 II 卷第二章 §6 给出)。我们先建立积分型泛函的某些性质。

引理 5 设 $f(x)$ 是当 $|x|\geqslant N$ 时 $f(x)=0$ 和对某个 t_0 满足

$$\sup_x\mathbf{E}_x\int_0^t f(\xi(t))dt<\alpha<\infty$$

的任意非负可测函数。那末对所有包含 $\{x:|x|\leqslant N\}$ 的开集 G,存在常数 C,使得

$$\mathbf{E}_x\int_0^\infty f(\xi(t))dt\leqslant C\mathbf{E}_x\int_0^\infty\chi_G(\xi(t))dt; \tag{58}$$

同时 C 仅依赖于 α, t_0 和 G。

证。设 τ 是任意 Марков 时间。由不等式

$$\int_0^\tau f(\xi(t))dt\leqslant\sum_{k=0}^\infty\chi_{\{\tau>kt_0\}}\int_{kt_0}^{kt_0+t}f(\xi(s))ds$$

得

$$\mathbf{E}_x \int_0^{\tau} f(\xi(t))dt \leqslant \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}_x \chi_{\{\tau > kt_0\}}$$

$$\leqslant \alpha(\mathbf{E}_x \tau + t_0).$$

令 $\tau = \tau_G$,得证

$$\sup_x \mathbf{E}_x \int_0^{\tau_G} f(\xi(t))dt \leqslant \alpha(\sup_x \mathbf{E}_x \tau_G + t_0) \leqslant \bar{\alpha} < \infty.$$

其次有

$$\inf_{|x|=N} \mathbf{E}_x \int_0^{\tau_G} \chi_G(\xi(t))dt$$

$$\geqslant s_0 \inf_{|x|=N} \mathbf{P}_x \{ \sup_{0 \leqslant s \leqslant s_0} |\xi(s) - \xi(0)| < \delta \}, \qquad (59)$$

其中 δ 是 $\{x: |x| = N\}$ 和 G' 之间的距离. 因为在我们的假设下,过程是一致随机连续,所以当 s_0 足够小时,(59)的右边是正的. 设

$$\inf_{|x| \leqslant N} \mathbf{E}_x \int_0^{\tau_G} \chi_G(\xi(t))dt = d_0.$$

在这种情况下,对 $|x| = N$ 的所有 x

$$\mathbf{E}_x \int_0^{\tau_G} \chi_G(\xi(t))dt \geqslant d_0 \geqslant \frac{d_0}{\bar{\alpha}} \mathbf{E}_x \int_0^{\tau_G} f(\xi(t))dt. \qquad (60)$$

显然当 $|x| \leqslant N$ 时不等式(60)仍然正确. 设 ζ_1 是在 τ_G 以后到达 $\{x: |x| = N\}$ 的首次时间, ζ_1' 是在 ζ_1 以后到达 G' 的首次时间,ζ_2 是在 ζ_1' 以后到达 $\{x: |x| = N\}$ 的首次时间,ζ_2' 是在 ζ_2 以后到达 G' 的首次时间等等. 那末

$$\int_0^{\infty} f(\xi(t))dt = \int_0^{\tau_G} f(\xi(t))dt + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\zeta_k}^{\zeta_k'} f(\xi(t))dt.$$

但由于 $|\xi(\zeta_k)| = N$,

$$\mathbf{E}_x \int_{\zeta_k}^{\zeta_k'} f(\xi(t))dt \leqslant \mathbf{E}_x \mathbf{E}_{\xi(\zeta_k)} \int_0^{\tau_G} f(\xi(s))ds$$

$$\leqslant \frac{\bar{\alpha}}{d_0} \mathbf{E}_x \mathbf{E}_{\xi(\zeta_k)} \int_0^{\tau_G} \chi_G(\xi(s))ds$$

$$= \frac{\bar{\alpha}}{d_0} \mathbf{E}_x \int_{\zeta_k}^{\zeta_k'} \chi_k(\xi(t))dt.$$

如果 $|x| \leqslant N$,那末

$$\mathbf{E}_x \int_0^{\tau_G} f(\xi(t))dt \leqslant \frac{\bar{\alpha}}{d_0} \mathbf{E}_x \int_0^{\tau_G} \chi_G(\xi(t))dt,$$

如果 $|x| > N$,那末记 τ 为到达集合 $\{x: |x| = N\}$ 的首次时间,我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x \int_0^{\tau_G} f(\xi(t))dt &= \mathbf{E}_x \mathbf{E}_{\xi(\tau)} \int_0^{\tau_G} f(\xi(t))dt \\ &\leqslant \frac{\bar{\alpha}}{d_0} \mathbf{E}_x \mathbf{E}_{\xi(\tau)} \int_0^{\tau_G} \chi_G(\xi(t))dt \\ &\leqslant \frac{\bar{\alpha}}{d_0} \mathbf{E}_x \int_0^{\tau_G} \chi_G(\xi(t))dt.\end{aligned}$$

因此,

$$\mathbf{E}_x \int_0^{\infty} f(\xi(t))dt \leqslant \frac{\bar{\alpha}}{d_0} \mathbf{E}_x \left[\int_0^{\tau_G} \chi_G(\xi(t))dt + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\zeta_k}^{\zeta'_k} \chi_G(\xi(t))dt\right] \leqslant \frac{\bar{\alpha}}{d_0} \mathbf{E}_x \int_0^{\infty} \chi_G(\xi(t))dt.$$

引理得证。

注. 利用以积分型泛函逼近 W-泛函的可能性，可证明如下事实:

如果 W-泛函 α_t 有有界支集 F (F 是闭集)，那末

$$\lim_{t\to\infty} \alpha_t = \alpha_\infty$$

存在. 如果 $G \supset F$，G 是开集，那末存在依赖于 G，F，t_0 和 $\sup_x \mathbf{E}_x \alpha_{t_0}$ 的常数 C,使

$$\mathbf{E}_x \alpha_\infty \leqslant C \mathbf{E}_x \int_0^{\infty} \chi_G(\xi(t))dt.$$

设 α_t 是有有界支集 F 的 W-泛函. 我们构造可测的非负函数序列 $\varphi_1^{(n)}(x)$,使得下述条件成立:

1) $\varphi_1^{(n)}(x)$ 仅在有界区域异于 0,

2) $\sup_t \sup_x \mathbf{E}_x \int_0^t \varphi_1^{(n)}(\xi(t))dt < \infty$,

3) 对所有 x 和 t 依测度 $\mathbf{P}_x$，$\int_0^t \varphi_1^{(n)}(\xi(t))dt \to \alpha_t$。

函数 $\varphi_1^{(n)}(x)$ 可取作

$$n(1-\mathbf{E}_x \exp\{-\alpha_{1/n}\})\chi_G(x).$$

由于第 II 卷第二章 §6 定理 1，条件 3) 成立。条件 2) 由不等式

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x \int_0^t \varphi_1^{(n)}(\xi(t))dt &\leqslant \mathbf{E}_x n \int_0^t \mathbf{E}_{\xi(s)} \alpha_{\frac{1}{n}} ds \\ &= \mathbf{E}_x n \int_0^t [\alpha_{s+\frac{1}{n}} - \alpha_s] ds = \mathbf{E}_x n \int_t^{t+1/n} \alpha_s ds \\ &\leqslant \mathbf{E}_x \alpha_{t+\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

得到。因为，由于第 II 卷第二章 §6 引理 6，条件 2) 导致所有矩

$$\int_0^t \varphi_1^{(n)}(\xi(s))ds$$

的一致有界性（按 n 和 x），所以由条件 3) 得，对所有 β

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x \mathbf{E}_x \left|\int_0^t \varphi_1^{(n)}(\xi(s))ds - \alpha_t\right|^\beta = 0.$$

由定理 10，存在 $\varphi_n(x)$ 和 $b_n(x)$，使得 $\mathbf{A}\varphi_n(x) = \varphi_1^{(n)}(x)$ 和(56)成立，如以 $\mathbf{A}\varphi_n$ 代换 $\mathbf{A}_0\varphi_n$。因此

$$\mathbf{E}_x \int_0^t \varphi_1^{(n)}(\xi(s))ds = \mathbf{E}_x \varphi_n(\xi(t)) - \varphi_n(x)$$

和因为引理 5

$$\varphi_n(x) = -\int_0^\infty \mathbf{E}_x \varphi_1^{(n)}(\xi(t))dt \tag{61}$$

一致有界。利用(61)式右边的积分对 n 一致可积，得证对 x 一致地有

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = -\mathbf{E}_x \alpha_\infty.$$

因此，令 $\varphi(x) = -\mathbf{E}_x\alpha_\infty$，得

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x \mathbf{E}_x \Big[\varphi_n(\xi(t)) - \varphi_n(\xi(0)) - \int_0^t \varphi_1^{(n)}(\xi(s))ds - (\varphi(\xi(t)) - \varphi(\xi(0)) - \alpha_t\Big]^2 = 0.$$

于是，根据定理 10 的注，存在函数 $b(x)$，使

$$\mathbf{E}_x\left[\int_0^t(b_n(\xi(s)),dw(s))-\int_0^t(b(\xi(s));\ dw(s))\right]^2=0,$$

对每个 W-泛函 α_t 来说，存在有有界支集的 W-泛函序列 $\alpha_t^{(n)}$ 和单调增区域序列 G_n, $\bigcup G_n=\mathscr{R}^m$,使当 $t\leqslant\tau_{G_n}$,$\alpha_t^{(n)}=\alpha_t$, 利用此事实可证明如下定理的正确性.

定理 11 在定理 10 的条件下对每个 W-泛函 α_t 存在取值于 $\mathscr{R}^1$ 的可测函数 $\varphi(x)$ 和取值于 $\mathscr{R}^m$ 的 $b(x)$, 使得

$$\alpha_t=\varphi(\xi(t))-\varphi(\xi(0))+\int_0^t(b(\xi(s)),\ dw(s)). \quad (62)$$

§4. 在 $\mathscr{R}^m$ 中的连续齐次 Марков 过程

在这节中我们感兴趣的是 $\mathscr{R}^m$ 中连续 Марков 过程的局部结构. 因此将假定过程 x_t 定义在某个有紧闭包的开集 G 上，它中断于由 G 走出的首次时间 ζ,及在区域 G 的边界 Γ 存在极限

$$x_\zeta=\lim_{t\uparrow\zeta}x_t.$$

此外,将假定 $\sup_x\mathbf{E}_x\zeta<\infty$ 和过程一致随机连续，即是

$$\lim_{t\downarrow0}\ \sup_{x\in G}\mathbf{P}(t,x,V_\varepsilon(x))=0,$$

其中 $V_\varepsilon(x)=\{y:|x-y|>\varepsilon\}$.

因为我们是研究局部性质,所以 G 无论取怎样小,我们的假设也不受限制.

如果我们能描写所说的过程的生成算子，那末我们也就能描写 $\mathscr{R}^m$ 中连续过程的特征算子. 以后，利用第 II 卷第二章 §5 的结果,我们可以研究 $\mathscr{R}^m$ 中连续过程的生成算子的形式.

设 $\mathbf{P}_x$ 和 $\mathbf{E}_x$ 是对应于过程的概率和数学期望，$P(t,x,E)$ 是转移概率,$\mathbf{T}_tf(x)=\mathbf{E}_xf(x_t)$,$\mathbf{A}$ 是过程的拟生成算子，即 f 是在 G 内连续的函数,$\mathbf{A}$ 是定义在 f 上,使 $\mathbf{A}f$ 有界和满足

$$\mathbf{T}_tf(x)=f(x)+\int_0^t\mathbf{T}_s\mathbf{A}f(x)ds \quad (1)$$

的算子.

易见，对 $f\in\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$（$\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$ 是 $\mathbf{A}$ 的定义域），对任意 $x\in G$，按测度 $\mathbf{P}_x$

$$\hat{f}_t=f(x_t)-f(x_0)-\int_0^t\mathbf{A}f(x_s)ds \tag{2}$$

是鞅．此外，$\hat{f}_t$ 是过程 x_t 的齐次可加连续泛函（见第 II 卷第二章 §6）．这表明为了研究算子 $\mathbf{A}$，描写鞅过程的连续可加齐次泛函是十分重要的．在下段我们就讨论这方面的内容．

***M*-泛函**　在给出要研究的泛函类的定义以前，我们先建立泛函(2)的一个性质．

引理 1　如果 f 在 $G\cup\Gamma$ 上连续，那末对由公式(2)定义的泛函 $\hat{f}_t$ 存在 W-泛函 φ_t，使对所有 $x\in G$

$$\mathbf{E}_x\hat{f}_t^2=\mathbf{E}_x\varphi_t. \tag{3}$$

证．记

$$v(t,x)=\mathbf{E}_x\hat{f}_t^2.$$

那末由于 $\hat{f}_t$ 是鞅，

$$\begin{aligned}v(t+h,x)&=\mathbf{E}_x\hat{f}_{t+h}^2=\mathbf{E}_x\hat{f}_t^2+\mathbf{E}_x[\hat{f}_{t+h}-\hat{f}_t]^2\\&=v(t,x)+\mathbf{E}_xv(h,x_t).\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}v(t,x)&\leqslant 2\mathbf{E}_x\left[(f(x_t)-f(x_0))^2+\left(\int_0^t\mathbf{A}f(x_s)ds\right)^2\right]\\&=2\mathbf{E}_x\left[f^2(x_t)-f^2(x_0)+2f(x_0)(f(x_0)-f(x_t))\right.\\&\left.\quad+\left(\int_0^t\mathbf{A}f(x_s)ds\right)^2\right]=2\mathbf{T}_tf^2(x)-2f^2(x)+O(t+t^2),\end{aligned}$$

所以，$v(t,x)$ 是 W-函数（见第 II 卷第二章 §6）．因为由过程的一致随机连续性得到对 x 一致地有

$$\mathbf{T}_tf^2(x)\to f^2(x),$$

所以

$$\lim_{t\downarrow 0}\sup_x v(t,x)=0.$$

因此根据第 II 卷第二章 §6 定理 3 存在唯一的 W-泛函 φ_t，使得(3)成立．

定义 连续齐次可加泛函 α_t 称为 M-泛函，如果 1) 对所有 x 和 t，$\mathbf{E}_x\alpha_t = 0$，2) 存在 W-泛函 φ_t，使对所有 $t > 0$

$$\mathbf{E}_x\alpha_t^2 = \mathbf{E}_x\varphi_t.$$

由条件 1) 得 α_t 是鞅.

引理 2 如果 α_t 和 β_t 是两个 M-泛函，那末 $\alpha_t + \beta_t$ 也是 M-泛函.

为证明此结论仅验证定义中的条件 2) 就够了. 因为

$$\mathbf{E}_x(\alpha_t + \beta_t)^2 \leqslant 2\mathbf{E}_x\alpha_t^2 + 2\mathbf{E}_x\beta_t^2,$$

和存在 W-泛函 φ_t，ψ_t 使

$$\mathbf{E}_x\alpha_t^2 = \mathbf{E}_x\varphi_t,\ \mathbf{E}_x\beta_t^2 = \mathbf{E}_x\psi_t,$$

所以对 W-泛函 $v(t,x) = \mathbf{E}_x(\alpha_t + \beta_t)^2$，由于第 II 卷第二章 §6 定理 3，关系式

$$\lim_{h\downarrow 0,\Delta\downarrow 0} \mathbf{E}_x \frac{1}{h}\int_0^t v(h,x_s)v(\Delta,x_s)ds$$

$$\leqslant 2\lim_{h\downarrow 0,\Delta\downarrow 0}\left(\mathbf{E}_x \frac{1}{h}\int_0^t \mathbf{E}_{x_s}\varphi_h\mathbf{E}_{x_s}\varphi_\Delta ds\right.$$

$$\left. + \mathbf{E}_x \frac{1}{h}\int_0^t \mathbf{E}_{x_s}\psi_h\mathbf{E}_{x_s}\varphi_\Delta ds\right) = 0$$

成立. 但这时根据同样的定理存在 W-泛函 χ_t，使

$$v(t,x) = \mathbf{E}_x\chi_t.$$

今后将满足 $\mathbf{E}_x\varphi_t = \mathbf{E}_x\alpha_t^2$ 的 W-泛函 φ_t 记为 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$，其中 α. 是 M-泛函，于是

$$\mathbf{E}_x\alpha_t^2 = \mathbf{E}_x\langle\alpha,\alpha\rangle_t.$$

注. 满足

$$\alpha_t^2 - \langle\alpha,\alpha\rangle_t$$

的函数 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ 按测度 $\mathbf{P}_x$ 是鞅. 由第一章 §1 定理 9 得知对每个 x 这样的函数是存在的. 但是在定义 M-泛函时我们要求这函数是不依赖于 x 的，此外还要求它是 W-泛函.

设 α_t 和 β_t 是两个 M-泛函. 那末由于引理 2，$\alpha_t + \beta_t$ 也是 M-泛函. 因此过程

$$\frac{1}{2}[\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle_t-\langle\alpha,\alpha\rangle_t-\langle\beta,\beta\rangle_t]=\langle\alpha,\beta\rangle_t \quad (4)$$

也可表为两个 W-泛函之差的某个连续可加泛函。今后称这样的泛函为 $\widetilde{W}$-泛函。

以 Φ_M 记 M-泛函的集合。在 Φ_M 中引入收敛性：序列 $\alpha_t^{(n)}$ 称为收敛于 α_t，如果对所有 t 和 x，有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_x(\alpha_t^{(n)}-\alpha_t)^2=0 \text{ 及 } \sup_{n,x}\mathbf{E}_x(\alpha_t^{(n)})^2<\infty$$

我们来证明，在所引入的收敛意义下 Φ_M 是完备空间。事实上，设

$$\alpha_t^{(n)}\in\Phi_M,\lim_{n,m\to\infty}\mathbf{E}_x(\alpha_t^{(n)}-\alpha_t^{(m)})^2=0.$$

设 $n_k(x)$ 由关系式

$$\sup_{n,m\geqslant n_k(x)}\mathbf{E}_x(\alpha_1^{(n)}-\alpha_1^{(m)})^2\leqslant 2^{-k}$$

所定义，且

$$\alpha_t(x)=\lim_{k\to\infty}\alpha_t^{(n_k(x))}.$$

这个极限对每个 x 以概率 $\mathbf{P}_x=1$ 存在。设 $\alpha_t=\alpha_t(x_0)$。因为以概率 $\mathbf{P}_x=1$ 有 $\alpha_t=\alpha_t(x)$，所以对所有 x

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_x(\alpha_t^{(n)}-\alpha_t)^2=0. \quad (5)$$

于是 $\mathbf{E}_x\alpha_t=0$。我们来证明 α_t 是可加的几乎齐次泛函。为此只要证明对任意 x，以概率 $\mathbf{P}_x=1$ 有

$$\theta_h\alpha_t=\alpha_{t+h}-\alpha_h \quad (6)$$

就够了。显然

$$\theta_h\alpha_t=\lim_{k\to\infty}[\alpha_{t+h}^{(n_k(x_h))}-\alpha_h^{(n_k(x_h))}],$$

但因为 $n_k(x_h)$ 和 $n_k(x)\to\infty$，所以当 $k\to\infty$ 时

$$\mathbf{E}_x[\alpha_{t+h}^{(n_k(x_h))}-\alpha_h^{(n_k(x_h))}-\alpha_{t+h}^{(n_k(x))}+\alpha_h^{(n_k(x))}]^2$$
$$=\mathbf{E}_x\mathbf{E}([\alpha_t^{(n_k(x_h))}-\alpha_t^{(n_k(x))}]^2/x_h)\to 0.$$

此外，依测度 $\mathbf{P}_x$，$\alpha_{t+h}^{(n_k(x))}-\alpha_t^{(n_k(x))}\to\alpha_{t+h}-\alpha_t$。关系式(4)得证。

由(5)得

$$P_x\{\sup_{s\leqslant t}|\alpha_s^{(n)}-\alpha_s|>\varepsilon\}\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{E}_x(\alpha_t^{(n)}-\alpha_t)^2\to 0,$$

因此 α_t 是连续泛函。为证明 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ 的存在，我们需要如下有独立价值的引理。

引理 3 设 $0=t_{n0}<t_{n1}<\cdots<t_{nn}=t$ 和 $\max_k(t_{nk}-t_{nk+1})\to 0$ 当 $n\to\infty$，那末对任意 $x\in G$，在依概率 $\mathbf{P}_x$ 收敛意义下

$$\langle\alpha,\alpha\rangle_t=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_{t_{nk+1}}-\alpha_{t_{nk}})^2. \tag{7}$$

证。我们甚至证得更广些：对所有 $x\in G$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_x\left(\langle\alpha,\alpha\rangle_t-\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_{t_{nk+1}}-\alpha_{t_{nk}})^2\right)^2=0. \tag{8}$$

如果

$$\eta_{nk}=(\alpha_{t_{nk+1}}-\alpha_{t_{nk}})^2-\langle\alpha,\alpha\rangle_{t_{nk+1}}+\langle\alpha,\alpha\rangle_{t_{nk}},$$

那末

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x(\eta_{nk}|\mathfrak{F}_{t_{nk}})&=\mathbf{E}^{x_{t_{nk}}}\alpha^2_{t_{nk+1}-t_{nk}}\\&-\mathbf{E}^{x_{t_{nk}}}\langle\alpha,\alpha\rangle_{t_{nk+1}-t_{nk}}=0,\end{aligned}$$

其中 $\mathfrak{F}_t$ 是 x_s，$s\leqslant t$ 所生成的 σ-代数。

因此

$$\mathbf{E}_x\left(\sum_{k=0}^{n-1}\eta_{nk}\right)^2=\mathbf{E}_x\sum_{k=0}^{n-1}\eta_{nk}^2.$$

为证明(8)，只要验证

$$\mathbf{E}_x\sum_{k=0}^{n-1}\eta_{nk}^2\to 0 \tag{9}$$

就够了。由 α_t 及 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ 的连续性，得当 $n\to\infty$ 时，

$$\sup_k|\eta_{nk}|\to 0.$$

其次，量

$$\sum_k|\eta_{nk}|\leqslant\langle\alpha,\alpha\rangle_t+\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_{t_{nk+1}}-\alpha_{t_{nk}})^2$$

依概率有界，这因为

$$\mathbf{E}_x \sum_{k=0}^{n-1} |\eta_{nk}| \leqslant 2\mathbf{E}_x\langle\alpha,\alpha\rangle_t.$$

因此由 $\sum_{k=0}^{n-1} \eta_{nk}^2$ 的一致可积性得到(9)。为证实 $\sum_{k=0}^{n-1}\eta_{nk}^2$ 的一致可积性，我们估计

$$\mathbf{E}_x\left(\sum_{k=0}^{n-1} \eta_{nk}^2\right)^2.$$

显然，

$$\mathbf{E}_x\left(\sum_{k=0}^{n-1} \eta_{nk}^2\right)^2 \leqslant \mathbf{E}_x\left(\sum_{k=0}^{n-1} |\eta_{nk}|\right)^4$$

$$\leqslant \mathbf{E}_x\left(\langle\alpha,\alpha\rangle_t + \sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_{t_{nk+1}} - \alpha_{t_{nk}})^2\right)^4$$

$$\leqslant 8\mathbf{E}_x\langle\alpha,\alpha\rangle_t^4 + 8\mathbf{E}_x\left(\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_{t_{nk+1}} - \alpha_{t_{nk}})^2\right)^4.$$

$\mathbf{E}_x\langle\alpha,\alpha\rangle_t^4$ 是有限值由第 II 卷第二章 § 6 引理 6 得到。我们来证明第二个被加项的有界性。估计概率

$$Q_x(\lambda) = \mathbf{P}_x\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_{t_{n,k+1}} - \alpha_{t_{nk}})^2 > \lambda\right\},$$

设

$$\xi_k = (\alpha_{t_{nk+1}} - \alpha_{t_{nk}})^2, \text{ 如果 } |\alpha_{t_{nk+1}} - \alpha_{t_{nk}}| \leqslant \sqrt{c},$$

$$\xi_k = 0, \text{ 如果 } |\alpha_{t_{nk+1}} - \alpha_{t_{nk}}| > \sqrt{c}.$$

那末

$$Q_x(2rc) \leqslant \mathbf{P}_x\left\{\sup_k |\alpha_{t_{nk+1}} - \alpha_{t_{nk}}| > \sqrt{c}\right\}$$

$$+ \mathbf{P}_x\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k > 2rc\right\}.$$

但

$$\mathbf{P}_x\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k > 2rc\right\} \leqslant \sum_l \mathbf{P}_x\left\{\sum_0^l \xi_k\right.$$

$$\leqslant 2(r-1)c,\ \sum_0^{l+1}\xi_k > 2(r-1)c,$$

$$\left.\sum_{l+2}^{n-1}\xi_k > c\right\} \leqslant \sum_l \mathbf{P}_x\left\{\sum_0^l \xi_k\right.$$

$$\left.\leqslant 2(r-1)c,\ \sum_0^{l+1}\xi_k > 2(r-1)c\right\}$$

$$\times \sup_{y\in G}\mathbf{P}_y\left\{\sum_{l+2}^{n-1}\xi_k > c\right\}$$

$$\leqslant \sup_{y\in G}\mathbf{P}_y\left\{\sum_0^{n-1}\xi_k > c\right\}$$

$$\times \mathbf{P}_x\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k > 2(r-1)c\right\},$$

因此，

$$\mathbf{P}_x\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k > 2rc\right\} \leqslant \left(\sup_{y\in G}\mathbf{P}_y\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k > c\right\}\right)^r$$

$$\leqslant \frac{1}{c^r}(\sup_{y\in G}\mathbf{E}_y\langle\alpha,\alpha\rangle_t)^r.$$

其次，

$$\sup_k|\alpha_{t_{nk+1}} - \alpha_{t_{nk}}| \leqslant 2\sup_{u<t}|\alpha_u|.$$

因为 α_u 是鞅，所以由于第 I 卷第二章 § 2 的公式(18)（事实上，我们利用此公式在连续情形的类似公式，它的正确性在卷 I 第三章 § 4 讨论）

$$\mathbf{P}_x\left\{2\sup_{u<t}|\alpha_u| > \sqrt{c}\right\} \leqslant \frac{2^{2r}\mathbf{E}_x\alpha_t^{2r}}{c^r}.$$

我们来证明 $\mathbf{E}_x\alpha_t^{2r}$ 对所有 r 是有限的且按 x 一致有界。设选

取 ρ 使

$$\sup_x \mathbf{P}_x\{\sup_{u\leqslant t}|\alpha_u|>\rho\}\leqslant\frac{1}{\rho^2}\sup_x \mathbf{E}_x\langle\alpha,\alpha\rangle_t\leqslant\frac{1}{2}.$$

那末，记 ζ 为首次 $\sup_{u\leqslant\zeta}|\alpha_u|=\lambda-\rho$ 的 Марков 时间，将有

$$\mathbf{P}_x\{\sup_{u\leqslant t}|\alpha_u|>\lambda\}=\mathbf{P}_x\{\zeta<t,\sup_{u\leqslant t}|\alpha_u-\alpha_\zeta|>\rho\}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\mathbf{P}_x\{\sup_{u\leqslant t}|\alpha_u|>\lambda-\rho\},$$

于是

$$\mathbf{P}_x\{\sup_{u\leqslant t}|\alpha_u|>k\rho\}\leqslant\frac{1}{2^k}.$$

由此不等式得 α_t 的所有一致有界矩存在。

这样，

$$Q_x(2rc)\leqslant c^{-r}\sup_{y\in G}(\mathbf{E}_y\langle\alpha,\alpha\rangle_t)^r+2^{2r}c^{-r}\sup_{y\in G}\mathbf{E}_y\alpha_t^{2r}.$$

由此得知对任意 r 存在常数 A_r，使

$$Q_x(c)\leqslant\frac{A_r}{c^r}.$$

就是说，

$$\mathbf{E}_x\left(\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_{t_{nk+1}}-\alpha_{t_{nk}})^2\right)^4$$

按 n 一致有界. 这就完成了引理的证明.

推论 对所有 x，如果 $t_{n0}<t_{n1}<\cdots<t_{nn}=t$ 和 $\max_k(t_{nk+1}-t_{nk})\to 0$，那末关于测度 $\mathbf{P}_x$ 在均方意义下有

$$\langle\alpha,\beta\rangle_t=\lim_{n\to\infty}(\alpha_{t_{nk+1}}-\alpha_{t_{nk}})(\beta_{t_{nk+1}}-\beta_{t_{nk}}).$$

现证明，如果 α_t 是使(5)式成立的泛函，其中 $\alpha_t^{(n)}\in\Phi_M$，那末 $\alpha_t\in\Phi_M$. 为此只要对 W-泛函 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ 的存在性加以证明就够了. 利用关于测度 $\mathbf{P}_x$ 在均方收敛意义下有关系式

$$\langle\alpha^{(n)},\alpha^{(n)}\rangle_t=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m-1}(\alpha_{t_{mk+1}}^{(n)}-\alpha_{t_{mk}}^{(n)})^2,$$

可以写出

$$\mathbf{E}_x|\langle\alpha^{(n)},\alpha^{(n)}\rangle_t-\langle\alpha^{(p)},\alpha^{(p)}\rangle_t|$$

$$\leqslant\lim_{m\to\infty}\mathbf{E}_x\left|\sum_{k=0}^{m-1}([\alpha^{(n)}_{t_{mk+1}}-\alpha^{(n)}_{t_{mk}}]^2-[\alpha^{(p)}_{t_{mk+1}}-\alpha^{(p)}_{t_{mk}}]^2)\right|$$

$$\leqslant\lim_{m\to\infty}\left\{\mathbf{E}_x\sum_{k=0}^{m-1}[\alpha^{(n)}_{t_{mk+1}}-\alpha^{(n)}_{t_{mk}}-\alpha^{(p)}_{t_{mk+1}}+\alpha^{(p)}_{t_{mk}}]^2\right.$$

$$\left.\times\mathbf{E}_x\sum_{k=0}^{n-1}[\alpha^{(n)}_{t_{mk+1}}-\alpha^{(n)}_{t_{mk}}+\alpha^{(p)}_{t_{mk+1}}-\alpha^{(p)}_{t_{mk}}]^2\right\}^{1/2}$$

$$=\{\mathbf{E}_x[\alpha^{(n)}_t-\alpha^{(p)}_t]^2\mathbf{E}_x[\alpha^{(n)}_t-\alpha^{(p)}_t]^2\}^{1/2}. \tag{10}$$

于是，

$$\lim_{n,p\to\infty}\mathbf{E}_x|\langle\alpha^{(n)},\alpha^{(n)}\rangle_t-\langle\alpha^{(p)},\alpha^{(p)}\rangle_t|=0.$$

因此对每个 x 依测度 $\mathbf{P}_x$ 量 $\langle\alpha^{(n)},\alpha^{(n)}\rangle_t$ 的极限存在. 正如在 α_t 情形一样，可证明存在非负可加几乎齐次泛函 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$，使对所有 x

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_x|\langle\alpha^{(n)},\alpha^{(n)}\rangle_t-\langle\alpha,\alpha\rangle_t|=0$$

对

$$\mathbf{E}_x\langle\alpha^{(n)},\alpha^{(n)}\rangle_t=\mathbf{E}_x(\alpha^{(n)}_t)^2$$

取极限，得证

$$\mathbf{E}_x\langle\alpha,\alpha\rangle_t=\mathbf{E}_x\alpha_t^2.$$

余下要证明 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ 的连续性. 设 τ 是某个 Марков 时间，满足 $\tau\leqslant t$. 如得到式(10)那样，可作出估计

$$\mathbf{E}_x|\langle\alpha^{(n)},\alpha^{(n)}\rangle_\tau-\langle\alpha^{(p)},\alpha^{(p)}\rangle_\tau|$$

$$\leqslant\{\mathbf{E}_x|\alpha^{(n)}_t-\alpha^{(p)}_t|^2\cdot\mathbf{E}_x|\alpha^{(n)}_t-\alpha^{(p)}_t|^2\}^{1/2}. \tag{11}$$

设

$\tau=t$，如果 $\sup_{s<t}|\langle\alpha^{(n)},\alpha^{(n)}\rangle_s-\langle\alpha^{(p)},\alpha^{(p)}\rangle_s|\leqslant\varepsilon$，和 $\tau=\inf\{s:|\langle\alpha^{(n)},\alpha^{(n)}\rangle_s-\langle\alpha^{(p)},\alpha^{(p)}\rangle_s|>\varepsilon\}$，在相反情形. 那末

$$\varepsilon\mathbf{P}_x\{\sup_{s<t}|\langle\alpha^{(n)},\alpha^{(n)}\rangle_s-\langle\alpha^{(p)},\alpha^{(p)}\rangle_s|>\varepsilon\}$$

$$\leqslant E_x|\langle\alpha^{(n)},\alpha^{(n)}\rangle_\tau-\langle\alpha^{(p)},\alpha^{(p)}\rangle_\tau|.$$

于是，$\langle\alpha^{(n)},\alpha^{(n)}\rangle_t$ 依概率 $\mathbf{P}_x$ 对于 t 一致收敛于 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$。由此得 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ 的连续性。于是 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ 是 W-泛函。于是证明了

定理 1 M-泛函的集合 Φ_M 是线性空间，在 $\alpha_t^{(n)}\to\alpha_t$ 收敛意义下它是完备的，如果对所有 $x\in G$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_x(\alpha_t^{(n)}-\alpha_t)^2=0 \text{ 和 } \sup_{x,n}\mathbf{E}_x(\alpha_t^{(n)})^2<\infty.$$

其次，考虑按 M-泛函的随机积分。利用第一章 § 2 的构造方法，可对适应于流 $\{\mathfrak{F}_t\}$ 和满足条件 $\int_0^t f^2(s)d\langle\alpha,\alpha\rangle_s<\infty$ 的函数 f 定义 $\int_0^t f(s)d\alpha_s$。

我们考虑形为

$$\int_0^t g(x_s)d\alpha_s \tag{12}$$

的更窄的随机积分类，其中 $g(x)$ 是满足

$$\sup_x\mathbf{E}_x\int_0^t g^2(x_s)d\langle\alpha,\alpha\rangle_t<\infty \tag{13}$$

的 Borel 函数。在此假设下积分(12)也可看作 M-泛函（更确切地，对任意 $x\in G$，存在按测度 $\mathbf{P}_x$ 随机等价于这个随机积分的 M-泛函）。

首先假设 $g(x)$ 是 x 的连续函数。

由积分的定义得，这时对任意 x，依测度 $\mathbf{P}_x$ 在均方意义下

$$\int_0^t g(x_s)d\alpha_s=\lim_{h\downarrow 0}\sum_{kh<t}g(x_{kh})[\alpha^t_{kh+h}-\alpha_{kh}],$$

$$\alpha_s^t=\alpha_{t\wedge s},$$

（这因为

$$\lim_{h\to 0}\mathbf{E}_x\left[\int_0^t g(x_s)d\alpha_s-\sum_{kh<t}g(x_{kh})[\alpha^t_{kh+h}-\alpha_{kh}]\right]^2=0.）$$

因为 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ 是W泛函，这可得出对某个常数 c_1 和 c_2 有 $E_x\langle\alpha,\sigma\rangle_t\leqslant c_1+c_2t$。从而

$$\mathbf{E}_x\left[\int_0^t g(x_s)d\alpha_s-\sum_{kh<t}g(x_{kh})[\alpha^t_{kh+h}-\alpha_{kh}]\right]^2$$

$$\leqslant 2\|g\|^2(c_1+c_2t). \tag{14}$$

存在正数 $h_l(x)$ 使对一切 x 和 l 及 $h<h_l(x)$ 有

$$\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N^4}\mathbf{E}_x\left[\int_0^N g(x_s)d\alpha_s - \sum_{kh<N} g(x_{kh})[\alpha_{kh+h}^N-\alpha_{kh}]\right]^2 \leqslant 2^{-l}. \tag{15}$$

由(15)得到以概率 $\mathbf{P}_x=1$ 关于 t 一致地在每个有界集上

$$\int_0^t g(x_s)d\alpha_s = \lim_{l\to\infty}\sum_{kh_l(x)<t} g(x_{kh_l(x)})[\alpha_{(k+1)h_l(x)}^t-\alpha_{kh_l(x)}^t]. \tag{16}$$

位于(16)右边的极限记为 $I_x(t)$。那末如在证明定理 1 时那样，可证 $I_x(t)$ 是可加几乎齐次泛函。因为

$$\mathbf{E}_x(I_{x_0}(t))^2=\mathbf{E}_x\left(\int_0^t g(x_s)d\alpha_s\right)^2=\mathbf{E}_x\int_0^t g^2(x_s)d\langle\alpha,\alpha\rangle_s$$

和函数

$$\langle I_{x_0}, I_{x_0}\rangle_t=\int_0^t g^2(x_s)d\langle\alpha,\alpha\rangle_s$$

是 W-泛函，而 $\mathbf{E}_x I_{x_0}(t)=0$，所以 $I_{x_0}(t)$ 是 M-泛函.

如果现时 $g(x)$ 是使关系式(13)成立的某个 Borel 函数，且存在连续函数序列 $g_n(x)$，使

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_x\int_0^t[g(x_s)-g_n(x_s)]^2d\langle\alpha,\alpha\rangle_s=0,\\&\sup_{x,n}\mathbf{E}_x\int_0^t g_n^2(x_s)d\langle\alpha,\alpha\rangle_s<\infty,\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

那末等价于

$$\int_0^t g_n(x_s)d\alpha_s$$

的 M-泛函序列收敛于某个 M-泛函。今后这 M-泛函就被认为是积分

$$\int_0^t g(x_s)d\alpha_s.$$

现来证明对所有有界Borel 函数 $g(x)$ 存在 M-泛函 $\alpha_t(g)$,

使得对所有 x,以概率 $\mathbf{P}_x = 1$ 有

$$\alpha_t(g) = \int_0^t g(x_s)d\alpha_s.$$

以 $\mathscr{F}$ 记存在对应的 M-泛函的函数 g 的集合,那末 $\mathscr{F}$ 包含所有连续函数且每个有界收敛函数序列 g_n 属于 $\mathscr{F}$,它的极限 g 也属于 $\mathscr{F}$,因为由 g_n 有界收敛于 g 得等式(17)成立. 因此 $\mathscr{F}$ 包含所有有界 Borel 函数. 如果 g 是使 (13) 成立的有界 Borel 函数,那末假设

$$g^N(x) = \begin{cases} g(x), & 当\ |g(x)| < N, \\ N\operatorname{sign} g(x), & 当\ |g(x)| \geqslant N. \end{cases}$$

因为对所有 x, $g(x) - g^N(x) \to 0$ 和 $|g(x) - g^N(x)| \leqslant g(x)$, 所以我们有

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}_x \int_0^t [g(x_s) - g^N(x_s)]^2 d\langle\alpha,\alpha\rangle_s = 0.$$

因此,在 Φ_M 中

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^t g^N(x_s)d\alpha_s$$

也存在,即是 $g\in\mathscr{F}$. 于是证明了

定理 2 设 $\alpha_t \in \Phi_M$. 对使条件 (13)成立的所有 Borel 函数 $g(x)$,存在 M-泛函 $\alpha_t(g)$,使得以概率 $\mathbf{P}_x = 1$ 对所有 $t > 0$

$$\alpha_t(g) = \int_0^t g(x_s)d\alpha_s. \tag{18}$$

今后,位于(18)右边的随机积分就将视为这个 M-泛函.

注 1.

$$\langle\alpha(g), \alpha(g)\rangle_t = \int_0^t g^2(x_s)d\langle\alpha,\alpha\rangle_s,$$

$$\langle\alpha(g_1), \alpha(g_1)\rangle_t = \int_0^t g_1(x_s)g_2(x_s)d\langle\alpha,\alpha\rangle_s.$$

注 2. 如果 g_1 和 g_2 是 Borel 函数,满足

$$\int_0^t g_1^2(x_s)g_2^2(x_s)d\langle\alpha,\alpha\rangle_s < \infty,$$

那末

$$\int_0^t g_1(x_s)d\alpha_s(g_2)=\int_0^t g_1(x_s)g_2(x_s)d\alpha_s.$$

特别，如果 $g_1>0$，那末

$$\alpha_t=\int_0^t\frac{1}{g_1(x_s)}d\alpha_s(g_1).$$

M-泛函的微分法 我们需要如下辅助命题.

引理 4 设 φ_t 和 γ_t 是 W-泛函. 如果存在可测函数 $g(s)$，使对所有 x 以概率 $\mathbf{P}_x=1$ 有

$$\gamma_t=\int_0^t g(s)d\varphi_s,$$

那末存在 Borel 函数 $\hat{g}(x)$，使对所有 x

$$\mathbf{P}_x\left\{\gamma_t=\int_0^t\hat{g}(x_s)d\varphi_s\right\}=1.$$

证. 因为对所有 ω，φ_s 和 γ_s 是连续的单调函数，所以如果令

$$\bar{g}(s)=\varliminf_{h\downarrow 0}\frac{\gamma_{s+h}-\gamma_s}{\varphi_{s+h}-\varphi_s},$$

那末对几乎所有 s（按测度 $d\varphi_s$），将有 $\bar{g}(s)=g(s)$. 于是，

$$\gamma_t=\int_0^t\bar{g}(s)d\varphi_s.$$

设

$$\hat{g}(x)=\mathbf{E}_x\varliminf_{h\downarrow 0}\frac{\gamma_h}{\varphi_h}=\mathbf{E}_x\bar{g}(0).$$

那末由于泛函 γ 和 φ 的齐次性

$$\mathbf{E}(\bar{g}(s)|\mathfrak{F}_s)=\mathbf{E}(\theta_s\bar{g}(0)|\mathfrak{F}_s)=\mathbf{E}_{x_s}\bar{g}(0)=\hat{g}(x_s).$$

由过程的弱可测性得函数 $\hat{g}(x)$ 是 Borel 可测.

最后，注意到由于第 II 卷第二章 § 6 引理 2，所以

$$\mathbf{P}_x\{\bar{g}(0)=\hat{g}(x)\}=1.$$

因此

$$\mathbf{P}_x\{\bar{g}(s)=\theta_s\bar{g}(0)=\theta_s\bar{g}(x_0)=\hat{g}(x_s)\}=1,$$

引理得证.

引理 5 如果 φ_t 和 γ_t 是两个 W-泛函，那末

$$\gamma_t = \gamma_t^{(1)} + \gamma_t^{(2)},$$

其中 $\gamma_t^{(1)}$ 和 $\gamma_t^{(2)}$ 是 W-泛函并且存在 Borel 函数 $\hat{g}(x)$，使

$$\gamma_t^{(1)} = \int_0^t \hat{g}(x_s) d\varphi_s,$$

而按测度 $\mathbf{P}_x$ 对几乎所有 ω，$\gamma_t^{(2)}$ 对 φ_t 是 t 的奇异函数。

证。如在引理 4 中那样构造函数 $\hat{g}(x)$。那末 γ_t 关于 φ_t 的绝对连续部分是

$$\gamma_t^{(1)} = \int_0^t \hat{g}(x_s) d\varphi_s \leqslant \gamma_t.$$

因为 $\gamma_t^{(1)}$ 是 W-泛函：$\mathbf{E}_x\gamma_t^{(1)} \leqslant \mathbf{E}_x\gamma_t$，显然，奇异部分 $\gamma_t^{(2)} = \gamma_t - \gamma_t^{(1)}$ 是非负的，且作为可加齐次连续泛函之差，它也是可加齐次连续泛函。因为 $\gamma_t^{(2)} \leqslant \gamma_t$，所以 $\gamma_t^{(2)}$ 也是 W-泛函。按构造 $\gamma_t^{(2)}$ 是对 φ_t 奇异。引理得证。

推论 1 如果 γ_t 是 $\widetilde{W}$-泛函，而 φ_t 是 W-泛函，那末存在 Borel 函数 $\hat{g}(x_t)$，使得

$$\gamma_t = \int_0^t \hat{g}(x_s) d\varphi_s + \gamma_t^{(2)} \text{ 和 } \int_0^t |\hat{g}(x_s)| d\varphi_s < \infty,$$

其中 $\gamma_t^{(2)}$ 也是 $\widetilde{W}$-泛函，它对 φ_t 奇异。这时如果 γ_t 对 φ_t 绝对连续，那末

$$\gamma_t = \int_0^t \hat{g}(x_s) d\varphi_s.$$

定理 3 设 α_t 和 β_t 是 M-泛函。那末存在 Borel 函数 $g(x)$，使得

$$\int_0^t |g(x_s) d\langle\alpha, \alpha\rangle_s < \infty$$

和

$$\langle\alpha, \beta\rangle_t = \int_0^t g(x_s) d\langle\alpha, \alpha\rangle_s. \tag{19}$$

证。由于上面引理的推论，为证定理，只要证明 $\langle\alpha, \beta\rangle_t$ 对 $\langle\alpha, \alpha\rangle_t$ 绝对连续。

设 $(c_1, d_1), (c_2, d_2), \cdots, (c_k, d_k)$ 是不相交的区间组。那末

由于引理 3 的推论，

$$\sum_{j=1}^{k}|\langle\alpha,\beta\rangle_{d_j}-\langle\alpha,\beta\rangle_{c_j}|=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=0}^{n-1}(\alpha_{t_{i+1}^{(j)}}-\alpha_{t_i^{(j)}})$$
$$\times(\beta_{t_{i+1}^{(j)}}-\beta_{t_i^{(j)}})|,$$

其中 $t_i^{(j)}=c_j+\frac{i}{n}(d_j-c_j)$。因此

$$\sum_{j=1}^{k}|\langle\alpha,\beta\rangle_{d_j}-\langle\alpha,\beta\rangle_{c_j}|$$
$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=0}^{n-1}(\alpha_{t_{i+1}^{(j)}}-\alpha_{t_i^{(j)}})^2}$$
$$\times\sqrt{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=0}^{n-1}(\beta_{t_{i+1}^{(j)}}-\beta_{t_i^{(j)}})^2}$$
$$\leqslant\sqrt{\sum_{j=1}^{k}[\langle\alpha,\alpha\rangle_{d_j}-\langle\alpha,\alpha\rangle_{c_j}]\sum_{j=1}^{k}[\langle\beta,\beta\rangle_{d_j}-\langle\beta,\beta\rangle_{c_j}]}.$$

由后一不等式得知对直线上所有 Borel 集

$$\left|\int_A d\langle\alpha,\beta\rangle_t\right|\leqslant\sqrt{\int_A d\langle\alpha,\alpha\rangle_t\int_A d\langle\beta,\beta\rangle_t}.$$

因此 $\langle\alpha,\beta\rangle_t$ 关于 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ 绝对连续。定理得证。

今后将满足(19)的函数 $g(x)$ 记为 $\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}(x)$。因此

$$\langle\alpha,\beta\rangle_t=\int_0^t\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}(x_s)d\langle\alpha,\alpha\rangle_s. \tag{20}$$

如果对所有 x 和 t 以概率 $\mathbf{P}_x=1$ 有 $\langle\alpha,\beta\rangle_t=0$，那末称两个 M-泛函 α 和 β 是正交的。

由等式

$$\mathbf{E}_x\alpha_t\beta_t=\mathbf{E}_x\langle\alpha,\beta\rangle_t$$

得知 $\mathbf{E}_x\alpha_t\beta_t=0$ 是 α_t 和 β_t 正交的必要条件。 我们来证这也是充分的。设此条件成立，那末

$$\mathbf{E}_x(\alpha_t+\beta_t)^2=\mathbf{E}_x\alpha_t^2+\mathbf{E}_x\beta_t^2=\mathbf{E}_x\langle\alpha,\alpha\rangle_t+\mathbf{E}_x\langle\beta,\beta\rangle_t.$$

于是，由于对应于 M-泛函的 W-泛函的唯一性，

$$\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle_t=\langle\alpha,\alpha\rangle_t+\langle\beta,\beta\rangle_t.$$

因此，$\langle\alpha,\beta\rangle_t=0$。

引理 6 设 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 是两个函数，使得存在随机积分

$$\alpha_t(g_1)=\int_0^t g_1(x_s)d\alpha_s,\quad \beta_t(g_2)=\int_0^t g_2(x_s)d\beta_s$$

存在，那末

$$\langle\alpha(g_1),\beta(g_2)\rangle_t=\int_0^t g_1(x_s)g_2(x_s)d\langle\alpha,\beta\rangle_s. \tag{21}$$

证. 先假设 α 和 β 正交. 我们来证明 $\alpha_t(g_1)$ 和 $\beta_t(g_2)$ 是正交.

如果 g_1 和 g_2 连续，那末

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x\alpha_t(g_1)\beta_t(g_2)=&\lim\mathbf{E}_x\Sigma g_1(x_{s_k})[\alpha_{s_{k+1}}-\alpha_{s_k}]\\&\times\Sigma g_2(x_{s_k})[\beta_{s_{k+1}}-\beta_{s_k}]=0\end{aligned}$$

$$(0=s_0<s_1<\cdots<s_n=t,\quad \max(s_{k+1}-s_k)\to 0),$$

这因为由 α 和 β 的正交性得

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_x([\alpha_{s_{k+1}}-\alpha_{s_k}][\beta_{s_{k+1}}-\beta_{s_k}]|\mathfrak{F}_{s_k})\\&=\mathbf{E}_x\mathbf{E}_{x_{s_k}}\alpha_{s_{k+1}-s_k}\beta_{s_{k+1}-s_k}=0.\end{aligned}$$

利用连续函数取极限(正如证明定理 2 时)，得证如果 α 和 β 正交就有

$$\mathbf{E}_x\alpha_t(g_1)\beta_t(g_2)=0.$$

现设 $\beta_t=\beta_t^{(1)}+\beta_t^{(2)}$，其中 $\beta_t^{(2)}$ 正交 α_t，而

$$\beta_t^{(1)}=\int_0^t f(x_s)d\alpha_s.$$

那么

$$\beta_t(g_2)=\beta_t^{(1)}(g_2)+\beta_t^{(2)}(g_2),$$

同时 $\beta_t^{(2)}(g_2)$ 正交于 $\alpha_t(g_1)$. 就是说 $\langle\alpha(g_1),\beta^{(2)}(g_2)\rangle_t=0$. 因此

$$\langle\alpha(g_1),\beta(g_2)\rangle_t=\langle\alpha(g_1),\beta^{(1)}(g_2)\rangle_t=\langle\alpha(g_1),\alpha(fg_2)\rangle_t$$

$$= \int_0^t g_1(x_s) f(x_s) g_2(x_s) d\langle \alpha, \alpha \rangle_s.$$

但

$$\langle \alpha, \beta \rangle_t = \langle \alpha, \alpha(f) \rangle_t = \int_0^t f(x_s) d\langle \alpha, \alpha \rangle_s.$$

因此，如果上面利用到的 β_t 展式是正确的，就得证式(21)。

设 $f(x) = \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}(x)$，那末

$$\beta_t^{(2)} = \beta_t - \int_0^t \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}(x_s) d\alpha_s \tag{22}$$

和

$$\langle \alpha, \beta^{(2)} \rangle_t = \langle \alpha, \beta \rangle_t - \int_0^t \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}(x_s) d\langle \alpha, \alpha \rangle_s = 0,$$

即是，$\beta_t^{(2)}$ 正交于 α_t。引理得证。

注 1。从 β_t 出发，构造出正交于 α_t 的 M-泛函的公式(22)可用如下方式推广．设 $\alpha_t^{(1)}, \cdots, \alpha_t^{(n)}$ 是 M-泛函的某一序列，那末

$$\left.\begin{aligned} \beta_t^{(k)} &= \alpha_t^{(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} \int_0^t \frac{\partial \alpha^{(k)}}{\partial \beta^{(i)}}(x_s) d\beta_s^{(i)}, \quad k > 1; \\ \beta_t^{(1)} &= \alpha_t^{(1)}, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

构成两两正交的函数序列．这可用归纳法验证：如果 $\beta_t^{(1)}, \cdots, \beta_t^{(k-1)}$ 两两正交，那末当 $i < k$ 时

$$\langle \beta^{(k)}, \beta^{(i)} \rangle_t = \langle \alpha^{(k)}, \beta^{(i)} \rangle_t - \int_0^t \frac{\partial \alpha^{(k)}}{\partial \beta^{(i)}}(x_s) d\langle \beta^{(i)}, \beta^{(i)} \rangle_s = 0.$$

还容易建立如下不等式：

$$\sum_{i=1}^{k-1} \int_0^t \left(\frac{\partial \alpha^{(k)}}{\partial \beta^{(i)}}(x_s) \right)^2 d\langle \beta^{(i)}, \beta^{(i)} \rangle_s \leqslant \langle \alpha^{(k)}, \alpha^{(k)} \rangle_t. \tag{24}$$

注 2。当 $\alpha_t = 0$ 时，我们将认为

$$\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = 0.$$

定义 M-泛函 β_t 从属于泛函 α_t，如果

$$\beta_t = \int_0^t \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}(x_s) d\alpha_s.$$

定义 泛函组 $\beta_t^{(1)}, \beta_t^{(2)}, \cdots$ 从属于泛函组 $\alpha_t^{(1)}, \alpha_t^{(2)}, \cdots$，如果对所有 k 可找到 $n \geqslant 1$ 和函数 $g_1(x), \cdots, g_n(x)$ 使得

$$\beta_t^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t g_i(x_s) d\alpha_s^{(i)}. \tag{25}$$

两个泛函组 $\{\alpha_t^{(i)}, i = 1,2,\cdots\}$ 和 $\{\beta_t^{(i)}, i = 1,2,\cdots\}$ 称为等价的，如果它们中的每一个从属于另一个。

由等式(23)定义的泛函 $\beta_t^{(k)}$ 从属于组 $\{\alpha_t^{(i)}, i = 1,2,\cdots\}$. 这易由归纳法建立. 即验证 $\beta_t^{(k)}$ 能用 $\alpha_t^{(1)}, \cdots, \alpha_t^{(k)}$ 以(25)的形式表出. 当 $k = 1$ 时是这样. 如果 $\beta_t^{(i)}$ 当 $i \leqslant k-1$ 能用 $\alpha_t^{(1)}, \cdots, \alpha_t^{(i)}$ 表出，那末公式(23)表明，$\beta_t^{(k)}$ 能用 $\alpha_t^{(1)}, \cdots, \alpha_t^{(k)}$ 表出. 另方面，

$$\alpha_t^{(k)} = \beta_t^{(k)} + \sum_{i=1}^{k-1} \int_0^t \frac{\partial \alpha^{(k)}}{\partial \beta^{(i)}}(x_s) d\beta_s^{(i)}.$$

于是下面的定理是正确的.

定理 4 对所有 M-泛函序列存在等价于它的两两正交的 M-泛函序列.

两两正交的 M-泛函序列 $\{\alpha_t^{(k)}, k = 1, 2, \cdots\}$ 称为在 Φ_M 中的基，如果对所有 M-泛函 β_t

$$\beta_t = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \frac{\partial \beta}{\partial \alpha^{(k)}}(x_s) d\alpha_s^{(k)}, \tag{26}$$

其中级数的收敛性了解为在 Φ_M 中的收敛意义下.

我们说序列 $\{\beta_t^{(k)}, k = 1,2, \cdots\}$ 在 Φ_M 是闭的，如果不存在正交于所有 $\beta_t^{(k)}$ 的异于 0 的 M-泛函 γ_t.

显然，等价序列同时是闭的. 如果两两正交的 M-泛函序列 $\{\alpha_t^{(k)}, k = 1,2,\cdots\}$ 是闭的，那末它是基. 事实上，对 M-泛函 β_t，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \frac{\partial \beta}{\partial \alpha^{(k)}}(x_s)d\alpha_s^{(k)}$$

在 Φ_M 中收敛，因为当 $n>p,\ n,p\to\infty$ 时

$$\left\langle \sum_{k=p}^{n}\int_0^t \frac{\partial\beta}{\partial\alpha^{(k)}}(x_s)d\alpha_s^{(k)}, \sum_{k=p}^{n}\int_0^t \frac{\partial\beta}{\partial x^{(k)}}(x_s)d\alpha_s^{(k)} \right\rangle_t$$

$$=\sum_{k=p}^{n}\int_0^t \left[\frac{\partial\beta}{\partial\alpha^{(k)}}(x_s)\right]^2 d\langle\alpha^{(k)},\alpha^{(k)}\rangle_s\to 0,$$

这是由于不等式

$$\mathbf{E}_x\left(\sum_{k=1}^{n}\int_0^t \frac{\partial\beta}{\partial\alpha^{(k)}}(x_s)d\alpha_s^{(k)}\right)^2$$

$$=\mathbf{E}_x\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\left(\frac{\partial\beta}{\partial\alpha^{(k)}}(x_s)\right)^2 d\langle\alpha^{(k)},\alpha^{(k)}\rangle_s$$

$$\leqslant \mathbf{E}_x\langle\beta,\beta\rangle_t$$

（这不等式类似于(24)）。现在考虑 M-泛函

$$\beta_t-\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \frac{\partial\beta}{\partial\alpha^{(k)}}(x_s)d\alpha_s^{(k)}.$$

容易验证，它正交于所有 $\alpha_t^{(k)}$，于是等于0．由此也得(26)，即是 $\{\alpha_t^{(k)},k=1,2,\cdots\}$ 是 Φ_M 中的基。

现证明在 Φ_M 中存在闭序列 $\{\beta_t^{(k)}\}$。从而基的存在将得到证明。

在 $\mathscr{D}_A$ 中选取这样的函数序列 $\{f_k(x),k=1,2,\cdots\}$，在有界收敛下它的闭包含有全体连续函数。其次，设

$$\varphi_{n,k,r}(x)=\frac{1}{h_n}\int_r^{r+h_n}\mathbf{T}_s f_k(x)ds,\ h_n=2^{-n},$$

r 取遍所有非负有理数。

显然函数集 $\{\varphi_{n,k,r}\}$ 是可数的。用一个自然数标码记这些函数 $\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots\}$。

令

$$\beta_t^{(k)} = \varphi_k(x_t) - \varphi_k(x_0) - \int_0^t \mathbf{A}\varphi_k(x_s)ds.$$

设 β_t 是满足

$$\mathbf{E}_x\beta_t\beta_t^{(k)} = 0$$

的 M-泛函. 那末

$$\mathbf{E}_x\varphi_k(x_t)\beta_t = \mathbf{E}_x\beta_t \int_0^t \mathbf{A}\varphi_k(x_s)ds$$

$$= \mathbf{E}_x\int_0^t \beta_s\mathbf{A}\varphi_k(x_s)ds.$$

类似地,当 $s < t$ 时

$$\mathbf{E}_x\varphi_k(x_t)[\beta_t - \beta_s] = \mathbf{E}_x\int_s^t (\beta_u - \beta_s)\mathbf{A}\varphi_k(x_u)du.$$

于是,

$$|\mathbf{E}_x\varphi_k(x_t)[\beta_t - \beta_s]| \leqslant \|\mathbf{A}\varphi_k\|\sqrt{\mathbf{E}_x(\beta_t - \beta_s)^2}\,(t-s).$$

设 $s<t$, $s+h_n<t$. 这时,如果 $t-s$ 是有理数,那末

$$|\mathbf{E}_x\varphi_k(x_t)[\beta_{s+h_n} - \beta_s]| = |\mathbf{E}_x\mathbf{T}_{t-s-h_n}\varphi_k(x_s+h_n)$$

$$\times[\beta_{s+h_n} - \beta_s]| \leqslant \|\mathbf{A}\mathbf{T}_{t-s-h_n}\varphi_k\|\sqrt{\mathbf{E}_x(\beta_{s+h_n} - \beta_s)^2}\,h_n.$$

但 $\|\mathbf{T}_{t-s-h_n}\mathbf{A}\varphi\| \leqslant \|\mathbf{A}\varphi\|$. 于是,如果 $0<\varepsilon_n<h_n$ 和 $\dfrac{t-\varepsilon_n}{h_n}$ 是整数,那末

$$|\mathbf{E}_x\varphi_k(x_t)\beta_t| \leqslant |\mathbf{E}_x\varphi_k(x_t)\beta_{\varepsilon_n}|$$

$$+\sum_{\varepsilon_n+lh_n<t}|\mathbf{E}_x\varphi_k(x_t)[\beta_{\varepsilon_n+(l+1)h_n} - \beta_{\varepsilon_n+lh_n}]|$$

$$\leqslant \|\varphi_k\|\sqrt{\mathbf{E}_x\beta_{\varepsilon_n}^2} + \|\mathbf{A}\varphi_k\|$$

$$\times\sum_{\varepsilon_n+lh_n<t}\sqrt{\mathbf{E}_x[\beta_{\varepsilon_n+(l+1)h_n} - \beta_{\varepsilon_n+lh_n}]^2}\,h_n$$

因为 $\mathbf{E}_x[\beta_{s+l_n} - \beta_s]^2$ 有界且趋于零, 所以最后的表示式也趋于零. 因而证明了

$$\mathbf{E}_x\varphi_k(x_t)\beta_t = 0.$$

利用取极限,可证对任意 Borel 函数 $\varphi(x)$ 和对每个 x 有

$$\mathbf{E}_x\varphi(x_t)\beta_t = 0.$$

设 $t_1 < t_2 < \cdots < t_l$，那末当 $t_l \leqslant t$ 时，

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_x f_1(x_{t_1})\cdots f_l(x_{t_l})\beta_t &= \mathbf{E}_x f_1(x_{t_1})\cdots f_l(x_{t_l})\beta_{t_l} \\
&= \mathbf{E}_x f_1(x_{t_1})\cdots f_{l-1}(x_{t_{l-1}})\mathrm{T}_{t_l-t_{l-1}} f_l(x_{t_{l-1}})\beta_{t_{l-1}} \\
&\quad + \mathbf{E}_x f_1(x_{t_1})\cdots f_{l-1}(x_{t_{l-1}})\mathbf{E}_{x_{t_{l-1}}} f_l(x_{t_l-t_{l-1}})\beta_{t_l-t_{l-1}} \\
&= \mathbf{E}_x f_1(x_{t_1})\cdots f_{l-1}(x_{t_{l-1}})\mathbf{T}_{t_l-t_{l-1}} f_l(x_{t_{l-1}})\beta_{t_{l-1}}.
\end{aligned}$$

于是，

$$\mathbf{E}_x f_1(x_{t_1})\cdots f_l(x_{t_l})\beta_t = 0.$$

但 β_t 是 $\mathfrak{F}_t$-可测。因此由后一关系式就得 $M_x\beta_t^2 = 0$。因而被考虑的组的封闭性得证。就是说下面的定理是正确的。

定理 5 在 Φ_M 中存在基。

极大泛函．过程的秩

定义 M-泛函 α_t 称为极大的，如果由 α_t 从属于某一泛函 β_t 推得 β_t 也从属于 α_t。

引理 7 设 $\{\alpha_t^{(k)}, k = 1, 2, \cdots\}$ 是 Φ_M 中的基，而 $c_k \neq 0$ 和级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \alpha_t^{(k)} = \beta_t \tag{27}$$

在 Φ_M 中收敛。那末 β_t 是极大泛函。

证．设 β_t 依从于某一泛函 γ_t：

$$\beta_t = \int_0^t \frac{\partial\beta}{\partial\gamma}(x_s)d\gamma_s.$$

那末，利用表示式

$$\gamma_t = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \frac{\partial\gamma}{\partial\alpha^{(k)}}(x_s)d\alpha_s^{(k)},$$

求得

$$\beta_t = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \frac{\partial\beta}{\partial\gamma}(x_s)\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha^{(k)}}(x_s)d\alpha_s^{(k)}. \tag{28}$$

比较(27)和(28)，我们见到按测度 $d\langle\alpha^k, \alpha^k\rangle_s$ 几乎处处

$$\frac{\partial\beta}{\partial\gamma}(x_s)\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha^{(k)}}(x_s) = c_k.$$

因此，按测度 $d\langle\alpha^{(k)},\alpha^{(k)}\rangle_t$ 几乎处处

$$\frac{\partial\beta}{\partial\gamma}(x_t)\neq 0,\ \frac{\partial\gamma}{\partial\alpha^{(k)}}(x_s)=c_k\left(\frac{\partial\beta}{\partial\gamma}(x_s)\right)^{-1}.$$

于是

$$\gamma_t=\int_0^t\sum_{k=1}^{\infty}c_k\left(\frac{\partial\beta}{\partial\gamma}(x_s)\right)^{-1}d\alpha_s^{(k)}=\int_0^t\left(\frac{\partial\beta}{\partial\gamma}(x_s)\right)^{-1}d\beta_s.$$

因此，泛函 γ_t 从属于 β_t。引理得证。

注。在引理的证明过程中，确立了如下事实：当 β_t 是从属于泛函 γ_t 的极大泛函时

$$\frac{\partial\beta}{\partial\gamma}(x)=\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\beta}(x)\right)^{-1}.$$

显然，如果 β_t 是从属于 M-泛函 γ_t 的极大泛函，那末 γ_t 也是极大泛函，因为如果 γ_t 从属于泛函 δ_t，那末 β_t 也从属于 δ_t，就是说，δ_t 从属于 β_t 和 γ_t。因此极大泛函的从属关系就是等价关系。

我们来研究极大泛函类的丰富程度。

引理 8 如果 α_t 是某个 M-泛函，而 β_t 是极大泛函，那末 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ 关于 $\langle\beta,\beta\rangle_t$ 绝对连续。

证。设

$$\langle\alpha,\alpha\rangle_t=\varphi_t^{(1)}+\varphi_t^{(2)},\quad\langle\beta,\beta\rangle_t=\psi_t^{(1)}+\psi_t^{(2)},$$

其中 $\varphi_t^{(1)}$ 绝对连续，而 $\varphi_t^{(2)}$ 关于 $\langle\beta,\beta\rangle_t$ 奇异，$\psi_t^{(1)}$ 关于 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ 绝对连续，而 $\psi_t^{(2)}$ 奇异。由引理 5 得知这样的表示是可能的。

令 $\nu_t=\langle\alpha,\alpha\rangle_t+\langle\beta,\beta\rangle_t$。因为 $\varphi_t^{(1)}$ 和 $\psi_t^{(1)}$ 关于 ν_t 绝对连续，所以由于引理 4，存在非负 Borel 函数 $f_i(x)$，$g_i(x)$，使

$$\varphi_t^{(i)}=\int_0^t f_i(x_s)d\nu_s,\quad\psi_t^{(i)}=\int_0^t g_i(x_s)d\nu_s.$$

这时，按测度 $d\nu_t$ 几乎处处

$$f_2(x_t)[g_1(x_t)+g_2(x_t)]=0,\ g_2(x_t)[f_1(x_t)+f_2(x_t)]=0.$$

设

$$\tilde\beta_t=\beta_t+\int_0^t k(x_s)d\alpha_s,$$

其中 $k(x)=1$，如果 $f_2(x)>0$，$k(x)=0$，如果 $f_2(x)=0$。由于等式

$$\mathbf{E}_x\left(\int_0^t k(x_s)d\beta_s\right)^2=\mathbf{E}_x\int_0^t k(x_s)d\langle\beta,\beta\rangle_s$$
$$=\mathbf{E}_x\int_0^t k(x_s)[g_1(x_s)+g_2(x_s)]d\nu_s=0,$$

所以

$$\int_0^t k(x_s)d\bar{\beta}_s=\int_0^t k(x_s)d\beta_s+\int_0^t k(x_s)d\alpha_s=\int_0^t k(x_s)d\alpha_s,$$

于是我们有

$$\beta_t=\bar{\beta}_t-\int_0^t k(x_s)d\alpha_s=\bar{\beta}_t-\int_0^t k(x_s)d\bar{\beta}_s.$$

因此 β_t 从属于 $\bar{\beta}_t$。但同时 $\bar{\beta}_t$ 也从属于 β_t。于是，

$$\langle\bar{\beta},\bar{\beta}\rangle_t=\int_0^t\left(\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial\beta}(x_u)\right)^2d\langle\beta,\beta\rangle_u.$$

但 β_t 和 $\int_0^t k(x_s)d\alpha_t$ 正交。于是，

$$\langle\bar{\beta},\bar{\beta}\rangle_t=\langle\beta,\beta\rangle_t+\int_0^t k(x_s)d\langle\alpha,\alpha\rangle_s$$
$$=\langle\beta,\beta\rangle_t+\varphi_t^{(2)}.$$

因为 $\langle\bar{\beta},\bar{\beta}\rangle_t$ 关于 $\langle\beta,\beta\rangle_t$ 绝对连续，所以 $\varphi_t^{(2)}$ 也关于 $\langle\beta,\beta\rangle_t$ 绝对连续。于是，$\varphi_t^{(2)}=0$（因为按构造，$\varphi_t^{(2)}$ 关于 $\langle\beta,\beta\rangle_t$ 奇异）。因而确定了 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ 关于 $\langle\beta,\beta\rangle_t$ 绝对连续，引理得证。

推论 1 如果 α_t 和 β_t 都是极大泛函，那末 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ 和 $\langle\beta,\beta\rangle_t$ 相互绝对连续。

推论 2 设 α_t 是极大泛函，而 β_t 是 M-泛函，$\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ 关于 $\langle\beta,\beta\rangle_t$ 绝对连续。那末 β_t 也是极大泛函。

事实上，如果 β_t 从属于 γ_t，那末 $\langle\beta,\beta\rangle_t$ 关于 $\langle\gamma,\gamma\rangle_t$ 绝对连续，由于引理 8，关于 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ 也绝对连续。于是 $\langle\beta,\beta\rangle_t$ 和 $\langle\gamma,\gamma\rangle_t$ 相互绝对连续。

因为

$$\beta_t = \int_0^t \frac{\partial\beta}{\partial\gamma}(x_s)d\gamma_s, \quad \frac{d\langle\beta,\beta\rangle_t}{d\langle\gamma,\gamma\rangle_t} = \left(\frac{\partial\beta}{\partial\gamma}(x_t)\right)^2,$$

所以按 $d\langle\gamma,\gamma\rangle_t$, $\frac{\partial\beta}{\partial\gamma}(x_t)$ 几乎处处是正的。因此

$$\gamma_t = \int_0^t \left(\frac{\partial\beta}{\partial\gamma}(x_s)\right)^{-1} d\beta_s,$$

即是泛函 γ_t 从属于 β_t。β_t 的极大性得证。

定义 W-泛函 δ_t 称为标准型泛函，如果 $\delta_t = \langle\alpha,\alpha\rangle_t$，其中 α_t 是某个极大泛函。

由推论 1 和 2 得

定理 6 为使 M-泛函 α_t 是极大的充分必要条件是 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ 为标准型泛函。

注。如果 δ_t 是标准型泛函和 W-泛函 γ_t 有形式

$$\gamma_t = \int_t^t g(x_s)d\delta_s,$$

其中 $g(x_t)$ 按测度 $d\delta_t$ 几乎处处是正的，那末 γ_t 也是标准型泛函。

事实上，如果 $\delta_t = \langle\alpha,\alpha\rangle_t$，那末 $\gamma_t = \langle\beta,\beta\rangle_t$，其中

$$\beta_t = \int_0^t \sqrt{g(x_s)}\, d\alpha_s,$$

和由推论 2 得 β_t 是极大的。

定理 7 对所有 M-泛函 α_t，存在极大泛函 β_t，使 α_t 从属于 β_t。

证。设 $\bar\beta_t$ 是某个极大泛函。那末 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ 关于 $\langle\bar\beta,\bar\beta\rangle_t$ 绝对连续。于是，

$$\langle\alpha,\alpha\rangle_t = \int_0^t g(x_s)d\langle\bar\beta,\bar\beta\rangle_s.$$

设 $f(x)g(x) = 1$，如果 $g > 0$，$f = 0$，如果 $g = 0$。设 $\langle\bar\beta,\bar\beta\rangle_t = \gamma_t^{(1)} + \gamma_t^{(2)}$，其中 $\gamma_t^{(1)}$ 关于 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ 绝对连续，而 $\gamma_t^{(2)}$ 关于 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ 奇异。那末

$$\langle\bar\beta,\bar\beta\rangle_t = \int_0^t f(x_s)d\langle\alpha,\alpha\rangle_s + \gamma_t^{(2)};$$

$\gamma_t^{(2)}$ 是关于 $\langle\bar{\beta},\bar{\beta}\rangle_t$ 绝对连续且

$$\gamma_t^{(2)} = \int_0^t h(x_s)d\langle\bar{\beta},\bar{\beta}\rangle_s,$$

其中 $h(x)=0$,如果 $f>0$, $h(x)=1$,如果 $f=0$。现设

$$\beta_t = \alpha_t + \int_0^t h(x_s)d\bar{\beta}_s.$$

我们发现

$$\alpha_t = \int_0^t (1-h(x_s))d\alpha_s.$$

事实上，如果

$$\tilde{\alpha}_t = \int_0^t h(x_s)d\alpha_s,$$

那末由于 $hg=0$,所以

$$\langle\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}\rangle_t = \int_0^t h^2(x_s)g(x_s)d\langle\bar{\beta},\bar{\beta}\rangle_s = 0.$$

又因为 $(1-h(x))h(x)=0$,所以

$$\langle\beta,\beta\rangle_t = \langle\alpha,\alpha\rangle_t + \int_0^t h^2(x_s)d\langle\bar{\beta},\bar{\beta}\rangle_s$$

$$+ 2\int_0^t (1-h(x_s))h(x_s)d\langle\alpha,\bar{\beta}\rangle_s$$

$$= \int_0^t [g(x_s)+h(x_s)]d\langle\bar{\beta},\bar{\beta}\rangle_s.$$

因为 $g(x)+h(x)>0$,所以 $\langle\beta,\beta\rangle_t$ 关于 $\langle\bar{\beta},\bar{\beta}\rangle_t$ 绝对连续，也就是说，β_t 是极大型泛函。因为

$$\int_0^t (1-h(x_s))d\beta_s = \int_0^t (1-h(x_s))d\alpha_s$$

$$+ \int_0^t (1-h(x_s))h(x_s)d\bar{\beta}_s = \alpha_t.$$

所以泛函 α_t 从属于 β_t。

定理得证。

推论 存在极大泛函的完备系。

为将它构造出，首先需选出 M-泛函 $\alpha_t^{(k)}$ 的完备系，然后对每个 $\alpha_t^{(k)}$ 找出极大泛函 $\beta_t^{(k)}$,使 $\alpha_t^{(k)}$ 从属于 $\beta_t^{(k)}$。

我们称 M-泛函序列 $\alpha_t^{(1)},\cdots,\alpha_t^{(n)},\cdots$ 是满秩的，如果对每个 n,泛函 $\alpha_t^{(n)}$ 不从属于组 $\{\alpha_t^{(1)},\cdots,\alpha_t^{(n-1)}\}$。

我们来选取某个完备的满秩极大泛函序列 $\beta_t^{(1)},\cdots,\beta_t^{(n)},\cdots$. 考虑矩阵

$$D(x)=\left\|\begin{matrix}\frac{\partial\beta^{(1)}}{\partial\beta^{(1)}}(x)\cdots\frac{\partial\beta^{(1)}}{\partial\beta^{(k)}}(x)\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial\beta^{(i)}}{\partial\beta^{(1)}}(x)\cdots\frac{\partial\beta^{(i)}}{\partial\beta^{(k)}}(x)\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{matrix}\right\|=\left\|\frac{\partial\beta^{(i)}}{\partial\beta^{(k)}}(x)\right\|,\quad(29)$$

在序列 $\{\beta_t^{(k)}\}$ 中有多少个泛函,矩阵就有多少行和列. 如果 $\bar\beta_t^{(1)},\cdots,\bar\beta_t^{(n)},\cdots$ 是另外的某个完备满秩的极大泛函序列,而 $\bar D(x)$ 如同(29)一样是此序列构造出的矩阵,那末

$$D(x)=C(x)\bar D(x)C_1(x),\quad(30)$$

其中

$$C(x)=\left\|\frac{\partial\beta_i}{\partial\bar\beta_j}(x)\right\|,\quad C_1(x)=\left\|\frac{\partial\bar\beta_j}{\partial\beta_i}(x)\right\|.$$

同样地

$$\bar D(x)=C_1(x)D(x)C(x).\quad(31)$$

关系式(30)和(31)表明,矩阵 $D(x)$ 在点 x 的秩不依赖于序列 $\{\beta_t^{(k)}\}$ 的选取. 记这个秩为 $r(x)$ 并称为过程在点 x 的秩.

注意，函数

$$\frac{\partial\beta^{(i)}}{\partial\beta^{(k)}}(x_s),\ \frac{\partial\beta^{(i)}}{\partial\bar\beta^{(k)}}(x_s),\ \frac{\partial\bar\beta^{(i)}}{\partial\beta^{(k)}}(x_s),\ \frac{\partial\bar\beta^{i}}{\partial\bar\beta^{(k)}}(x_s)$$

被确定到按 $d\sigma_s$ 测度为零的集合，其中 σ_t 是任意标准型泛函. $r(x)$ 被确定到满足如下条件集合 A:对一切 t

$$\int_0^t\chi_A(x_s)d\sigma_s=0$$

(χ_A 是集合 A 的示性函数). 特别,在某个相似形式的集合上，秩可能是不确定的. 当过程没有异于0的 M-泛函时，将认为过程的秩等于 0.

时间的随机代换 如果 δ_t 是某个正的可加连续泛函，而 τ^t

由等式 $\delta_{\tau_t}=t$ 所定义，那末过程 $y_t=x_{\tau_t}$ 也是在G中的连续强 Марков 过程(见第 II 卷第二章 § 6)。

引理 9 如果 γ_t 是过程 x_t 的 W-泛函，那末 $\hat{\gamma}_t=\gamma_{\tau_t}$ 是过程 y_t 的 W-泛函。

证． 如果 $\mathscr{N}_t$ 是由变量 x_s，$s\leqslant t$，所生成的 σ-代数，而 $\hat{\mathscr{N}}_t$ 是由变量 y_s，$s\leqslant t$，所生成的 σ-代数，那末 $\hat{\mathscr{N}}_t\subset\mathscr{N}_{\tau_t}$ 而变量 γ_{τ_t} 是 $\mathscr{N}_{\tau_t}$-可测，即 $\hat{\gamma}_t$ 是 $\hat{\mathscr{N}}_t$-可测． γ_{τ_t} 的连续性显然。

设 $\hat{\theta}_h$ 是对过程 y_t 的位移算子。 因为变量 x_{τ_s} 和 τ_s 同时是 $\hat{\mathscr{N}}_s$-可测，所以算子 $\hat{\theta}_h$ 在它们上面有定义．易见

$$\hat{\theta}_h x_{\tau}=x_{\tau_{s+h}},\quad \hat{\theta}_h\tau_s=\tau_{s+h}-\tau_h.$$

现设 γ_t 形为

$$\gamma_t=\int_0^t g(x_u)du,\tag{32}$$

其中 g 是连续函数．那末

$$\gamma_{\tau_t}=\int_0^{\tau_t} g(x_u)du=\int_0^t g(x_{\tau_s})d\tau_s$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g(x_{\tau_{t_k}})(\tau_{t_k}-\tau_{t_{k-1}}),$$

其中 $t_k=\frac{k_t}{n}$. 因此

$$\hat{\theta}_h\gamma_{\tau_t}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g(x_{\tau_{t_k+h}})(\tau_{t_k+h}-\tau_{t_{k-1}+h})$$

$$=\int_h^{t+h} g(x_{\tau_s})d\tau_s=\int_{\tau_h}^{\tau_{t+h}} g(x_u)du$$

$$=\gamma_{\tau_{t+h}}-\gamma_{\tau_h}.$$

如果 g 是连续函数，那末我们对形为(32)的泛函 γ_t 建立公式

$$\hat{\theta}_h\gamma_{\tau_t}=\gamma_{\tau_{t+h}}-\gamma_{\tau_h}.\tag{33}$$

在函数 g 的有界收敛性下利用泛函(32)的收敛性，得证如果 γ_t 有

形式(32)，其中 g 是有界 Borel 函数时，那末(33)是正确的．但由于第 II 卷第二章 § 6 定理 1，所有 W-泛函是形为(32)的泛函的极限，其中 g 是有界 Borel 函数，因而对任意 W-泛函 γ_t，证明了(33)式．

我们来证明，$\hat{\gamma}_t$ 是连续非负可加泛函，为证实它是 W-泛函，我们注意

$$\mathbf{E}_x\hat{\gamma}_\infty \leqslant \mathbf{E}_x\gamma_\infty,$$

而

$$\sup_x \mathbf{E}_x\gamma_\infty \leqslant C(\sup_x \mathbf{E}_x\zeta + 1), \tag{34}$$

其中 ζ 是过程截断的时间（由 G 走出的首次时间）．由对于某个 C_1

$$\mathbf{E}_x\gamma_t \leqslant C_1(t+1)$$

得到不等式(34)．按假设，$\sup_x \mathbf{E}_x\zeta < \infty$．

引理得证．

引理 10 如果 α_t 是过程 x_t 的 M-泛函，那末 $\hat{\alpha}_t = \alpha_{\tau_t}$ 是过程 y_t 的 M-泛函，而且

$$\langle\hat{\alpha},\hat{\alpha}\rangle_t = \langle\alpha,\alpha\rangle_{\tau_t}. \tag{35}$$

证．$\hat{\mathscr{N}}$-可测性和连续性如上引理那样证明． 由第一章 § 1 定理 6 和引理 3 推得 $\hat{\alpha}_t$ 是鞅及式(35)．

因为 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ 是 W-泛函，所以由于引理 9，$\langle\alpha,\alpha\rangle_{\tau_t}$ 是 W-泛函．余下要验证 $\hat{\alpha}_t$ 是可加泛函，即

$$\hat{\theta}_h\hat{\alpha}_t = \hat{\alpha}_{t+h} - \hat{\alpha}_h, \tag{36}$$

其中 $\hat{\theta}_h$ 是对于过程 y_t 的位移算子．

先假设

$$\alpha_t = f(x_t) - f(x_0) - \int_0^t \mathbf{A}f(x_s)ds, \tag{37}$$

其中 f 是 $\mathscr{D}_\mathbf{A}$ 中某个泛函．那么

$$\alpha_{\tau_t} = f(x_{\tau_t}) - f(x_0) - \int_0^{\tau_t} \mathbf{A}f(x_s)ds.$$

因此，由于算子 $\hat{\theta}_h$ 的性质：$\hat{\theta}_h x_{\tau_t} = x_{\tau_{t+h}}$，还有适用于泛函

$$\gamma_t = \int_0^t \mathbf{A}f(x_s)ds$$

的公式(33)，所以

$$\hat{\theta}_h \alpha_{\tau_t} = f(x_{\tau_{t+h}}) - f(x_{\tau_h}) - \int_{\tau_h}^{\tau_{t+h}} \mathbf{A}f(x_s)ds.$$

因此，对形为(37)的泛函得证式(36). 余下只要注意形为(37)的泛函在 Φ_M 中完备就可以了.

引理得证.

推论 1 如果 α_t 和 β_t 是过程 x_t 的 M-泛函，

$$\hat{\alpha}_t = \alpha_{\tau_t}, \quad \hat{\beta}_t = \beta_{\tau_t},$$

那末

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}(x) = \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \hat{\beta}}(x). \tag{38}$$

事实上，如果 $\dfrac{\partial \alpha}{\partial \beta}(x) = g(x)$，那末

$$\langle \alpha, \alpha \rangle_t = \int_0^t g(x_s) d\langle \beta, \beta \rangle_s.$$

因此

$$\langle \hat{\alpha}, \hat{\alpha} \rangle_t = \int_0^{\tau_t} g(x_s) d\langle \beta, \beta \rangle_s = \int_0^t g(x_{\tau_s}) d\langle \beta, \beta \rangle_{\tau_s}$$

$$= \int_0^t g(y_s) d\langle \hat{\beta}, \hat{\beta} \rangle_s,$$

即是

$$\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \hat{\beta}}(y_s) = g(y_s).$$

推论 2 在时间的随机代换时，W-泛函变换为 W-泛函，而 M-泛函变换为 M-泛函，一个 M-泛函对另一个 M-泛函的导数不改变，正交变换为正交，极大泛函变换为极大泛函，完备系变换为完备系，基变换为基.

现设 δ_t 是使所有标准泛函对于它是绝对连续的正泛函.（如果存在正的标准泛函，那末它可取作 δ_t，在相反情形可设 $\delta_t = t + \gamma_t$，其中 γ_t 是某个标准泛函.）如果利用泛函作随机代换，那

末所有标准泛函 γ_t 变换为关于 $\delta_t = \delta_{\tau_t} = t$ 绝对连续的泛函 $\hat{\gamma}_t$；即是，由此可见所有标准泛函关于 Lebesgue 测度绝对连续，于是对所有过程 y_t 的 M-泛函 $\hat{\alpha}_t$，存在函数 $g_{\hat{\alpha}}(x)$ 使

$$\langle \hat{\alpha}, \hat{\alpha} \rangle_t = \int_0^t g_{\hat{\alpha}}(y_s) ds. \tag{39}$$

在这样的时间随机代换后得到的过程 y_t 将称为有绝对连续标准泛函的过程。

定理 8 设 y_t 是有绝对连续标准泛函的过程。如果 $\varphi_1, \cdots, \varphi_m \in \mathscr{D}\tilde{\mathbf{A}}$，其中 $\tilde{\mathbf{A}}$ 是过程 y_t 的拟生成算子和 $F(t_1, \cdots, t_m)$ 是二次连续可微函数，那末 $F(\varphi_1, \cdots, \varphi_m) \in \mathscr{D}\mathbf{A}^*$ 和

$$\hat{\mathbf{A}} F(\varphi_1, \cdots, \varphi_m) = \sum_1^m \frac{\partial F}{\partial t_k}(\varphi_1, \cdots, \varphi_m) \tilde{\mathbf{A}} \varphi_k$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_1^m \frac{\partial^2 F}{\partial t_i \partial t_k}(\varphi_1, \cdots, \varphi_m) b_{\varphi_i, \varphi_k}, \tag{40}$$

其中 $b_{\varphi_i, \varphi_k}(x)$ 由等式

$$\langle \alpha^i, \alpha^k \rangle_t = \int_0^t b_{\varphi_i, \varphi_k}(y_s) ds, \tag{41}$$

$$\alpha_t^i = \varphi_i(y_t) - \varphi_i(x_0) - \int_0^t \hat{A} \varphi_i(x_s) ds, \tag{42}$$

所定义。

证．首先注意，由 $\langle \alpha^i, \alpha^k \rangle_t$ 关于 $\langle \alpha^i, \alpha^i \rangle_t$ 的绝对连续性和公式(39)得函数 b_{φ_i, φ_k} 的存在性． 应用伊藤公式(第一章 § 3 定理 1) 于函数

$$F(\varphi_1(y_t), \cdots, \varphi_m(y_t)) = F\Big(\varphi_1(y) + \alpha_t + \int_0^t \hat{A} \varphi_1(y_s) ds,$$

$$\cdots, \varphi_m(y_0) + \alpha_t^m + \int_0^t \hat{A} \varphi_m(y_s) ds \Big),$$

求得

$$F(\varphi_1(y_t), \cdots, \varphi_m(y_t)) = F(\varphi_1(y_0), \cdots, \varphi_m(y_0))$$

$$+ \int_0^t \sum_{k=1}^m F'_{t_k}(\varphi_1(y_s), \cdots, \varphi_m(y_s)) [d\alpha_s^k + \dot{\mathbf{A}} \varphi_k(y_s) ds]$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \sum_{k,j=1}^{m} F''_{t_k t_j}(\varphi_1(y_s),\cdots,\varphi_m(y_s))\,d\langle\alpha^k,\alpha^j\rangle_s$$

$$-F(\varphi_1(y_0),\cdots,\varphi_m(y_0))$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t F'_{t_k}(\varphi_1(y_s),\cdots,\varphi_m(y_s))\,d\alpha_s^k$$

$$+\int_0^t\left[\sum_{k=1}^{m} F'_{t_k}(\varphi_1(y_s),\cdots,\varphi_m(y_s))\hat{\mathbf{A}}\varphi_k(y_s)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m} F''_{t_k,t_j}(\varphi_1(y_s),\cdots,\varphi_m(y_s))b_{\varphi_j,\varphi_k}(y_s)\right]ds.$$

两边取数学期望得证定理的正确性。

假设如下条件成立：

(A) 对每个点 $x\in G$ 可找到邻域 G_1，使在 G_1 的闭包中可引入属于 $\mathscr{D}\mathbf{A}$ 的坐标 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$.

我们来考虑过程 $\tilde{y}_t$，它是 y_t 被从域 G_1 走出的首次时间 ζ_1 截断而得到的过程. 对任意二次连续可微函数 $F(t_1,\cdots,t_m)$ 和时刻 $\tau\leqslant\zeta_1$ 由于伊藤公式,我们有

$$F(\varphi_1(y_\tau),\cdots,\varphi_m(y_\tau))=F(\varphi_1(y_0),\cdots,\varphi_m(y_0))$$

$$+\int_0^\tau\sum_{k=1}^{m}F'_{t_k}(\varphi_1(y_s),\cdots,\varphi_m(y_s))\,d\alpha_s^k$$

$$+\int_0^\tau\left[\sum_{k=1}^{m}F'_{t_k}(\varphi_1(y_s),\cdots,\varphi_m(y_s))\tilde{A}\varphi_k(y_s)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m}F''_{t_k t_j}(\varphi_1(y_s),\cdots,\varphi_m(y_s))b_{\varphi_j,\varphi_k}(y_s)\right]ds,$$

也就是，

$$\mathbf{E}_yF(\varphi_1(y_\tau),\cdots,\varphi_m(y_\tau))=F(\varphi_1(y),\cdots,\varphi_m(y))$$

$$+\mathbf{E}_y\int_0^\tau L[F(\varphi_1,\cdots,\varphi_m)](y_s)\,ds,\tag{43}$$

其中

$$L[F(\varphi_1,\cdots,\varphi_m)](y)=\sum_{k=1}^{m}F'_{i_k}(\varphi_1(y),\cdots\varphi_m(y))\hat{a}_k(y),$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m}F'_{i_k i_j}(\varphi_1(y),\cdots,\varphi_m(y))\hat{b}_{k,j}(y),$$

$$\hat{a}_k(y)=\mathbf{A}\varphi_k(y),\quad \hat{b}_{kj}(y)=b_{\varphi_k,\varphi_j}(y).$$

考虑由关系 $x\to\{\varphi_1(x),\cdots,\varphi_m(x)\}$ 所定义的在 $G_1\subset\mathscr{R}^m$ 中的映象 $U(x)$. 在此映象下集合 G_1 双方单值和连续地映为 $\mathscr{R}^m$ 中某个区域 $\hat{G}_1$,于是

$$\hat{x}_t=U(y_t)$$

是 Марков 过程,而且在截断时刻 ζ, $\hat{x}_{\zeta-0}$ 属于 $\hat{G}_1$ 的边界.

由(43)得知对在 $\hat{G}_1$ 中所有二次连续可微函数 $F(x)$ 和 Марков 时间 $\tau\leqslant\zeta$, 关系式

$$\hat{\mathbf{E}}_x F(\hat{x}_\tau)=F(x)+\hat{\mathbf{E}}_x\int_0^\tau \hat{L}[F](\hat{x}_s)ds, \tag{44}$$

其中 $\hat{\mathbf{E}}_x$ 是对过程 $\hat{x}_t$ 的数学期望,

$$\hat{L}[F](x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)\frac{\partial F}{\partial x^i}(x)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}b_{i,j}(x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^i\partial x^j}(x), \tag{45}$$

$$a_i(U(x))=\hat{a}_i(x),\quad b_{ij}(U(x))=\hat{b}_{ij}(x),$$

$x^1,\cdots,x^m$ 是 x 在 $\mathscr{R}^m$ 中的坐标。

公式(44)和(45)表明, 对过程 $\hat{x}_t$ 来说拟特征算子定义在全体二次连续可微函数上而且是二阶可微算子, 即是有如在扩散过程时同样的形式.

我们来证明, 过程 $\hat{x}_t$ 满足某个随机微分方程. 为此我们先注意,对于过程 y_t 和 $\hat{x}_t$, W-泛函和 M-泛函类相同, 因为由它们所生成的 σ-代数相同。

由关系式(42)求出

$$\hat{x}_t^i - \hat{x}_0^i = \int_0^t a_i(\hat{x}_s)ds + \hat{\alpha}_t^i, \tag{46}$$

其中 $\hat{\alpha}_t^i$ 是过程 $\hat{x}_t$ 的某个 M-泛函（它由泛函 x_t^i 用自然方式得到），$\hat{x}_t^i$ 是 $\hat{x}_t$ 的第 i 个坐标。

引理11 如果条件（A）成立，那末由等式(46)定义的 $\hat{\alpha}_t^i$，$i=1,\cdots,m$，构成 M-泛函的完备系。

证。设 β_t 是过程 $\hat{x}_t$ 的 M-泛函，它正交于所有泛函 $\hat{\alpha}_t^i$。那末对全体二次连续可微函数 $F(x)$，由等式

$$F(\hat{x}_t) = F(\hat{x}_0) + \int_0^t \hat{L}[F](x_s)ds + \sum_1^m \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x^i}(x_s)d\hat{\alpha}_s$$

得出

$$\hat{\mathbf{E}}_x\beta_t F(\hat{x}_t) = \hat{\mathbf{E}}_x\beta_t \int_0^t \hat{L}[F](x_s)ds.$$

如在证明定理 5 时一样，由此关系式可得，对所有二次连续可微函数 $F(x)$

$$\hat{\mathbf{E}}_x\beta_t F(\hat{x}_t) = 0,$$

于是，对所有连续函数 $F(x)$ 也成立。由此(正如在定理 5 一样)，$\mathbf{E}_x\beta_t^2 = 0$。

引理得证.

推论 过程 $\hat{x}_t$ 的秩不超过 m。

这由含有 m 个元素的 M-泛函的完备系的存在得到.

定理9 如果条件（A）成立，那末存在关于 σ-代数流 $\mathcal{N}_t$ 的 m-维 Wiener 过程，向量函数 $a(x)$ 和算子函数 $B(x)$ 使对 $t<\zeta$

$$\hat{x}_t - \hat{x}_0 = \int_0^t a(x_s)ds + \int_0^t B(x_s)dw(s). \tag{47}$$

证。由等式(46)出发。设 M-泛函 β_t^i 借正交泛函 $\hat{\alpha}_t^i$ 构造而得：

$$\beta_t^1 = \hat{\alpha}_t^1,\ \beta_t^k = \hat{\alpha}_t^k - \sum_{j=1}^{k-1}\int_0^t \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial \beta^j}(x_s)d\beta_s^j,$$
$$k = 2,\cdots,m,$$

而 $\tilde{b}_k(x)$ 由等式

$$\langle\beta^k,\beta^k\rangle_t = \int_0^t \tilde{b}_k(x_s)ds$$

所定义和

$$\mathbf{E}_k = \{x:\tilde{b}_k(x) > 0\}.$$

最后设,$\tilde{w}_1(t),\cdots,\tilde{w}_m(t)$ 是独立于 β_t^j 和相互独立的一维 Wiener 过程。

令

$$w^k(t) = \int_0^t (1-\chi_{E_k}(x_s))d\tilde{w}_k(s) + \int_0^t \chi_{E_k}(x_s)\frac{1}{\sqrt{\tilde{b}_k(x_s)}}d\beta_s^k.$$

易见 $w^k(t)$ 是鞅,而且

$$\langle w^k,w^k\rangle_t = \int_0^t (1-\chi_{E_k}(x_s))^2 ds + \int_0^t \chi_{E_k}(s)\frac{1}{\tilde{b}(x_s)}d\langle\beta^k,\beta^k\rangle_s = t,$$

当 $k\neq j$ 时 $\langle w^k,w^k\rangle_t = 0$, 因为 $\tilde{w}_k,\tilde{w}_j,\beta^k$ 和 β^j 两两正交. 因此由于 § 1 定理 1 推论 2,带坐标 $w^1(t),\cdots,w^m(t)$ 的 m-维过程 $w(t)$ 是 m-维 Wiener 过程。

其次注意到

$$\beta_t^k = \int_0^t \sqrt{\tilde{b}_k(x_s)}\,dw^k(s).$$

于是,

$$\hat{\alpha}_t^k = \int_0^t \sqrt{\tilde{b}_k(x_s)}\,dw^k(s) + \sum_{j=1}^{k-1}\int_0^t \frac{\partial\hat{\alpha}^k}{\partial\beta^j}(x_s)\sqrt{\tilde{b}_j(x_s)}\,dw^j(s).$$

因此,如果算子矩阵 B 在 $\mathscr{R}^m$ 的自然基中有形式 $B(x)=\|\sigma_{ij}(x)\|$, 其中 $\sigma_{ij}(x) = \frac{\partial\hat{\alpha}^i}{\partial\beta^j}(x)\sqrt{\tilde{b}_j(x)}$, 当 $i\leqslant j$ 和 $\sigma_{ij}=0$, 当 $i>j$,

等式(47)成立.

定理得证.

于是在定理 9 的条件中，过程在某些坐标局部地与随机微分方程的解相等，即过程是(局部)扩散过程. 所引起的问题是什么时候能利用时间的随机代换和空间的单值连续映象将给出的过程(局部地)变换为扩散过程. 为给出这问题的答案，我们引人一个有用的概念.

设 x_t 是在区域 $G\subset\mathscr{R}^m$ 的某个 Марков 过程，它满足在本节开始时所列举的条件. 定义在 G 上满足下面条件的有界连续函数 f 的集合记为 $\mathscr{D}$: $f\in\mathscr{D}$，如果存在 $\tilde{w}$-泛函 γ_t 和 M-泛函 α_t,使得

$$f(x_t)-f(x_0)=\gamma_t+\alpha_t. \tag{48}$$

正如在上面已经证明的,对 $f\in\mathscr{D}_A$,如果

$$\gamma_t=\int_0^t Af(x_s)ds,$$

那末表示式(48)成立，因此 $\mathscr{D}\supset\mathscr{D}_A$. 设过程 y_t 是由 x_t 用时间的随机代换得到的过程: $y_t=x_{\tau_t}$. 那末对 $f\in\mathscr{D}$ 有

$$f(y_t)-f(y_0)=f(x_{\tau_t})-f(x_0)=\gamma_{\tau_t}+\alpha_{\tau_t}.$$

但由引理 9 和引理 10，γ_{τ_t} 和 α_{τ_t} 分别是过程 y_t 的 $\widetilde{W}$-泛函和 M-泛函. 因此,在时间的随机代换下类 $\mathscr{D}$ 变换为自身.

定理 10 如果 x_t 是 Марков 过程，使得在区域 G 存在属于 $\mathscr{D}$ 的坐标 $f_1,\cdots,f_m$,那末存在时间的随机代换 τ_t,使过程 $\xi_t=(f_1(x_{\tau_t}),\cdots,f_m(x_{\tau_t}))$ 是域 G_1 的扩散过程，其中 G_1 是在映象 $x\to(f_1(x),\cdots,f_m(x))$ 下 G 的象.

证. 不失一般性,可认为 $f_i(x)=x^i$ 是点 x 的坐标.

设

$$x_t^i-x_0^i=\gamma_t^i+\alpha_t^i.$$

作时间随机代换 τ_t,其中 τ_t 是方程 $\delta_{\tau_t}=t$ 的解，而 δ_t 是 W-泛函,对于一切 i，γ_t^i 和 $\langle\alpha^i,\alpha^i\rangle_t$ 关于它绝对连续. 如果 $\gamma_t^i=\gamma_t^{i+}-\gamma_t^{i-}$，$\gamma_t^{i\pm}$ 是 W-泛函,那末可取

$$\delta_t = t + \sum_{i=1}^{m} (\gamma_t^{i+} + \gamma_t^{i-} + \langle \alpha^i, \alpha^i \rangle_t).$$

设

$$\hat{x}_t^i = x_{\tau_t}^i, \quad \hat{\gamma}_t^i = \gamma_{\tau_t}^i, \quad \hat{\alpha}_t^i = \alpha_{\tau_t}^i.$$

那末

$$\hat{x}_t^i - \hat{x}_0^i = \hat{\gamma}_t^i + \hat{\alpha}_t^i,$$

以及 $\hat{\gamma}_t^i$ 和 $\langle \hat{\alpha}^i, \hat{\alpha}^i \rangle_t$ 关于 t 绝对连续。于是

$$\hat{x}_t^i - \hat{x}_0^i = \int_0^t a^i(\hat{x}_s) ds + \hat{\alpha}_t^i, \tag{49}$$

其中 $a^i(x)$ 是某个 Borel 函数。 利用此表示式，正如定理 9 一样，可以证明存在 m-维 Wiener 过程，使对某个 $a(x)$ 和 $B(x)$ 方程(47)成立。

定理得证。

在 $\mathscr{R}^1$ 中的连续过程 $\mathscr{R}^1$ 是其序与这空间的拓扑相一致的有序空间。这个事实使得能在更为弱得多的假设下研究 $\mathscr{R}^1$ 中的连续 Марксв 过程的构造。 定义在某个区间 $\Delta \subset \mathscr{R}^1$ 中的连续过程 x_t 被加上的唯一条件是强 Марков 性。

设 $x, y \in \Delta$，如果

$$\mathbf{P}_x\{\tau_y < \infty\} > 0,$$

则称点 y 是从点 x 可到达的，其中 τ_y 是过程命中点 y 的首次时间(它是 Марков 时间)。设 Δ_x 是点 x 可到达的点 y 的集合。易见 Δ_x 是区间(开的，半开或闭的)。这由如下事实得到：在由点 x 到点 y 的路程上过程通过了位于 x 和 y 之间的所有点。如果 $z \in \Delta_x$，那末 $\Delta_z \subset \Delta_x$。

我们称点 x 为正则的。如果：1) x 是 Δ_x 的内点，2) 存在 $x_1 < x < x_2$，$x_1, x_2 \in \Delta_x$，使 $x \in \Delta_{x_1}$，$x \in \Delta_{x_2}$。

如果条件 2) 成立，那末区间 $[x_1, x_2]$ 的每个点可由任何其它点所到达，事实上，由 x_1 可到达 x 意味着由区间 $[x_1, x]$ 的所有点可到达 x。由区间 $[x, x_2]$ 的所有点可到达 x 也完全一样，即是由 $[x_1, x_2]$ 任意点可到达 x 和由 x 可到达 $[x_1, x_2]$ 的任意点。

设

$$\alpha_x = \inf[y: y \in \Delta_x, \ \mathbf{P}_y\{\tau_x < \infty\} > 0],$$
$$\beta_x = \sup[y: y \in \Delta_x, \ \mathbf{P}_y\{\tau_x < \infty\} > 0].$$

当 x 是正则点时区间 (α_x, β_x) 不空且包含 x. 它称为过程包含点 x 的正则区间. 在本段主要注意力在于研究正则区间的过程. 先考察非正则性的可能有的特征.

如果 x 是非正则点,那末至少下面的条件之一应当成立:

(I) $\forall y < x, \ \mathbf{P}_x\{\tau_y < \infty\} = 0,$

(II) $\forall y > x, \ \mathbf{P}_x\{\tau_y < \infty\} = 0,$

(III) $\forall y < x, \ \mathbf{P}_y\{\tau_x < \infty\} = 0,$

(IV) $\forall y < x, \ \mathbf{P}_y\{\tau_x < \infty\} = 0.$

当 (I) 和 (II) 成立时, x 是吸收点.

假设 (I) 成立, 而 (II) 不成立. 这时, 如果 τ^ε 是由邻域 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ 走出的首次时间,那末 $\tau^\varepsilon = \tau_{x+\varepsilon}$, 且按过程的特征算子的定义,我们有

$$\mathfrak{U}f(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{M_x \tau^\varepsilon}. \tag{50}$$

如果 (II) 成立,而 (I) 不成立, 那末特征算子按公式

$$\mathfrak{U}f(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(x-\varepsilon) - f(x)}{M_x \tau^\varepsilon} \tag{51}$$

计算. 注意在两个公式中分母可表为按照过程构造出的某个单调函数的增量.

设 δ 是满足 $\mathbf{E}_x \tau_{x+\delta} < 0$ 的. 对 $y \in [x, x+\delta]$,令

$$g(y) = \mathbf{E}_y \tau_{x+\delta}.$$

因为当 $y_1 > y_2$ 时,以概率 $\mathbf{P}_{y_1} = 1$ 有

$$\tau_{x+\delta} = \tau_{y_2} + \theta_{\tau_{y_2}} \tau_{x+\delta}.$$

所以两边取数学期望和顾及到过程的强 Марков 性,我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{y_1} \tau_{x+\delta} &= \mathbf{E}_{y_1} \tau_{y_2} + \mathbf{E}_{y_1} \mathbf{E}(\theta_{\tau_{y_2}} \tau_{x+\delta} \mid \mathcal{N}^{\tau_{y_2}}) \\ &= \mathbf{E}_{y_1} \tau_{y_2} + \mathbf{E}_{y_1} \mathbf{E}_{x(\tau_{y_2})} \tau_{x+\delta} \\ &= \mathbf{E}_{y_1} \tau_{y_2} + \mathbf{E}_{y_2} \tau_{x+\delta};\end{aligned}$$

或

$$g(y_1) = \mathbf{E}_{y_1}\tau_{y_2} + g(y_2).$$

由此得等式

$$\mathbf{E}_x\tau^\varepsilon = g(x) - g(x+\varepsilon).$$

如令 $g(y) = \mathbf{E}_y\tau_{x-\delta}$，在式(51)的情形中也有类似的等式：

$$\mathbf{E}_x\tau^\varepsilon = g(x) - g(x-\varepsilon).$$

因此，在第一种情形

$$\mathfrak{U}f(x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{g(x) - g(x+\varepsilon)},$$

在第二种情形

$$\mathfrak{U}f(x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{f(x-\varepsilon) - f(x)}{g(x) - g(x-\varepsilon)},$$

和在条件（I）或（II）之一成立的非正则点，特征算子的计算归结为按某一单调函数的单边导数的计算。

设（I）和（II）都不成立。如果（III）成立，x 是正则区间的左边界且由此区间可到达 x。

如果（IV）成立，但（III）不成立，那末 x 是正则区间的右边界。在正则区间边界上过程的状态特性在下面进行研究。

最后，设（III）和（IV）成立，而（I）和（II）不成立。其次设 x 不是吸收点，那末对所有 $t > 0$

$$\mathbf{P}_x\{x_t \in (-\infty, x)\} \text{ 和 } \mathbf{P}_x\{x_t \in (x, \infty)\}$$

不依赖于 t：在时间 $t=0$ 后过程应当离开点 x 和落到集合$(-\infty, x)$或(x, ∞)中的一个，而它不可能由这些集合走出，因为由这些集合不可到达 x。

设

$$p = \mathbf{P}_x\{\forall t > 0, x_t > x\}, \quad q = \mathbf{P}_x\{\forall t > 0, x_t < x\}.$$

对某个 δ 引入函数

$$g_1(x) = \frac{1}{p}\mathbf{E}_x\tau^\delta\chi_{[x,\infty)}(x_{\tau^\delta}),$$

$$g_2(x)=\frac{1}{q}\mathbf{E}_x\tau^\delta\chi_{(-\infty,x)}(x_{\tau^\delta}).$$

$g_1(x)$ 在区间 $(x, x+\delta)$ 上递减，而 $g_2(x)$ 在区间 $[x-\delta, x]$ 上递增. 在点 x 的特征算子有形式

$$\mathfrak{U}f(x)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0,\varepsilon_1\downarrow 0}\frac{p[f(x+\varepsilon)-f(x)]+q[f(x-\varepsilon_1)-f(x)]}{p[g_1(x)-g_1(x+\varepsilon)]+q[g_2(x)-g_2(x-\varepsilon)]}. \tag{52}$$

利用条件 (I)—(IV)，可给出点的分类：如果条件 (III)[(IV)] 成立，点是在左[右]方不可到达，如果条件 (I)[(II)] 成立，点是向左[右]方通不过的点.

在右方和在右方不可到达的点简称为不可到达点.

现来考虑关于正则区间的非正则点的可能位置：

1）这样的点可以是正则区间的边界，

2）它可以是正则区间的边界的极限，

3）它可以是非正则点集合的内点.

如果非正则点是正则区间的右端点或是这样的点的递增序列的极限，那末它向左方通不过. 如果非正则点是正则区间的左端点或左端点的递减序列的极限，那末它向右方通不过. 假设 G 是非正则点的某个不包含吸收点的区间. 设 E 是使 Δ_x 包含 x 作为内点和 $x\in G$ 的那些 x 的集合. 如果 $x_1\in E$，$x_2\in E$，那末 $x_2\notin\Delta_{x_1}$，因为在相反情形，x_2 和 x_1 之间存在点 z，由它到达 x_2，且由 x_2 可到达它，也就是说，z 和 x 之间的区间是由正则点组成的. 所给出的集合 E 仅由孤立点组成，于是 $G-E$ 由不超过可列个数的区间组成.

现在这样的区间之一 G_1 考虑过程. 设 $x\in G_1$，点 x 是区间 Δ_x 的左或右端点. 在第一种情形称 x 的左边的，在第二种情形称为右边的. 如果 x 是左边的且 $y\in\Delta_x$，那末 y 也是左边的. 这由下面的事实得到：如果 $x<z<y$ 和 z 是由 y 可到达的，而 y 是由 x 可到达的，那末 (z,y) 包含正则点. 类似地，如果 x 是右边的，那末 Δ_x 也是由右边的点组成. 其次，如果 x 是左边的，

那末区间 Δ_x 的右端点 $\bar{x}$ 也是左边的，因为在相反情形 $\Delta_x \cap \Delta_{\bar{x}}$ 是不空的，且此交集中的点应当既是左边的和又是右边的. 完全同样地，如果 x 是右边的，区间 Δ_x 的左端点就不可能是左边的. 同样的见解表明，对左边的点的全体的集合 B 来说，$\sup B$ 也是左边的点，而对右边点的集合 C，$\inf C$ 是右边的. 于是所有左边的点位于任意右边的右边，和下列可能之一成立：1) G_1 的所有点是左边的，2) G_1 的所有点是右边的，3) 存在这样的点 $\bar{x} \in G_1$，使 $G_1 \cap (-\infty, \bar{x})$ 的点是右边的，而 $(\bar{x}, \infty) \cap G_1$ 的点是左边的.

现来考察其中所有点是左边的点的区间上过程的性质.

设 G_1 是这样的区间. G_1 中的不可到达点记为 E_1. 如果 x 是这样的点，那末，因为 Δ_x 不空，所以可找到 $\delta > 0$，使在区间 $(x, x+\delta)$ 中没有不可到达的点. 于是，E_1 不超过可列个点和 $G_1 \backslash E$ 是一些区间之和，这些区间中的每一个均不包含不可到达点. 设 U 是这些区间中的一个. 因为对所有 $t > 0$，$\mathbf{P}_x\{x_t > x\} = 1$，所以在由 U 走出时，过程是单调的. 如果 U 的右端点是不可到达点，那末在任何时候过程也不能由 U 走出；它可以在 U 上考虑和它是以概率为 1 的单调不减过程. 这过程的一般形式在下定理中写出.

定理 11 设 U 是 $\mathscr{R}^1$ 中某个区间，在其上定义连续不减的强 Марков 过程. 如果这区间不包含吸收点，那末存在连续严格递增函数 $\lambda(t)$，它定义在 $\mathscr{R}^1$ 上且取值于 U，使得对所有 $x \in U$，

$$\mathbf{P}_x\{x_t = \lambda(t + s_x)\} = 1,$$

其中 s_x 是方程 $\lambda(s_x) = x$ 的解.

证. 设 $x, y \in U$，$x < y$. 因为在 U 中不存在不可到达点，所以由 x 可到达 y. 事实上，如果 $\bar{x} = \inf[x: \mathbf{P}_x\{\tau_y < \infty\} > 0]$，那末 x 应当与区间 U 的左端点重合，因为如果 $\bar{x}$ 是由 $z < \bar{x}$ 可到达的，那末 y 也由 z 可到达的. 其次，因为当 $z \in (x, y)$ 时由 (x, y) 走出的首次时间 τ 以概率 $\mathbf{P}_z = 1$ 与 τ_y 相等且

$$\mathbf{P}_z\{\tau_y < a\} \geqslant \mathbf{P}_x\{\tau_y < a\} = \lambda > 0,$$

那末，对所有 $z \in (x, y)$

$$\mathbf{P}_x\{x_a < y\} \leqslant 1-\lambda,\ \mathbf{P}_x\{x_{ka} < y\} \leqslant (1-\lambda)^k,$$
$$\mathbf{P}_x\{\tau_y > ka\} \leqslant (1-\lambda)^k.$$
因此对所有 $m>0$, $\mathbf{E}_x\tau_y^m < \infty$。

我们来验证 $D\tau_y = 0$,即是 τ_y 是非随机量. 在 $[x,y]$ 上考虑随机过程 τ_z, $z\in[x,y]$。显然,τ_z 是不减过程. 因为 x_t 是没有常值的区间的不减连续函数,所以,τ_z 也是按 z 连续的过程(因为 τ_z 是 x_t 的反函数: $x_{\tau_z}=z$)。最后,注意 τ_z 是有独立增量的过程. 如果 $\mathfrak{F}_z$ 是由变量 τ_{z_1}, $z_1\leqslant z$,所生成的 σ-代数,那末因为当 $z_1<z_2$ 时 $\mathfrak{F}_z\subset\mathcal{N}_{\tau_z}$,对 $z_1<z_2$,我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\tau_{z_2}-\tau_{z_1}<\alpha|\mathfrak{F}_{z_1}\} &= \mathbf{E}(\mathbf{P}\{\tau_{z_2}-\tau_{z_1}<\alpha|\mathcal{N}^{\tau_{z_1}}\}|\mathfrak{F}_{z_1})\\ &= \mathbf{E}\mathbf{P}\{\theta_{\tau_{z_1}}\tau_{z_1}<\alpha|\mathcal{N}^{\tau_{z_1}}\}|\mathfrak{F}_{z_1})\\ &= \mathbf{E}(\mathbf{P}_{z_1}\{\tau_{z_2}<\alpha\}|\mathfrak{F}_{z_1}) = \mathbf{P}_{z_1}\{\mathfrak{F}_{z_2}<\alpha\},\end{aligned}$$

即是 $\tau_{z_2}-\tau_{z_1}$ 的分布独立于 $\mathfrak{F}_{z_1}$。因为过程 τ_z 是连续的,所以它应当是 Gauss 过程,而由关系式 $\tau_z>0$ 得 $D\tau_z=0$。

设当 $x<y$ 时

$$\Phi(x,y)=\mathbf{E}_x\tau_y.$$

那末

$$\mathbf{P}_x\{\tau_y=\Phi(x,y)\}=1.$$

当 $x<y<z$ 时由等式

$$\Phi(x,y)=\mathbf{E}_x[\tau_z+\theta_{\tau_z}\tau_y]=\Phi(x,z)+\Phi(z,y)$$

是正确的,得知存在函数 $\Phi(x)$ 使

$$\Phi(x,y)=\Phi(x)-\Phi(y),$$

而且 $\Phi(x)$ 是U上严格单调的连续函数(例如,当 z 是U的固定点时,$\Phi(x)$ 可取为函数:当 $x>z$ 时等于 $\Phi(z,x)$,当 $x<z$ 时等于 $\Phi(x,z)$)。设 $\lambda(t)$ 是Φ的反函数: 对 $x\in U$, $\lambda(\Phi(x))=x$。那末,因为

$$\mathbf{P}_x\{\tau_y=\Phi(y)-\Phi(x)\}=1,$$

所以

$$\mathbf{P}_x\{y=\lambda(\tau_y+\Phi(x))\}=1,$$
$$\mathbf{P}_x\{x_{\tau_y}=\lambda(\tau_y+\Phi(x))\}=1.$$

利用 x_t, τ_x 和 λ 的连续性，求得

$$\mathbf{P}_x\{x_{\tau_y}=\lambda(\tau_y+\Phi(x)),y>x\}=1.$$

以任意 $t>0$ 代换 τ_y，即完成定理的证明。

现考察由正则点组成的区间 (α,β) 中的 Марков 过程，而且 α 和 β 是由区间内可到达的，此时，由 β 可到达 α，由 α 可到达 β。事实上，因为对每个 $x\in[\alpha,\beta]$ 可指出这样的邻域，使得这邻域的所有点相互可到达，区间 $[\alpha,\beta]$ 被有限个这样的邻域所覆盖。因此可给出 $\alpha=x_0<x_1<\cdots<x_n=\beta$，使由 x_{k-1} 和 x_{k+1} 可到达 x_k。

设 ζ 是过程命中 $[\alpha,\beta]$ 边界的首次时间，那末由于不等式 $\zeta\leqslant\tau_\alpha$, $\zeta\leqslant\tau_\beta$，我们可写出

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_x\{\zeta<t\}&\geqslant\max[\mathbf{P}_x\{\tau_\alpha<t\},\ \mathbf{P}_x\{\tau_\beta<t\}]\\&\geqslant\max[\mathbf{P}_\beta\{\tau_\alpha<t\},\mathbf{P}_\alpha\{\tau_\beta<t\}],\end{aligned}$$

因为 $\mathbf{P}_x\{\tau_\alpha<t\}$ 递减，而 $\mathbf{P}_x\{\tau_\beta<t\}$ 递增，因此对所有 $m>0$, $\mathbf{E}_x\zeta^m$ 有界。

今后将用到下面的引理：

引理 12 对每个 $\varepsilon>0$

$$\lim_{t\downarrow 0}\sup_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta}\mathbf{P}_x\{\sup_{s\leqslant t}|x_s-x|>\varepsilon\}=0,$$

特别，过程在由正则点组成的区间上一致随机连续。

证. 设 $x\in[z_1,z_2]$ 和 $|z_2-z_1|<\frac{\varepsilon}{2}$. 那末

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_x\{\sup_{s\leqslant t}|x_s-x|>\varepsilon\}\leqslant&\ \mathbf{P}_x\{\tau_{z_1}<t,\\&\sup_{\tau_{z_1}\leqslant s\leqslant\tau_{z_1}+t}|x_s-z_1|>\frac{\varepsilon}{2}\}\\&+\mathbf{P}_x\left\{\tau_{z_2}<t,\sup_{\tau_{z_2}\leqslant s\leqslant\tau_{z_1}+t}|x_s-z_2|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\\\leqslant&\ \mathbf{P}_{z_1}\left\{\sup_{s\leqslant t}|x_s-z_1|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\\&+\mathbf{P}_{z_2}\left\{\sup_{s\leqslant t}|x_s-z_2|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}.\end{aligned}$$

因此，如果 $\alpha = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = \beta$ 和 $z_k - z_{k-1} < \frac{\varepsilon}{2}$，那末

$$\sup_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} \mathbf{P}_x\{\sup_{s \leqslant t} |x_s - x| > \varepsilon\}$$

$$\leqslant 2 \sup_{k \leqslant n} \mathbf{P}_{z_k}\left\{\sup_{s \leqslant t} |x_s - z_k| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \tag{53}$$

由过程以概率为 1 的连续性得，对所有 z

$$\lim_{t \downarrow 0} \mathbf{P}_z \left\{\sup_{s \leqslant t} |x_s - z| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} = 0. \tag{54}$$

由(53)和(54)得证引理。

由下述的定理可得到在正则点的邻域中过程状态的一般表达式：

定理 12 如果 x 是正则点，那末对所有 $\delta > 0$

$$\mathbf{P}_x\{\sup_{t \leqslant \delta} x_t > x\} = 1, \ \mathbf{P}_x\{\inf_{t \leqslant \delta} x_t < x\} = 1.$$

证. 两个结论的证明是同样的，因此仅证明第一个.

事件 $\{\sup_{t \leqslant \delta} x_t > x\}$ 记为 Γ_δ, $\Gamma = \bigcap_\delta \Gamma_\delta$. 显然 Γ_δ 是 $\mathscr{N}_\delta$-可测，Γ_δ 随着 δ 而单调递减和当 $\delta \downarrow 0$ 时 $\mathbf{P}_x\{\Gamma_\delta\} \to \mathbf{P}_x\{\Gamma\}$. 因此为证明定理只要验证 $\mathbf{P}_x\{\Gamma\} = 1$ 就够了. 因为 Γ 是 $\mathscr{N}_{0+}$-可测，所以由于第 II 卷第一章 § 6 引理 2，$\mathbf{P}_x\{\Gamma\}$ 仅可取值 0 和 1. 假设 $\mathbf{P}_x\{\Gamma\} = 0$. 那末 $\mathbf{P}_x\{\bar{\Gamma}\} = 1$，其中 $\bar{\Gamma}$ 是 Γ 的对立事件. 如果事件 $\bar{\Gamma}$ 发生，那末对某个 δ，事件 $\bar{\Gamma}_\delta$ 发生，即 $\{\sup_{s \leqslant \delta} x_s \leqslant x\}$. 以 η 记由集合 $(-\infty, x]$ 走出的首次时间；η 在集合 $\bar{\Gamma}$ 是正的且是由闭集走出的首次时间的 Марков 时间(见第 II 卷第二章 § 5). 因为 $x_\eta = x$，所以 $P_{x_\eta}(\bar{\Gamma}) = 1$. 于是

$$\mathbf{P}_x\{\sup_{s \leqslant \eta + \theta_\eta \eta} x_s \leqslant x\} = \mathbf{P}_x\{\bar{\Gamma} \cap \theta_\eta \bar{\Gamma}\}$$

$$= \mathbf{E}_x \chi_{\bar{\Gamma}} \mathbf{P}\{\theta_\eta \bar{\Gamma} \mid \mathscr{N}_\eta\} = \mathbf{E}_x \chi_{\bar{\Gamma}} P_{x_\eta}(\bar{\Gamma}) = 1$$

(此处 χ_A 是集合 A 的示性函数). 因此

$$\mathbf{P}_x\{\eta + \theta_\eta \eta \leqslant \eta\} = 1,$$

与 η 在 $\bar{\Gamma}$ 上是正的相矛盾．所得的矛盾表明 $\mathbf{P}_x(\Gamma)=1$．

定理得证．

推论 如果 x 是正则点，那末对所有 $t>0$

$$\lim_{y\to x}\mathbf{P}_x\{\tau_y<t\}=1. \tag{55}$$

例如，当 $y>x$

$$\mathbf{P}_x\{\tau_y<t\}\leqslant\mathbf{P}_x\{\sup_{s\leqslant t}x_s\geqslant y\}$$

和由定理12得到式(55)．

引入函数

$$m(x)=\mathbf{P}_x\{x_\zeta=\beta\}. \tag{56}$$

设 $x_1<x_2$．那末

$$\begin{aligned}m(x_1)&=\mathbf{P}_{x_1}\{x_\zeta=\beta\}=\mathbf{P}_{x_1}\{\tau_{x_1}<\zeta,\ x_\zeta=\beta\}\\&=\mathbf{E}\chi_{\{\tau_{x_2}<\zeta\}}\theta_{\tau_{x_2}}\chi_{\{x_\zeta=\beta\}}\\&=\mathbf{E}\chi_{\{\tau_{x_2}<\zeta\}}\mathbf{E}^{x_{\tau_{x_2}}}\chi_{\{x_\zeta=\beta\}}\\&=\mathbf{E}\chi_{\{\tau_{x_2}<\zeta\}}\mathbf{P}_{x_2}\{x_\zeta=\beta\}\\&=m(x_2)\mathbf{P}_{x_1}\{\tau_{x_2}<\zeta\}.\end{aligned}$$

因为 $\mathbf{P}_{x_1}\{\tau_{x_2}<\zeta\}\leqslant1$，所以 $m(x_1)\leqslant m(x_2)$． 函数 $m(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 不减．此外，由于等式(55)和 ζ 是正的，所以

$\lim\limits_{x_2\downarrow x_1}\mathbf{P}_{x_1}\{\tau_{x_2}<\zeta\}=1$，即是 $\lim\limits_{x_2\downarrow x_1}m(x_2)=m(x_1)$．因此 $m(x)$ 右连续．类似地可证明函数

$$1-m(x)=\mathbf{P}_x\{x_\zeta=\alpha\}$$

是左连续． 于是 $m(x)$ 是递增连续函数，而且易见 $m(\alpha)=0$，$m(\beta)=1$．

我们来证明 $m(x)$ 是严格递增的． 设对 $x_1<x_2$，$m(x_1)=m(x_2)$ 和 x_1 是使 $m(z)=m(x_2)$ 的 z 中的最小者．那末

$$\mathbf{P}_{x_1}\{\tau_{x_2}<\zeta\}=1.$$

这说明了过程以概率 $\mathbf{P}_{x_1}=1$ 到达点 x_2 比到达点 α 早些．因此 $x_1>\alpha$ 和 x_1 是最小者，由它到达 x_2 比到达 α 早些． 由于定理12 过程在任意小的时间内以概率 $\mathbf{P}_{x_1}=1$ 落在区域 $[\alpha,x_1)$（即是比落在 x_α 早些），而它以正概率由区间 (α,x_1) 的点可以到达

α 比 x_2 更早(按点 x_1 的定义)。这导致矛盾。

定理 13 由等式(56)定义的函数 $m(x)$ 是单调连续和双方单值地将区间 $[\alpha,\beta]$ 映为区间$[0,1]$,当 $t<\zeta$ 时泛函 $\alpha_t=m(x_t)-m(x_0)$,当 $t>\zeta$ 时 $\alpha_t=m(x_{\zeta-0})-m(x_0)$,那末 α_t 是过程的 M-泛函。

证。仅需证明 α_t 是 M-泛函。

因为

$$\theta_h\alpha_t=\begin{cases}m(x_{t+h})-m(x_h), & t+h\leqslant\zeta,\\ m(x_\zeta)-m(x_h), & h<\zeta,t+h\geqslant\zeta,\\ 0, & h\geqslant\zeta,\end{cases}$$

所以 $\theta_h\alpha_t=\alpha_{t+h}-\alpha_t$,从而 α_t 是可加泛函,

其次,显然 α_t 以概率为 1 连续。

注意,

$$\begin{aligned}m(x)&=\mathbf{P}_x\{x_\zeta=\beta\}m(\beta)+\mathbf{P}_x\{x_\zeta=\alpha\}m(\alpha)\\&=\mathbf{E}_xm(x_\zeta).\end{aligned}$$

因此,对所有满足 $\tau\leqslant\zeta$ 的 Марков 时间 τ,有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_xm(x_\tau)&=\mathbf{E}_x\mathbf{E}_{x_\tau}m(x_\zeta)=\mathbf{E}_x\theta_\tau m(x_\zeta)\\&=\mathbf{E}_xm(x_\zeta)=m(x).\end{aligned}$$

特别,

$$\mathbf{E}_xm(x_{t\wedge\zeta})=m(x),\mathbf{E}_x\alpha_t=0.$$

其次,设

$$\begin{aligned}f(t,x)=\mathbf{E}_x[m(x_{t\wedge\zeta})-m(x)]^2&=\mathbf{E}_xm^2(x_{t\wedge\zeta})\\&\quad-m^2(x)+2m(x)[m(x)-\mathbf{E}_xm(x_{t\wedge\zeta})]\\&=\mathbf{E}_xm^2(x_{t\wedge\zeta})-m^2(x).\end{aligned}$$

由 $m^2(x)$ 的连续性和过程的一致随机连续性(引理 12)得,

$$\lim_{t\downarrow0}\sup_{\alpha<x\leqslant\beta}f(t,x)=0.$$

于是,由于第二卷第二章 § 6 定理 3,存在 W-泛函 $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ 使 $\mathbf{E}_x\alpha_t^2=\mathbf{E}_x\langle\alpha,\alpha\rangle_t$。

注。由对所有满足 $\tau\leqslant\zeta$ 的 Марков 时间 τ,已建立的关系

式

$$\mathbf{E}_x m(x_\tau) = m(x)$$

得 $m(x)$ 是调和函数。

显然，为研究 Марков 过程 x_t，只要研究 Марков 过程 $m(x_t)$，即是在[0,1]上满足 $m(x) = x$ 的过程就够了。

今后将假定 $m(x) = x$ 和区间 $[\alpha,\beta]$ 与[0,1]相同。

引入函数

$$n(x) = \mathbf{E}_x \zeta.$$

设 $0 \leqslant a < x < b \leqslant 1$。那末，以 τ 记由 (a, b) 走出的首次时间，我们将有

$$\zeta = \tau + \theta_\tau \zeta,$$

$$\mathbf{E}_x \zeta = \mathbf{E}_x \tau + \mathbf{E}_x \mathbf{E}_{x_\tau} \zeta,$$

$$n(x) = \mathbf{E}_x \tau + \mathbf{E}_x n(x_\tau).$$

为计算 $\mathbf{E}_x n(x_\tau)$ 我们注意 $\mathbf{E}_x x_\tau = x$（因为 $m(x) = x$）。于是，

$$x = a\mathbf{P}_x\{x_\tau = a\} + b\mathbf{P}_x\{x_\tau = b\}.$$

此外，因为

$$\mathbf{P}_x\{x_\tau = a\} + \mathbf{P}_x\{x_\tau = b\} = 1,$$

所以

$$\mathbf{P}_x\{x_\tau = a\} = \frac{b - x}{b - a}, \quad \mathbf{P}_x\{x_\tau = b\} = \frac{x - a}{b - a}.$$

因此，

$$n(x) = \mathbf{E}_x \tau + n(a) \frac{b - x}{b - a} + n(b) \frac{x - a}{b - a}.$$

设 $b - x = t(b - a)$，那末 $x = ta + (1 - t)b$，因此

$$n(ta + (1 - t)b) - tn(a) - (1 - t)n(b) = \mathbf{E}_x \tau > 0,$$

这不等式对所有 $a, b \in [0, 1]$，$0 < t < 1$ 是正确的。由它得，$n(x)$ 是严格上凸函数。因此存在递减的导数 $n'(x)$。

现考察过程在区间[0,1]的内点的特征算子。设 τ 是由 $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_2)$ 走出的首次时间。那末

$$\mathbf{E}_x f(x_\tau) = f(x-\varepsilon_1)\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} + f(x+\varepsilon_2)\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2},$$

$$\mathbf{E}_x \tau = n(x) - n(x-\varepsilon_1)\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} - n(x+\varepsilon_2)\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2},$$

$$\mathfrak{U} f(x) =$$

$$\lim_{\varepsilon_1\downarrow 0,\varepsilon_2\downarrow 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon_2}[f(x+\varepsilon_2)-f(x)] - \frac{1}{\varepsilon_1}[f(x)-f(x-\varepsilon_1)]}{\frac{1}{\varepsilon_2}[n(x)-n(x+\varepsilon_2)] - \frac{1}{\varepsilon_1}[n(x-\varepsilon_1)-n(x)]}. \quad (57)$$

后一公式对计算特征算子过于复杂了．在充分确定生成算子的函数类上，可以实质地简化这公式．

定理 14 设函数 $f(x)$ 绝对连续和存在连续函数 $g(t)$，使

$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x g(t)dn'(t) \quad (58)$$

成立．那末对所有 $x \in (0,1)$

$$\mathfrak{U} f(x) = -g(x).$$

证．我们有

$$\frac{1}{\varepsilon}[f(x+\varepsilon)-f(x)] = \frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon} f'(u)du$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon}\left[f'(x) + \int_x^u g(t)dn'(t)\right]du$$

$$= f'(x) + \int_x^{x+\varepsilon}\frac{x+\varepsilon-t}{\varepsilon} g(t)dn'(t).$$

利用这表示式（ε 可以是负的），求得

$$\frac{1}{\varepsilon_2}[f(x+\varepsilon_2)-f(x)] - \frac{1}{\varepsilon_1}[f(x)-f(x-\varepsilon_1)]$$

$$= \int_{x-\varepsilon_1}^{x+\varepsilon_1} \Delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(x,t)g(t)dn'(t),$$

其中

$$\Delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(x,t)=\begin{cases}\dfrac{t-x+\varepsilon_1}{\varepsilon_1} & \text{当 } x-\varepsilon_1\leqslant t\leqslant x,\\ \dfrac{x+\varepsilon_2-t}{\varepsilon_2} & \text{当 } x\leqslant t\leqslant x+\varepsilon_2.\end{cases}$$

代入 $g(t)=1$，有

$$\frac{1}{\varepsilon_2}[n(x+\varepsilon_2)-n(x)]-\frac{1}{\varepsilon_1}[n(x)-n(x-\varepsilon_1)]$$
$$=\int_{x-\varepsilon_1}^{x+\varepsilon_2}\Delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(x,t)dn'(t).$$

因为 $\Delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(x,t)$ 是非负的，$n'(t)$ 是严格递减，而 $g(t)$ 是连续的，所以利用中值定理得，

$$\lim_{\varepsilon_1\downarrow 0,\varepsilon_2\downarrow 0}\frac{\int_{x-\varepsilon_1}^{x+\varepsilon_1}\Delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(x,t)g(t)dn'(t)}{\int_{x-\varepsilon_1}^{x+\varepsilon_2}\Delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(x,t)dn'(t)}=g(x).$$

定理得证.

注1. 满足式(58)的函数 $g(t)$ 自然记为 $\dfrac{df'(t)}{dn'(t)}$. 因此过程 x_t 的特征算子 $\mathfrak{U}$ 定义在使 $\dfrac{df'(x)}{dn'(x)}$ 存在和连续的绝对连续函数 f 上；这时

$$\mathfrak{U}f(x)=-\frac{df'(x)}{dn'(x)}. \tag{59}$$

注 2. 过程 x_t 的生成算子 $\mathbf{A}$ 定义在满足 $\dfrac{d'f(x)}{dn'(x)}$ 在[0,1]上连续，而 $f(0)=f(1)=0$ 的所有绝对连续函数 f 上，这时 $\mathbf{A}f$ 与 $\mathfrak{U}f$ 相等.

事实上，顾及到在紧集上过程的特征算子和生成算子之间的联系(见第 II 卷第二章 § 5 定理 1)，我们只要验证在 $\mathscr{C}^0_{[0,1]}$ 中于点 0 和 1 为 0 的函数上和由公式(59)给定的算子 $\mathfrak{U}$ (倘若它有定义) 就够了. 因为当 $\mathfrak{U}$ 和 A 在 $\mathscr{C}^0_{[0,1]}$ 上相等时，那末由 $\mathbf{A}$ 的封闭性得 $\mathfrak{U}$ 的封闭性. 易见，位于(59)右边的微分算子也是封闭

的. 由此得这些算子相等和 $\mathbf{A}$ 与(59)的左边相等.

最后,考察在正则区间中过程的性质. 设这区间是 (α,β);此时,点 α 和 β 已是非正则的.

可能有四种情况: 1) 区间 (α,β)的边界点 α 由区间可到达,所有的点 $x\in(\alpha,\ \beta)$ 可由 α 到达; 这样的边界点称为正则边界; 2) 从里面可到达 α,但由 α 不可到达区间的点; 这样的点称为捕获式边界;3) α 从里面不可到达,但由 α 可到达区间的点;这样的点称为释放式边界;4) 由里面不可到达 α, 且由 α 不可到达区间的点; 这样的点称为自然边界.

如果 α 是正则边界,那末因为它毕竟是非正则点,它或在左方不可到达或向左方不可通过. 在后一情形 α 是区间 $(\alpha,\ \beta)$ 的反射边界. 容易找到有两个反射边界的过程的生成算子的形式.

定理 15 如果 ξ_t 是在$[0,1]$上 $m(x)=x$ 的过程, 0 和 1 是正则区间$(0,1)$的反射边界,那末对 $0<x<1$, $\mathbf{A}f(x)$ 由(59)的左边所确定且

$$\mathbf{A}f(0)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{f(\varepsilon)-f(0)}{M_0\tau_\varepsilon},$$

$$\mathbf{A}f(1)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{f(1-\varepsilon)-f(1)}{M_1\tau_{1-\varepsilon}},$$

和 $\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$ 等于使 $\mathbf{A}f$ 连续的函数 f 的集合.

如果计算在点 0 和 1 的特征算子并利用第 II 卷第二章 § 5 定理 1 和注 2, 那末立即得证定理.

如果区间的边界可到达, 但内部的点从边界不可到达, 那末自然考虑在到达边界后中断的过程. 它们的特征算子在注 2 已写出. 在边界不可到达时过程总是停留在正则区间内部. 因为区间是局部紧空间和利用公式 (59) 可局部地确定在每个点的特征算子, 所以利用第 II 卷第二章 § 5 定理 1 可确定过程的生成算子. 的确, 我们不得不整组地利用函数 $m(x)$ 和 $n(x)$. 现时我们来表明怎样可以避免这点.

引理 13 在 (α,β) 上存在严格递增的连续调和函数 $M(x)$,

使得在 (α,β) 上其它所有的连续调和函数 $g(x)$ 有形式

$$g(x)=aM(x)+b,$$

其中 a 和 b 是某两个常数.

证. 设 $\alpha_n\downarrow\alpha$, $\beta_n\uparrow\beta$, $\alpha_1<\beta_1$. 以 ζ_n 记由 (α_n,β_n) 走出的首次时间和设

$$\gamma_n(x)=\mathbf{P}_x\{x_{\zeta_n}=\beta_n\}.$$

如在上面所指出, $\gamma_n(x)$ 是在 $(\alpha_n,\ \beta_n)$ 中的调和函数. 因此对 $m<n$ 和 $x\in(\alpha_m,\beta_m)$,

$$\mathbf{E}_x\gamma_n(x_{\zeta_m})=\gamma_n(x),$$

但

$$\begin{aligned}\gamma_n(x)=\mathbf{E}_x\gamma_n(x_{\zeta_m})&=\gamma_n(\alpha_m)\mathbf{P}_x\{x_{\zeta_m}=\alpha_m\}\\&\quad+\gamma_n(\beta_m)\mathbf{P}_x\{x_{\zeta_m}=\beta_m\}\\&=\gamma_n(\alpha_m)(1-\gamma_m(x))+\gamma_n(\beta_m)\gamma_m(x)\\&=\gamma(\alpha_m)+[\gamma_n(\beta_m)-\gamma_n(\alpha_m)]\gamma_m(x),\end{aligned}$$

即是

$$\gamma_m(x)=\frac{\gamma_n(x)-\gamma_n(\alpha_m)}{\gamma_n(\beta_m)-\gamma_n(\alpha_m)}. \tag{60}$$

令

$$g_n(x)=\frac{\gamma_n(x)-\gamma_n(\alpha_1)}{\gamma_n(\beta_1)-\gamma_n(\alpha_1)},\quad x\in(\alpha_n,\beta_n).$$

容易验证, $g_n(x)=g_m(x)$, 当 $x\in(\alpha_m,\beta_m)$ 和 $m<n$. 为此只需利用(60). 因此, 存在在每个区间 (α_n,β_n) 上和 $g_n(x)$ 相等的函数 $M(x)$. 它具有所要求的性质.

设 $g(x)$ 是任意局部有界调和函数. 那末当 $\alpha_m<x<\beta_m$ 时

$$g(x)=g(\alpha_m)(1-\gamma_m(x))+g(\beta_m)\gamma_m(x),$$

即是 g 可通过常数和 $\gamma_m(x)$ 线性表出. 对 $(\alpha_m,\ \beta_m)$ 上的函数 $M(x)$ 可作同样的证明. 于是, 对每个 m 存在常数 a_m 和 b_m, 使

$$g(x)=a_mM(x)+b_m,\ x\in(\alpha_m,\beta_m).$$

因为 $M(\alpha_1)=0$, $M(\beta_1)=1$, 所以 $b_m=g(\alpha_1)$, $a_m=g(\beta_1)-g(\alpha_1)$, 即是, a_m, b_m 不依赖于 m.

引理得证。

可再一次代替原过程 x_t 而考虑过程 $\hat{x}_t = M(x_t)$，对此过程函数 $M(x) = x$。过程 $\hat{x}_t$ 定义在某个(有限或无穷)区间上。因此自然立即认为对原过程来说 $M(x)$ 与 x 相等。

引理 14 存在上凸函数 $N(x)$，使当 $\alpha < x - \varepsilon_1 < x < x + \varepsilon_2 < \beta$ 时

$$\mathbf{E}_x\tau = N(x) - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} N(x - \varepsilon_1) - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} N(x + \varepsilon_2),$$

其中 τ 是由区间 $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1)$ 走出的首次时间。

证。设 α_k，β_k 和 ζ_k 如引理 13，

$$n_k(x) = \mathbf{E}_x\zeta_k.$$

设在 (α_k, β_k) 上

$$S_k(x) = n_k(x) - \frac{\beta_1 - x}{\beta_1 - \alpha_1} n_k(\alpha_1) - \frac{(x - \alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1} n_k(\beta_1).$$

易见，当 $\alpha_k < x - \varepsilon_1 < x < x + \varepsilon_2 < \beta_k$ 时

$$\mathbf{E}_x\tau = S_k(x) - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} S_k(x - \varepsilon_1)$$

$$- \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} S_k(x + \varepsilon) = S_k(x) - \mathbf{E}_x S_k(x_\tau),$$

其中 τ 如引理条件所规定。因此当 $m > k$ 时，在 (α_k, β_k) 上

$$S_m(x) - S_k(x) = \mathbf{E}_x[S_m(x_\tau) - S_k(x_\tau)],$$

即是 $S_m(x) - S_k(x)$ 是调和函数。因为 $S_m(\alpha_1) = S_k(\alpha_1) = 0$，$S_m(\beta_1) = S_k(\alpha_1) = 0$，所以由引理 13 易推出 $S_m(x) = S_k(x)$ 在 (α_k, β_k) 上。当 $\alpha_k < x < \beta_k$，$k = 1, 2, \cdots$，令 $N(x) = S_k(x)$，就得所求的函数。

引理得证。

现利用函数 $N(x)$，在区间 (α, β) 的所有点上立即可定义特征算子 $\mathfrak{U}$：

$$\mathfrak{U}f(x) = -\frac{df'(x)}{dN'(x)}. \tag{61}$$

最后,函数 $M(x)$ 和 $N(x)$ 能用边界点 α 和 β 来描述.

我们对不可到达边界作更详细的分类. 不可到达边界 α 称为吸引的,如果对所有 $\varepsilon > 0$ 可指定 $\delta > 0$ 使

$$\mathbf{P}_x\{\lim_{t\to\infty} x_t = \alpha\} > 1 - \varepsilon \tag{62}$$

对所有 $x \in (\alpha, \alpha+\delta)$ 成立. 不可到达边界 α 称为排斥的, 如果对所有 $x > a$ 和 $x_1 < x$

$$\mathbf{P}_{x_1}\{\tau_x < \infty\} = 1.$$

定理 16 边界 α 不可到达,如果 $N(\alpha+0) = -\infty$; 这时在情形 1) $M(\alpha+0) > -\infty$ 时边界是吸引的,而在情形 2) $M(\alpha+0) = -\infty$ 时边界是排斥的.

证. 1) 不失一般性,可认为 $M(x) = x$. 那末 $x_t - \alpha$ 是非负鞅, 因为

$$\mathbf{E}(x_{t+h} - \alpha \mid \mathscr{N}_t) = \mathbf{E}_{x_t}(x_h - \alpha) = x_t - \alpha.$$

于是, 由于第 I 卷第二章 § 2 定理 1 以概率 $\mathbf{P}_x = 1$ 对所有 x 存在极限

$$\lim_{t\to\infty} x_t = x_\infty.$$

注意,此极限不可能是区间 (α,β) 的内点, 因为在有限时间内过程由端点是 (α,β) 的内点的区间走出. 因此 $x_\infty = \alpha$ 或 $x_\infty = \beta$.

如果 $\beta = \infty$,那末

$$\mathbf{P}_x\{x_\infty = \alpha\} = 1,$$

这因为 $\mathbf{E}_x x_\infty \leqslant \mathbf{E}_x x_t = x$.

如果 $\beta < \infty$,那末 x_t 是有界鞅且

$$\mathbf{E}_x x_\infty = x.$$

于是

$$\mathbf{P}_x\{x_\infty = \alpha\} = \frac{\beta - x}{\beta - \alpha}, \quad \mathbf{P}_x\{x_\infty = \beta\} = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

由这概率的形式得知存在 $\delta > 0$,使(62)成立.

我们来证明, 对所有 t

$$\mathbf{P}_x\{x_t > \alpha\} = 1,$$

即是，α 是不可到达边界．设对某个 t

$$\mathbf{P}_x\{x_t = \alpha\} = \delta > 0.$$

那末对所有 $\varepsilon < x - \alpha$

$$\mathbf{P}_x\{\tau_{\alpha+\varepsilon} < t\} > \delta,$$

也就是说，当 $\bar{x} \in (\alpha + \varepsilon, x)$ 时，

$$\mathbf{P}_{\bar{x}}\{\tau_{\alpha+\varepsilon} < t\} > \delta.$$

以 τ 记由区间 $(\alpha + \varepsilon, x)$ 走出的首次时间，那末 $\tau \leqslant \tau_{\alpha+\varepsilon}$ 和因此对所有 $\bar{x} \in (\alpha + \varepsilon, x)$，$\mathbf{P}_x\{\tau < t\} > \delta$．但

$$\mathbf{P}_{\bar{x}}\{x_t \notin (\alpha + \varepsilon, x)\} \geqslant \mathbf{P}_{\bar{x}}\{\tau < t\} > \delta.$$

利用第 II 卷第二章 §5 中特征算子一段的有关论证，得

$$\mathbf{E}_{\bar{x}}\tau \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}_{\bar{x}}\{\tau > kt\} \leqslant t \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \delta)^k = \frac{t}{\delta}.$$

意味着

$$\mathbf{E}_{\bar{x}}\tau = N(\bar{x}) - \frac{x - \bar{x}}{x - \alpha - \varepsilon} N(\alpha + \varepsilon) - \frac{\bar{x} - \alpha - \varepsilon}{x - \alpha - \varepsilon} N(x) \leqslant \frac{t}{\delta}.$$

最后的不等式证明了条件 $N(\alpha + 0) = -\infty$，因为它对所有 $\varepsilon > 0$ 成立。

论断 1) 得证．

2) 设 $\alpha < \alpha_1 < x$．我们来表明由 x_1 到达 x 比到达 α 更早的概率 $q(x_1, x)$ 等于 1．

如果 $\alpha < x_2 < x_1 < x$，那末以 τ 记由 (x_2, x) 走出的首次时间，我们有

$$\mathbf{P}_{x_1}\{x_\tau = x\} = \frac{M(x_1) - M(x_2)}{M(x) - M(x_2)}.$$

但无论是怎样的 $x_2 \in (\alpha, x_1)$，

$$q(x_1, x) \geqslant \mathbf{P}_{x_1}\{x_\tau = x\}.$$

当 $x_2 \downarrow \alpha$ 时取极限，得证 $q(x_1, x) = 1$．

现来证边界 α 不可到达．设 A 是过程到达 α 比到达 x 更早的

事件，B_k 是过程相交于区间 (x_1, x) $2k$ 次的事件，τ_k 是第 $2k$ 次交于区间 (x_1,x) 的时间，那末 τ_k 是 Марков 时间和

$$\mathbf{P}_{x_1}\{x_{\tau_k} = x_1\} = 1.$$

设 V 是由点 x_1 到达点 α 的事件。这时到达 α 可发生在相交区间 (x_1,x) 是 $2k$ 次以后，$k = 1,2,\cdots$ 就是，

$$\mathbf{P}_{x_1}\{V\} = \mathbf{P}_{x_1}\{A\} + \mathbf{P}_{x_1}\{B_1 \cap \theta_{\tau_1} A\} + \cdots + \mathbf{P}_{x_1}\{B_k \cap \theta_{\tau_k} A\}$$
$$+ \cdots = \mathbf{P}_{x_1}\{A\}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}_{x_1}\{B_k\}\right) = 0,$$

因为 $\mathbf{P}_{x_1}\{A\} = 0$.

定理得证。

注。如果 $M(\alpha + 0) > -\infty$ 和 $N(\alpha + 0) > -\infty$，那末边界 α 可到达。条件 $M(\alpha + 0) = \infty$ 通常导致 $N(\alpha + 0) = -\infty$，因为 $N(M^{-1}(x))$ 是上凸函数（M^{-1} 是 M 的反函数）。

在正则点的区间的两个边界是排斥的假设下，我们来考察过程的性质。由定理 16 得知在此情形下 $M(\alpha + 0) = -\infty$，$M(\beta - 0) = +\infty$。因此不失一般性，可认为 $M(x) = x$ 和 (α, β) 等于 $(-\infty, +\infty)$。在证明定理 16 时已得知这时 $\mathbf{P}_x\{\tau_y < \infty\} = 1$。由定理 12 得，对所有 $\delta > 0$

$$\lim_{x \to y} \mathbf{P}_x\{\tau_y > \delta\} = 0.$$

利用关系式

$$|\mathbf{E}_x f(x_t) - \mathbf{E}_y f(x_t)| \leqslant 2\|f\| \mathbf{P}_x\{\tau_y > \delta\}$$
$$+ \sup_{s \leqslant \delta} |\mathbf{E}_y f(x_{t-s}) - \mathbf{E}_y f(x_t)|,$$

得证如果 f 是连续的，由于 x_t 的连续性，当 $\delta > 0$ 时第二个被加项趋于 0，那末 $\mathbf{E}_x f(x_t)$ 是连续函数。因此 x_t 是随机连续的 Feller 过程。

我们来找出 $\mathbf{E}_x \tau_y$ 是有限的条件。

引理 15 如果

$$\lim_{a \to -\infty} \frac{1}{a} N(\alpha) = \gamma_1 < +\infty, \tag{63}$$

存在，那末对所有 $x<y$，$\mathbf{E}_x\tau_y<\infty$；如果

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b}N(b)=\gamma_2>-\infty$$

存在，那末对所有 $x>y$，$\mathbf{E}_x\tau_y<\infty$。

证．我们来证明，例如，引理的第一个结论．设 $a<x<y$，$\tau_{[a,y]}$ 是由 (a,y) 走出的首次时间．那末按引理 14

$$\mathbf{E}_x\tau_{[a,y]}=N(x)-\frac{y-x}{y-a}N(a)-\frac{x-a}{y-a}N(y).$$

显然，$\tau_{[a,y]}\uparrow\tau_y$ 当 $a\to-\infty$。因此

$$\mathbf{E}_x\tau_y=N(x)-N(y)+(y-x)\lim_{a\to-\infty}\frac{N(a)}{a}. \tag{64}$$

引理得证．

注 1．如果存在极限(63)，那末函数 $N'(x)$ 有界当 $x\to-\infty$ 和 $\gamma_1=\lim\limits_{x\to-\infty}N'(x)$。类似地，如果 γ_2 有限，那末

$$\gamma_2=\lim_{x\to+\infty}N'(x).$$

注 2．如果 $N'(-\infty)$ 有限，那末当 $x<y$ 时由(64)所得的公式对 $\mathbf{E}_x\tau_y$ 是正确的，

$$\mathbf{E}_x\tau_y=\int_x^y[N'(-\infty)-N'(z)]dz. \tag{65}$$

特别，如果

$$\int_{-\infty}^x[N'(-\infty)-N'(z)]dz<\infty,$$

那末当 $x\in(-\infty,y]$ 时 $\mathbf{E}_x\tau_y$ 是有限的． 类似的结论对 $x>y$ 时，$\mathbf{E}_x\tau_y$ 也是正确的，如果 $N'(+\infty)>-\infty$。

注 3．设 $\alpha=-\infty$ 是释放式边界；因为对某个 $t>0$ 及 y

$$\mathbf{P}_\alpha\{\tau_y<t\}>0$$

对 $x\in(\alpha,z)$ 可得

$$\mathbf{P}_x\{\tau_y<t\}\geqslant\mathbf{P}_\alpha\{\tau_y<t\}.$$

照定理 11 同样的证明方法，我们也可得到

$$\sup_{x<z}\mathbf{E}_x\tau_y<\infty,$$

因此对释放式边界 $\alpha = \pm\infty$，积分 $\int_\alpha^x [N'(z) - N'(\alpha)]dz$ 有限。

如果排斥式边界不是释放式，称它为自然的。

引理 16 设边界 $\alpha(\alpha = \pm\infty)$ 是自然的，那末

$$\lim_{x \to \alpha} \mathbf{P}_x\{\tau_a < t\} = 0. \tag{66}$$

证．设 $\alpha = -\infty$．显然在 $x \to -\infty$ 时，$\mathbf{P}_x\{\tau_a < t\}$ 单调递减．如果 $\inf\limits_{x \leqslant a} \mathbf{P}_x\{\tau_a < t\} \geqslant \delta > 0$，那末

$$\sup_{x \leqslant a} \mathbf{P}_x\{\tau_a > kt\} = \sup_{x \leqslant a} \mathbf{E}_x \chi_{\{\tau_a > (k-1)t\}} \mathbf{P}\{\theta_{(k-1)t}\tau_a$$
$$> t \mid \mathscr{N}_{(k-1)t}\} \leqslant (1-\delta) \sup_{x \leqslant a} \mathbf{P}_x\{\tau_a > (k-1)t\}$$
$$\leqslant (1-\delta)^k$$

和下面的不等式成立

$$\sup_{x \leqslant a} \mathbf{E}_x \tau_a \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} kt(1-\delta)^{k-1} = \frac{t}{\delta^2},$$

这与$-\infty$是自然边界相矛盾.

引理得证.

引理 17 对使极限 $f(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x), f(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 存在的有界连续函数 $f(x)$，关系式

$$\lim_{t \to 0} \|T_t f - f\| = 0$$

成立。

证．因为当 $a < b$ 时

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |T_t f(x) - f(x)| \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \mathbf{P}_x\{|x_t - x| > \varepsilon\}$$
$$+ \sup_{\substack{a \leqslant x_1 \leqslant b \\ |x_2 - x_1| \leqslant \varepsilon}} |f(x_1) - f(x_2)|,$$

那末由引理 12 得

$$\lim_{t \to 0} \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |T_t f(x) - f(x)| = 0.$$

因此为证明引理只需证明可以通过选取 a 和 b，使

$$\overline{\lim_{t \to 0}} [\sup_{x \leqslant a} |T_t f(x) - f(x)| + \sup_{x \geqslant b} |T_t f(x) - f(x)|]$$

的值任意小．我们来考虑，例如，极限号下第一个被加项．选取 $a_1 > a$，我们有

$$\sup_{x\leqslant a}|T_tf(x)-f(x)| = \sup_{x\leqslant a}|f(x)-f(-\infty)|$$

$$+\sup_{x\leqslant a}|T_tf(x)-f(-\infty)| = \sup_{x\leqslant a}|f(x)-f(-\infty)|$$

$$+\sup_{x\leqslant a}[M_x|f(x_t)-f(-\infty)|\chi_{\{\tau_{a_1}<t\}}$$

$$+\mathbf{E}_x|f(x_t)-f(-\infty)|\chi_{\{\tau_{a_1}>t\}}]$$

$$\leqslant 2\sup_{x\leqslant a_1}|f(x)-f(-\infty)| + 2\|f\|\mathbf{P}_a\{\tau_{a_1}<t\}.$$

因为 $\lim\limits_{t\to 0}\mathbf{P}_a\{\tau_{a_1}<t\}=0$，所以

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\ \sup_{x\leqslant a}|T_tf(x)-f(x)| \leqslant 2\sup_{x\leqslant a_1}|f(x)-f(-\infty)|.$$

由此得引理的证明．

引理 18　以 $\hat{C}_{(-\infty,\infty)}$ 表示满足下面条件的连续函数 $f(x)$ 的集合：存在极限 $f(-\infty)$，$f(+\infty)$．如果 $\alpha=\pm\infty$ 是自然边界，那么 $T_tf\in\hat{C}_{(-\infty,\infty)}$，当 $f\in\hat{C}_{(-\infty,\infty)}$．

证．对有界连续函数 f，T_tf 的连续性已被证实．现考虑 T_tf 在点 $-\infty$ 的极限性质．

1）设 $-\infty$ 是自然边界，那末(66)成立．于是对 $x<a$，

$$|T_tf(x)| \leqslant \mathbf{E}_x|f(x_t)|\chi_{\{\tau_a>t\}} + \mathbf{E}_x|f(x_t)|\chi_{\{\tau_a<t\}}$$

$$\leqslant \sup_{y\leqslant a}|f(y)| + \|f\|\mathbf{P}_x\{\tau_a<t\}$$

和

$$\overline{\lim_{x\to-\infty}}\ |T_tf(x)| \leqslant \sup_{y\leqslant a}|f(y)|,$$

$$\overline{\lim_{x\to-\infty}}\ |T_tf(x)| \leqslant \lim_{a\to-\infty}\ \sup_{y\leqslant a}|f(y)| = 0.$$

2）设 $-\infty$ 是释放式边界．那末当 $x<a$ 时

$$|T_tf(x)-T_tf(a)| = |\mathbf{E}_xf(x_t)\chi_{\{\tau_a\leqslant\delta\}} + \mathbf{E}_xf(x_t)\chi_{\{\tau_a>\delta\}}$$

$$-T_tf(a)| \leqslant 2\|f\|\mathbf{P}_x\{\tau_a>\delta\} + \int_0^\delta \mathbf{P}_x\{\tau_a\in ds\}|T_{t-s}f(a) \quad (71)$$

$$- T_t f(a) | \leqslant 2\|f\| \frac{1}{\delta} \mathbf{E}_x \tau_a + \sup_{t \leqslant \delta} \|T_t f - f\|.$$

利用公式(65),求得

$$\sup_{x \leqslant a} | T_t f(x) - T_t f(a) | \leqslant 2\|f\| \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{a} [N'(-\infty) - N'(z)] dz + \sup_{t \leqslant \delta} \|T_t f - f\|,$$

由此得

$$\overline{\lim_{a \to -\infty}} \sup_{x \leqslant a} | T_t f(x) - T_t f(a) | \leqslant \sup_{t \leqslant \delta} \|T_t f - f\|.$$

余下仅需利用引理 17 和 $\lim_{x \to -\infty} T_t f(x)$ 存在的 Cauchy 准则,引理得证.

如果 $\alpha(\alpha = \pm\infty)$ 是流出的边界,对所有 $f \in \hat{C}_{(-\infty,\infty)}$,我们定义 $T_t f(\alpha) = \lim_{x \to \alpha} T_t f(x)$. 那末

$$T_t f(\alpha) = \int \mathbf{P}(t, \alpha, dy) f(y),$$

其中 $\mathbf{P}(t, \alpha, \cdot)$ 是概率测度. 它可视为从边界点的转移概率,因此释放式边界可并入过程的相空间. 作出这样的合并后,如果两个边界是释放式,相空间就是紧的,如果在边界是自然的,相空间就是局部紧的. 在这样扩充了的空间上的过程是 Feller 随机连续和正则的(在非紧的情形). 这由引理 17 和 18 得到.

现考虑在合并于相空间的释放式边界点中的特征算子.例如,设$-\infty$是这样的点. 那末

$$\mathfrak{U} f(-\infty) = \lim_{a \to -\infty} \frac{f(a) - f(-\infty)}{\mathbf{E}_{-\infty} \tau_a} = \lim_{a \to -\infty} \frac{f(a) - f(-\infty)}{-\int_{-\infty}^{a} (a - t) dN'(t)}. \tag{67}$$

如果

$$f(z) = \int_{-\infty}^{z} (z - t) \varphi(t) dN'(t),$$

其中 $\varphi \in \hat{C}_{(-\infty,\infty)}$，那末由(59)和(67)得知对所有 $x \in [-\infty,\infty)$，$\mathfrak{U}f(x) = -\varphi(x)$。我们来求过程的生成算子。

定理 17 设区间$(-\infty,\infty)$的点对过程 x_t 是正则的，$M(x) = x$ 及边界点是排斥式。那末利用等式

$$Af(x) = -\frac{df'(x)}{dN'(x)} \tag{68}$$

定义了过程的生成算子 $\mathbf{A}$，其中 f 是属于 $\hat{C}_{(-\infty,\infty)}$ 并使(68)右边有定义和属于 $\hat{C}_{(-\infty,\infty)}$，$\mathbf{A}$ 就是定义在所有这样的 f 上。

证。如在上面所指出的，我们将认为释放式边界并入相空间，因为用这样的方式得到的过程是正则的，所以只要验证算子(68)是某个正则过程的生成算子就够了(见第 II 卷第二章 § 4)。为此根据第 II 卷第二章 § 4 定理 2，需要证明，对 $\lambda > 0$，方程

$$\lambda f(x) + \frac{df'(x)}{dN'(x)} = g(x) \tag{69}$$

对函数 $g \in \hat{C}_{(-\infty,\infty)}$ 的处处稠密集有解(由 $\mathbf{A}$ 的形式容易证明 $\mathbf{A}$ 被定义在某个集合上且满足极大值原理)。我们考虑三种情形。

1. 设两个边界是自然的。取有限支集函数 $\varphi \in \hat{C}_{(-\infty,\infty)}$，使满足关系式 $\dfrac{df'}{dN'} = \varphi$ 的函数 f 也属于 $\hat{C}_{(-\infty,\infty)}$。那末

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \int_0^x (x-z)\varphi(z)dN'(z) \\ &= f(0) + \left[f'(0) + \int_0^x \varphi(z)dN'(x)\right]x \\ &\quad - \int_0^x z\varphi(z)dN'(z). \end{aligned}$$

于是，$f \in \hat{C}_{(-\infty,\infty)}$，如果

$$f(x) = x\int_{-\infty}^x \varphi(z)dN'(z) - \int_{-\infty}^x z\varphi(z)dN'(z), \tag{70}$$

其中 φ 是满足

$$\int \varphi(z)dN'(z) = \int z\varphi(z)dN'(z) = 0 \tag{71}$$

的函数，因此如果 φ 是有限支集函数，那末 f 也是有限支集的，从而满足(69)的函数 g 也是有限支集的。将(70)代入(69)，我们得

$$\lambda\left[x\int_{-\infty}^{x}\varphi(z)dN'(z)-\int_{-\infty}^{x}z\varphi(z)dN'(z)\right]+\varphi(x)$$
$$=g(x). \tag{72}$$

如果 φ 仅在 $[a,b]$ 上异于 0 且满足(71)，考虑能表为(72)的函数 g 的集合。这时 g 仅在 $[a,b]$ 上异于 0。设 $l(dx)$ 是在 $[a,b]$ 上的有号测度，对所有形如(72)的 g 有 $\int g(x)l(dx)=0$。对(72)求积分并交换积分次序，求得

$$\int_a^b\lambda\left[\int_a^b xl(dx)-z\int_z^b l(dx)\right]\varphi(z)dN'(z)$$
$$+\int_a^b\varphi(z)l(dz)=0. \tag{73}$$

由此关系式得测度 $l(dz)$ 关于 $dN'(z)$ 绝对连续。记 $\rho(z)=\frac{l(dz)}{dN'(z)}$。那末由(73)得

$$\int_a^b\left\{\lambda\left[\int_a^b x\rho(x)dN'(x)-z\int_z^b\rho(x)dN'(x)\right]\right.$$
$$\left.+\rho(z)\right\}\varphi(z)dN'(z)=0.$$

因为 φ 是满足(71)的任意函数，所以

$$\lambda\int_z^h(x-z)\rho(x)dN'(x)+\rho(z)=\gamma+\delta z,$$

其中 γ 和 δ 是某两个常数。

由此等式得关系式

$$\lambda\rho(z)+\frac{d\rho'(z)}{dN'(z)}=0. \tag{74}$$

方程(74)存在两个解：$\rho_1(t)$ 和 $\rho_2(t)$ 分别满足方程

$$\rho_1(z)=-\lambda\int_{-\infty}^{z}(z-t)\rho_1(t)dN'(t),$$

$$\rho_2(z)=\lambda\int_z^{\infty}(z-t)\rho_2(t)dN'(t), \tag{75}$$

和如下条件：$\rho_i(z)>0$，$\rho_i(z)$ 是下凸，$\rho_1(z)$ 是增函数，$\rho_2(z)$ 是减函数。函数 $\rho_i(z)$ 可以用等式

$$\rho_1(z)=\lim_{a\to-\infty}\frac{\rho(a,z)}{\rho(a,0)},\quad \rho_2(z)=\lim_{a\to+\infty}\frac{\rho(a,z)}{\rho(a,0)}$$

所定义，其中 $\rho(a,z)$ 是积分方程

$$\rho(a,z)=1-\lambda\int_a^z(z-t)\rho(a,t)dN'(t)$$

的解(此方程的解的唯一性与存在性用逐次逼近的方法证明)。

容易相信，在有限区间上方程(74)的所有解可表为函数 $\rho_i(z)$ 的线性组合，于是用公式（72）表示的有限支集函数 g 的集合在(71)的限制下，在满足

$$\int g(x)\rho_i(x)dN'(x)=0,\quad i=1,2,$$

的函数 g 的集合中稠密。我们来证明这函数集在 $\hat{C}_{(-\infty,\infty)}$ 中稠密。注意到

$$\begin{aligned}-\lambda\int_{-\infty}^0\rho_1(x)dN'(x)&\leqslant-\lambda\int_{-\infty}^0(1-t)\rho_1(t)dN'(t)\\&\leqslant\rho_1(1)<\infty,\end{aligned}$$

$$-\lambda\int_0^\infty\rho_1(x)dN'(x)\geqslant-\lambda\int_0^\infty\rho_1'(0)x\,dN'(x)=+\infty,$$

因为$+\infty$是自然边界。类似地

$$-\int_0^\infty\rho_2(x)dN'(x)<\infty,\quad -\int_0^\infty\rho_2(x)dN'(x)=+\infty,$$

因此存在满足条件

$$\|h_i(\varepsilon,\cdot)\|\leqslant1,$$

$$\int h_i(\varepsilon,x)\rho_i(x)dN'(x)=\frac{1}{\varepsilon},$$

$$\left|\int h_i(\varepsilon,x)\rho_j(x)dN'(x)\right|<\varepsilon,\quad i,j=1,2,\ i\neq j,$$

的有限支集函数 $h_i(\varepsilon,x)$，对 $\hat{C}_{(-\infty;\infty)}$ 中所有函数 g 可选取 c_1 和 c_2，使

$$\int [g(x) + c_1h_1(\varepsilon,x) + c_2h_2(\varepsilon,x)]\rho_i(x)dN'(x)$$
$$= 0,\ i = 1,2.$$

对这样选取的 c_i

$$c_i \sim -\varepsilon \int g(x)\rho_i(x)dN'(x),$$

也就是说，$\|c_1h_1(\varepsilon,\cdot) + c_2h_2(\varepsilon,\cdot)\| \to 0$ 当 $\varepsilon \to 0$. 在情形 1 定理得证.

2. 设一个边界是自然的，另一个是释放式的，例如$-\infty$是释放式边界. 如果对某个 b，函数 $\varphi \in \hat{C}_{(-\infty,\infty)}$ 在 $[b,\infty)$ 等于0，我们将认为φ是有限支集的. 如果 $\frac{df'}{dN'} = \varphi$ 是有限支集函数，那末

$$f(x) = f(-\infty) + x\int_{-\infty}^{x} \varphi(z)dN'(z)$$
$$- \int_{-\infty}^{x} z\varphi(z)dN'(z).$$

如果

$$\int \varphi(z)dN'(z) = 0,\ f(-\infty) - \int z\varphi(z)dN'(z) = 0,$$

那末这函数属于 $\hat{C}_{(-\infty,\infty)}$. 因此，

$$f(x) = x\int_{-\infty}^{x} \varphi(z)dN'(z) + \int_{x}^{\infty} z\varphi(z)dN'(z),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)dN'(z) = 0$$

和 $f(x)$ 是有限支集函数. 方程(69)重新写为

$$\lambda\left[x\int_{-\infty}^{x} \varphi(z)dN'(z) + \int_{x}^{\infty} z\varphi(z)dN'(z)\right]$$
$$+ \varphi(x) = g(x). \tag{76}$$

我们来证明，如果 $\int \varphi(z)dN'(z) = 0$，那末表为形式(76)的函数集合在 $\hat{C}_{(-\infty,\infty)}$ 中稠，如同在证明 1 时的论证，我们求得对所有形为(76)的 g，其中当 $t \geqslant b$ 时 $\varphi(t) = 0$，满足 $\int_{-\infty}^{b} l(dz)g(z) = 0$

的所有有号测度 $l(dz)$ 有形式 $l(dx)=\rho(x)dN'(x)$，其中 $\rho(x)$ 满足方程

$$\lambda\left[\int_z^b x\rho(x)dN'(x)+z\int_{-\infty}^z \rho(x)dN'(x)\right]+\rho(z)=c, \tag{77}$$

c 是某一常数．由此方程得

$$\rho'(z)+\lambda\int_{-\infty}^z \rho(x)dN'(x)=0;$$

如果 $\rho(x)>0$，那末 $\rho'(z)$ 递增．顾及到已知 c 时(77)的解是唯一的，存在满足如下条件的 $\rho(z)$：$\rho(z)>0$，$\rho(z)$ 递增且下凸，不论(77)中的 b 和 c 是怎样的，对某个 γ，函数 $\gamma\rho(z)$ 是(77)的唯一解．于是，只要证明满足 $\int g(x)\rho(x)dN'(x)=0$ 的有限支集函数 $g(x)$ 在 $\hat{C}_{(-\infty,\infty)}$ 中稠密就够了，如果 $h(\varepsilon,x)$ 是使 $\|h(\varepsilon,\cdot)\|\leqslant 1$ 和 $\int h(\varepsilon,x)\rho(x)dN'(x)=\frac{1}{\varepsilon}$ 成立的有限支集函数 $\left(\text{由}\int_0^\infty \rho(x)dN'(x)=+\infty\text{ 得知该函数存在}\right)$，那末函数

$$g_\varepsilon(x)=g(x)-\varepsilon h(\varepsilon,x)\int g(z)\rho(z)dN'(z)$$

将满足条件 $\int g_\varepsilon(x)\rho(x)dN'(x)=0$ 和 $\|g_\varepsilon-g\|\to 0$ 当 $\varepsilon\to 0$.

3. 如果两个边界是流出的，那末 $\int |z|dN'(z)$ 是有限的，设 $\frac{df'}{dN'}=\varphi$．那末

$$f(x)=c+x\int_{-\infty}^x \varphi(z)dN'(z)+\int_x^\infty z\varphi(z)dN'(z),$$

$$\int \varphi(z)dN'(z)=0,$$

c 是某个常数，方程(69)重写为

$$\lambda\int \max[x,z]\varphi(z)dN'(z)+\lambda c+\varphi(x)=g(x).$$

应当由此方程确定 φ 和 c。这积分方程对所有 c 有解，而且解是线性依赖于 c。因此存在唯一的 c，使 $\int \varphi(x)dN'(x)=0$。定理 17 完全得证。

附　　注[1]

第　一　章

§1. 在卷 I 已指出，鞅论的很多重要结果、它的应用及这个理论本身成为随机过程理论的独立分支应归功于 Дж. Л. Дуб (J. L. Doob). 在他的书[1]中给出了鞅论的首次的系统的叙述. 他发现了在离散时间情形下鞅分解为增过程与鞅之和. 对连续时间情形分解的存在的证明看来是复杂的,这结果是由 П. Мейер (P. A. Meyer) 的[1]给出的, 在该书中可找到引用的原著. 我们采用由 M. Рао (K. M. Rao)[1] 提供的更简单的思想. 关于正则下鞅的定理也属于 П. Мейер[1]. 局部鞅是在 K. Ито (K. Ito, 伊藤·清)和 C. Ватанабе (S. Watanabe) 的论文[1]中引进的. 拟鞅是由 Д. Фиск (D. L. Fisk) 的[1]引进的. M. Рао[2] 找到了过程是拟鞅的充分必要条件. 在 П. Мейер 的 [1, 2], X. Кунита (H. Kunita) 和 C. Ватанабе[1] 等论文中发展了平方可积鞅理论.

§2. K. Ито[1,2,3]引进和研究了随机函数的积分. Дж. Л. Дуб [1] 研究了按有绝对连续特征的平方可积鞅的积分. П. Мейер 的[2],K. Долеанс-Даде (C. Doleans-Dade) 和 П. Мейер 的[1]等著作中进一步完善和发展了随机积分.

§3. 在按 Wiener 测度的随机积分情形,K. Ито 在论文[3]中建立了具有随机微分的过程的随机微分公式. 推扩到按任意连续鞅的积分情形是在 X. Кунита 和 C. Ватанабе [1] 及 A. B. Скороход[6] 等论文中给出的. 按间断鞅的积分情形的 Ito 公式

1) 译者注: 因参考文献均如原著按作者的俄文(或俄译)姓氏字母顺次排列, 故为读者方便查阅起见, 以不注释的译文对任何与参考文献有关的作者均采用俄文(或俄译)姓氏.

的推广在 И. И. Гихман 和 А. Я. Дороговцев 的论文[1]中给出.按 Wiener 过程及 Poisson 测度的积分情形是在 X. Кунита 和 С. Ватанабе[1], А. В. Скороход [7], П. Мейер[2] 等论文中给出的。在 X. Кунита 和 С. Ватанабе, А. В. Скороход的论文中考察了是一固定的 Марков 过程的泛函的过程.在 П. Мейер 的著作中没有此限制,但他只对随机微分的鞅部分给出。上鞅的乘法分解在 К. Ито 和 С. Ватанабе[1] 中引进。更为一般的结果由 P. A. Meyer 得到(也见 К. Долеан-Даде 的论文[1])。

第　二　章

§1. 随机线积分在 И. И. Гихман 和 А. В. Скороход 的书[1]中研究。

§2. "随机微分方程"的名称是由 С. Н. Бернштейн 为得到在极限情形转变为扩散型 Марков 过程的 Марков 链的序列对某些有限-差分图式引进的[1]。为确定随机过程的轨道由 И. И. Гихман[1,3]和 К. Ито[3,4]用别的方式引进了随机微分方程。Ito 随机微分方程的进一步发展在 И. В. Гирсанов[2], А. В. Скороход[3], И. И. Гихман 和 А. В. Скороход[1] 等著作中给出.有无穷滞后的随机方程由 К. Ито 和 М. Нисио (M. Nisio)[1]提出研究。根据随机微分方程的研究导出 А. Н. Колмогоров 方程,在扩散情形由 И.И. Гихман[1,3] 给出,对间断过程由 А.В. Скороход[3] 给出。本书不考虑 Hilbert 空间中随机微分方程。它的研究由 В. В. Баклан[1] 和 Ю. Л. Далецкий[1,2]开始。

§3. Марков 链序列收敛于连续时间 Марков 过程首先由 А. Я. Хинцин[1] 所研究。由独立随机变量和构造出的过程对应的测度的弱紧性定理是 Ю. В. Порохоров[1] 建立的。由独立随机变量和构造的过程的泛函的分布收敛的一般定理由 Ю.В. Прохоров[1] 和 А. В. Скороход[1] 进行了研究,而 Марков 链收敛于 Марков 过程的定理为 А. В. Скороход[2]所研究。关于有任意依赖于过去的随机变量组序列的泛函分布的收敛定理的结论根

据于 И. И. Гихман 的文章[6]. 随机微分方程的极限定理在 Н. М. Крылов 和 Н. И. Боголюбов 的论文[2, 6]中得到. 有小参数的随机微分方程的极限定理是进行了充分研究的对象，其中可举出 Р. Л. Стратонович [1], Р. З. Хасьминский [4] 和 И. И. Гихман [2] 等的工作.

第 三 章

§1. И. В. Гирсанов [1] 首先研究 Ito 过程. М. П. Ершов[1] 研究了一维 Ito 过程，他证明了过程的表示的唯一性定理(定理 2). 由 К. Ито[4] 的结果得出定理 9 及其推论. 广义扩散过程可能表示为随机微分方程的解的证明包含在 Дж. Л. Дуб 的书 [1] §3 第六章. А. А. Новиков[1] 证明了定理 12.

§2. 扩散型方程为先为 И. В. Гирсанов[1] 所研究. 定理 2 易由他的结果推出.定理 3 是 М. П. Ершов[2]及 Р. Ш. Липцер 和 А. Н. Ширяев[1] 的结果在多维情形的推广. К. Ито 和 М. Нисио[1] 证明了一维情形方程的解的存在. 引理 3 属于 И. В. Гирсанов[2]. А. Н. Ширяев[1]及 М. П. Ершов[1] 找到了 Ito 过程表示为扩散型过程.

§3. 对应于同样扩散的扩散过程的测度的绝对连续性由 Ю. В. Прохоров[1], И. В. Гирсанов[1] 和 А. В. Скороход[3] 所建立.引理 2 是 Д. Струк (D. W. Stroock) 和 С. Варадан (S. R. S. Varadhan)[1] 中的一个引理的变形. А. Д. Вентцель[1] 研究了一维连续 Марков 过程的转移概率的绝对连续性. 利用测度的弱紧性证明解的存在首先由 А. В. Скороход[5]对连续系数的方程提出. К. Ито 和 М. Нисио[1], Д. Струк 和 С. Варадан[1]利用类似的思想证明解的存在性. 对不满足 Lipschitz 条件的系数的方程解的唯一性为 А. В. Скороход[5], И. В. Гирсанов[2], С. Ватанабе 和 Ямада (T. Yamade)[1] 所研究. 在连续系数条件下, Танака (H. Tanaka) [1] 和 Н. В. Крылов [1,2] 对齐次情形证明了解的弱存在性和弱唯一性. 弱存在性和

弱唯一性的更一般条件(扩散算子是连续和非退化的)由 Д. Струка 和 С. Варадан[1] 找到. М. Кац (M. Kac) [1], Р. З. Хасьминский[1]研究了扩散过程和微分方程的各种问题之间的联系. 包含 Марков 过程的特征算子的一般方程在 Е. Б. Дынкин 的专著[1]第十三章中导出. 利用 Марков 过程解边界问题在 Р. З. Хасьминский[2,3], М. И. фрейдлин [1,2]等文章中已有. 利用随机积分表示可加泛函为 Е. Б. Дынкин[3], А. В. Скороход [4], А. Д. Венцель[2]所研究.

§4. 开首五段包含了 А. В. Скороход 的文章[6]的结果. 在 В. Феллер (W. Feller)[1—3], Е. Б. Дынкин[1,2] 的第十五章一第十七章叙述了一维连续 Марков 过程.

参考文献

Баклан В. В.

[1] Уравнения в вариационных производных и марковские процессы в гильбертовом просгранстве, ДАН СССР 159(1964), 707—710.

Бернштейн С. Н.

[1] Principes de la theorie des equations differentialles stochastiques, Труды Физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова 5(1934), 95—124.

Ватанабе (Watanabe S.)

[1] On stochastic differential equations for multidimensional diffusjon processes with boundary conditions, J. Math. Kyoto Uniw.11(1971), 169—180.

Ватанабе, Ямада (Watanabe S., Yamada T.)

[1] On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, J. Math. Kyoto Univ. 11(1971), 155—167, 553—562.

Вентцель А. Д.

[1] Об абсолютной непрерывности переходных вероятностей одномерного диффузионного процесса, Теория вероятностей и ее применения 6(1961), 439—446.

[2] О непрерывных аддитивных функционалах от многомерного винеровского процесса, ДАН СССР 142(1962), 1223—1226.

Гирсанов И. В.

[1] О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры, Теория вероятностей и ее применения 5(1960), 314—330.

[2] О стохастических интегральных уравнениях Ито, ДАН СССР 138 (1961), 18—21.

[3] Пример неединственности решения стохастического уравнения К. Ито, Теория вероятностей и ее применения 7(1962), 336—342.

Гихман И. И.

[1] Об одной схеме образования случайных процессов, ДАН СССР 58 (1947), 961—964.

[2] О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными процессами Укр матем ж. 2 (1950), 45—69

[3] К теории дифференциальных уравнений случайных процессов, Укр. матем ж. 2 (1950), 37—63; 3(1951), 317—339.

[4] Дифференциальные уравнения со случайными функциями, Зимняя школа по теории вероятностей, Ужгород, 1964; Киев (1964), 41—86.

[5] О слабой компактности множества мер, соответствующих решениям стохастических дифференциальных уравнений, Матем. физика, Межвед. сб., Киев 7(1970), 49—65.

[6] Предельные теоремы для последовательностей серий случайных величин, Теория случайных процессов, Межвед. сб., Киев 2(1973).

Гихман И. И., Дороговцев А. Я.

[1] Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений, Укр. матем. ж. 17 (1965), 3—21.

Гихман И. И., Скороход А. В.

[1] Стохастические дифференциальные уравнения, Киев, «Наукова думка», 1968.

Далецкий Ю. Л.

[1] Дифференциальные уравнения с функциональными производными и стохастические уравнения для обобщенных случайных процессов, ДАН СССР 166(1966), 1035—1038.

Долеанс-Даде (Doleans-Dade C.)

[1] Quelques application de la formula de changement de variables pour les semimartingales. Z. Wahrcheinlichkeitstheorie und verw. Geb. 16(1970), 181—194.

Долеанс-Даде, Мейер (Doleans-Dade C., Meyer P. A.)

[1] Integrales stochastiques par rapport aux martingales locales, Seminare de probabilites IV, Springer—Verlag (1970), 77—107.

Дуб (Doob J.L.)

[1] Вероятностные процессы, М. ИЛ, 1956.

Дынкин Е. Б.

[1] Марковские процессы, М., Физматгиз, 1963.

[2] Одномерные непрерывные строго марковские процессы, Теория вероятностей и ее применения 4(1959), 3—54.

[3] Аддитивные функционалы от винеровского процесса, определяемые стохастическими интегралами, Теория вероятностей и ее применения 5(1960), 441—452.

Ершов М. П.

[1] Опредставлениях процессов Ито, Теория вероятностей и ее применения 17(1972), 167—172.

[2] Об абсолютной непрерывности мер, отвечающих процессам диффузионного типа, Теория вероятностей и ее применения 17(1972), 173—178.

Ито (Ito K.)

[1] Stochastic integral, Proc. Japanese Acad. Tokyo 20(1944), 519—524.

[2] On a stochastic integral equation, Proc. Japanese Acad. Tokyo 22 (1946), 32—35.

[3] On a formula concerning stochastic differentials, Nagoya Math. J. 3 (1951), 55—65.

[4] On stochastic differential equations, Mem. Amer. Math. Soc. 4(1951),

1—51.
[5] Multiple Wiener integral, J. Math.Soc. Japan 3(1951), 157—169.
Ито, Ватанабе (Ito K., Watanabe S.)
[1] Transformation of Markov processes by additive functionals, Ann. Inst. Fourier 15(1965), 13—30.
Ито, Маккин (Ito K., Mckean H.P., Jr.)
[1] Диффузионные процессы и их траектории, М., «Мир», 1968.
Ито,Нисио (Ito K., Nisio M.)
[1] Stationary solutions of stochastic differential equations, J. Math. Kyoto Univ. 4(1964), 1—75.
Кац (Kac M.)
[1] On some connections between probability theory and differential and integral equations, Proc. 2nd Berkeley Sympos. on Math. Statist. and Probab., Berkeley, 1951, 189—215.
Крылов Н. В.
[1] О квазидиффузионных процессах, Теория вероятностей и ее применения 11(1966), 424—443.
[2] О стохастических интегральных уравнениях Ито, Теория вероятностей и ее применения 14(1969), 340—348.
[3] Об одной оценке из теории стохастических интегралов, Теория вероятностей и ее применения 16(1971), 446—457.
Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.
[1] Про рывняння Фоккера—Планка, що виводиться в теорй пертурбацый методом, зсснованим на спектральних властивостях пертурбацыйного гамыльтоныана, Зап. каф.мат.фыз. АН УРСР 4(1939), 5—158.
Кунита, Ватанабе (Kunita H., Watanabe S.)
[1] On square integrable martingales, Nagoya Math. J.30 (1967), 209—245.
Липцер Р.Ш., Ширяев А. Н.
[1] Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих процессам диффузионного типа, относительно винеровской, Изв. АН СССР, сер. математ. 36(1972), 847—889.
Маруяма (Maruyama G.)
[1] Continuous Markov processes and stochastic equations, Rend. Circ. Math. Palermo 4(1955), 1—43.
Маккин (Mckean H.P., Jr.)
[1] Стохастические интегралы, М., «Мир», 1972.
Мейер (Meyer P.A.)
[1] Probabilites et Potentiel, Hermann, 1966.
[2] Integrales stochastiques, Seminare de probabilites I, Springer—Verlag, 1967, 72—162.
Новиков А. А.
[1] Об одном тождестве для стохастических интегралов, Теория ве-

роятностей и ее применения 17(1972), 761—765.
Прохоров Ю. В.
[1] Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероятностей и ее применения 1(1956), 177—238.
Рао (Rao K. Muralli)
[1] On decomposition theorems of Meyer, Math. Scand. 24(1969), 66—78.
[2] Quasi-martingales, Math. Scand. 24(1969), 79—92.
Скороход А. В.
[1] Предельные теоремы для процессов с независимыми приращениями, Теория вероятностей и ее применения 2(1957), 145—177.
[2] Предельные теоремы для процессов Маркова, Теория вероятностей и ее применения 3(1958), 217—264.
[3] О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам, Теория вероятностей и ее применения 5(1960), 45—53.
[4] Аддитивные функционалы от процесса броуновского движения, Теория вероятностей и ее применения 6(1961), 430—439.
[5] Исследования по теории случайных процессов, Киев, Изд-во Киевск. ун-та, 1961.
[6] О локальном строении непрерывных марковских процессов, Теория вероятностей и ее применения 11(1966), 381—423.
[7] Однородные марковские процессы без разрывов второго рода, Теория вероятностей и ее применения 12(1967), 258—278.
Струк, Варадан (Stroock D. W., Varadhan S. R. S.)
[1] Diffusion processes with continuous coefficient, I,II, Comm. Pure Appl. Math. 12(1969), 345—400, 479—530.
Танака (Tanaka H.)
[1] Existence of diffusions with continuous coefficients, Memb. Fac. Sci. Kyushu Univ., ser. A18(1964), 89—103.
Феллер (Feller W.)
[1] Diffusion processes in one dimension, Trans. Amer. Math. Soc. 77 (1954), 1—31.
[2] The general diffusion operator and positivity preserving semigroups in one dimension, Ann. Math. 60(1954), 427—436.
[3] On second order differential operators, Ann. Math. 61(1955), 90—105.
Фиск (Fisk D. L.)
[1] Quasi-martingales, Trans. Amer. Math. Soc. 120(1965), 369—389.
Фрейдлин М. И.
[1] О стохастических уравнениях Ито и вырождающихся эллиптических уравнениях, Изв. АН СССР, сер. матем. 26(1962), 653—676.
[2] Замечание об обобщенном решении задачи Дирихле, Теория вероятностей и ее применения 12(1965), 175—178.

Фридман (Freedman A.)

[1] Уравнения с частными производными параболического типа. М. «Мир», 1968 (中译本: «抛物型偏微分方程»(夏宗伟译)).

Хасьминский Р. З.

[1] Распределение вероятностей для функционалов от траектории случайного процесса диффузионного типа, ДАН СССР **104**(1955), 22—25.

[2] Вероятностный подход к краевым задачам для эллиптических и параболических уравнений, Теория вероятностей и ее применения **2**(1957), 482—483.

[3] Диффузионные процессы и эллиптические дифференциальные операторы, вырождающиеся на границе области, Теория вероятностей и ее применения **3**(1958), 430—451.

[4] Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной и правой частью, Теория вероятностей и ее применения **11**(1966), 444—462.

Хинчин А. Я.

[1] Асимптотические законы теории вероятностей, М.—Л., ОНТИ, 1936.

Чантладзе Т. Л.

[1] О стохастическом дифференциальном уравнении в гильбертовом пространстве, Сообщ. АН Груз. ССР **33**(1964), 529—534.

索　　引

一画—五画

六　画

七画—十画

十一画以上

其 他